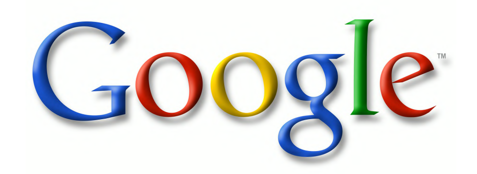



Stanford University Libraries
3 6105 000 721 915





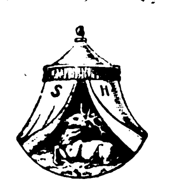
Physikalische Zeitschrift

Herausgegeben von

Professor Dr. P. DEBYE
in Zürich

EINUNDZWANZIGSTER JAHRGANG
1920

Mit fünf Tafeln



Verlag von S. Hirzel in Leipzig
1920

Autoren- und Sachregister.

Abkürzungen: (B.) = Besprechung, (R.) = Referat, (T.) = Tagesereignisse, (Z. B.) = Zusammenfassende Bearbeitung.

F.

G.

L.

M.

N.

O.

P.

Q.

R.

S.

T.

U.

Namensverzeichnis der „Personalien".

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 1. 1. Januar 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 3 am 31. Januar 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die kürzesten, mit Vakuumröhren herstellbaren Wellen.

Von H. Barkhausen und K. Kurz.

(Mitteilungen aus den Laboratorien der Torpedo-Inspektion.)

A. Physikalische Grundlagen.

1. Die Entdeckung der Wellen.

Legt man an das Gitter einer Sender- oder Verstärkerröhre (Fig. 1) eine hohe positive Spannung, an die Anode dagegen eine geringe negative Spannung, so fliegen alle aus der

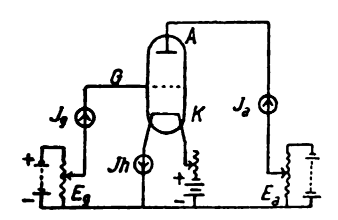


Fig. 1.

Glühkathode heraustretenden Elektronen zum Gitter, der Gitterstrom ist der Sättigungsstrom, dessen Stärke von der Heizung abhängt. Die Anode bleibt dagegen bei gutem Vakuum vollständig stromlos, da die Elektronen gegen eine negative Spannung nicht anlaufen können. Bei schlechtem Vakuum erzeugen die zum Gitter fliegenden Elektronen durch Ionenstoß positive Gasionen, die ihrerseits zu dem am stärksten negativen Pol, d. h. zur Anode fliegen. Dann entsteht im Anodenkreis ein schwacher negativer, d. h. dem normalen aus Elektronen bestehenden, entgegengesetzt gerichteter Strom. Die Größe dieses negativen Ionenstromes ist bekanntlich ein sehr genaues Maß für die in der Röhre noch vorhandenen Gasreste, für die Güte des Vakuums.

Gelegentlich einer solchen Vakuumprüfung ergab sich die eigentümliche Erscheinung, daß selbst bei großen negativen Spannungen, bis zu —100 Volt, ein positiver Anodenstrom eintrat, der also der Spannung E_a entgegen floß, die Batterie auflud. Diese Erscheinung ist zunächst ganz unerklärlich. Wer aber öfter mit Röhren gearbeitet hat, weiß, wie oft ganz unvermutet irgendwelche Eigenschwingungen von selbst entstehen und zu Störungen Anlaß geben[1]). Es lag daher nahe, auch hier als Ursache das Einsetzen solcher „wilden Schwingungen" anzunehmen. Ist dann die Amplitude der so entstehenden Wechselspannung an der Anode größer als die negative Gleichspannung, so ist die Anode zeitweise positiv, kann also auch einen positiven Elektronenstrom aufnehmen.

Die ersten Versuche, die Existenz von Schwingungen nachzuweisen, hatten freilich keinen Erfolg. Nähern der Hand, Berühren oder Bewegen der Zuleitungsdrähte hatte nicht wie sonst bei „wilden Schwingungen" eine Änderung im Ausschlag der Instrumente zur Folge. Auch durch Kopplung mit einem Wellenmesser ließ sich nichts nachweisen. Erst als ein Detektor mit Galvanometer unmittelbar an eine oder höchstens zwei eng um die Röhre gelegte kurze Windungen angeschlossen wurde, ergab sich ein Ausschlag.

2. Die Wellenlänge.

Es mußte sich hiernach um ganz außerordentlich schnelle Schwingungen handeln.

1) So zeigte bei Versuchen mit einer 200-Watt-Röhre in der normalen Senderschaltung ein unmittelbar hinter der Anode eingeschaltetes Hitzbandamperemeter bis 15 Amp. plötzlich 4 bis 7 Amp. an, und bei einer kleinen Verlegung eines Drahtes wuchs der Strom so stark an, daß das Instrument durchbrannte. Der normale Anodenstrom war unter 0,1 Amp. und selbst im Schwingungskreise herrschten normal nur etwa 2 Amp.

Dann mußte sich aber die Wellenlänge durch ein Lechersches Drahtsystem bestimmen lassen. Es wurde daher an der Anoden- und Gitterklemme je ein blanker Draht befestigt und beide parallel zueinander in etwa 10 cm Abstand durch das 6 m lange Zimmer ausgespannt. Wie erwartet, ergaben sich dann beim Entlanggleiten mit dem Detektor ganz ausgesprochene Maxima und Minima im Ausschlag, ein Zeichen, daß sich auf den Drähten stehende Wellen bildeten. Der Abstand zweier Minima betrug 50 cm; die Wellenlänge der entstehenden Schwingungen war also 1 m!

Diese Methode, die „Wellen auf Draht zu ziehen" — es genügte auch schon ein einzelner mit der Anode verbundener Draht —, erwies sich als äußerst bequem, um die Bedingungen für das Entstehen und die Wellenlänge der Schwingungen zu untersuchen. Es zeigte sich zunächst, daß entgegen allen sonstigen Erfahrungen mit Selbsterregung von Schwingungen die Abmessungen und Anordnungen der mit der Röhre verbundenen Leitungen und Apparate nur einen geringen Einfluß hatten, dagegen die Betriebsbedingungen, die Größe der angelegten Spannungen und die Heizstromstärke ausschlaggebend waren. So wurde die Wellenlänge durch äußere Kapazitäten und Induktivitäten kaum beeinflußt. Dagegen wurde sie in regelmäßiger Weise um so kürzer, je mehr die Heizstromstärke gesteigert oder je größer die positive Gitterspannung oder die negative Anodenspannung gewählt wurden. Tabelle I zeigt den ersteren, Tabelle II den Einfluß der Spannungen, aufgenommen mit einer Schott-M-Röhre Nr. 4213 von zylindrischer Anordnung (Durchmesser der Anode $d_a = 3{,}1$ cm, Durchmesser des Gitters $d_g = 0{,}7$ cm).

Tabelle I.

$E_g = +80$ Volt; $E = -32{,}5$ Volt.

I_h	λ
0,80 Amp.	214 cm
0,90 „	196 „
0,95 „	186 „
1,00 „	170 „
1,02 „	148 „
1,04 „	142 „
1,08 „	132 „
1,10 „	129 „
1,14 „	131 „
1,15 „	131 „

$\lambda_{ber.} = 270$ cm

Bei diesen Werten waren die Ströme und Spannungen so eingestellt, daß sich möglichst gleichmäßige Wellen von großer Intensität ausbildeten. Es zeigte sich nämlich, daß bei gleichmäßiger Änderung einer Betriebsgröße die Intensität in unregelmäßiger Weise bald größer, bald kleiner wurde und auch die Wellenlänge sich an manchen Stellen fast sprunghaft änderte. In Tabelle I ist z. B. ein solcher Sprung zwischen 1,00 und 1,02 Amp., in Tabelle II zwischen $E_a = -11$ und -14 Volt zu bemerken. Wollte man einen bestimmten günstigen Fall später wieder herstellen, mußte man oft außerordentlich genau alle Werte wieder einregulieren. Es dürfte sich hier um gewisse Resonanzvorgänge handeln, die die Intensität steigern und auch mitbestimmend auf die Wellenlänge einwirken.

Tabelle II.

$I_h = 1{,}02$ Amp.

E_g	E_a	λ	$\lambda_{ber.}$
150 V.	+ 4 V.	240 cm	260 cm
„ „	— 11 „	200 „	242 „
„ „	— 14 „	160 „	238 „
„ „	— 60 „	150 „	198 „
„ „	— 81 „	134 „	186 „
„ „	— 109 „	124 „	172 „
„ „	— 300 „	104 „	123 „
140 „	— 32,5 „	162 „	228 „
240 „	„ „	148 „	185 „
120 „	— 40 „	160 „	238 „
200 „	„ „	143 „	195 „

Wenn das mit dem Detektor verbundene Galvanometer eine Steigerung der Schwingungsintensität anzeigte, wurde im allgemeinen auch der negative Anodenstrom größer. Das Einsetzen der Schwingungen ist daher sicher als die Ursache für den sonst unerklärlichen negativen Anodenstrom zu betrachten. Da ein solcher sich mit empfindlichen Galvanometern bis zu — 100 Volt Anodenspannung verfolgen ließ, läßt sich schließen, daß auch die Amplitude der die Schwingungen bildenden Wechselspannung bis zu 100 Volt groß war.

3. Hypothese zur Erklärung der Vorgänge.

Aus diesen Beobachtungen ist zu schließen, daß die Vorgänge im Innern der Röhre, die Bewegungen der Elektronen, für das Entstehen der Schwingungen maßgebend sein müsssen, und es erscheint folgende Hypothese nicht unwahrscheinlich: Die aus der Glühkathode heraustretenden Elektronen fliegen mit zunehmender Geschwindigkeit auf das positive Gitter zu, treffen dann aber nur zum kleinen Teil die dünnen Gitterdrähte, fliegen vielmehr zum größten Teil durch das Gitter hindurch auf

die Anode zu. Daß dies tatsächlich der Fall ist erkennt man daran, daß bei schwach positiver Anode der Anodenstrom größer ist als der Gitterstrom, wenigstens bei feindrähtigen Gittern. Ist aber, wie in unserem Falle, die Anode negativ, so können die Elektronen sie nicht erreichen, sie werden abgebremst und wieder zum Gitter zurückgetrieben. Es wird dann wieder nur ein kleiner Teil das Gitter treffen, der größere Teil hindurchfliegen. So werden die Elektronen mehrmals um das Gitter hin und her pendeln, ehe sie es treffen. Diese rein mechanische Hin- und Herbewegung der Elektronen bildet die elektrische Eigenschwingung! Es ist dazu nur nötig, daß in die Bewegung eine gewisse Ordnung hineinkommt, daß eine Mehrzahl der Elektronen sich in der gleichen Phase der Bewegung befindet. Diese Ordnung muß durch die Bewegung der Elektronen selbst aufrecht erhalten werden. Das ist ja das Wesen der Selbsterregung von Schwingungen. Wie das im einzelnen vor sich geht, ist schwer zu übersehen.

4. Berechnung der Wellenlänge.

Es drängt sich zunächst die Frage auf: Stimmt die aus der mechanischen Bewegung zu berechnende Zeit mit der gemessenen Schwingungsdauer überein? Das ist nun in der Tat ausreichend der Fall. Man kann freilich den mechanischen Bewegungsvorgang in einfacher Weise nur unter Vernachlässigung der Raumladungswirkungen und unter Ersatz der wahren zylindrischen Anordnung (*a*) (Fig. 2)

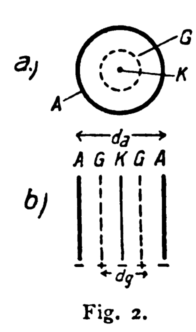


Fig. 2.

der Elektroden durch eine ebene Anordnung (*b*) berechnen.

Die Rechnung sei zunächst für den Fall durchgeführt, daß Anode und Kathode keine Spannungsdifferenz besitzen. Bezeichnet dann E_g die Spannung zwischen Gitter und Kathode oder Anode, so ist die Geschwindigkeit der Elektronen beim Passieren des Gitters

$$v = \sqrt{2\,e/m\,E_g} = 6{,}0 \cdot 10^7 \sqrt{E_g}\ \mathrm{cm/sec},$$

wenn E_g in Volt gemessen wird. Ihr Verhältnis zur Lichtgeschwindigkeit ist daher

$$\frac{v}{v_0} = \frac{6 \cdot 10^7 \sqrt{E_g}}{3 \cdot 10^{10}} = \frac{\sqrt{E_g}}{500}.$$

Bei voller Lichtgeschwindigkeit wäre die Wellenlänge einfach gleich dem gesamten, während einer vollen Schwingung zurückgelegten Wege, d. h. von A durch G nach K und wieder durch G nach A zurück, also einfach gleich dem Durchmesser d_a der Anode. Bei langsamerer Bewegung ist die Wellenlänge im Verhältnis v_0/v größer. Hierbei ist noch zu beachten, daß die mittlere Geschwindigkeit nur halb so groß ist wie die maximale am Gitter, da v ja an den Umkehrpunkten bei A und K null ist. Man erhält also schließlich die Formel

$$\lambda = 2\,d_a \frac{v_0}{v} = \frac{1000\,d_a}{\sqrt{E_g}}.$$

Bei negativer Anodenspannung E_a kehren die Elektronen schon um, ehe sie die Anode erreichen. Der Durchmesser dieser Umkehrpunkte berechnet sich leicht zu

$$d'_a = \frac{d_a E_g - d_g E_a}{E_g - E_a}.$$

Wenn E_a negativ ist, ist d'_a kleiner als d_a, weil der Gitterdurchmesser d_g kleiner als d_a ist. Die Wellenlänge wird dann also:

$$\lambda_{\text{ber.}} = \frac{1000}{\sqrt{E_g}} \cdot \frac{d_a E_g - d_g E_a}{E_g - E_a}.$$

Die nach dieser Formel berechneten Wellenlängen sind in der letzten Spalte der Tabelle II eingetragen. Man sieht, sie fallen alle nur wenig größer aus als die gemessenen Werte, auch wird der Gang mit E_g und E_a in der richtigen Weise wiedergegeben.

5. Einfluß der Raumladungen.

Die Abweichung zwischen den berechneten und den gemessenen Wellenlängen findet in dem Einfluß der Raumladungen, der bei der Rechnung vernachlässigt war, ihre volle Erklärung. Das folgt aus der Tabelle I, die nach der zugrunde gelegten Formel eine konstante Wellenlänge von 270 cm ergeben müßte, da die Spannungen nicht geändert wurden. Die größere Heizstromstärke bedingt aber einen größeren Elektronenaustritt, d. h. stärkere Raumladungen. Dadurch muß aber der Elektronentanz beschleunigt, die Wellenlänge verkürzt werden. Denn die besonders an der Anode und der Kathode angehäuften Elektronen stoßen ihrerseits die herumtanzenden Elektronen zurück, veranlassen sie zu beschleu-

nigter Umkehr. Nach dem Gang der Tabelle I ist mit verschwindender Raumladung, d. h. sehr kleiner Heizstromstärke, sehr wohl eine Wellenlänge von 270 cm verträglich.

Wenn die Elektronen mehrmals um das Gitter hin und her tanzen, so müssen auch um den Heizdraht stärkere Raumladungen entstehen als im schwingungslosen Falle, wo die Elektronen sogleich von der Anode verschluckt werden. Derartige Raumladungen bewirken aber bekanntlich, daß bei schwachem äußeren Felde ein Teil der aus dem Heizdraht ausgetretenen Elektronen wieder in den Heizdraht zurückgetrieben wird, der gesamte Emissionsstrom also vermindert wird. Auch diese Folgerung fand sich experimentell bestätigt. In Fig. 3 gibt Kurve 1 die Abhängigkeit des Emissionsstroms von der Gitterspannung wieder, wenn keine Schwingungen vorhanden waren. Dazu war erforderlich, die Anodenspannung auf + 25 Volt zu steigern. Es ist die normale, durch die Raumladungen bedingte Charakteristik. Bei etwa 60 Volt am Gitter tritt Sättigung ein. Verminderte man dagegen die Anodenspannung auf — 14 Volt, so setzten die Schwingungen ein, und der Strom fiel auf fast den halben Wert. Sättigung trat jetzt erst bei etwa 90 Volt am Gitter ein. Das ist nur durch eine erhöhte Raumladungswirkung erklärlich. Die Änderung der Anodenspannung um $25 + 14 = 39$ Volt hätte an sich nur eine Verschiebung der Charakteristik um 2 Volt bewirken dürfen, da der Durchgriff der Röhre nur 5 Proz. war.

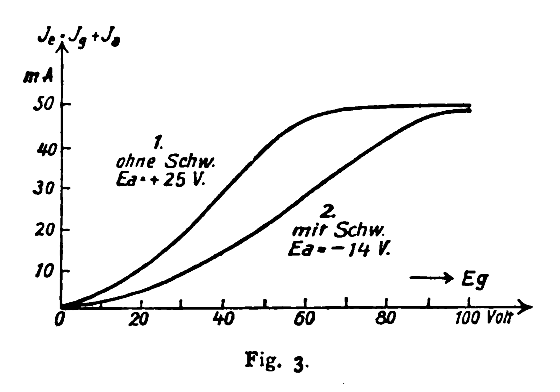


Fig. 3.

6. Einfluß der Röhrenform.

Schließlich wurde auch noch der Einfluß der Röhrengröße untersucht. Es standen nur drei zylindrische Röhren mit einem Anodendurchmesser von 2,1, 3,1 und 3,5 cm Durchmesser zur Verfügung. Die Versuche bestätigten gut das Gesetz, daß die Wellenlänge unter gleichen Betriebsverhältnissen im wesentlichen proportional dem Anodendurchmesser ist. Alle 3 Röhren besaßen einen einzigen geraden Heizdraht, der zylindrisch von dem engen, feindrähtigen Gitter und weiter außen von dem Anodenzylinder umgeben war. Nur bei diesen zylindrisch-symmetrischen Röhren konnten die hier beschriebenen Schwingungen beobachtet werden! Alle anderen Formen mit plattenförmigen Anoden oder hin und her gehendem Heizdraht ergaben keinerlei Schwingungserscheinungen, und bei negativer Anode auch niemals einen positiven Anodenstrom. Das ist eine wesentliche Stütze für unsere Theorie. Denn nur bei regelmäßiger Anordnung des elektrischen Feldes ist ein regelmäßiger Elektronentanz zu erwarten.

Verstärkerröhren der verschiedensten Form, auch solche mit zylindrischer Anordnung, ergaben alle keine Schwingungen. Bei den Zylinderröhren bestand nämlich das Gitter aus einem 0,2 mm dicken Draht, der den Heizfaden in wenigen weiten Windungen umschlang. Der dicke Draht verschluckt einerseits zu viel von den herumtanzenden Elektronen, was sich auch durch Aufnahme des Gitterstromes bei schwach positiver Anode beweisen läßt (vgl. oben unter 3), andererseits wird die zylindrische Symmetrie durch den Einfluß der einzelnen Gitterdrähte bis an die Kathode und Anode heran stark verzerrt. Würde man zylindrische Verstärkerröhren mit einem feindrähtigen engen Gitter herstellen, erhielte man sicher auch die hier beschriebenen Schwingungen.

7. Die kürzesten möglichen Wellen.

Die kürzesten, mit einer Schott-*K*-Röhre von 2,1 cm Anodendurchmesser bei 500 Volt am Gitter und möglichst starker Heizung hergestellten Wellen hatten eine Länge von 43 cm. Verstärkerröhren haben einen Anodendurchmesser von 0,8 cm, der sich ohne Schwierigkeiten auf 0,5 cm verringern lassen dürfte. Damit würde man Wellenlängen von etwa 10 cm erhalten, die sich durch Anwendung höherer Spannungen wohl noch weiter herabsetzen lassen.

Diese Überlegungen beruhen zunächst auf der Hypothese, daß die Schwingungen in dem Tanze der Elektronen um das Gitter bestehen, was freilich durch die zahlreichen, guten Bestätigungen wohl als sicher angenommen werden kann. Aber selbst wenn noch andere Umstände mitspielen sollten, würden diese von uns beschriebenen Schwingungen doch die kürzesten sein, die man mit Vakuumröhren herstellen kann. Denn die berechnete Geschwindigkeit der Elektronen ist sicher richtig; eine

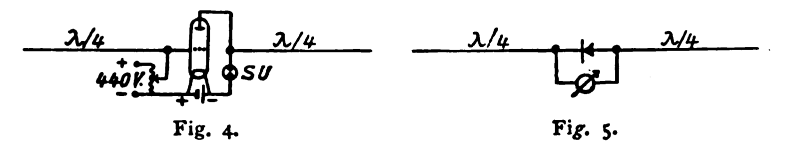


Fig. 4. Fig. 5.

gegen die Dimensionen der Röhre merkliche Ortsveränderung müssen die Elektronen aber innerhalb einer viertel Periode ausführen, wenn die Feldwirkung der sich bewegenden Elektronen die Schwingungen aufrecht erhalten soll.

B. Praktische Versuche.

1. Hertzsche Versuche.

Neben den oben erwähnten Wellen längs eines oder zweier Drähte ließen sich auch die Hertzschen Versuche der Wellenausbreitung ohne Draht ohne weiteres anstellen. Zu diesem Zwecke wurden Sender und Empfänger zur Verstärkung der Strahlung mit einer „Antenne" versehen, d. h. an ihnen zwei kurze gerade Drahtstücke von $^1/_4$ λ, d. h. 25—50 cm Länge angebracht. $^3/_4$ λ lange Drahtstücke wirkten wesentlich schwächer. Am Sender wurden sie direkt unter die Anoden- und die Gitter-Klemme der Röhre geklemmt. Die Anode war der Einfachheit halber meist ohne Spannung mit dem negativen Pole der Kathode verbunden, während das Gitter seine positive Spannung aus dem Lichtnetz von 440 Volt über einen Spannungsteiler erhielt (Fig. 4). Um beim Empfang mit Telephon einen Ton zu erhalten, konnte in die Anodenleitung ein Summerunterbrecher eingeschaltet werden (*SU*, Fig. 4). Der Empfänger bestand lediglich aus einem normalen Pyritdetektor, an dessen Klemmen einerseits die „Antennen"-Drähte, anderseits ein Telephon oder für genauere Messungen ein Zeigergalvanometer (10^{-6} A) befestigt war (Fig. 5). Die ganze Empfangsapparatur konnte in einer Hand gehalten und leicht hin und her bewegt werden. So ließen sich stehende Wellen durch Reflexion an einem 2 × 1,25 m großen Blech, die verstärkende Wirkung eines Bleches oder Drahtnetzes oder abgestimmten Einzeldrahtes im Abstande $^1/_4$ λ hinter dem Sender oder Empfänger, die Schirmwirkung von zwischen Sender und Empfänger befindlichen Gegenständen, schräge Reflexion von einem Blech usw. gut verfolgen.

2. Gerichtete Telegraphie.

Besonders schön war die Richtwirkung der Antennen zu sehen, und zwar sowohl gerichtetes Senden wie gerichteter Empfang. Den größten Galvanometerausschlag am Empfänger erhielt man nur, wenn Sende- und Empfangsantenne zueinander parallel, und zwar senkrecht zur Verbindungslinie lagen. Drehte man die Empfangs- oder auch die Sende-Apparatur mit der Hand herum, so verschwand der Empfang völlig, sobald die eine der Antennen genau auf die Gegenantenne hinwies. Man konnte so durch Drehen des Empfängers bis zu dem scharf ausgeprägten Minimum die Richtung nach einem nicht sichtbaren, in einem ganz anderen Raume des Hauses befindlichen Sender genau feststellen.

Wenn beide Antennen aufeinander hinwiesen, d. h. beide in der Verbindungslinie lagen, so war der Empfang erst recht null. Das ist aber gerade die Lage, in der die normalen gerichteten Horizontalantennen den stärksten Empfang ergeben. Das steht in guter Übereinstimmung mit der Theorie, nach der die Richtwirkung dieser Antennen nur durch den Einfluß der Erde zustande kommt, deren Abstand von der Antenne klein gegen die Wellenlänge ist.

Ein Einfluß der Erde machte sich auch bei den kurzen Wellen deutlich bemerkbar. Sobald der Abstand der Antennen vom Erdboden weniger als $^3/_4$ λ betrug, trat bei weiterem Heruntergehen eine wesentliche Schwächung in der Übertragung ein. Senkrecht gestellte Antennen, also die normale Lage bei ungerichteter Telegraphie, ergaben größere Reichweiten als horizontal gestellte.

3. Weitere Versuche.

Ein wesentlich stärkerer Empfang als mit dem Detektor ließ sich mit einer Verstärker- oder noch besser einer Sender-Röhre erzielen. Die Schaltung war dieselbe wie beim Sender (Fig. 4), das Telephon lag im Anodenkreis an Stelle des Unterbrechers *SU*. Die günstigste Heizstromstärke und Gitterspannung mußte ausprobiert werden. Letztere betrug meist nur 20 bis 100 Volt. Es handelt sich hier wohl nur um eine normale Gleichrichterwirkung. Ein Ton wie beim Schwebungsempfang trat nicht ein. Die Verstärkerröhren erzeugten ja auch gar nicht diese kurzen Wellen. Der sonst so empfindliche Schwebungsempfang dürfte sich bei diesen außerordentlich kurzen Wellen auch wohl kaum herstellen lassen, da schon eine Verstimmung um $^1/_{10000}$ den Ton aus dem Hörbereich herausbringen würde.

Schaltet man in den Anodenkreis der Senderröhre an Stelle des Summerunterbrechers ein Mikrophon oder besser die Sekundärspule (2500 Wdg.) eines Transformators, dessen Primärspule (400 Wdg.) durch ein Mikrophon und 4 Volt gespeist wird, so hört man im Empfangstelephon statt des Summertones die ins Mikrophon gesprochenen Worte. Da die zum Senden und Empfang benutzten Schaltungen ganz gleich gemacht werden können, ist auch ein Gegensprechen möglich.

Die mit je einer der oben genannten Schott-Röhren als Sender und Empfänger erzielten Reichweiten waren für Telegraphie 600 m, für Telephonie 300 m ohne Anwendung von Verstärkern. Mit solchen war die Reichweite natürlich größer, freilich nicht so viel, wie man bei quadratischer Abnahme der Intensität mit der Entfernung erwarten sollte. Bäume und Sträucher zwischen der geradlinigen Verbindung von Sender und Empfänger schienen den Empfang zu schwächen.

(Eingegangen 4. August 1919.)

Die Verbreiterung von Spektrallinien im Röntgengebiet[1]).

Von L. Vegard.

Die Verbreiterung der Spektrallinien im gewöhnlichen Spektrum wird gewöhnlich entweder als eine Wirkung des Doppler-Effekts oder eine Wirkung des Stark-Effekts gedeutet. Es ist meine Absicht, kurz auf eine andere Möglichkeit für Linienverbreiterung hinzuweisen, welche besonders für die Röntgenspektren von Bedeutung sein mag.

Diese theoretische Möglichkeit ist eine Folge derjenigen Atomauffassung, welcher die früher von mir entwickelte Theorie der Röntgenspektren zugrunde liegt. Betreffs Einzelheiten dieser Theorie kann ich auf die früher in dieser Zeitschrift[2]) veröffentlichte kurze zusammenfassende Darstellung hinweisen. Hier sollen nur einige für die jetzige Frage wichtige Punkte wiederholt werden.

Wir betrachten ein Elektronensystem i, das aus q_i Elektronen besteht, und welches die Quantenzahlen $n_i n_i' \ldots$ besitzt. Zwischen dem betrachteten System und dem Kern seien

$$p_i = \sum_{1}^{i-1}$$

Elektronen vorhanden. Außerhalb des Systems mögen r_i Elektronen sich befinden.

Die Energie E_i des Systems läßt sich dann folgendermaßen ausdrücken:

$$E_i = C - Rh\,V\,(n_i, n_i' \ldots p_i, q_i, r_i).$$

Die totale Energie E_T sämtlicher in dem gegebenen Augenblick vorhandenen Systeme wird dann:

$$E_T = \sum_{l=1}^{l=m} E_l,$$

m ist die Anzahl von vorhandenen Systemen im Atom.

Es tritt jetzt ein Wiedervereinigungsprozeß nach dem $i$ten Kreis ein. Dadurch ändert sich die totale Energie von E_T zu E_T'.

Findet die Wiedervereinigung in einem Schritte statt, so wird die Energiedifferenz $E_T - E_T'$ in einem Quantum $h\nu$ ausgestrahlt oder:

$$\frac{\nu}{R} = V_T' - V_T.$$

Wenn V_T und V_T' die Summe der V-Funktionen vor und nach der Wiedervereinigung (Emissionsprozeß) bezeichnen.

Eine exakte Berechnung der V_T-Werte ist im allgemeinen sehr schwer. Jedoch können wir sagen, daß in jedem betrachteten Falle die Energiedifferenz eine ganz bestimmte sein muß, und man sollte genau homogene Strahlung bekommen, insofern als wir das Bohrsche Strahlungsgesetz als richtig ansehen.

Die Strahlung aber, welche eine Spektrallinie bildet, stammt von einer ungeheuren Anzahl verschiedener Atome.

Wie ich früher gezeigt habe, führt meine Theorie der Röntgenspektren — wenn wir gleichzeitig die von Sommerfeld vorgeschlagene Deutung der Dublette aufrecht halten wollen — zu der Annahme, daß ein gewisses Elektronensystem im normalen Atom mehrere Bewegungszustände aufnehmen kann. So wurde z. B. geschlossen, daß das L-System sowohl einen elliptischen als einen kreisförmigen Zustand besitzt. Es ist aber anzunehmen, daß auch die Systeme außerhalb des L-Systems mehrere Zustände besitzen.

Wir werden demnach zu der Ansicht geführt, daß Atome mit gleicher Kernladung im normalen Zustande nicht identische Elektronensysteme besitzen; sondern man hat mit einer großen Zahl von Zuständen zu rechnen, welche den verschiedenen möglichen Kombinationen von den Zuständen der Einzelsysteme entsprechen.

Welche Kombinationen möglich sind und unter welchen Bedingungen ein System von einem Zustand zu einem anderen übergeht,

1) Diese Abhandlung ist eine ausführlichere Behandlung von Gedanken, die ich in einem Vortrag in Lund am 10. September 1919 geäußert habe.

2) L. Vegard, diese Zeitschr. 20, 97 u. 121, 1919.

darüber wissen wir bis jetzt sehr wenig. Wir können aber hoffen, daß das Studium der Röntgenspektren einen Einblick in diese Verhältnisse geben kann.

Diese Auffassung des Atombaues führt mit sich, daß die Energie eines und desselben Systems in den verschiedenen Atomen eines Elements mehrere Werte annehmen kann.

Betreffs der Änderungen, welche die Energie E_i eines Systems aufweisen kann, können wir im allgemeinen folgendes sagen:

Die Energieunterschiede eines Systems, welche durch Änderung des Zustands von dem betrachteten System selbst entstehen, müssen verhältnismäßig groß sein. So ist wohl der Unterschied zwischen den Energien des elliptischen und dem kreisförmigen Zustand eines Elektronensystems von der Größenordnung, welche die Dublettentheorie von Sommerfeld verlangt. Diese Energieunterschiede werden wir solche erster Art nennen.

Wegen der wohl sicher vorhandenen gegenseitigen Beeinflussung der verschiedenen Systeme wird auch die Energie eines Systems sich dadurch ändern, daß die anderen Systeme im Atom verschiedene Zustände besitzen. Diese verhältnismäßig sehr viel kleineren Änderungen werden wir als Energieunterschiede zweiter Art bezeichnen.

Unter dem „Rekombinationsbereich" verstehen wir das Anfangs- und Endsystem und diejenigen Systeme, welche das rekombinierende Elektron im Falle kreisförmiger Bahnen auf dem Rekombinationsweg passiert.

Wie aus der früher entwickelten Theorie der Röntgenspektren hervorgeht, ist die totale Energieänderung $E_T - E_T'$ größtenteils durch die Energieänderungen der Systeme des Rekombinationsbereichs hervorgebracht.

Betrachten wir die Emissionsvorgänge, welche demselben Rekombinationsbereich entsprechen, so werden wir die verhältnismäßig größten Frequenzunterschiede bekommen, wenn die Systeme im Rekombinationsbereich Energieunterschiede erster Art aufweisen. In diesem Falle können die Unterschiede so groß sein, daß wir für denselben Rekombinationsbereich mehrere getrennte Linien bekommen. Wir bekommen multiple Linien.

Halten wir aber jetzt im Rekombinationsbereich eine gewisse Zustandskombination fest, so wird die entsprechende Linie nicht homogen, und zwar wird die Homogenität aus den beiden folgenden Gründen zerstört werden:

1. Die totale Energieänderung $E_T - E_T'$ hängt nicht nur von den Systemen des Rekombinationsbereichs, sondern auch von der Energie der außerhalb des Bereiches liegenden Systeme ab, und je nach den verschiedenen Zuständen dieser Systeme können geringe Unterschiede in der Frequenz zustande kommen.

2. Die Energieunterschiede zweiter Art, welche die Systeme im Rekombinationsbereich aufweisen können, werden auch gewisse geringe Änderungen der emittierten Frequenzen geben müssen.

Durch diese beiden Ursachen werden die Röntgenstrahlen, welche eine gewisse Spektrallinie bilden, nicht mehr homogen sein. Die Linie ist nicht scharf, sondern verbreitert.

Es wird doch ein Unterschied zwischen dieser und derjenige durch Doppler- und Stark-Effekt hervorgebrachten Verbreiterung bestehen. Denn in den letzten Fällen haben wir innerhalb gewisser Grenzen beinahe eine kontinuierliche Verteilung der Frequenzen nach bestimmtem Gesetze. In dem hier betrachteten Falle ist die Linie als die Überlagerung von einer endlichen bestimmten Anzahl von nahe aneinander liegenden Linien zu betrachten.

Wie Siegbahn und seine Schüler nachgewiesen haben, ist in der Tat eine Verbreiterung der Röntgenlinien zu beobachten.

(Eingegangen 22. September 1919.)

Über Weltbeben und lange Wellen.

Von K. Mack.

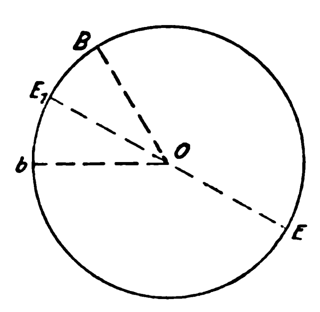
§ 1. Ein Erdbeben von solcher Stärke, daß es die ganze Erdoberfläche zu erschüttern vermag, ist als Weltbeben zu bezeichnen. Ein solches wird von sämtlichen mit geeigneten Registrierapparaten versehenen Beobachtungsstationen der ganzen Erde aufgezeichnet werden. Es ist jedoch in zahlreichen Fällen möglich, ein Weltbeben als solches zu erkennen schon auf Grund der Aufzeichnungen einer einzelnen Beobachtungsstation, und zwar immer dann, wenn die sogenannten W_2-Wellen oder die W_3-Wellen im Seismogramm der betreffenden Station nachgewiesen werden können.

Die genannten Wellenarten gehören bekanntlich zu den langen Wellen, die vom Epizentrum eines Erdbebens an der Erdoberfläche nach allen Richtungen radial mit angenähert konstanter Fortpflanzungsgeschwindigkeit sich ausbreiten. In Fig. 1 sei E das Epizentrum eines Weltbebens, O der Erdmittelpunkt, E_1 der Gegenpunkt von E, B eine ferne Beobachtungsstation; der Punkt b sei so bestimmt, daß

$$\angle bOE = \angle BOE.$$

Diejenigen langen Wellen, die von E aus





auf dem kürzesten Weg EB nach B gelangen, werden als W_1-Wellen bezeichnet, während die W_2-Wellen diejenigen sind, die gegebenenfalls auf dem längeren Weg EbE_1B in B eintreffen; falls, was ziemlich häufig zutrifft, die W_1-Wellen ihren Weg über E_1 und E fortsetzend, abermals — natürlich entsprechend geschwächt — nach B gelangen, so werden sie jetzt als W_3-Wellen bezeichnet.

Es ist klar, daß sowohl das Eintreffen der W_2-Wellen als dasjenige der W_3-Wellen für die Station B ein Beweis ist, daß die ganze Erdoberfläche erschüttert worden ist, daß man es also mit einem Weltbeben zu tun hat.

Man kann somit den Satz aussprechen:

Ein Erdbeben, das im Seismogramm irgendeiner Beobachtungsstation das Auftreten von W_2-Wellen oder von W_3-Wellen festzustellen gestattet, ist als Weltbeben zu bezeichnen.

Es wird in den folgenden Paragraphen gezeigt werden, daß die Feststellung eines Bebens als Weltbeben am einfachsten und raschesten durch Nachweisung der W_3-Wellen erfolgt; sind diese im Seismogramm nicht vorhanden, so ist nach dem Auftreten der W_2-Wellen zu suchen. Bei bekannter Herdentfernung kann durch leichte Rechnung die Stelle im Seismogramm angenähert gefunden werden, wo die W_2-Wellen, falls vorhanden, sich befinden müssen. Ist die Herdentfernung nicht bekannt, so ist es bei genauerem Studium der Aufzeichnung im allgemeinen doch möglich, die W_2-Wellen direkt aufzufinden und zugleich einen angenäherten Wert für die Herdentfernung zu erhalten. Das Auftreten von W_4-Wellen, die dadurch zustande kommen können, daß die W_2-Wellen ihren Weg von B über E und E_1 fortsetzend abermals in B eintreffen, scheint nur in sehr seltenen Fällen nachweisbar zu sein; W-Wellen höherer Ordnung sind bis jetzt nicht beobachtet worden.

§ 2. Wir gehen nun dazu über, eine Reihe von Beziehungen aufzustellen, welche gestatten, aus den beobachteten Zeitpunkten des Eintreffens der W_1-, W_2-, W_3- usw. Wellen an der Beobachtungsstation B sowohl die Herddistanz Δ_1 als auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V der Oberflächenwellen abzuleiten.

Wenn eine bestimmte Phase der Oberflächenwellen, etwa das Hauptmaximum, von E ausgeht, so wird sie nach Zurücklegung des Wegs $\Delta_1 = EB$ als W_1-Welle an der Beobachtungsstation ankommen. Als W_2-Welle wird sie in B ankommen nach Zurücklegung des Wegs $\Delta_2 = EbE_1B$, als W_3-Welle nach Zurücklegung des Wegs $\Delta_3 = EBE_1bEB$, als W_4-Welle nach Zurücklegung von $\Delta_4 = EbE_1BEbE_1B$ usw.

Würden die beiden einander entgegenlaufenden Wellenzüge dauernd die Erde umkreisen, so hätte man folgende Reihe von Angaben:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \Delta_2 \doteq U - \Delta_1 & \Delta_3 = U + \Delta_1 \\ \Delta_4 = 2U - \Delta_1 & \Delta_5 = 2U + \Delta_1 \\ \Delta_6 = 3U - \Delta_1 & \Delta_7 = 3U + \Delta_1 \\ \text{— — — — —} & \text{— — — — — —} \\ \Delta_{2n} = nU - \Delta_1 & \Delta_{2n+1} = nU + \Delta_1 \end{cases}$$

wo U den Erdumfang bedeutet $= 40000$ km und $U = \Delta_1 + \Delta_2$.

Wir bezeichnen nun mit t_0 den Zeitpunkt, zu welchem die ins Auge gefaßte Phase der Oberflächenwellen vom Epizentrum E ausgeht, mit t_1 den Zeitpunkt, zu welchem sie als W_1-Welle in B eintrifft, mit t_2 denjenigen, zu welchem sie als W_2-Welle daselbst anlangt usw.

Dann gelten die Angaben:

$$\text{II.}\quad t_1 - t_0 = \frac{\Delta_1}{V},\; t_2 - t_0 = \frac{\Delta_2}{V},\; t_3 - t_0 = \\ = \frac{\Delta_3}{V},\; t_4 - t_0 = \frac{\Delta_4}{V} \text{ usw.}$$

wobei wir die Fortpflanzungsgeschwindigkeit V zunächst als Konstante betrachten.

Während der Zeitpunkt t_0 für die Beobachtungsstation B nicht direkt festzustellen ist, können die Zeitpunkte t_1, t_2, t_3 usw. unter günstigen Umständen dem Seismogramm entnommen werden.

Wir erhalten nun aus I und II das folgende System von Gleichungen:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} \text{(a)}\quad V(t_2 - t_1) = U - 2\Delta_1 & V(t_3 - t_1) = U \quad \text{(b)} \\ \text{(c)}\quad V(t_4 - t_1) = 2U - 2\Delta_1 & V(t_5 - t_1) - 2U \quad \text{(d)} \\ \text{— — — — — — — — — — —} & \text{— — — — — — — — —} \\ V(t_{2n} - t_1) = nU - 2\Delta_1 & V(t_{2n+1} - t_1) = nU \end{cases}$$

Man erkennt, daß die Gleichungen der linksstehenden Reihe zur Ermittelung von Δ_1, die der rechtsstehenden zur Ermittelung von V verwendet werden können.

Durch naheliegende Kombinationen von Gleichungen der beiden Reihen lassen sich leicht noch weitere Beziehungen zur Ermittelung beider Größen ableiten. Falls t_1, t_2, t_3 und t_4 gegeben sind, hat man insbesondere zur Bestimmung von Δ_1, das von jetzt ab kurz als Δ bezeichnet werden möge, die folgenden Angaben zur Verfügung:

$$\text{IV.} \left\{ \begin{array}{ll} \text{a)} & \Delta = \dfrac{U - V(t_2 - t_1)}{2} \\ \text{b)} & \Delta = \dfrac{V}{2}(t_3 - t_2) \\ \text{c)} & \Delta = U - \dfrac{V}{2}(t_4 - t_1) \\ \text{d)} & \Delta = \dfrac{U - V(t_4 - t_3)}{2} \end{array} \right.$$

Es ist noch darauf hinzuweisen, daß die Formeln III und IV auch auf einfachere Weise direkt aus Fig. 1 abgelesen werden können, wenn man berücksichtigt, daß die Ausdrücke $V(t_2 - t_1)$, $V(t_3 - t_2)$, $V(t_4 - t_1)$ usw. die Wege vorstellen, die von den sich ausbreitenden langen Wellen in den betreffenden Zeitintervallen zurückgelegt werden. $V(t_2 - t_1)$ ist der Weg bE_1B, da die in B zurzeit t_2 eintreffende W_2-Welle vorher zur Zeit t_1 durch den Punkt b hindurchgegangen war. Entsprechend ist $V(t_3 - t_2)$ der Weg bEB, $V(t_4 - t_1)$ der Weg bE_1BEbE_1B, $V(t_4 - t_3)$ wiederum gleich dem Weg bE_1B usw. Man erkennt bei dieser Betrachtungsweise, daß V in diesen Formeln nicht als Konstante aufgefaßt zu werden braucht, sondern daß es jeweils die durchschnittliche Geschwindigkeit der Bewegung während des in der betreffenden Formel enthaltenen Zeitintervalls bedeutet.

§ 3. Die aufgestellten allgemeinen Formeln mögen nun zur näheren Untersuchung eines Weltbebens von ungewöhnlicher Stärke, das am 26. Juni 1917 sich ereignete, Anwendung finden. Von diesem Beben hat die Hohenheimer Erdbebenwarte eine sehr schöne Aufzeichnung erhalten, herrührend von dem in ihr aufgestellten bifilaren Kegelpendel nach Mainka[1]). Da das Seismogramm über eine Dauer von mehr als 5 Stunden sich erstreckte und da gegen das Ende der Aufzeichnung wiederholt gleichartige Wellenzüge auftraten, war an die Möglichkeit zu denken, daß die W_3- und vielleicht auch noch die W_4-Wellen sich nachweisen ließen. Dieser Nachweis war bezüglich der W_3-Wellen in angenäherter Weise leicht zu führen, unter Benutzung der Gleichung IIIb

$$V(t_3 - t_1) = U.$$

Setzt man hier für V den Wert 3,5 km ein, der aus den bisherigen Beobachtungen als Durchschnittswert sich ergibt, so kommt

$$t_3 - t_1 = \frac{U}{V} = 3^{\text{h}}\ 10^{\text{m}}\ 29^{\text{s}}.$$

Dies ist ein angenäherter Wert für die Zeit, in der die Oberflächenwellen den Erdumfang zurücklegen. Wurde nun im Seismogramm vom Hauptmaximum der W_1-Wellen vorangeschritten um rund $3^{\text{h}}\ 10^{\text{m}}$, so war in der Tat einer der erwähnten Wellenzüge erreicht.

An ihn anschließend war nun noch ein weiterer Wellenzug mit erheblich kleineren, aber noch deutlich meßbaren Amplituden zu erkennen, der mit großer Wahrscheinlichkeit als der Wellenzug der W_4-Wellen zu deuten war. Er hätte mit Sicherheit als solcher sich erkennen lassen, wenn die Herdentfernung Δ bekannt gewesen wäre; denn dann hätte nach Gleichung IIIc der Zeitabstand $t_4 - t_1$ sich berechnen lassen, d. h. die Verspätung der W_4- gegen die W_1-Wellen.

Da in unserem Seismogramm die beiden Vorläufer deutlich erkennbar sind, hätte bei einer Herddistanz unterhalb 13000 km der Wert von Δ aus der Laufzeitkurve mit genügender Genauigkeit abgeleitet werden können. Das Zeitintervall zwischen P und S ist jedoch so groß, daß eine genaue Bestimmung auf diesem Wege nicht möglich war. Es konnte nur geschlossen werden, daß Δ einen erheblich größeren Wert als 13000 km, jedoch kleiner als 20000 km besitzen müsse.

Unter diesen Umständen stellte ich mir die Aufgabe, wenn möglich durch näheres Studium der in dem Seismogramm enthaltenen Oberflächenwellen verschiedener Ordnung zu einem brauchbaren Wert für die Herdentfernung zu gelangen.

Diese Aufgabe, wie gleich bemerkt werden mag, erwies sich als lösbar dank der ungewöhnlich guten und deutlichen Ausprägung sämtlicher Phasen des Seismogramms; es gelang unter Benutzung von W-Wellen verschiedener Ordnung gut übereinstimmende Werte von Δ zu erhalten und außerdem das Auftreten der W_4-Wellen mit Sicherheit zu konstatieren.

§ 4. Das Ergebnis dieser Untersuchung möge im folgenden in Kürze mitgeteilt werden; eine genauere Darstellung unter Wiedergabe des Seismogramms wird in den „Nachrichten von der Hohenheimer Erdbebenwarte aus dem Jahr 1917" gegeben werden.

Die W_1-Wellen treten in dem Seismogramm in sehr ausgeprägter Weise auf; es können in ihrem Verlauf 8 Maxima unterschieden werden,

1) Die Konstanten dieses Instruments: sind $M = 450$ kg, $T_0 = 9{,}5$ Sek., V (Vergrößerung) $= 150$, $\varepsilon = 5:1$, $\dfrac{r}{T_0^2} = 0{,}006$. Das Instrument zeichnet die Nordkomponente der Bodenbewegung auf.

von denen das fünfte das Hauptmaximum ist. Es möge $M_{1,5}$ genannt werden; der erste Index soll die Zugehörigkeit zu den W_1-Wellen zum Ausdruck bringen. Den Bezirk, in dem diese 8 Maxima sich befinden, nenne ich den Kern der W_1-Wellen; es war anzustreben, die Wiederkehr dieses Kerns in den im Seismogramm vorhandenen W_2-, W_3- und W_4-Wellen nachzuweisen. Dieser Nachweis ließ sich führen mit völliger Sicherheit für die W_2- uud W_3-Wellen, mit sehr großer Wahrscheinlichkeit für die W_4-Wellen. Es gelang insbesondere, in diesen 3 weiteren Kerngebieten die Lage des Hauptmaximums, das bzw. mit $M_{2,5}$, $M_{3,5}$, $M_{4,5}$ zu bezeichnen ist, festzustellen.

In der folgenden Tabelle sind die Ergebnisse dieser Feststellungen enthalten. Es sind nicht nur die Zeitpunkte der 4 Hauptmaxima, sondern auch die zugehörigen Perioden und Amplituden angegeben.

		Zeitpunkt	Periode	Amplitude
V.	$M_{1,5}$	$t_1 = 7^h\,13^m\,39^s$	20^s	29,0 mm
	$M_{2,5}$	$t_2 = 7\ 47\ 13$	19	4,6
	$M_{3,5}$	$t_3 = 10\ 32\ 42$	20	0,3
	$M_{4,5}$	$t_4 = 11\ 00\ 42$	16	0,1

Aus den 4 Zeitpunkten ergeben sich die Differenzen:

$$\text{VI.}\quad \begin{cases} t_2 - t_1 = 33^m\,34^s = 2014^s \\ t_3 - t_1 = 3^h\,19\ \ 03 = 11943 \\ t_4 - t_1 = 3\ \ 47\ \ 03 = 13623 \\ t_3 - t_2 = 2\ \ 45\ \ 29 = 9929 \\ t_4 - t_2 = 3\ \ 13\ \ 29 = 11609 \\ t_4 - t_3 = 28\ \ 00 = 1680 \end{cases}$$

Aus VI entnehmen wir zunächst die für $t_3 - t_1$ und $t_4 - t_2$ gewonnenen Werte und setzen sie ein in die 2 Gleichungen

$$V = \frac{U}{t_3 - t_1} \text{ und } V = \frac{U}{t_4 - t_2},$$

die aus III sich ergeben. Wenn wir die Zahlenwerte für V, welche die beiden Gleichungen liefern, als $V_{3,1}$ und $V_{4,2}$ unterscheiden, so erhalten wir

$$V_{3,1} = 3{,}35 \text{ km und } V_{4,2} = 3{,}44 \text{ km}.$$

Der erste Wert ist die Geschwindigkeit, mit der die in B ankommende W_3-Welle den Weg BE_1bEB in der Zeit $t_3 - t_1$ zurückgelegt hat, der zweite diejenige Geschwindigkeit, mit der die in B ankommende W_4-Welle den Weg $BEbE_1B$, also dieselbe Weglänge, aber in umgekehrter Richtung in der Zeit $t_4 - t_2$ zurückgelegt hat. Beide Werte sind unter sich verschieden und verschieden von dem bis jetzt von uns als Durchschnittswert zugrunde gelegten Wert 3,50.

Wir haben hier eine Bestätigung für die von zahlreichen Forschern, zuletzt namentlich von W. Pechau[1]), festgestellte Tatsache, daß V als Konstante im strengen Sinne nicht betrachtet werden darf. In der Abhandlung von Pechau sind Mittelwerte für V angegeben, abgeleitet aus den beobachteten Zeitdifferenzen $t_2 - t_1$, $t_3 - t_1$, $t_4 - t_2$. Für die erstgenannte Zeitdifferenz findet Pechau, wenn wir die oben eingeführte Bezeichnungsweise benutzen, $V_{2,1} = 3{,}47$ als Mittelwert aus 225 Fällen; für die zweite $V_{3,1} = 3{,}32$ km aus 60 Fällen; für die dritte stand ihm nur ein Fall zur Verfügung, aus dem er $V_{4,2} = 3{,}38$ km ableitete. —

Nun können wir uns der Frage nach der Größe der Herdentfernung Δ zuwenden. Wenn wir in Formel IVa für V den Pechauschen Mittelwert 3,47 einsetzen, so erhalten wir

$$\Delta = 16\,506 \text{ km}.$$

Einen weiteren Wert erhalten wir unter Benutzung der Gleichung IVb

$$\Delta = \frac{V}{2}(t_3 - t_2).$$

In ihr müssen wir nach dem oben Ausgeführten unter V die durchschnittliche Geschwindigkeit verstehen, mit der der Weg bEB im Zeitintervall $t_3 - t_2$ zurückgelegt wurde; wir haben sie nunmehr mit $V_{3,2}$ zu bezeichnen. Diese Geschwindigkeit ist uns nicht genau bekannt; wir könnten sie aus IVb ableiten, wenn uns $\triangle$ sicher bekannt wäre. Da wir jedoch letzteres erst ermitteln wollen, helfen wir uns durch die Überlegung, daß $V_{3,2}$, der Durchschnittswert auf dem Weg bEB, sich im vorliegenden Falle bei der Größe von Δ nicht erheblich unterscheiden wird von $V_{3,1}$, dem Durchschnittswert auf dem Weg BE_1bEB. Wir setzen also näherungsweise $V_{3,2} = V_{3\,1} = 3{,}35$ und erhalten dann

$$\Delta = 16631 \text{ km}.$$

Es ist bemerkenswert, daß wir diesen Wert ausschließlich aus den Daten unseres Seismogramms ableiten konnten, ohne von anderer Seite aufgestellte Mittelwerte benutzen zu müssen.

In ähnlicher Weise können wir nun auch noch Gleichung IVc heranziehen, indem wir für V, was eigentlich $V_{4,1}$ bedeutet, näherungsweise setzen $V_{4,2}$, wofür wir oben den Wert 3,44 erhalten haben. Dann ergibt sich

$$\Delta = 16\,568 \text{ km}$$

als zweiter Wert, den wir ausschließlich den Daten unseres Seismogramms entnehmen konnten.

Von der Benutzung der Gleichung IVd sehen wir ab, da uns ein geeigneter Näherungswert für $V_{4\,3}$ nicht zur Verfügung steht.

1) W. Pechau, Beitr. z. Geophys. 13, 279.

Die Übereinstimmung der für Δ erhaltenen Zahlenwerte (16506, 16631, 16568) ist eine beinahe überraschend gute; wenn wir von dem ersten absehen, zu dessen Ableitung ein von anderer Seite gelieferter Wert für V benutzt wurde, können wir auf Grund unseres Seismogramms als wahrscheinlichsten Wert für die Herddistanz angeben

$$\Delta = 16600 \text{ km}.$$

Diese Entfernung stimmt überein mit derjenigen des im Großen Ozean gelegenen Tongagrabens (südlich der Samoa-Inseln), eines Ursprungsorts häufiger Seebeben.

Die nahe Übereinstimmung der erhaltenen Werte läßt erkennen, daß unsere Formeln bei geeigneter Wahl von V wohl zur angenäherten Bestimmung von Δ herangezogen werden können, besonders in Fällen, wo andere Methoden aus irgendwelchen Gründen versagen.

Die Ergebnisse der vorliegenden Untersuchung lassen sich kurz in folgende Sätze zusammenfassen:

1. Es wird eine neue Definition für den Begriff des Weltbebens gegeben, die sich auf das Auftreten der W_2-, W_3- usw. Wellen stützt.

2. Es werden Formeln aufgestellt, die aus den Zeitpunkten des Einsetzens dieser Wellen im Seismogramm einer einzelnen Beobachtungsstation die Herdentfernung näherungsweise zu berechnen gestatten.

3. Diese Formeln werden angewendet zur Ermittelung des Herdes des Weltbebens vom 26. Juni 1917. Zugleich wird der Nachweis geliefert, daß dieses Beben zum Auftreten von W_4-Wellen Anlaß gegeben hat.

Erdbebenwarte Hohenheim, 9. August 1919.

(Eingegangen 6. Oktober 1919.)

Zwei akustische Vorlesungsversuche.

Von H. Kayser.

Ich möchte zwei Versuche bekannt machen, die ich seit vielen Jahren in meinen Vorlesungen vorgeführt habe, die aber, wie mir scheint, sonst unbekannt sind.

1. Es ist im allgemeinen sehr schwierig, einen musikalisch nicht fein geschulten Hörer einen Kombinationston hören zu lassen. Dies wird aber für den Differenzton sehr leicht, wenn man ihn nicht konstant, sondern variabel macht. Ich benutze zwei kleine Glaspfeifen (je von der Gestalt eines Zerstäubers), die sehr kräftige Töne geben. Die eine Pfeife, welche den höheren Ton gibt, ist offen, die andere gedackt durch einen Stempel, den man in ihr leicht verschieben kann. Bläst man sie gleichzeitig mit dem Mund an, so erklingt dabei der Differenzton, der aber meist nicht aufgefaßt wird. Verschiebt man aber während des Anblasens den Stempel, so daß der tiefere Ton höher wird, die Schwingungszahlen beider Pfeifen sich nähern, so wird der Differenzton immer tiefer. Man hat dann den konstanten Ton der ersten Pfeife, den höher werdenden der zweiten und gleichzeitig den tiefer werdenden Differenzton. Auch vom Ungeübtesten wird im Klange dieser tiefer werdende Ton leicht wahrgenommen.

2. Von den Zinken einer schwingenden Stimmgabel gehen mehrere Wellenzüge aus, durch deren Interferenz in gewissen Richtungen der Ton vernichtet wird; es sind rings um die Gabel vier solche Richtungen vorhanden. Um das zu zeigen, stelle ich einen Resonator für den Gabelton her, indem ich ein Standrohr so weit mit Wasser fülle, daß das freie Stück eine viertel Wellenlänge des Tones beträgt, also gleich der Länge des zur Gabel gehörenden Resonanzkastens ist. Hält man die Zinken der — natürlich vom Resonanzkasten abgeschraubten — schwingenden, horizontalen Gabel über die Öffnung des Rohres, so hört man den Ton sehr deutlich. Dreht man aber die Gabel um ihre Längsachse, so findet man, daß bei einer Umdrehung viermal fast völliges Stillschweigen eintritt, wenn nämlich eine der genannten vier Richtungen in das Rohr gerichtet ist. Hält man die Gabel in einer solchen Lage fest und schiebt über die eine Zinke vorsichtig — so daß die Zinken nicht berührt werden — ein Rohr aus Pappe oder Glas, so wird der Ton viel lauter, da die Wellen der einen Zinke abgeblendet sind, die Interferenz verschwindet. Durch Vorschieben und Zurückziehen des Rohres kann man so den Ton beliebig stärken und schwächen. Ich glaube, daß dies einer der schlagendsten Versuche zur Interferenz ist.

Bonn, Oktober 1919.

(Eingegangen 16. Oktober 1919.)

Über eine neue Entladungsröhre, die den Austritt aller in der Röhre entstehenden Strahlen in die atmosphärische Luft gestattet.

Von W. E. Pauli.

In einer elektrischen Entladungsröhre können bei der gewöhnlichen Konstruktion nur die Röntgenstrahlen durch die Glaswand in die



atmosphärische Luft austreten[1]). P. Lenard[2]) hat bekanntlich durch Einsetzen eines Aluminiumfensters auch den Austritt der Kathodenstrahlen in die atmosphärische Luft ermöglicht; durch eine Verbesserung des „Fensters" der Lenardschen Röhre konnte die austretende Menge der Kathodenstrahlen späterhin erheblich vermehrt werden[3]). Immerhin wird im Aluminiumblättchen ein beträchtlicher Teil der Kathodenstrahlen absorbiert. Es ist ohne weiteres klar, daß für Strahlen mit noch größerer Absorbierbarkeit als die der normalen Kathodenstrahlen eine Entladungsröhre, die auf der Lenardschen Konstruktion beruht, nicht mehr den Austritt in die atmosphärische Luft ermöglichen kann. Aus den verschiedensten Gründen wäre es aber erwünscht, alle in einer Entladungsröhre auftretenden Strahlen ohne wesentliche Absorption außerhalb der Röhre untersuchen zu können (hier kämen also besonders in Frage: sehr weiche Röntgenstrahlen, Kathodenstrahlen geringer Geschwindigkeit und Kanalstrahlen). Die Möglichkeit einer derartigen Konstruktion geben die heutigen ausgezeichneten Rotations-Luftpumpen; freilich ist es nicht möglich, einfach in einer Entladungsröhre als „Fenster" ein sehr kleines Loch zum Durchtritt zu benutzen; selbst bei dauerndem Auspumpen würde das Vakuum bei der heutigen Leistungsfähigkeit der Pumpen nicht hoch genug gebracht werden können, um alle Strahlen zu erzeugen; das Vakuum ist in einem solchen Falle nicht höher als 0,5 bis 1 mm Hg zu bekommen. Bringt man aber vor einer solch kleinen Öffnung O_1 noch einen Raum A an (Fig. 1), der ebenfalls ein sehr kleines Loch

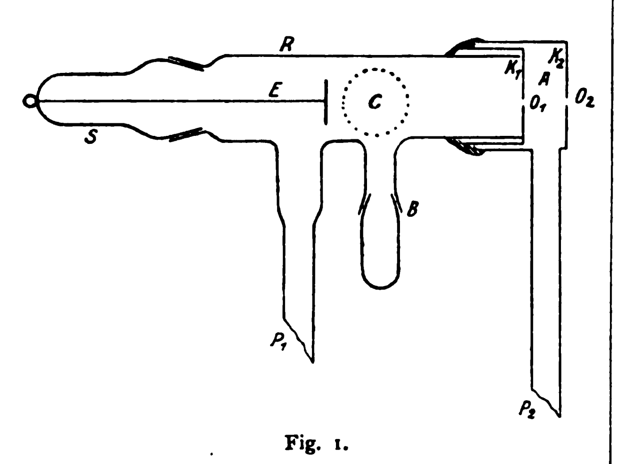


Fig. 1.

1) Aber auch nur unter erheblicher Intensitätsverminderung (ca. 50 Proz.) und bei normalem Härtegrad; bei sehr weichen Strahlen wird der Verlust erheblich größer.

2) P. Lenard, Ann. d. Phys., 1894.

3) W. E. Pauli, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1910.

enthält (O_2) und der für sich durch Auspumpen bei P_2 auf ein Vakuum von 0,5—1 mm Hg gebracht werden kann, so ist ersichtlich, daß nun bei O_1 nur der ca. tausendste Teil der Luft in R einströmen kann; d. h. aber, daß in R ein genügend hohes Vakuum durch ständiges Evakuieren bei P_1 und P_2 erreicht werden kann, um in R Röntgen-, Kathoden- und Kanalstrahlen entstehen zu lassen. Die Öffnungen O_1 und O_2 liegen genau in der Achse der Röhre R[1]), so daß z. B. ein von der Elektrode E kommender Kathodenstrahl ungehindert durch O_1 nnd O_2 nach außen treten kann. Der die Röhre R abschließende Kopf K_1 und auch der über K_1 geschobene Kopf K_2 sind aus Messing; K_1 und K_2 dienen als Elektrode. Die wahre Entfernung von O_1 bis O_2 ist bei der praktischen Ausführung der Röhre auf ein Minimum (ca. 0,7 mm) gebracht. Man sieht ohne weiteres, daß auf dem sehr beträchtlichen Druckgefälle (760 mm auf ca. 0,7 mm) zwischen O_1 und O_2 die Brauchbarkeit der Röhre beruht; denn man könnte sich auch K_2 wegdenken, dafür an O_1 auf K_1 eine Kapillare angesetzt denken (W. Wien), so würde praktisch bei genügender Enge und zureichender Länge der Kapillaren ebenfalls die durch O_1 einströmende Luftmenge hinreichend klein werden, um bei ständig wirkender Pumpe P_1 ein genügend hohes Vakuum in R zu ergeben. Bei einer derartigen Konstruktion wären aber die Austrittsbedingungen für stark absorbierbare Strahlen ungünstig. Daß die Austrittsbedingungen für die hier beschriebene Röhre günstig sind, läßt sich zeigen, wenn man berechnet, eine wievielmal größere Absorption ein Strahl, z. B. ein Kathodenstrahl, erleidet, wenn er durch die Aluminiumfolie des Lenardschen Fensters tritt, als wenn er aus der hier beschriebenen Röhre austritt. Nimmt man an, daß der Strahl beim Aluminium (Dichte = 2,7) eine Strecke von 0,004 mm und bei der neuen Röhre Luft von 1 mm Hg auf einer Strecke von ca. 1 mm zu durchlaufen hat bis zu seinem Austritt aus der Röhre, so erhält man unter Anwendung des Lenardschen Absorptionsgesetzes das Resultat, daß bei der hier beschriebenen Röhre die Absorption gleich $\frac{1}{7000}$ derjenigen bei der Lenardschen Röhre ist.

Der eigentlich wichtige Teil der Entladungsröhre, der auf die Röhre R aufgesetzte Kopf K_1 mit darübergesetztem Kopf K_2 ist in Fig. 2

1) Die genaue Einstellung von O_1 und O_2 in die Achse von R erscheint bei der Kleinheit der Öffnungen zunächst schwierig; es wird weiter unten gezeigt, daß sie unter Zuhilfenahme eines Kunstgriffes sehr einfach ist.

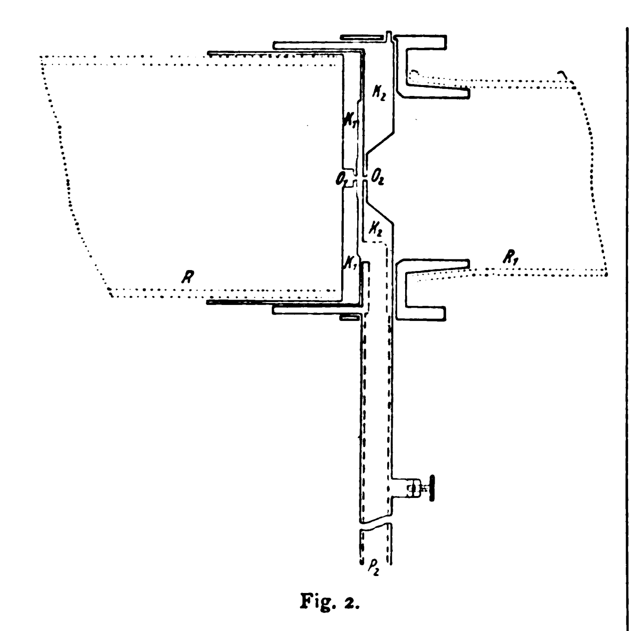


Fig. 2.

genauer wiedergegeben. Auf R sitzt fest und luftdicht aufgekittet K_1 mit der zentralen Bohrung von O_1 (Durchmesser ca. 0,5 mm). Genau auf K_1 passend ist K_2 über K_1 geschoben, die Öffnung O_2 genau in der Achse von R, O_1 gegenüber, ebenfalls ca. 0,5 mm Durchmesser. Über die Öffnungen O_1 und O_2 sind luftdicht aufgekittet kleine Platinbleche (Stärke ca. 0,05 mm), welche die feine Öffnung (Durchmesser ca. 0,01 mm) enthalten, durch die der Strahl austritt. Der Durchmesser der feinen Öffnung im Platinblech richtet sich naturgemäß ganz nach der Leistungsfähigkeit der Pumpen bei P_1 und P_2. Zu den weiter unten mitgeteilten Versuchen standen 2 Hg-Rotationspumpen nach Gaede zur Verfügung; die Vorpumpen waren Ölrotationspumpen. Würde man die Gaedeschen Diffusionspumpen verwenden, so würde jedenfalls schon zu größerer Lochweite geschritten werden können. Eine weitere Möglichkeit, den Durchmesser der Löcher O_1 und O_2 zu vergrößern, besteht darin, daß man nicht einen Raum A (Fig. 1) benutzt, sondern zwei Räume A_1 und A_2, die jeder für sich evakuiert werden. Mit einer derartigen Röhre werden augenblicklich Versuche angestellt, die schon ergeben haben, daß sich die Lochgröße nahezu 100 mal größer machen läßt, so daß also die in einer geraden liegenden Löcher O_1, O_2, O_3 einen Durchmesser von ca. 0,1 mm haben.

Bezüglich der Zusammensetzung der Röhre sei noch folgendes erwähnt: Im Anfang hatten die zum Teil sehr kleinen Dimensionen der Röhrenteile und ihre richtige Zusammenfügung erhebliche experimentelle Schwierigkeiten zur Folge, die sich aber alle mit der Zeit überwinden ließen. Die Öffnungen in den Platinblechen wurden mit Hilfe fein geschliffener Stahlnadeln eingestochen, der „Grat" mit einem scharfen Messer weggenommen. Die Bleche wurden dann mit Hilfe einer Lupe oder eines Mikroskops auf die Messingteile so aufgekittet, daß das feine Loch nach Augenmaß möglichst zentral zu der 0,5-mm-Bohrung des Messingteiles war. Als Kitt wurde „Picein" verwandt. Alsdann wurde K_2 über K_1 geschoben und das Ganze auf R gesetzt. Um jetzt noch die genaue Einstellung der zwei feinen Löcher in die Röhrenachse zu bewerkstelligen, wurde so verfahren: Der Schliffteil S, welcher die Elektrode E enthält, wurde herausgenommen und an seine Stelle ein ganz ähnlicher Schliffteil gesetzt, der jedoch keine Elektrode enthielt, sondern dessen Ende durch eine aufgekittete plan-

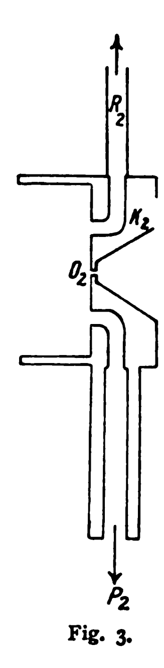


Fig. 3.

parallele Glasscheibe verschlossen war. Die Glasscheibe war mit schwarzem Papier beklebt, das in der Mitte ein kleines Loch L zum Durchvisieren enthielt. Nun wurde die ganze Röhre in ein Stativ gespannt und vor O_2 eine starke Lichtquelle gesetzt. Indem man jetzt durch L nach der Lichtquelle visierte, war es leicht, durch Verdrehung des Kopfes K_1 gegen K_2 die Öffnungen O_1, O_2 und L in eine Gerade zu bringen. Die Stellung, bei welcher man das Aufblitzen des durch O_2, O_1 und L kommenden Lichtstrahles sah, wurde fixiert und die Teile dann luftdicht verkittet.

Um die Größe des Vorvakuums (zwischen K_1 und K_2) messen zu können, wurde in einem zweiten Falle der Teil K_2 so konstruiert, wie

es Fig. 3 zeigt. An R_2 konnte eine kleine Geißlerröhre oder ein Mac Leod gesetzt werden. Das Vakuum in A wurde nach der dem Induktor parallel geschalteten Funkenstrecke gemessen.

In Fig. 2 ist noch eine Glasröhre R_1 gezeichnet, die mit Hilfe eines Bajonettverschlusses auf K_2 gesetzt werden konnte, damit der aus O_2 austretende Strahl bei Gasdrucken beliebiger Größe zu untersuchen war. Späterhin wurde der Bajonettverschluß verlassen und R_1 mittels eines Schliffes auf K_2 gesetzt. R_1 hatte 2 (nicht gezeichnete) seitlich angeschmolzene Glasröhren; die eine führte zur Luftpumpe, die andere zum Manometer.

Über die Erzeugung der verschiedenen Strahlenarten sei noch folgendes mitgeteilt.

A. Röntgenstrahlen:

Zur Erzeugung von Röntgenstrahlen wurde die Röhre in etwas veränderter Weise benutzt: In Fig. 1 ist durch einen Kreis eine seitliche Ansatzstelle C angedeutet, in die durch einen Schliff eine Konkavspiegelelektrode (als Kathode) eingesetzt wurde. Der Brennpunkt des Strahlenbüschels fällt auf die kleine Antikathode, welche in den Schliff B eingesetzt wird. Die Elektrode E ist durch einen „blinden" Schliff ersetzt oder kann als Anode dienen (an Stelle von K_1 und K_2). Da die Metallteile von K_1 und K_2 in der Nähe der Löcher O_1 und O_2 sehr dünn sind, so wird mit Vorteil ein kleiner Bleikonus vor O_2 gesetzt, der eine zentrale, enge Bohrung (ca. 0,5 mm) trägt. Bei außerordentlich weichen Röntgenstrahlen wird auch dieser Bleikonus zu entbehren sein.

B. Kathodenstrahlen:

Bei der Erzeugung von Kathodenstrahlen werden der seitliche Ansatz C sowie B durch blinde Schliffe verschlossen. K_1 und K_2 dienen als Anode, E als Kathode (Fig. 1). Läßt man den Kathodenstrahl durch O_1 und O_2 direkt in die atmosphärische Luft gehen, so sieht man auf einem vor O_2 gehaltenen Leuchtschirm ($ZnS + Cu$) das sehr helle Aufblitzen der durch den feinen Strahl getroffenen Schirmstelle. Um auch photographische Aufnahmen des Strahlverlaufs machen zu können, wurde auf K_2 mittels 3 kleiner Schrauben ein kleiner Metallrahmen aufgeschraubt, an dessen Ende eine Feder saß, die die Platte in der gewünschten Stellung hielt. Zehn Entladungen genügten, um den Verlauf des sehr feinen Strahles auf der Platte zu fixieren. Wegen der Feinheit der Eindrücke eignen sich diese Aufnahmen wenig zur Reproduktion; aus diesem Grunde ist von letzteren hier Abstand genommen.

C. Kanalstrahlen:

Die Entladungsröhre ist ebenso zusammengesetzt wie unter B beschrieben, nur ist K_1 und K Kathode, A Anode. Die Beobachtung von Kanalstrahlen in Gasen größeren Druckes ist bei weitem die schwierigste; die Untersuchungen darüber sind bis heute noch nicht abgeschlossen, doch seien die ersten Ergebnisse hier schon mitgeteilt. Bekanntlich ist die Beobachtung von Kanalstrahlen schon deshalb erschwert, weil sie auf Leuchtschirmen keinen sehr großen Effekt hervorrufen. Es wurde trotzdem versucht, den Verlauf der aus O_2 austretenden Kanalstrahlen mit dem Leuchtschirm zu beobachten; dazu war es nötig, alle störenden Lichterscheinungen sorgfältig abzublenden (Aufleuchten der Röhre selbst, Unterbrechungsfunken usw.). Als Leuchtschirm diente wieder $ZnS + Cu$. Hält man den kleinen Schirm direkt vor O_2, so ist ein schwaches Aufleuchten mit adaptiertem Auge gut zu beobachten; bei einiger Entfernung des Schirmes von O_2 nimmt es aber rasch an Intensität ab und verschwindet völlig, wenn der Schirm mehr als 0,8 mm[1]) von der Öffnung entfernt ist. Kanalstrahlen werden also innerhalb einer Strecke von rund 1 mm in Luft von atmosphärischem Druck so weit absorbiert, daß sie Leuchterscheinungen nicht mehr hervorrufen. (Die Parallelfunkenstrecke war in diesem Falle auf 30 mm, das Vakuum A auf ca. 0,8 mm eingestellt.) Daß Kanalstrahlen innerhalb einer sehr kurzen Strecke in Luft vom Atmosphärendruck absorbiert werden, war zu erwarten. Man kann versuchen, an Hand der verschiedenen „Reichweiten" der α-Strahlen in ihrer Abhängigkeit von der Geschwindigkeit sich herzuleiten, wie groß die „Reichweite" von Kanalstrahlen normaler Geschwindigkeit ungefähr sein müßte; allerdings ist dabei zu berücksichtigen, daß die α-Strahlen aus Helium, die hier untersuchten Kanalstrahlen aus Stickstoff und Sauerstoff bestehen. Immerhin stimmt der gefundene Wert für die Absorptionsstrecke mit dem kurvenmäßig hergeleiteten der Größenordnung nach überein. — Weitere Mitteilungen hierüber sollen folgen.

1) In diesem Falle war die Entfernung des Schirmes von O_2 durch eine besondere Einrichtung auf 0,1 mm genau abzulesen.

(Eingegangen 18. September 1919.)

Gilt das Poiseuillesche Gesetz auch für ein System zusammengesetzter Röhren?

(Aus dem Physiologischen Institut zu Breslau.)

Von Josef Schleier.

Die Frage, ob das Poiseuillesche Gesetz auch für ein System zusammengesetzter Röhren,



insbesondere ein solches gilt, welches vielfach gablig verzweigt ist, wie die Blutbahn der Wirbeltiere, ist für die Erforschung des Blutstromes grundlegend, bis heute aber nicht befriedigend beantwortet. Ich habe daher ein solches System hergestellt und Durchströmungsversuche damit vorgenommen, die schon veröffentlicht sind[1]). Da die Versuche auch für den Physiker nicht ohne Interesse sein, unter dem angegebenen Titel in Pflügers Archiv aber der Beachtung entgehen dürften, gebe ich im folgenden eine kurze Darstellung derselben und verweise bezüglich der Einzelheiten auf die ursprüngliche Arbeit.

Das Röhrensystem besteht aus 126 Gabeln, die durch Gummistücke miteinander verbunden sind. Ein Stammrohr von 0,32 mm Durchmesser teilt sich unter Erweiterung des Gesamtquerschnittes in zwei Äste, diese Teilung wiederholt sich auf der Zuflußseite fünfmal, so daß schließlich eine Auflösung in 64 Äste von 0,28 mm Durchmesser stattfindet. Diese sammeln sich dann in gleicher Weise wieder zu einem Abflußrohr. Die Querschnitte der Abflußseite sind etwa doppelt so groß wie die der Zuflußseite. Der Durchmesser der weitesten, das Ende der Bahn bildenden Röhre beträgt 0,51 mm.

Die Länge der Röhren nimmt vom Anfang nach der Mitte des Systems ab, nach dem Ende in gleicher Weise wieder zu; die größte Länge beträgt 15, die kleinste 2,5 cm.

Die einzelnen Röhren werden durch kurze Gummistücke miteinander verbunden; diese sind für die an dem einen Rande der Bahn liegenden Röhren T-förmig, so daß an den freien Schenkel des T-Stückes ein vertikales Rohr zur Messung des Seitendruckes angeschlossen werden kann.

Die Herstellung des Systems war sehr mühsam, da zur Berechnung der Durchflußmengen nach dem Poiseuilleschen Gesetz die Dimensionen sämtlicher Röhren bekannt sein mußten. Die zu verwendenden Glasröhren wurden durch mikroskopische Messung auf kreisförmigen Querschnitt und durch Verschiebung von Quecksilberfäden auf Gleichförmigkeit des Lumens geprüft. An den brauchbaren Stücken wurde dann der Querschnitt durch Wägung der Quecksilberfäden bestimmt und die Stücke vom Glasbläser zu Gabelröhren tunlichst so verarbeitet, daß an den Verzweigungsstellen weder Auftreibungen noch Verengerungen entstanden.

Zur Durchströmung des Systems wurde destilliertes und mehrfach filtriertes Wasser verwendet. Als treibende Kraft diente komprimierte Luft (130 cm Wasser Überdruck). Nach sorgfältiger, luftfreier Füllung des ganzen Systems wurde die Durchströmung in Gang gebracht. Der eigentliche Versuch begann, wenn in allen Druckmessern Konstanz eingetreten war. Die vorbereitende Durchströmung nahm mehrere Stunden in Anspruch.

Neben dem Gefälle wurde auch die Durchflußmenge experimentell bestimmt, da ihre Größe zur theoretischen Berechnung des Gefälles bekannt sein muß. Die ausgeflossenen Mengen wurden mit Hilfe einer besonderen Vorrichtung gesammelt und durch Wägung bestimmt. Die Durchströmungszeit, die sich über eine Viertelstunde erstreckte, wurde mittels einer Stoppuhr festgestellt.

Zur Prüfung der Gültigkeit des Poiseuilleschen Gesetzes wurde das Gefälle aus den Dimensionen der Röhren, der Viskosität der Flüssigkeit und der im Versuch gemessenen Durchflußmenge berechnet und mit dem experimentell festgestellten verglichen.

Ergebnis: In einer Reihe untereinander fast übereinstimmender Versuche war das berechnete Gefälle um nicht ganz 7 Proz. kleiner als das experimentell bestimmte. Um bei dieser Differenz die Gültigkeit des Gesetzes anzuerkennen oder abzulehnen, müssen wir Richtung und Größe der Abweichung in Betracht ziehen. Theoretisch ist eine Abweichung in der beobachteten Richtung zu erwarten, da durch die Gummiverbindungen und die Unvollkommenheiten der Verschmelzung der Röhren zu Gabeln, Störungen der laminaren Strömung der Flüssigkeit entstehen müssen, die mit einem Verbrauch von Energie verbunden sind; ferner wurde eine wenn auch geringe Verlängerung der Bahn dadurch hervorgerufen, daß die einzelnen Röhren sich nicht vollkommen berührten. Auch die Größe der Abweichung läßt sich mit der Annahme der Gültigkeit des Gesetzes wohl vereinigen, wenn man bedenkt, daß das System aus 378 Röhren besteht und die Fehler in der Bestimmung der Dimensionen der einzelnen Röhren sich summieren.

Der Unterschied zwischen dem im Versuch beobachteten und dem theoretisch berechneten Gefälle läßt sich also ungezwungen auf die bei der Herstellung und Ausmessung des Systems nicht zu vermeidenden Fehler zurückführen. Damit ist der Schluß berechtigt, daß das Poiseuillesche Gesetz auch auf ein vielfach gablig verzweigtes System von Röhren übertragen werden darf.

(Eingegangen 8. Oktober 1919.)

1) J. Schleier, Der Energieverbrauch in der Blutbahn. Pflügers Arch. 173, 172, 1918.



Einfluß der Temperatur auf Stellung und Intensität der Stufengitterlinien.

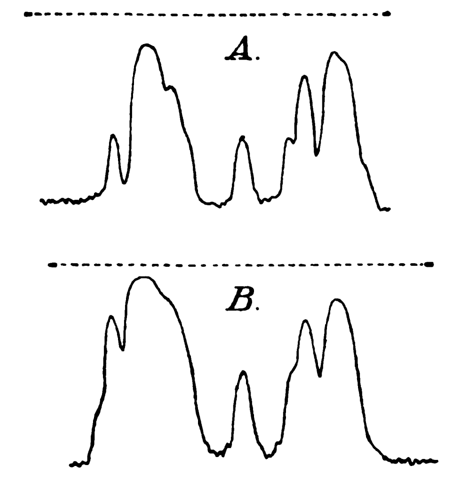
Von P. H. v. Cittert und H. C. Burger.

Beim Experimentieren mit einem Stufengitter beobachteten wir eine auffällige Veränderung der relativen Intensität im Spektrum der grünen Quecksilberlinie ($\lambda = 5461$ Å.). Da wir diese Veränderung einer mangelhaften Festigkeit der Anordnung zuschrieben, wurde das Gitter und das Kollimator-, bzw. Fernrohr sehr fest auf einen schweren eisernen Balken montiert, aber dennoch beobachteten wir wieder eine allmähliche Veränderung der Intensität. Wir glaubten deshalb berechtigt zu sein, eine Einwirkung der Temperatur auf das vom Stufengitter entworfene Spektrum anzunehmen und haben dies in folgender Weise bestätigt gefunden.

Bei einer Temperatur von 20,5° C photographierten wir das Spektrum und exponierten 20 Minuten. Am Ende der Exposition war die Temperatur bis zu 20,6° C gestiegen. Gleich darauf wurde, ohne etwas an der Aufstellung zu ändern, die Temperatur bis zu 22,5° C erhöht, und wurde wieder 20 Minuten exponiert. Während dieser letzten Exposition erniedrigte sich die Temperatur um 0,5° C. Der Verlauf der Durchlässigkeit der photographischen Platte im Gebiete der Spektrallinie wurde mit einem Mikrophotometer registriert (siehe Figur). Eine Erhöhung bezeichnet eine schwarze Stelle; die gestrichelte Linie stellt die Nullinie dar. Diese Linie würde erreicht werden an den Stellen der Platte, welche vollkommen schwarz wären.

Die Hauptlinie der Quecksilberlinie ist zwar doppelt, erscheint aber in der Figur einfach, da sie von unserem Gitter nicht aufgelöst worden ist. Sie erscheint in jeder Kurve zweimal in aufeinanderfolgenden Ordnungen. Zwischen diesen zwei Bildern der Hauptlinie sieht man die Trabanten. Die Kurven A und B sind das Ergebnis der Versuche bei niedriger bzw. höherer Temperatur. Während bei A die beiden Ordnungen der Hauptlinie fast gleich schwarz sind (maximale Schwärzung 0,78 und 0,76) ist bei B die eine Ordnung entschieden viel schwärzer als die andere (maximale Schwärzung 1,34 und 0,79), was einem großen Unterschied zwischen den Intensitäten entspricht.

Überdies gibt es noch einen sehr auffälligen Unterschied zwischen A und B. In Fig. B sind die Kontraste der Linien und Trabanten unter sich viel verschwommener als in A. Dies ist ganz selbstverständlich. Die Temperatur wird nicht nur die Intensität, sondern auch die



Stellung der Linien beeinflussen. Wenn sich während der Exposition die Temperatur verändert, kann man infolge der Ausdehnung des Gitters eine Verschiebung der Linien und deshalb eine Unschärfe erwarten. Da bei A die Temperatur 0,1°, bei B 0,5° gestiegen ist, so ist es leicht verständlich, daß A schärfer ist als B.

Wir meinen also behaupten zu dürfen, daß eine Temperaturveränderung von nur einigen Zehnteln von Graden auf die Stelle und die Intensität der mit einem Stufengitter gebildeten Linien einen ganz merklichen Einfluß hat.

Utrecht, Institut für theoretische Physik.

(Eingegangen 8. Oktober 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Metallographie [1]).

Von Rudolf Ruer.

(Fortsetzung.)

§ 3.

Zweistoffsysteme.

Gegenseitige Löslichkeit und Aggregatzustand.

Die Fähigkeit zweier Substanzen, sich gegenseitig zu lösen, ist in ausgesprochenem Maße von ihrem Aggregatzustande abhängig.

Gase sind bekanntlich in allen Verhältnissen miteinander mischbar.

Beim flüssigen Zustande hat man zwei Fälle zu unterscheiden, indem zwei Flüssigkeiten

1) Diese zusammenfassende Bearbeitung ist die Fortsetzung einer diese Zeitschr. 20, 71, 1919 abgebrochenen Artikelserie, deren weiteres Erscheinen damals unmöglich war infolge der durch die Besetzung von Aachen hervorgerufenen Schwierigkeiten in der Postverbindung.

entweder vollkommen miteinander mischbar sind, wie Alkohol und Wasser und die Mehrzahl der geschmolzenen Metalle, oder sich gegenseitig in beschränktem Maße lösen, wie Wasser und Äther. In letzterem Falle sondern sich die beiden Flüssigkeiten nach genügend langer Zeit in zwei Schichten nach ihrem spezifischen Gewichte. Im Gleichgewichtszustand hat natürlich jede Flüssigkeit von der anderen bis zur Sättigung gelöst.

Im kristallisierten Zustande hat die Fähigkeit der Stoffe, sich miteinander zu mischen, noch weiter abgenommen. Trotzdem sind auch hier eine ganze Reihe von Körpern bekannt, die sich im kristallisierten Zustande gegenseitig in jedem beliebigen Verhältnisse lösen können, oder die, wie man sagt, eine lückenlose Reihe von Mischkristallen bilden; als Beispiel hierfür seien Silber und Gold angeführt. Weit häufiger ist jedoch der Fall der beschränkten Mischbarkeit. Ist die gegenseitige Mischbarkeit zweier Stoffe so gering, daß sie sich der Beobachtung entzieht, so spricht man von „vollständiger Nichtmischbarkeit", wenngleich dieser Fall theoretisch nur als Grenzfall einer äußerst geringen Mischbarkeit anzusehen ist (d. Zeitschr. **20**, 67, 1919).

Der verschiedene Grad der Mischbarkeit der Komponenten im flüssigen und kristallisierten Zustande liefert ein Mittel zur Einteilung der Zweistoffsysteme.

I. Es herrscht vollkommene Mischbarkeit im flüssigen, vollständige Nichtmischbarkeit im kristallisierten Zustande.

Gesetz der Gefrierpunktserniedrigung.

Sind zwei Stoffe im flüssigen Zustande mischbar, im kristallisierten Zustande nicht mischbar, so muß bei der Kristallisation des flüssigen Gemisches eine Entmischung stattfinden. Diese Entmischung geht im allgemeinen so vor sich, daß zunächst einer der Stoffe im reinen Zustande aus der Mischung auskristallisiert. Welcher der beiden Stoffe dieses ist, hängt vom Mischungsverhältnisse ab. So beobachtet man, daß der bei der Erstarrung einer verdünnten wäßrigen Kochsalzlösung zuerst auskristallisierende Bestandteil aus reinem Eis besteht, während sich aus einer hinreichend konzentrierten Lösung zuerst Salz ausscheidet. Im ersten Falle verliert die Lösung durch Ausscheidung des Eises Wasser, sie wird konzentrierter; im zweiten Falle wird sie durch die Ausscheidung des Salzes verdünnter. In beiden Fällen erleidet also die flüssige Phase durch den mit einer Änderung des Wärmeinhalts des Systems verknüpften Kristallisationsvorgang eine Änderung ihrer Zusammensetzung, das hier bestehende Gleichgewicht ist ein unvollständiges (d. Zeitschr. **20**, 67, 1919). Daher kann der Kristallisationsvorgang nicht bei konstanter Temperatur stattfinden. Wir beschränken uns auf die Betrachtung einer verdünnten Kochsalzlösung, die bei der Erstarrung zunächst Eis ausscheidet und sich dadurch an Salz anreichert. Sie sei bei irgend einer Temperatur t_1 mit Eis im Gleichgewichte. Hält man die Temperatur t_1 des Systems konstant, etwa indem man es in ein großes Reservoir von gleicher Temperatur einsetzt, so kann weitere Ausscheidung von Eis nicht stattfinden, da hierdurch eine Änderung des Salzgehalts der Lösung herbeigeführt würde. Es fragt sich, ob zwecks Herbeiführung weiterer Eisausscheidung die Temperatur des Systems erhöht oder erniedrigt werden muß. Da nach van t Hoff (d. Ztschr. **20**, 66, 1919) in einem im Gleichgewichte befindlichen Systeme Wärmezufuhr nur solche Vorgänge hervorrufen kann, die Wärme verbrauchen, und Wärmeentziehung nur solche, die Wärme liefern, so wird dieses davon abhängen, ob die Ausscheidung des Eises aus der Salzlösung Wärme verbraucht oder liefert. Bekanntlich ist das letztere der Fall. Wir müssen also dem System Gelegenheit zur Wärmeabgabe geben und wollen es zu dem Zwecke in ein großes Reservoir von der ein wenig unterhalb t_1 liegenden Temperatur t_2 einsetzen. Die dadurch ermöglichte Eisausscheidung kann aber auch nur so lange stattfinden, bis sich das der Temperatur t_2 entsprechende unvollständige Gleichgewicht eingestellt hat. Dann bedarf es zum Zwecke weiterer Eisausscheidung einer weiteren Temperaturerniedrigung. Wir erkennen danach, daß im vorliegenden Falle, in welchem die Eisausscheidung nicht bei konstanter Temperatur stattfindet, die Temperatur, bei der die zurückbleibende Lösung weiteres Eis ausscheidet, durch das Fortschreiten des Kristallisationsprozesses immer weiter sinkt. Sofern wir nun — und für die hier in Betracht kommenden Fälle trifft dies ohne Ausnahme zu — annehmen, daß die Ausscheidung von Kristallen aus einer Flüssigkeit stets Wärme liefert, können wir ganz allgemein sagen:

Sofern eine Lösung nicht bei konstanter Temperatur kristallisiert, muß ihre Erstarrungstemperatur durch fortgesetzte Kristallausscheidung sinken.

Unter Erstarrungstemperatur oder Erstarrungspunkt oder Gefrierpunkt verstehen wir die

Temperatur des **Beginnes** der Kristallisation. Sie ist identisch mit der des Endes der Schmelzung und wird daher auch als Schmelztemperatur oder Schmelzpunkt bezeichnet.

Kehren wir wieder zum speziellen Falle der gefrierenden verdünnten Kochsalzlösung zurück. Sie wird durch die fortschreitende Ausscheidung reinen Eises immer konzentrierter, gleichzeitig sinkt ihre Erstarrungstemperatur. Hierbei ist es gleichgültig, wie verdünnt die Anfangslösung war, da das sich ausscheidende Eis kein Kochsalz gelöst enthält. Die Erstarrungstemperatur einer verdünnten, also bei der Erstarrung Eis ausscheidenden Kochsalzlösung sinkt also mit zunehmendem Kochsalzgehalt, und zwar **von Anfang an**. Wir können dieses Resultat auch so aussprechen, daß der Gefrierpunkt des Wassers durch Zusatz von Kochsalz erniedrigt wird, und zwar, solange zuerst nur Eis ausfriert, um so stärker, je größer der Salzzusatz ist. Dieses für den speziellen Fall einer verdünnten Kochsalzlösung hergeleitete Resultat ist offenbar von allgemeiner Gültigkeit. Wir wollen es in folgender Weise aussprechen:

Die Erstarrungstemperatur eines Stoffes *A* wird durch Zusatz eines zweiten Stoffes *B*, den er nur im flüssigen, nicht aber im kristallisierten Zustande zu lösen vermag, erniedrigt. Diese Erniedrigung wächst mit steigendem Zusatze von *B*, solange aus der Schmelze zuerst nur *A* auskristallisiert.

Dieser Satz wird als das Gesetz der Gefrierpunkts- oder Schmelzpunktserniedrigung bezeichnet.

Mengenverhältnis beim Zerfall in zwei Phasen.

(Die Hebelbeziehung.)

Zur Veranschaulichung der bei der Abkühlung stattfindenden Vorgänge benutzen wir die graphische Darstellung. Die beiden Komponenten unseres Systems seien mit *A* und *B* bezeichnet. Zur Angabe der Zusammensetzung der aus *A* und *B* herstellbaren Gemische diene die Gewichtsmenge von *B*, bezogen auf das Gesamtgewicht 100, d. h. die Konzentration in Gewichtsprozenten *B*. Wir tragen sie, von links nach rechts fortschreitend, auf der Abszissenachse (Fig. 7), der sog. Konzentrationsachse, auf. Durch Angabe der Konzentration in Gewichtsprozenten *B* ist natürlich auch der Gehalt an *A* bestimmt, insbesondere bedeutet die Konzentration 0 reines *A*, die Konzentration 100 reines *B*. Die Ordinatenachse dient als Tem-

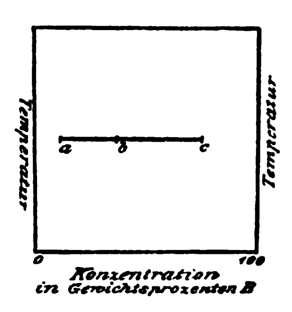


Fig. 7.

peraturachse. Wir tragen auf ihr von unten nach oben fortschreitend die Temperatur in Celsiusgraden auf. (Der Übersichtlichkeit wegen errichtet man die Temperaturachse gewöhnlich in den beiden Endpunkten der Konzentrationsachse.)

Die ganze von den Koordinatenachsen umschlossene Ebene wird als Konzentrations-Temperaturebene bezeichnet. Jedem ihrer Punkte entspricht eine Mischung aus *A* und *B* bestimmter Konzentration und bestimmter Temperatur.

Wir nehmen nun an, die Mischung *b*, welche die Konzentration *b* und die Temperatur *t* haben möge, sei bei dieser Temperatur in homogenem Zustande nicht existenzfähig, sondern habe sich in zwei Phasen von den bzw. Konzentrationen *a* und *c* gespalten. Es ist das Mengenverhältnis dieser beiden Phasen $\frac{M_a}{M_c}$ zu ermitteln.

Angenommen, die Gesamtmenge von *b* betrage 100 g, sie habe sich in *x* g der Phase *a* und $(100-x)$ g der Phase *c* gespalten.

Von den *b* g des Stoffes *B*, die in 100 g der Mischung *b* enthalten sind, entfallen

$\frac{x}{100}a$ g auf die Phase von der Konzentration *a* und

$\frac{100-x}{100}c$ g auf die Phase von der Konzentration *c*.

Daher ist

$$\frac{x}{100}a+\frac{100-x}{100}c=b,$$

woraus sich

$$x=100\frac{c-b}{c-a}$$

und

$$\frac{M_a}{M_c}=\frac{x}{100-x}=\frac{c-b}{b-a}=\frac{bc}{ab}$$

ergibt, da in der graphischen Darstellung, Fig. 7, die Konzentrationsdifferenz $c-b$ gleich der Strecke *bc*, $b-a$ gleich der Strecke *ab* ist.

Betrachten wir *abc* als ungleicharmigen Hebel mit dem Stützpunkte in *b* und denken

uns an den Endpunkten a und c die bzw. Massen M_a und M_c aufgehängt, so lautet bekanntlich die Gleichgewichtsbedingung

$$M_a \cdot ab = M_c \cdot bc.$$

In diesem Verhältnis hat sich also die Spaltung der Mischung b vollzogen. Daher wollen wir die durch obige Gleichung ausgedrückte Beziehung „Hebelbeziehung" nennen. Sie liefert natürlich auch die Lösung der umgekehrten Aufgabe, daß die Konzentration b einer homogenen Lösung ermittelt werden soll, welche durch Vermischen zweier Konzentrationen a und c bei gegebenem Mengenverhältnisse $\frac{M_a}{M_c}$ entsteht. Nach obigem ergibt sich b als Schwerpunkt der beiden in a und c befindlichen Massen.

A. Polymorphe Umwandlungen finden nicht statt, die Komponenten bilden keine chemische Verbindung miteinander.

Gesetzt, wir haben zwei Stoffe A und B, die der Einfachheit halber Elemente sein sollen. Ihre bzw. Schmelzpunkte in Celsiusgraden wollen wir ebenfalls mit A und B bezeichnen. Unsere Voraussetzungen sind, daß die beiden Elemente im flüssigen Zustande vollständige, im kristallisierten Zustande keine Mischbarkeit miteinander besitzen sollen, daß sie keine polymorphe Umwandlung zeigen, und daß zwischen ihnen eine Verbindung nicht existiert. Die in diesem Falle bei der Abkühlung der geschmolzenen Mischungen auftretenden Vorgänge sind in Fig. 8a, dem sog. Schmelz- oder Erstarrungsdiagramm, graphisch dargestellt. Die Abszissenachse dient als Konzentrationsachse, die Ordinatenachse als Temperaturachse (s. S. 18).

Lösen wir in einer großen Menge von geschmolzenem A eine geringe Menge von B und lassen die Schmelze kristallisieren, so kristallisiert A, und zwar, wegen der Nichtmischbarkeit in kristallisiertem Zustande, reines A aus. Hierdurch wächst der B-Gehalt der Schmelze, das bestehende Gleichgewicht ist also ein unvollständiges. Nach dem Gesetze der Gefrierpunktserniedrigung beginnt die A-Ausscheidung erst unterhalb des Schmelzpunktes von reinem A, und ferner bei einer um so niedrigeren Temperatur, je größer der Zusatz von B ist. Wenn wir also in unser Koordinatensystem die Temperaturen der beginnenden Ausscheidung von A aus einer A und B enthaltenden Schmelze für verschiedene Konzentrationen eintragen und diese Punkte durch einen kontinuierlichen Linienzug verbinden, so erhalten wir eine Kurve, über die wir nach obigem aus-

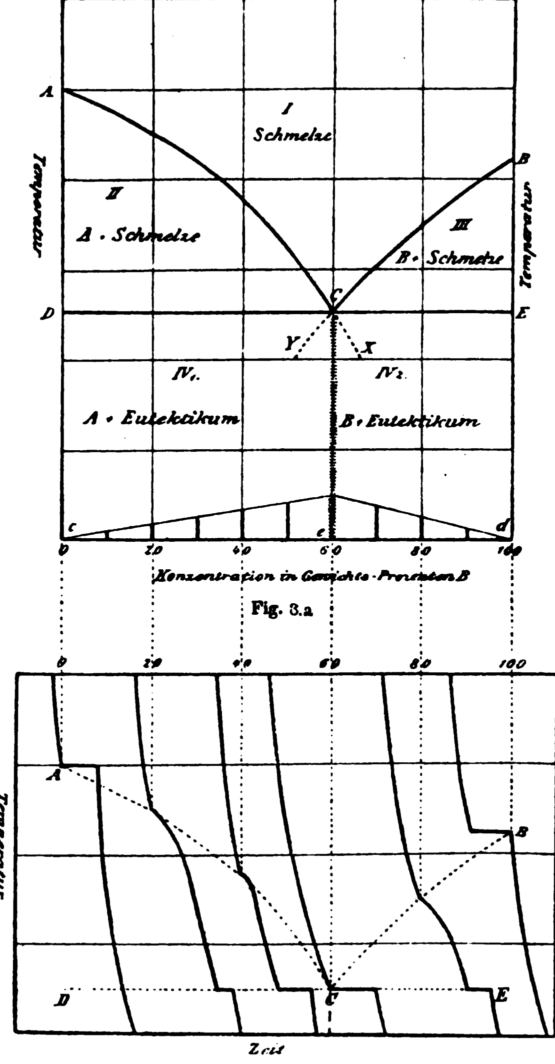


Fig. 8a

Fig. 8b.

sagen können, daß sie mit wachsender Konzentration von B zu tieferen Temperaturen geht. Diese Kurve sei AX.

A und B sind die zwei unabhängigen Bestandteile des Systems und als solche vollkommen gleichberechtigt. Nach dem Gesetze der Gefrierpunktserniedrigung wird auch der Schmelzpunkt von B durch Zusatz von A erniedrigt. Lösen wir also in einer großen Menge von geschmolzenem B wenig A und lassen die Schmelze kristallisieren, so scheidet sich reines B aus, und zwar ebenfalls bei einer um so tiefer unter dem Schmelzpunkt von reinem B liegenden Temperatur, je größer der Zusatz von A ist. Die Kurve BY, die die Temperaturen der beginnenden Ausscheidung von B aus A und B enthaltenden Schmelzen verschiedener Konzentrationen miteinander verbindet, muß da-

her mit wachsender Konzentration von *A*, d. i. abnehmender Konzentration von *B*, zu tieferen Temperaturen gehen.

Die beiden Kurven *AX* und *BY*, auf denen in jedem Punkte eine Kristallart, *A* oder *B*, im Gleichgewichte mit einer Schmelze ist, schneiden sich in irgend einem Punkte *C* des Konzentrations-Temperaturdiagramms, der jedenfalls tiefer liegt, als die Schmelzpunkte der beiden Komponenten. In diesem Schnittpunkte, als einem beiden Kurven angehörenden Punkte, müssen beide Kristallarten, *A* und *B*, im Gleichgewichte mit der Schmelze sein. Der Punkt *C* ist als Schnittpunkt der beiden Kurven *AX* und *BY* eindeutig bestimmt, d. h. es existiert nur eine einzige Konzentration und eine einzige Temperatur, bei der eine aus *A* und *B* bestehende Schmelze gleichzeitig mit Kristallen von *A* und *B* im Gleichgewichte ist. Daher muß eine Schmelze von der Konzentration *C* bei konstanter, dem Punkte *C* entsprechender Temperatur vollständig zu einem Gemenge der beiden Kristallarten *A* und *B* erstarren. Wir haben demgemäß ein vollständiges Gleichgewicht vor uns. Bei der Kristallisation vermehrt sich die Menge der beiden Kristallarten und vermindert sich die Menge der Schmelze, aber keine der Phasen ändert ihre Zusammensetzung. Zu dem gleichen Resultate führt ohne weiteres die Phasenregel, die für ein vollständiges Gleichgewicht in einem Zweistoffsystem die Anwesenheit dreier Phasen verlangt. Der Punkt *C* wird als eutektischer Punkt, die seiner Konzentration entsprechende Mischung als eutektisches Gemisch oder kurzweg als Eutektikum bezeichnet. Der Punkt *C* stellt den bei niedrigster Temperatur liegenden Punkt des stabilen Teiles der Kurven *AX* und *BY* dar. Gleichgewichtszustand vorausgesetzt ist also die Existenz eines auch nur teilweise flüssigen Gemisches aus *A* und *B* bei tieferer Temperatur, als *C* entspricht, nicht möglich. Die punktierten Stücke *CX* und *CY* entsprechen unterkühlten, also instabilen Zuständen.

Fig. 8b zeigt, wie sich die einzelnen Konzentrationen bei der Abkühlung verhalten und läßt daher umgekehrt erkennen, wie das Schmelzdiagramm durch Aneinanderfügung der Aussagen der einzelnen Versuche entsteht. Die erste Kurve stellt das Verhalten von geschmolzenem reinem *A* (= Konzentration 0) bei der Abkühlung in Form einer idealisierten Abkühlungskurve graphisch dar, wobei die Zeit als Abszisse, die Temperatur als Ordinate aufgetragen ist. Die bei konstanter Temperatur stattfindende Erstarrung gibt sich auf der Abkühlungskurve durch einen Haltepunkt (d. Zeitschr. **20**, 70, 1919) zu erkennen.

Die zweite Kurve stellt das Verhalten einer geschmolzenen Mischung aus 80 Proz. *A* und 20 Proz. *B* (Konzentration 20) bei der Abkühlung dar. Die Kristallisation beginnt bei einer unterhalb des Schmelzpunktes von reinem *A* liegenden Temperatur und schreitet unter beständigem Sinken der Temperatur fort, da die Schmelze sich infolge der Ausscheidung von reinem *A* beständig an *B* anreichert. Dies dauert so lange, bis die Schmelze die Konzentration des eutektischen Punktes *C* erreicht hat, worauf der Rest bei konstanter Temperatur kristallisiert. Die bei der Kristallisation von *A* frei werdende Wärme bewirkt eine Verringerung der Abkühlungsgeschwindigkeit, so daß sich der Beginn der Ausscheidung von *A* auf der Abkühlungskurve durch einen Knick zu erkennen gibt, während der bei konstanter Temperatur stattfindenden eutektischen Kristallisation ein Haltepunkt entspricht.

Die dritte Kurve stellt die Abkühlung einer Mischung mit 40 Proz. *B*, die vierte einer solchen mit 60 Proz. *B* dar. Letztere entspricht der Konzentration des reinen Eutektikums und zeigt nur einen Haltepunkt, wie bei einem reinen Stoffe.

Die fünfte Kurve stellt das Verhalten der Konzentration 80 dar. Ihr Verlauf ist dem Verlauf der Abkühlungskurven der Konzentrationen 20 und 40 ganz analog, jedoch entspricht hier der durch den Knick angezeigte Kristallisationsbeginn nicht der Ausscheidung von *A*, sondern von *B*.

Die sechste Kurve endlich stellt die Abkühlung der Konzentration 100, d. h. von reinem *B* dar und zeigt demgemäß nur einen Haltepunkt.

Eutektische Haltepunkte finden sich danach bei allen Konzentrationen mit Ausnahme der reinen Stoffe. Dies ist im Schmelzdiagramm Fig. 8a durch die das ganze Diagramm durchziehende eutektische Horizontale *DCE* ausgedrückt. Bei den in Fig. 8b dargestellten Abkühlungskurven ist angenommen, daß die Abkühlung stets bei gleicher Substanzmenge und unter gleichen Bedingungen erfolgt ist. In diesem Falle entspricht die Dauer der eutektischen Haltepunkte der Menge des kristallisieren en Eutektikums und ist demgemäß, wie die Anwendung der Hebelbeziehung (s. S. 18) ohne weiteres ergibt, zwischen den Konzentrationen 0 und *C* eine lineare Funktion des *B*-Gehaltes, zwischen *C* und 100 eine lineare Funktion des *A*-Gehaltes der Schmelze. Nach Tam-

mann[1]) bietet die Beobachtung der Länge der Haltezeiten ein außerordentlich wichtiges Hilfsmittel für die Ausarbeitung des Schmelzdiagramms. Aus diesem Grunde sind im Schmelzdiagramm, Fig. 8a, auf der Konzentrationsachse als Grundlinie Senkrechte errichtet, deren Längen den unter obiger Voraussetzung ermittelten eutektischen Zeiten proportional sind. Die Verbindungslinie der Endpunkte dieser Senkrechten liefert zwei gerade Linien, die sich bei der Konzentration *C* untereinander und welche die Grundlinie bei den Konzentrationen 0 und 100 schneiden.

Die Kurve unvollständigen Gleichgewichts *ACB*, welche die Temperatur des Beginns der Ausscheidung einer Kristallart in Abhängigkeit von der Konzentration der Schmelze darstellt, wird als Schmelzkurve bezeichnet. Sie besteht aus den beiden Ästen *AC* und *BC*, die durch den Punkt *C*, in dem eine plötzliche Richtungsänderung der Schmelzkurve stattfindet, voneinander getrennt sind. Längs des Kurvenastes *AC* scheidet sich die Kristallart *A*, längs des Kurvenastes *BC* die Kristallart *B* aus der kristallisierenden Schmelze aus. Auf der eutektischen Horizontalen *DE* herrscht vollständiges Gleichgewicht zwischen den beiden Kristallarten *A* und *B* und der Schmelze von der Zusammensetzung *C*.

Das Schmelzdiagramm wird durch die Schmelzkurve und die eutektische Horizontale in vier Zustandsfelder geteilt:

Das Zustandsfeld I oberhalb der Schmelzkurve *ACB* ist das Gebiet des vollständig Flüssigen oder auch das Gebiet der Schmelze, wie man kurzweg sagt.

Im Zustandsfeld II, dargestellt durch das Dreieck *ACD*, befindet sich die längs des Kurvenastes *AC* (wie wir zur Beschreibung der Konzentrationsänderung der Schmelze bei fallender Temperatur kurz sagen wollen) ausgeschiedene Kristallart *A* im Gleichgewichte mit der Schmelze. Die Frage nach der Menge der ausgeschiedenen Kristallart *A* und der Menge der damit im Gleichgewichte befindlichen Schmelze für einen beliebigen Punkt innerhalb dieses Zustandsfeldes wird durch die Hebelbeziehung (s. S. 18) beantwortet.

Im Zustandsfelde III, dargestellt durch das Dreieck *BCE*, befindet sich die längs des Kurvenastes *BC* ausgeschiedene Kristallart *B* im Gleichgewichte mit der Schmelze.

1) Tammann, Über die Ermittelung der Zusammensetzung chemischer Verbindungen ohne Hilfe der Analyse. Zeitschr. f. anorgan. Chem. 37, 303, 1903; Die Anwendung der thermischen Analyse in abnormen Fäl en, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 45, 24, 1905; Über die Anwendung der thermischen Analyse III, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 47, 289, 1905.

Das Zustandsfeld IV unterhalb der eutektischen Geraden *DE* ist das Gebiet des vollständig Kristallisierten und enthält die beiden Kristallarten *A* und *B*. Wegen der weiter unten zu besprechenden Struktur der vollständig erstarrten Legierungen ist dieses Gebiet durch eine durch *C* gehende, der Temperaturachse parallele, durchstrichene Linie *Ce* in zwei Teile, nämlich IV_1 und IV_2, geteilt. Bei metallographischen Untersuchungen wird nämlich das Eutektikum als ein einheitlicher Gefügebestandteil betrachtet. In der Tat bietet es dem Auge bei nicht zu starker Vergrößerung im allgemeinen den Anblick eines völlig homogenen Gebildes. Erst bei entsprechend starker Vergrößerung erkennt man, daß es aus zwei verschiedenen Kristallarten besteht, die häufig in Form feiner Lamellen, oft auch in Form kleiner, unregelmäßiger Körner nebeneinander angeordnet sind. Nun hat sich auf der *A*-reichen Seite, also bei Konzentrationen zwischen 0 und *C*, zuerst reines *A* ausgeschieden, und zwar so lange, bis die Schmelze sich an *B* bis zur Konzentration *C*, bei der vollkommene eutektische Kristallisation stattfindet, angereichert hatte. Demgemäß müssen in erstarrten Schmelzen des Gebiets IV_1 primär ausgeschiedene Kristalle von *A* vorhanden sein, welche in das zuletzt erstarrte Eutektikum eingebettet sind. Das Gebiet IV_1 ist daher als das Gebiet der Kristallart *A* und des Eutektikums bezeichnet, im Gegensatze zu IV_2, dem Gebiete der Kristallart *B* und des Eutektikums.

Nach Obigem hat das Schmelzdiagramm eines binären Systems, dessen Komponenten sich im flüssigen Zustande vollständig, im kristallisierten Zustande nicht mischen, keine polymorphe Umwandlung erleiden und beim Zusammenschmelzen keine chemische Verbindung miteinander eingehen, folgende Eigenschaften:

1. Die Schmelzkurve besteht aus nur zwei Ästen *AC* und *BC*.

2. Es findet sich nur eine eutektische Horizontale, die durch den Schnittpunkt *C* der beiden Äste der Schmelzkurve geht.

3. Die eutektische Horizontale durchschneidet das ganze Diagramm, endet also erst bei den Konzentrationen 0 und 100 (den reinen Stoffen).

Die Betrachtung der anderen Fälle des Verhaltens zweier Stoffe zueinander ergibt, daß ein solches Schmelzdiagramm nur für Zweistoffsysteme Gültigkeit haben kann, deren Komponenten das oben angegebene Verhalten zueinander zeigen. Ergibt daher die thermische Analyse eines binären Systems ein Schmelzdiagramm mit den oben unter 1, 2 und 3

angegebenen Eigenschaften, so kann man umgekehrt folgende Schlüsse ziehen:

1. Die Komponenten zeigen im flüssigen Zustande vollkommene, im kristallisierten Zustande keine Mischbarkeit.

2. Sie zeigen keine polymorphe Umwandlung, wenigstens keine, die mit genügender Wärmetönung verbunden ist, um sie unter den gegebenen Bedingungen nachweisen zu können.

3. Die Komponenten gehen beim Zusammenschmelzen bei der betreffenden Temperatur keine chemische Verbindung miteinander ein.

Eine Kontrolle der Aussagen des Schmelzdiagramms liefert die mikroskopische Untersuchung des Gefüges der erstarrten Reguli. Sie geschieht in der Weise, daß man die erstarrten Reguli anschleift und die geschliffenen Flächen auf Spiegelglanz poliert. Zuweilen lassen sich schon ohne weiteres aus dem Aussehen der polierten Schliffe Schlüsse ziehen, beispielsweise, wenn sich die einzelnen Gefügebestandteile durch ihre Farbe unterscheiden. Gewöhnlich ist eine weitere Behandlung, welche auf dem verschiedenen chemischen Verhalten der einzelnen Bestandteile, wie ihrer verschiedenen Widerstandsfähigkeit gegen Reagenzien (Ätzen), ihrer verschiedenen Oxydationsfähigkeit an atmosphärischer Luft bei gewöhnlicher Temperatur (Anlaufenlassen) oder beim Erhitzen (Anlassen) beruht, notwendig. Die Beobachtung kann selten mit bloßem Auge geschehen. Meistens bedarf man dazu eines geeigneten Mikroskops.

Wir wollen nun annehmen, wir hätten als *A* und *B* zwei Metalle gewählt, die sich gegen ein bestimmtes Ätzmittel verschieden verhalten, so daß *A* seiner Einwirkung widersteht, während *B* von ihm stark angegriffen wird. Die angeschliffenen, auf Spiegelglanz polierten und dann mit dem Ätzmittel behandelten Reguli sollen mittels senkrecht auf sie auffallenden Lichtes beleuchtet und durch ein Mikroskop mit ebenfalls senkrecht zum Schliff gestellter Achse beobachtet werden, was sich mit Hilfe eines sog. Vertikal-Illuminators bewerkstelligen läßt. Die nicht angegriffenen Teile des Schliffes, welche ihre glatte spiegelnde Oberfläche beibehalten haben, erscheinen dann hell, die angegriffenen Teile haben ihr Reflexionsvermögen verloren und erscheinen dunkel.

Fig. 9a soll einen so behandelten Schliff darstellen, der aus reinem *A* besteht. Er darf natürlich nur einen Gefügebestandteil enthalten. Die ebene Umgrenzung der nicht angegriffenen und daher hell erscheinenden Kristallpolyeder stellt sich in der Schliffebene als ein Netzwerk von dunklen, geraden Linien dar.

Fig. 9f stellt einen in derselben Weise geätzten Schliff von reinem *B* dar. Gemäß der angenommenen geringeren Widerstandfähigkeit von *B* gegen das Ätzmittel erscheint der Schliff dunkel. Die auch hier erkennbare Struktur des Schliffes läßt Kristallpolygone mit abgerundeten Ecken erkennen.

Fig. 9d stellt einen Schliff mit 60 Proz. *B* dar. Bei dieser Konzentration erstarrt die Legierung, wie aus unserem Diagramm (Fig. 8a) ersichtlich ist, vollkommen bei der eutektischen Temperatur. Wir haben also hier, wie man sich auch ausdrückt, das reine Eutektikum vor uns, von dem wir in diesem Falle annehmen, daß es das schon erwähnte typische lamellare Gefüge zeigt. Wir sehen daher, nebeneinander angeordnet, bei der Ätzung hell gebliebene Streifen von *A* und dunkel geätzte Streifen von *B*.

Fig. 9b stellt einen Schliff mit 20 Proz. *B* dar. Ein Blick auf das Diagramm lehrt, daß sich hier die Kristallart *A* zuerst ausgeschieden hat. Wir erkennen demgemäß die hell gebliebenen scharfkantig begrenzten Kristalle von *A*, welche wie Inseln in dem zuletzt zur Erstarrung gelangenden lamellaren Eutektikum eingebettet liegen. Die primär ausgeschiedenen Kristalle zeigen an einzelnen Stellen Einschlüsse des Eutektikums.

Fig. 9c stellt einen Schliff mit 40 Proz. *B* dar und zeigt gleichfalls primär ausgeschiedene *A*-Kristalle, umgeben von Eutektikum. Doch während im vorhergehenden Falle die zuerst ausgeschiedenen *A*-Kristalle, wie sich aus dem Diagramm mit Hilfe der Hebelbeziehung ergibt, $^2/_3$, das Eutektikum $^1/_3$ der Gesamtmenge ausmachen, hat sich hier das Verhältnis umgekehrt. Demgemäß ist in Fig. 9c eine entsprechende Verminderung der *A*-Kristalle und Vermehrung des Eutektikums gegenüber 9b zu erkennen.

Fig. 9e stellt einen Schliff mit 80 Proz. *B* dar. Hier hat sich, wie das Diagramm zeigt, zuerst *B* ausgeschieden, dementsprechend findet man hier die primär ausgeschiedenen, stark angegriffenen, abgerundeten Kristalle von *B* inselartig in einem Eutektikum verteilt, das sich in seinem Gefüge nicht von dem bei den andern Konzentrationen zur Ausscheidung gelangenden Eutektikum unterscheidet.

Wenn sich also das Gefüge der Schliffe mit den Aussagen des Diagramms in Übereinstimmung befindet, müssen die Schliffe folgendes Bild bieten:

1. Die relative Menge des Eutektikums muß von dem Gehalte 0 Proz. *B*, wo sie gleich 0 ist, bis *C* Proz. *B*, wo sie gleich 1 ist, wo also die ganze Legierung eutektisch kristallisiert, beständig zunehmen, von da bis 100 Proz. *B*, wo

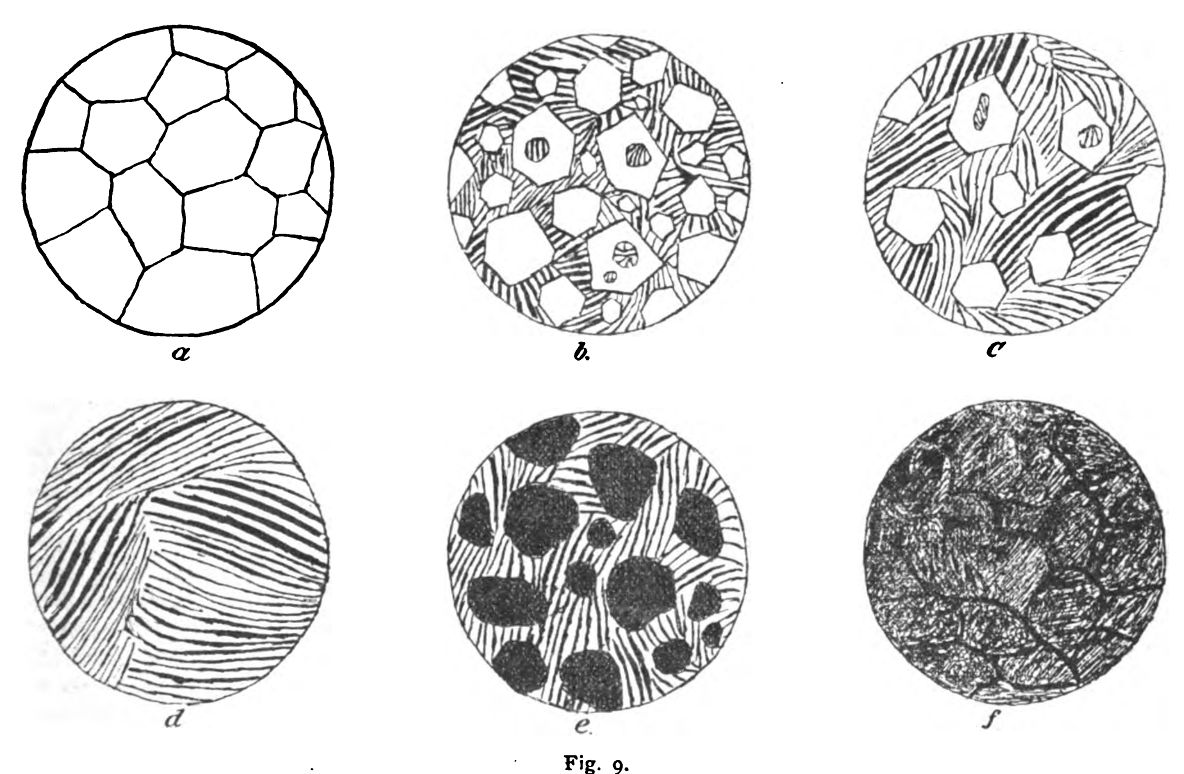


Fig. 9.

sie ebenfalls wieder o ist, beständig abnehmen. Das Gefüge des Eutektikums muß in allen Fällen dasselbe sein.

2. Die bei den Konzentrationen zwischen o und *C* primär ausgeschiedenen Kristalle müssen unter sich gleich, aber verschieden von den ebenfalls unter sich gleichen Kristallen sein, die sich zwischen *C* und 100 primär ausgeschieden haben.

3. Ein anderer Gefügebestandteil, als die drei besprochenen, nämlich die Kristallarten *A* und *B* und das Eutektikum, darf in den Schliffen nicht auftreten.

In einer Hinsicht führt die Untersuchung der Schliffe weiter, als die thermische Untersuchung, wenn es sich nämlich darum handelt, zu erfahren, innerhalb welcher Grenzen unsere Voraussetzung der Nichtmischbarkeit im kristallisierten Zustande erfüllt ist. Die thermische Untersuchung ist dazu nicht imstande, da die durch die Erstarrung geringer Mengen von Eutektikum bewirkte Periode der Temperaturkonstanz sich wegen ihrer Kürze der Beobachtung entzieht. Mit Hilfe des Mikroskops dagegen sind schon geringe Mengen des Eutektikums mit großer Schärfe zu erkennen. Ist wirklich keine Mischbarkeit im kristallisierten Zustande vorhanden, so muß man daher schon bei sehr geringen, unterhalb 1 Proz. betragenden Zusätzen von *B* zu *A* und *A* zu *B* das Auftreten des Eutektikums durch das Mikroskop nachweisen können.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

Berend Kröger, Grimsehls physikalische Schülerübungen Auswahl für die Unterstufe. 8. VIII u. 144 S. mit 75 Abb. Leipzig u. Berlin, B. G. Teubner. 1919. M. 3.60, ohne T.-Z.

Zu Lebzeiten Grimsehls besuchten zahlreiche Lehrer der Physik aus aller Welt die Oberrealschule auf der Uhlenhorst in Hamburg, um dort seine Einrichtungen für den physikalischen Unterricht und besonders für Schülerübungen zu studieren. Sie waren vorbildlich und haben tiefgehenden Einfluß auf die Entwicklung des physikalischen Unterrichts gehabt. Die von Grimsehl kurz vor dem Kriege geplante Herausgabe seiner physikalischen Schülerübungen wurde durch den Krieg verhindert. Um so freudiger ist es zu begrüßen, daß jetzt die für die Unterstufe bestimmten Übungen von einem Schüler und Mitarbeiter Grimsehls veröffentlicht sind. Sie umfassen alle in der Unterstufe zu behandelnden Teile der Physik, mit Ausnahme der Akustik, und zeigen, wie ausgezeichnet es Grimsehl verstand, seine Schüler in phy-

sikalisches Denken und Sehen einzuführen. Nicht alle Übungen sind neu, aber auch den längst bekannten hat Grimsehl den Stempel seines Geistes aufgeprägt. Da das Buch für die Hand des Schülers bestimmt ist, ist die Darstellung ziemlich ausführlich. Jede Übung beginnt mit einer Erklärung des zu lösenden Problems, ihr folgt die Angabe der Apparate, dann die Beschreibung der Ausführung mit einem Musterbeispiel; endlich folgen Bemerkungen, in denen eine kritische Wertung der Ergebnisse versucht wird. Diese und die am Schlusse des Buches gegebenen „Grundregeln zur Beherzigung für junge Übungsteilnehmer" wird jeder Physiklehrer mit Genuß lesen. Das Buch ist ein sehr wertvoller Beitrag zur Methodik des physikalischen Unterrichts und erweckt den lebhaften Wunsch, daß ihm bald die Sammlung von Grimsehls Schülerübungen für die Oberstufe folgen möchte.

Götting.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Halle Dr Andor Fodor für physiologische Chemie, Dr. Stefan Goldschmidt als Privatdozent für Chemie an der Universität Würzburg, an der Technischen Hochschule Dresden Dr. Hans Schmidt für organische Chemie, an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. August Eberhard für pharmazeutische Chemie, an der Universität Hamburg Dr. Fritz Goos für Physik, an der Universität Hamburg Dr. Ernst Tams für Geophysik und Seismologie.

Ernannt: Der Assistent der tschechischen technischen Hochschule Prag Dr. Josef Knop zum ord. Professor der allgemeinen, organischen und anorganischen Chemie an der Landwirtschaftlichen Hochschule Brünn, J. S W. Boyle zum Dozenten und Assistenten für Chemie an der Universität Dundee, E. de Barry Barnett zum Dozenten für organische Chemie am Technical Institute zu Aldgate, der ord. Professor der Physik an der Universität Würzburg Geh. Hofrat Dr. Wilhelm Wien in gleicher Eigenschaft an die Universität München, der ord. Professor der Harvard Universität Dr. Theodore W. Richards zum Präsidenten der amerikanischen Akademie für Kunst und Wissenschaften, der a. o. Professor an der Universität Berlin Dr. Issai Schur zum ord. Professor der Mathematik an derselben Hochschule, der Privatdozent an der Universität Gießen Dr. Felix Jentzsch zum a. o. Professor der Physik ebendaselbst, der a. o. Professor und Abteilungsvorsteher am Institut für Meßkunde an der Universität Berlin Dr. Alfred Merz zum ord. Honorarprofessor, der a. o. Professor der Mathematik an der Universität Kiel Dr. Otto Toeplitz zum ord. Professor.

Berufen: Der Privatdozent an der Technischen Hochschule Zürich Dr. L. Ruzicka zum ord. Professor für Chemie an der Universität Agram, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Berlin Dr. Konstantiev Carathéodory in gleicher Eigenschaft an die Nationaluniversität Athen, der a. o. Professor zu Tübingen Dr. Hans Happel zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule zu Breslau, der Professor Dr. Norbert Krebs zu Frankfurt a. M. zum ord. Professor der Geographie an die Universität Freiburg, der ord. Professor an der Technischen Hochschule zu Dresden Dr. Richard Edler v. Mises in gleicher Eigenschaft für Mathematik an die Universität Berlin. — Der ord. Professor der Physik an der Universität Jena Geh. Hofrat Dr. Max Wien hat einen Ruf in gleicher Eigenschaft an die Universität Göttingen abgelehnt.

Neuer Lehrauftrag: Dem Privatdozent für theoretische Physik an der Universität Breslau Professor Dr. Rudolf Ladenburg für Elektronik, dem Dozenten der Physik an der Universität Upsala Dr. Arvid Odemrants für wissenschaftliche Photographie an der Stockholmer Hochschule.

Verliehen: Dem Assistenten für angewandte Chemie an der Universität Würzburg Dr. Heinrich Bauch der Titel Professor, dem Konservator an der Landeswetterwarte zu München Dr. Eugen Alt der Titel Professor, dem Direktor des Physikalischen Instituts und ord. Professor der Physik an der Universität Jena Geh. Hofrat Dr. Max Wien ehrenhalber der Titel Dr.-Ingenieur der Technischen Hochschule in Danzig, dem Privatdozent für theoretische Physik an der Universität Frankfurt/M. Dr. Otto Stern der Titel Professor.

In den Ruhestand: Der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität München Wirkl. Geheimer Rat Dr. Konrad v. Röntgen.

Gestorben: Der frühere a. o. Professor für Chemie der Explosivstoffe an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Wilhelm Will, der frühere ord. Honorarprofessor für Mathematik an der Technischen Hochschule Dresden Studienrat Dr. Richard Heger, der ord. Professor der Geodäsie an der deutschen Technischen Hochschule Prag Josef Adamczyk, der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Göttingen Geh. Regierungsrat Dr. Woldemar Voigt, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Heidelberg Dr. Paul Stäckel.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Reproduktionsdruck der Spamerschen Buchdruckerei, Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 2. — 15. Januar 1920. — Redaktionsschluß für No. 4 am 15. Februar 1920. — 21. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Serien mehrfacher Linien im Argonspektrum.

Von Knud Aage Nissen.

Mit der Arbeit an der Serienauflösung des Argonspektrums seit dem Herbste 1917 beschäftigt, finde ich, daß die Höchstzahl der zusammengehörigen Nebenseriengrenzen gleich 18 ist. Beim Neon fanden K. W. Meißner[1]), F. Paschen[2]) und auch ich[3]) die Höchstzahl der zusammengehörigen Nebenseriengrenzen gleich 10. Im Heliumspektrum kennen wir ein Seriensystem von Dublets[4]). Demnach erscheint es jetzt berechtigt die Erwartung auszusprechen, daß man auch bei den übrigen Edelgasen die Höchstzahl der zusammengehörigen Nebenseriengrenzen gleich der Elektronenzahl pro Atom finden wird. Ich hoffe, daß ich mich später mit der Serienauflösung dieser Spektren werde betätigen können.

Den Schlüssel zur Serienauflösung des Argonspektrums gab mir vor zwei Jahren die Entdeckung der Serien in Tabelle I und Tabelle II.

Tabelle I.

I. *NS* mehrfacher Linien.

Grenzen: $2p_{11} = 21647{,}07$; $2p_8 = 20872{,}20$.

$m = 3$	4	5	6	7
$\nu =$ ca. 8000 $md = 13648{,}92$	14220,32 7426,75	16977,44 4669,63	18440,15 3206,92	19308,53 2338,55
$\nu =$ $md =$	13445,37 7426,83	16202,57 4669,63	17665,38 3206,82	18534,07 2338,13
$md =$	7426,79	4669,63	3206,87	2338,34

1) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. **58**, 333, 1919.
2) F. Paschen, Ann. d. Phys. (4) **60**, 405, 1919.
3) Siehe bei F. Paschen a. a. O.
4) Runge u. Paschen, Astrophys. Journ. **3**, 4, 1896. Vergleiche auch hierzu A. Fowler, A new type of series in the band spectrum associated with helium. Proc. Roy. Soc. Lond. A. **91**, 208, 1915 und J. W. Nicholson, daselbst 432. Ferner J. Stark, Ann. d. Phys. (4), **56**, 1918, u. a.

Die Formel von W. Ritz wurde benutzt. Es ergab sich für die Serie $2p_{11} - md$:

$$\nu = 21647{,}07 - md;\quad md = \frac{109737{,}2}{(m + d + \delta \cdot (md))^2};$$
$$d = -0{,}145951296;\quad \delta = -1{,}360133 \cdot 10^{-6}.$$

$m = 3$	4	5	6	7
$md_{\text{ber.}} = 13648{,}92$	7426,75	4669,63	3206,92	2338,10
beob. — ber. = ?	0,00	0,00	0,00	+ 0,45

Konstante N_∞ nach Messungen von F. Paschen[5]) wird bei der ersten Durcharbeitung des ganzen Argonmaterials benutzt. Einen negativen Wert von δ findet man auch anderswo, z. B. in Li. I. *NS*[6]). Den Wert von $3d_{\text{ber.}}$ finde ich bestätigt durch die Kombination $1{,}5\,S - 3d = 24090{,}30$; beob. 24089,59. (Siehe hierzu Tabelle III und Tabelle IV.)

Tabelle II.

II. *NS* mehrfacher Linien.

Grenzen: $2p_{11} = 21647{,}07$; $2p_8 = 20872{,}20$.

$m = 1{,}5$	2,5	3,5	4,5	5,5
$\nu = 39017{,}4$ $ms = 60664{,}5$		11731,86 9915,21	15783,45 5863,62	17776,60 3870,47
$\nu = 39793{,}9$ $ms = 60666{,}1$		10958,30 9913,90	15009,38 5862,82	17001,63 3870,57
$ms = 60665{,}3$		9914,56	5863,22	3870,52

Die Formel von W. Ritz gibt hier für die Serie $2p_{11} - ms$ folgendes:

$$\nu = 21647{,}07 - ms;\quad ms = \frac{109737{,}2}{(m + s + \sigma\,(ms))^2};$$
$$s = -0{,}176681;\quad \sigma = +3{,}567455 \cdot 10^{-7};$$

5) F. Paschen, Ann. d. Phys. (4), **50**, 937, 1916.
6) W. M. Hicks, Transactions Roy. Soc. Lond. A. **210**, 96, 1911.

Tabelle III. II *NS* mehrfacher Linien.

x	$2p_x$	$m = 1,5$	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5
18	27387,76	$\nu =$ 10351,46 $mS =$ 37739,22		19406,25 7981,51							
17	24645,43	$\nu =$ 13093,792 $mS =$ 37739,22		16664,73 7980,70	19694,89 4950,54		22208,75 2436,68		23200,03 1445,40		
16	24065,90	$\nu =$ 13673,32 $mS =$ 37739,22		16084,7 7981,2							
15	23993,40	$\nu =$ 13745,82 $mS =$ 37739,22		16012,96 7980,44					22547,46 1445,94		
14	23595,92	$\nu =$ 14143,30 $mS =$ 37739,22		15615,88 7980,04							
13	23329,21	$\nu =$ 14410,01 $mS =$ 37739,22		15348,21 7981,00	18377,08 4952,13						
12	22942,32	$\nu =$ 14796,90 $mS =$ 37739,22		14960,4 7981,9							21983,05 959,27
11	21647,07	$\nu =$ 16092,15 $mS =$ 37739,22		13665,23 7981,84	16697,22 4949,85			19800,49 1846,58	20199,13 1447,94		
10	21542,79	$\nu =$ 16196,4 $mS =$ 37739,2		13561,15 7981,64	16592,50 4950,29			19694,89 1847,90			
9	21427,29	$\nu =$ 16311,93 $mS =$ 37739,22		13445,37 7981,92	16477,39 4949,90		18988,59 2438,70			20264,82 1162,47	
8	20872,20	$\nu =$ 16867,02 $mS =$ 37739,22			15922,81 4949,39			19025,66 1846,54			
7	20796,07	$\nu =$ 16943,15 $mS =$ 37739,22			15845,70 4950,37						
6	20005,58	$\nu =$ 17733,64 $mS =$ 37739,22			15055,5 4950,1					18841,94 1163,64	
5	19909,94	$\nu =$ 17829,28 $mS =$ 37739,22			14960,4 4949,5	16542,87 3367,07		18063,52 1846,42			18952,0 957,9
4	19829,31	$\nu =$ 17909,91 $mS =$ 37739,22			14878,91 4950,40			17981,64 1847,67			
3	19754,64	$\nu =$ 17984,58 $mS =$ 37739,22			14804,41 4950,23	16385,98 3368,66					
2	17286,69	$\nu =$ 20452,53 $mS =$ 37739,22			12336,664 4950,03						16330,85 955,84
1	15908,06	$\nu =$ 21831,16 $mS =$ 37739,22			10958,30 4949,76						
		$mS =$ 37739,22		7981,22	4950,19	3367,86	2437,69	1847,02	1446,43	1163,06	957,67

$m = 1,5$	2,5	3,5	4,5	5,5
$ms_{\text{ber.}} =$ 60664,5	20204,39	9914,84	5865,42	3870,47
beob. — ber. = 0,0	?	+ 0,37	— 1,80	0,00

Von der zugehörigen Hauptserie fallen sämtliche höheren Glieder im unerforschten Gebiet unterhalb λ 2050.

Eine Bestätigung des Wertes $2,5\,s_{\text{ber.}}$ gibt die Kombination $1,5\,S - 2,5\,s = 17534,83$; beob. 17536,11; beob.—ber. = + 1,28. (Siehe hierzu Tabelle III und Tabelle IV).

Mit Benutzung der Formel von W. Ritz findet man für die Serie $2p - mS$ folgendes:

$$\nu = 21\,647,07 - mS;\; mS = \frac{109\,737,2}{(m + S + \psi\,(mS))^2};$$
$$S = +\,0,209099;\; \psi = -\,1,02779 \cdot 10^{-7}.$$

Im Ausdruck: „beob.—ber." wurden hier die Mittelwerte der Terme mS benutzt, da die Serie $2p_{11} - mS$ unvollständig ist. Das Suchen

$m = 1,5$	2,5	3,5	4,5	5,5	6,5	7,5	8,5	9,5	10,5
$mS_{\text{ber.}} =$ 37739,22	14969,17	7980,11	4949,62	3367,22	2438,14	1846,58	1446,86	1164,15	957,04
beob.—ber. = 0,00	?	+ 1,11	+ 0,57	+ 0,64	— 0,45	+ 0,44	— 0,43	— 1,09	+ 0,63

Tabelle IV.

Verzeichnis der benutzten Argonlinien.

$\lambda_{\text{Luft int.}}$	$\nu_{\text{vac. int.}}$			Int.
ca. 12500	ca, 8000	P.	$2p_{11}-3d$	
9657,82	10351,46	MIIb	$2p_{18}-1{,}5S$	(7)
9123,00	10958,30	MIIa	$\{2p_8-3{,}5s$ $2p_1-4{,}5S\}$	1
8521,46	11731,86	MIIa	$2p_{11}-3{,}5s$	2
8103,691	12336,664	MI	$2p_2-4{,}5S$	3
7635,107	13093,792	MI	$2p_{17}-1{,}5S$	7
7435,49	13445,37	R.	$\{2p_9-3{,}5S$ $2p_8-4d\}$	1
7372,01	13561,15	R.	$2p_{10}-3{,}5S$	1
7315,88	13665,23	R.	$2p_{11}-3{,}5S$	1
7311,53	13673,32	R.	$2p_{16}-1{,}5S$	1
7272,94	13745.82	MIIa	$2p_{15}-1{,}5S$	3
7068,57	14143,30	R. u. P.	$2p_{14}-1{,}5S$	1
7030,28	14220,32	R. u. P.	$2p_{11}-4d$	2
6937,74	14410,01	R. u. P.	$2p_{13}-1{,}5S$	2
6756,34	14796,90	R. u. P.	$2p_{12}-1{,}5S$	1
6752,91	14804,41	R. u. P.	$2p_3-4{,}5S$	5
6719,10	14878,91	R. u. P.	$2p_4-4{,}5S$	2
6682,5	14960,4	R. u. P. *	$\{2p_{12}-3{,}5S$ $2p_5-4{,}5S\}$	2
6660,69	15009,38	R. u, P.	$2p_8-4{,}5s$	3
6640,3	15055,5	R. u. P. *	$2p_6-4{,}5S$	1
6513,65	15348,21	R. u P.	$2p_{13}-3{,}5S$	1
6402,00	15615,88	R. u. P.	$2p_{14}-3{,}5S$	1
6334,03	15783,45	R. u. P.	$2p_{11}-4{,}5s$	1
6309,15	15845,70	R. u. P.	$2p_7-4{,}5S$	1
6278,59	15922,81	R. u. P.	$2p_8-4{,}5S$	2
6243,24	16012,96	R. u. P. *	$2p_{15}-3{,}5S$	3
6215,4	16084,7	K. *	$2p_{16}-3{,}5S$	1
6212,52	16092,15	R. u. P.	$2p_{11}-1{,}5S$	6
6172,5	16196,4	R. u. P. *	$2p_{10}-1{,}5S$	5
6170,18	16202,57	R. u. P.	$2p_8-5d$	5
6128,81	16311,93	R. u. P.	$2p_9-1{,}5S$	3
6121,72	16330,85	R. u. P.	$2p_2-10{,}5S$	2
6101,12	16385,98	R. u. P.	$2p_3-5{,}5S$	3
6067,27	16477.39	R. u. P.	$2p_9-4{,}5S$	1
6043.26	16542,87	R. u. P.	$2p_5-5{,}5S$	8
6025,18	16592,50	R. u. P.	$2p_{10}-4{,}5S$	4
5999,07	16664,73	R. u. P.	$2p_{17}-3{,}5S$	4
5987,39	16697,22	R. u. P.	$2p_{11}-4{,}5S$	5
5927,12	16867,02	R. u. P.	$2p_8-1{,}5S$	3
5900,48	16943,15	R. u. P.	$2p_7-1{,}5S$	1
5888,57	16977,44	R. u. P.	$2p_{11}-5d$	6
5880,19	17001,63	R. u. P.	$2p_8-5{,}5s$	1
5691,72	17536,11	E. u. V.	$1{,}5S-2{,}5s$	1
5659,25	17665.38	E. u. V.	$2p_8-6d$	4
5637,46	17733,64	E. u. V.	$2p_6-1{,}5S$	1
5623,84	17776,60	E. u. V.	$2p_{11}-5{,}5s$	1
5607.22	17829,28	E. u. V.	$2p_5-1{,}5S$	8
5581,98	17909,91	E. u. V.	$2p_4-1{,}5S$	3
5559,71	17981,64	E. u. V.	$2p_4-7{,}5S$	3
5558,80	17984,58	E. u. V.	$2p_3-1{,}5S$	6
5534,51	18063,52	E. u. V.	$2p_5-7{,}5S$	1
5440,07	18377,08	E. u. V.	$2p_{13}-4{,}5S$	4
5421,47	18440,15	E. u. V.	$2p_{11}-6d$	6
5394,00	18534,07	E. u. V.	$2p_8-7d$	1
5305,86	18841,94	E. u. V. *	$2p_6-9{,}5S$	4
5275,1	18952,0	K.	$2p_5-10{,}5S$	1
5264,88	18988,59	E. u. V. *	$2p_9-6{,}5S$	1
5254,62	19025,66	E. u. V.	$2p_8-7{,}5S$	2
5177,64	19308,53	E. u. V.	$2p_{11}-7d$	2
5151,57	19406,25	E. u. V.	$2p_{18}-3{,}5S$	4
5076,07	19694,89	E. u. V. *	$\{2p_7-4{,}5S$ $2p_{10}-7{,}5S\}$	1
5049,00	19800,49	E. u. V.	$2p_{11}-7{,}5S$	3
4949,35	20199,13	E. u. V. *	$2p_{11}-8{,}5S$	2
4933,31	20264,82	E. u. V. *	$2p_9-9{,}5S$	6
4888,03	20452,53	E. u. V.	$2p_2-1{,}5S$	5
4579,35	21831,16	E. u V. *	$2p_1-1{,}5S$	8
4547,71	21983,05	E. u. V. *	$2p_{12}-10{,}5S$	2
4501,49	22208,75	E. u. V.	$2p_{17}-6{,}5S$	1
4433,87	22547,46	K. *	$2p_{15}-8{,}5S$	2
4309,15	23200,03	E. u. V. *	$2p_{17}-8{,}5S$	2
4150,02	24089.59	E. u. V.	$1{,}5S-3d$	1
2562,2	39017,4	E. u. V. *	$2p_{11}-1{,}5s$	6
2512,2	39793,9	E. u. V. *	$2p_8-1{,}5s$	3
2452,9	40755,6	E. u. V. *	$2p_5-1{,}5s$	1
2233,5	44758,6	E. u. V. *	$2p_1-1{,}5s$	1

(Vergleiche hierzu „Argon" in H. Kaysers Handb. d. Spektroskopie 5, 67, 1910).

nach Linien $1{,}5s-2p_x$ im Anschluß an Tabelle II ergab $1{,}5s-2p_5=40755{,}4$; beob. 40755,6; und $1{,}5s-2p_1=44757{,}2$; beob. 44758,6. (Siehe hierzu Tabelle IV.)

Die Reduktion auf „Luft international" wurde mittels einer Tabelle von H. Kayser (Handb. d. Spektroskopie **6**, 891, 1912) vorgenommen[7]), während zur Reduktion auf Vakuum die Tabelle in Kaysers Handb. d. Spektroskopie **2**, 514, 1902 benutzt wurde. Die von K. W. Meißner[8]) gegebenen Linien sind von ihm selbst zu Wellenzahlen in Vakuum umgerechnet.

Ein Stern bedeutet, daß die betreffende Linie zum blauen Spektrum gerechnet wird. Von den Buchstaben stehen: MI, MIIa und MIIb für Meißner[8]), P. für Paschen[9]), R. für Runge[10]), R. u. P. für Runge und Paschen[11]), K. für Kayser[12]) und E. u. V. für Eder und Valenta[13]).

Die von Kayser[12]), Rydberg[14]), E. Paul-

7) Siehe auch J. M. Eder, Wiener Ber. **123**, 2a, 2292, 1914.

8) K. W. Meißner, Ann. d. Phys. (4) **51**, 115, 1916 (MI) und diese Zeitschr **17**, 549, 1916 (MIIa u. b). MIIa sind neu gemessene Linien, während die Linien MIIb ältere Beobachtungen sind, welche von Meißner kraft plausibler Überlegungen korrigiert wurden.

9) Paschen, Ann. d. Phys. (4), **27**, 537, 1908.

10) Runge, Astrophys. Journ. **9**, 281, 1899.

11) Runge u. Paschen, Astrophys. Journ. **8**, 97, 1898.

12) Kayser, Astrophys. Journ. **4**, 1, 1896; Berl. Ber. 1896, S. 551.

13) Eder u. Valenta, Denkschr. der Wien. Akad. **64**, 210, 1896.

14) J. R. Rydberg, Astrophys. Journ. **6**, 338, 1897.

son[15]) und K. W. Meißner[8]) gefundenen konstanten Differenzen 846,16 + 803,08 + 606,84 kamen für die oben gegebenen Serien nicht in Betracht.

Herrn Prof. Dr. F. Paschen danke ich an dieser Stelle für sein liebenswürdiges Interesse und große Güte gegen mich.

Nachtrag bei der Korrektur.

Tabelle Ia.

Satellitserie, anschließend an die Tabelle I.
Grenze: $2p_8 = 20872{,}20$.

Beobachter	R.	R. u. P.	E. u. V.
$m = 3$	4	5	6
Int. $\lambda_{\text{Luft int.}} =$	(1). 7206,93	(4). 6090,76	(2.) 5621,06
$\nu_{\text{vac. int.}} =$	13871,78	16413,84	17785,40
$md' =$	7000,42	4458,36	3086,80

Nach der Formel von W. Ritz findet man:

$$\nu = 20872{,}20 - md'; \; md' = \frac{109737{,}2}{(m + d' + \delta'(md'))^2};$$

$$d' = -0{,}03508; \; \delta' = -8{,}07438 \cdot 10^{-7};$$

$m = 3$	4	5	6
$md'_{\text{ber.}} = 12569{,}2$	7000,42	4458,30	3086,80
beob.—ber. = ?	0,00	+ 0,06	0,00

15) E. Paulson, diese Zeitschr. 15, 831, 1914.

Kopenhagen, im November 1919.

(Eingegangen 16. Dezember 1919.)

Über Doppelschichten und Oberflächenspannung an polarisierten Elektroden.

Von Karl F. Herzfeld.

Einleitung.

Die Annahme, daß sich an der Grenze zwischen einem Metall und einem Elektrolyten elektrische Doppelschichten ausbilden, hat sich auf mehreren Erscheinungsgebieten bewährt, außer auf dem Gebiete der eigentlichen Elektrochemie besonders bei den elektrokinetischen Erscheinungen (Endosmose, Strömungsströme usw.) und bei der Elektrokapillarität. Schon Lippmann[1]) und Helmholtz[2]) erklärten die Veränderung der Oberflächenspannung von Quecksilber beim Anlegen einer polarisierenden Kraft damit, daß die Doppelschicht wie ein Kondensator aufgeladen würde und dadurch zwischen den beiden Belegungen die Anziehungskräfte sich änderten. Sie leiteten hierfür die Gleichung ab

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \varphi} = -E, \qquad (1)$$

wo σ die Oberflächenspannung, φ das Potential, E die Ladungsdichte der Doppelschicht bedeuten. Dieselbe Formel erhielt Planck[3]) ohne die spezielle Annahme einer Doppelschicht unter der Voraussetzung, daß der Zustand der Elektrode durch die hindurchgeleitete Elektrizitätsmenge vollständig bestimmt sei, daß also die Elektrode vollkommen polarisierbar sei, welche Annahme auch Lippmann und Helmholtz machen. Um einige Schwierigkeiten dieser sogenannten Ladungsstromtheorie zu vermeiden, nahm Warburg[4]), daß die primäre Wirkung des Stromes in einer Konzentrationsänderung an den Elektroden beruht (Leitungsstromtheorie). Diese Konzentrationsänderungen wirken nun auf die Oberflächenspannung nach der Formel von W. Gibbs[5])

$$u = -\frac{c}{RT}\frac{\partial \sigma}{\partial c}, \qquad (2)$$

wo u den Unterschied zwischen der wirklich vorhandenen Salzmenge pro cm² und derjenigen Menge bedeutet, die bei überall gleichmäßiger Konzentration c vorhanden wäre. Diese letztere Theorie wurde später besonders von G. Meyer[6]) verfochten. Die Anschauung von Nernst[7]) über das Zustandekommen der Doppelschichten verminderte den Gegensatz zwischen diesen beiden Auffassungen, da in seiner Theorie die Potentialdifferenz mit der Konzentration der Ionen unmittelbar verknüpft ist. Auch zeigte er, daß sich die Oberflächenspannung mit der natürlichen Potentialdifferenz, die durch die Konzentration der Quecksilberionen bestimmt ist, in analoger Weise ändert wie mit einer äußeren polarisierenden Kraft. F. Krüger[8])

1) G. Lippmann, Pogg. Ann. 149, 547, 1873; Ann. d. chim. et de phys. (5) 5, 494, 1875; 12, 265, 1877; Wied. Ann. 11, 316, 1880.
2) H. v. Helmholtz, Ges. Abh. 1, S. 925.
3) M. Planck, Wied Ann. 44 385, 1891.
4) O. Warburg, Wied. Ann. 38, 321, 1889; 41, 1, 1890.
5) W. Gibbs, Thermodynamische Studien, S. 271; vgl. auch H. Freundlich, Kapillarchemie, Leipzig 1909, S. 51.
6) G. Meyer, Wied. Ann. 45, 508, 1892; 53, 845, 1894; 56, 680, 1896; 67, 433, 1899.
7) W. Nernst, Beilage zu Wied. Ann. 58, 777, 1896; Z. f. Elektroch. 4, 29, 1897.
8) F. Krüger, Gött. Nachr. S. 33, 1904.

vereinigte die Helmholtzsche und Warburgsche Anschauung, indem er neben dem Aufladungseffekt noch eine Adsorption des neutralen Quecksilbersalzes an der Metalloberfläche annahm.

Lippmann und Helmholtz hatten die Doppelschicht als einfachen Kondensator konstanter Kapazität aufgefaßt. K. Schreber[1]) und später G. Møller[2]) versuchten über ihren Bau näheren Aufschluß zu gewinnen doch berücksichtigte Möller dabei nur eine einzelne Ionengattung, während Schreber über das Verhältnis der verschiedenen Ionen falsche Annahmen machte. Möller versuchte auch die Oberflächenspannung direkt aus den elektrostatischen Kräften (ohne Vermittlung der Thermodynamik) zu berechnen. Im Jahre 1913 erschien eine Arbeit von Chapman[3]), in der dieser eine sehr vollständige Untersuchung über den Bau der Doppelschicht anstellte. Unsere Formeln (3), (4), (5), (7), (8), (10) finden sich schon bei ihm, doch hat er einige wichtige Schlußfolgerungen nicht gezogen. Er leitet auch für den Fall der natürlichen Potentialdifferenz (also ohne die Annahme einer vollständig polarisierbaren Elektrode) die Gleichung (1) ab. In letzter Zeit haben besonders die Untersuchungen v. Laues[4]) das Interesse für die Doppelschichten neu belebt, für unsere Zwecke sind besonders seine Betrachtungen[5]) über die Kräfte und Spannungen in solchen von Wichtigkeit.

In den meisten der erwähnten Arbeiten ist der Einfluß des Reststromes, der bei angelegter polarisierender Kraft stets durch das System geht, vernachlässigt. Die Polarisation läßt sich in den hier in Betracht kommenden Fällen als Konzentrationspolarisation auffassen. Sie kommt dadurch zustande, daß an der Quecksilberkathode die Quecksilberionen gemäß dem Faradayschen Gesetz ausgeschieden werden, dagegen der Strom von ihnen nur gemäß der Überführungszahl getragen wird, daher werden anfangs mehr ausgeschieden als durch den Strom nachgeliefert werden und wenn Diffusion ausgeschlossen ist, tritt Verarmung ein. Seit Auftreten der Nernstschen Theorie wird nun die Polarisation als Kraft einer Konzentrationskette aufgefaßt[6]). Wie wir sehen werden, ist diese Auffassung in bezug auf die Hg-Ionen falsch, da unmittelbar an der Elektrode stets die der Lösungstension entsprechende Konzentration herrscht und für diese einem Gleichgewicht entsprechende Kraft nur das Verhältnis der Konzentrationen an der Oberfläche selbst und tief in der Lösung maßgebend ist, nicht aber die Art, wie die Konzentration aus der einen in die andere übergeht. Für die anderen Ionen ist dagegen die übliche Auffassung richtig. Die Schätzung des Einflusses des Reststromes, wie sie z. B. Smith[1]) versucht hat, ist deshalb falsch, weil er zur Widerstandsberechnung die Konzentration in der Kapillare annimmt, die ohne Strom vorhanden ist, während für uns gerade die durch die Polarisation sehr stark geminderte Konzentration und die Ausschaltung der andern Ionen wesentlich ist, die einen viel höheren Widerstand ergibt.

Im übrigen kommt es uns im folgenden hauptsächlich darauf an, die Annahmen und Gedanken möglichst scharf herauszuschälen, während die Anwendbarkeit auf das Experiment durch die notgedrungen gemachten Annahmen stark eingeschränkt wird.

Die natürliche Polarisation.

Gegeben sei eine Quecksilberoberfläche in Berührung mit einer Lösung, in der C_1 die Konzentration der $Hg^{\cdot\cdot}_2$-Ionen, C_2 diejenige von irgendwelchen indifferenten Ionen eines zweiwertigen unedlen Metalls, etwa Kalzium oder Magnesium, C_3 die des zweiwertigen Anions, etwa des Sulfations, bedeutet. Wir müssen die Oberfläche als eben betrachten, da mir die Lösung nur für den eindimensionalen Fall gelungen ist. Die Grenze zwischen Metall und Lösung wollen wir als scharfe Trennungsebene auffassen, so daß das vollkommen praktisch leitende Quecksilber unverändert bis an sie heranreicht und dann direkt das unveränderte Lösungsmittel beginnt. Auf die Ionen sollen keine anderen als rein elektrische Kräfte wirken, auf das undissoziierte Salz überhaupt keine Kräfte. Wir nehmen die Trennungsebene zur Y-Z-Ebene und legen die positive X-Achse in die Lösung. Das Potential bezeichnen wir mit φ und legen den Nullpunkt des Potentials in unendlich großer Entfernung in die Lösung. Das Potential im Metall hat dann den Wert φ_0. Bezeichnen wir noch die Dielektrizitätskonstante des Wassers mit D, so gilt für den Zusammenhang zwischen dem Potential und der elektrischen Dichte ρ die Poissonsche Gleichung

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi}{D}\rho \qquad (3)$$

1) K. Schreber, Wied. Ann. **53**, 109, 1894.
2) G. Möller, Ann. d. Phys. **27**, 665, 1908.
3) D. L. Chapman, Phil. Mag. **25**, 475, 1913.
4) M. v. Laue, Jahrb. d. Rad. u. El. **15**, 205, 257, 1918.
5) l. c. S. 237, 238, 263.
6) Siehe z. B. Le Blanc, Lehrbuch d. Elektrochemie, Leipzig 1914, S. 293.

1) G. W. J. Smith, Zeitschr. f. phys. Chem. **32**, 433, 1900.

mit den Grenzbedingungen

$$\varphi = \varphi_0 \text{ für } x = 0$$
$$\varphi = 0 \text{ für } x = \infty.$$

Die Dichte ist nun gleich der Differenz zwischen der positiven und der negativen Ladung des Volumelements, also gleich

$$2F(C_1 + C_2 - C_3),$$

F bedeutet das elektrochemische Äquivalent. Für die Konzentrationen machen wir nun mit Chapman und v. Laue den Ansatz

$$C_1 = C_{1\infty} e^{-\frac{2\varphi F}{RT}}$$
$$C_2 = C_{2\infty} e^{-\frac{2\varphi F}{RT}} \qquad (4)$$
$$C_3 = C_{3\infty} e^{+\frac{2\varphi F}{RT}}$$

der aus dem Boltzmannschen Prinzip folgt. Der Index ∞ bezieht sich stets auf die Lösung in unendlicher Entfernung, wo sie natürlich elektrisch neutral ist, also

$$C_{1\infty} + C_{2\infty} = C_{3\infty}$$

gilt, während der Index 0 sich auf die Grenzfläche bezieht. Die Bedeutung dieses Ansatzes wollen wir nun näher diskutieren.

Logarithmieren wir, so bekommen wir

$$-\varphi = \frac{RT}{2F} \lg \frac{C_1}{C_{1\infty}}$$

andererseits ergibt die Nernstsche Formel

$$-\varphi_0 = \frac{RT}{2F} \lg \frac{\gamma_1}{C_{1\infty}}.$$

Hier ist γ_1 die der Lösungstension P entsprechende Konzentration. Daraus ersehen wir, daß an der Oberfläche, an der φ gleich φ_0 ist, stets die Konzentration γ_1 herrschen muß, die der Lösungstension entspricht, und das ist bei genauerer Überlegung sehr einleuchtend. Unser Ansatz 4, der aus dem Boltzmannschen Prinzip folgt, erweitert die Nernstsche Gleichung nämlich insofern, als er nicht nur wie diese den Zusammenhang zwischen Konzentration und Potentialdifferenz genommen vom Metall bis in die Mitte der Lösung gibt, sondern den gleichen Zusammenhang auch innerhalb der Doppelschicht festlegt, wo sich sowohl Konzentration als auch Potential von Punkt zu Punkt ändern. So läßt sich die Formel (4) wortwörtlich so ableiten, wie die Nernstsche Gleichung. Da der ganze Potentialabfall in der Lösung liegt, herrscht unmittelbar an der Oberfläche das gleiche Potential wie in der Elektrode, infolgedessen ist die Arbeit zur Überführung von Ionen aus dem Metall an die Grenzfläche vom Potential unabhängig und daher dort auch die Konzentration[1]). Bilden wir die Produkte $C_1 C_3$ und $C_2 C_3$, so sind diese den Konzentrationen des entsprechenden undissoziierten Salzes proportional. Wir sehen, daß diese Konzentrationen vom Potential und damit auch vom Orte unabhängig sind, also überall den gleichen Wert haben wie in der Lösung. Das muß auch sein, da wir angenommen haben, daß auf die neutralen Moleküle von der Grenzfläche keine Kräfte ausgeübt werden. Dann lautet Gleichung (3)

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} = -\frac{4\pi}{D} 2F\left[(C_{1\infty} + C_{2\infty}) e^{-\frac{2\varphi F}{RT}} - - C_{3\infty} e^{+\frac{2\varphi F}{RT}}\right] = -\frac{4\pi}{D} 2F C_{3\infty} \left(e^{-\frac{2\varphi F}{RT}} + e^{\frac{2\varphi F}{RT}}\right).$$

Wir führen jetzt folgende Abkürzungen ein:

$$y = -\varphi \frac{2F}{RT},$$
$$\xi = 2F \sqrt{\frac{4\pi C_{3\infty}}{2DRT}} \cdot x$$

und finden als Ausgangsgleichung

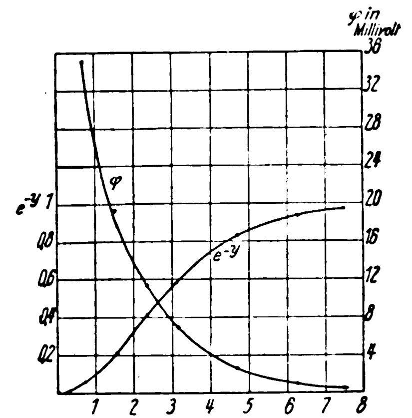
$$\frac{1}{2} \frac{d^2 y}{d\xi^2} = e^y - e^{-y}. \qquad (5)$$

Zur Integration multiplizieren wir beide Seiten mit $\frac{dy}{d\xi}$ und integrieren. Das ergibt

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 = e^y + e^{-y} - 2 = \left(e^{\frac{y}{2}} - e^{-\frac{y}{2}}\right)^2. \qquad (6)$$

Neuerliche Integration liefert dann

$$y = 2 \log \operatorname{tangh}(\xi - \xi_0). \qquad (7)$$



Versuchen wir zu berechnen, nach welcher Strecke die Potentialdifferenz gegen die Lösung auf 1 Millivolt gefallen ist, so finden wir

1) Vgl. hierzu die analogen Betrachtungen bei Schottky, diese Zeitschr. 20, 223, 1919.

$$\sim 6\cdot\frac{10^{-8}}{\sqrt{C_{3\infty}}}\,\mathrm{cm}\left(C \text{ in } \frac{\mathrm{Mol}}{\mathrm{Liter}}\right)$$

ξ_0 bestimmt sich aus

$$y_0 = 2\lg\operatorname{tangh}(-\xi_0).$$

Im Unendlichen verschwindet y wie $-4e^{-2\xi}$. Die Feldstärke verschwindet auch $\sim e^{-2\xi}$. Die negative Seite der Doppelschicht ist dadurch gebildet, daß die positiven Ionen in geringerer Zahl, die negativen in größerer vorhanden sind als in der neutralen Lösung. Die Ladung der Doppelschichtbelegung im Metall wird

$$E = -\frac{D}{4\pi}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0 - \left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_\infty\right] =$$
$$= \frac{DRT}{4\pi\cdot 2F}\,2F\sqrt{\frac{2\pi C_{3\infty}}{DRT}}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)_0 =$$
$$= \sqrt{\frac{DRT}{2\pi}}\,C_{3\infty}\frac{1}{\operatorname{sh}(-\xi_0)\operatorname{ch}(-\xi_0)} =$$
$$= \sqrt{\frac{DRT}{2\pi}}\,C_{3\infty}\left(e^{-\frac{y_0}{2}} - e^{\frac{y_0}{2}}\right). \qquad (8)$$

Die Abweichung der Zahl der Ionen gegenüber derjenigen, die vorhanden wäre, wenn überall die gleichmäßige neutrale Lösung sich erstrecken würde, beträgt

$$u = \int_0^\infty (C_1 + C_2 + C_3 - 2C_{3\infty})\,dx =$$
$$= C_{3\infty}\int_0^\infty (e^y + e^{-y} - 2)\,dx =$$
$$= \frac{C_{3\infty}}{2F}\sqrt{\frac{DRT}{2\pi C_{3\infty}}}\int_0^\infty [\operatorname{tangh}^2(\xi-\xi_0) -$$
$$- 1 + \operatorname{cotgh}^2(\xi-\xi_0) - 1]\,d\xi =$$
$$= \frac{1}{2F}\sqrt{\frac{DRT}{2\pi}}\,C_{3\infty}[\operatorname{tangh}(\xi-\xi_0) +$$
$$+ \operatorname{cotgh}(\xi-\xi_0)]_0^\infty = +$$
$$+ \frac{1}{2F}\sqrt{\frac{DRT}{2\pi}}\,C_{3\infty}\left(e^{-\frac{y_0}{2}} + e^{+\frac{y_0}{2}} - 2\right) = +$$
$$+ \frac{1}{2F}\sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}\left(e^{\frac{y_0}{4}} - e^{-\frac{y_0}{4}}\right)^2. \qquad (9)$$

[1]

Wir wollen nun die Kräfte berechnen, welche die Doppelschicht auf die Quecksilberoberfläche ausübt[2]). Die elektrostatischen Kräfte bestehen in einem Druck senkrecht zu den Kraftlinien, also parallel der Oberfläche gleich

$$\frac{D}{8\pi}\int_0^\infty\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx = \frac{D}{8\pi}\left(\frac{RT}{2F}\right)^2\cdot 2F\sqrt{\frac{2\pi C_{3\infty}}{DRT}}$$

$$\int_0^\infty\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 d\xi = \frac{RT}{2}\,\frac{1}{2F}\sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}$$

$$\int_0^\infty\left(e^{-\frac{y}{2}} - e^{\frac{y}{2}}\right)\left(\frac{dy}{d\xi}\right)d\xi = -RT\frac{1}{2F}$$
$$\sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}\left[e^{-\frac{y}{2}} + e^{\frac{y}{2}}\right]_{y_0}^{0} = -$$
$$-\frac{RT}{2F}\sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}\left(2 - e^{-\frac{y_0}{2}} - e^{\frac{y_0}{2}}\right)$$

und in einem Zug

$$\frac{D}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0^2 = \frac{2\pi}{D}E^2 = RTC_{3\infty}\left(e^{-\frac{y_0}{2}} - e^{\frac{y_0}{2}}\right)^2 =$$
$$= RT(C_{01} + C_{02} + C_{03} - 2C_{3\infty})$$

senkrecht dazu, also senkrecht zu der Oberfläche. Dazu kommt der Molekulardruck senkrecht zur Oberfläche gleich

1) Es bedeuten sh, ch, tangh, cotgh den hyperbolischen Sinus, Cosinus, Tangens, Cotangens.

2) Über diese, sich ganz an v. Laue anschließende Rechnung, sei noch folgendes gesagt. Unser Ansatz ergibt direkt gar keine Kräfte parallel zur Oberfläche, denn

$$p_{xy} = \frac{1}{8\pi}(\mathfrak{E}_x\mathfrak{D}_y)$$

ist wegen $\mathfrak{D}_y = 0$ Null (p ist der Spannungstensor). Eine Oberflächenspannung kommt nur dadurch zustande, daß tatsächlich in der Nähe des Randes unser Ansatz

$$\frac{\partial}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial z} = 0$$

unrichtig ist und daher dort $\mathfrak{E}$ eine Komponente senkrecht zur Oberfläche f hat, wodurch $p_{xy} \neq 0$ wird. Daß es sich um eine Randwirkung handelt, sieht man ja daraus, daß die resultierende Gesamtkraft

$$\int p_{\varrho x};\,df$$

proportional dem Umfang sein muß. v. Laue drückt diese Überlegung so aus, daß er sagt, die Oberflächenspannung habe keine Möglichkeit an der ebenen Oberfläche anzugreifen. Die explizite Berechnung der Randwirkung erspart er uns aber durch folgenden Kunstgriff. Es ist im stationären Fall

$$\int \operatorname{div} p\,dV = \int p_n\,do = 0,$$

wo n eine beliebige Richtung ist. Wenden wir das auf die Oberfläche der Kapillare, als Zylinder gedacht, an und setzen $n = \varrho$, den Radius des Zylinders. An der mit der Lösung in Berührung befindlichen Grundfläche ist $p_{\varrho x}$ 0, an der Quecksilberoberfläche ist das Integral die gesuchte Kraft σ, $2\pi\varrho$, an der Mantelfläche

$$\int p_{\varrho\varrho}\,df = 2\pi\varrho\int p_{\varrho\varrho}\,dx.$$

So wird

$$\sigma = \int p_{\varrho\varrho}\,dx.$$

$p_{\varrho\varrho}$ setzt sich aber aus zwei Teilen zusammen, dem aus den Maxwellschen Spannungen herrührenden und dem vom Druck des Gelösten herrührenden Teil

$$2RTC\cdot 2\int C\,dx$$

ist aber u.

Mathematisch kommt das Verfahren auf eine Entwicklung der Gesamtkraft in eine Reihe nach $\frac{\text{Umfang}}{\text{Oberfläche}}$ hinaus, deren Glieder durch sukzessive Approximation berechnet werden. In der Gleichung

$$\int df\,\sigma = \int p_{\varrho\varrho}\,dx\cdot 2\pi\varrho,$$

wird rechts das Glied 0ter Ordnung eingesetzt und ergibt so das links stehende Glied erster Ordnung.



$$RT(C_{01}+C_{02}+C_{03}),$$

das gibt zu dem erwähnten Zug addiert einfach den normalen osmotischen Druck $2RTC_3$, senkrecht zur Oberfläche, der also nicht vom Potential abhängt und sich überhaupt nicht bemerkbar macht. Parallel der Oberfläche kommt zu dem erwähnten elektrostatischen Druck die vom Molekulardruck des Ionenüberschusses herrührende Kraft RTu dazu, das ist dem Vorzeichen und dem Betrage nach gleich dem oben berechneten Druck senkrecht zu den Kraftlinien. Man findet so für die Oberflächenspannung

$$\sigma=\sigma_0-2RTu=\sigma_0-\frac{2RT}{2F}\sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}\left(e^{-\frac{\nu_0}{4}}-e^{\frac{\nu_0}{4}}\right)^2. \qquad (10)[1]$$

Diese Formel ist nun mit der von Chapman abgeleiteten identisch und man rechnet leicht nach, daß für sie sowohl die Lippmann-Helmholtz-Plancksche Gleichung als auch die Gibbs-Warburgsche gilt[2]). Dieselben stimmen also für den Fall der natürlichen Potentialdifferenz überein, sowohl untereinander wie mit der direkten Berechnung der Oberflächenspannung. Die Gültigkeit unserer Formeln erstreckt sich allerdings nur soweit, wie die Gültigkeit des Boltzmannschen Prinzips, es darf also die Konzentration nirgends sehr groß werden, d. h.

$$C_{1\infty}e^{\nu_0},\; C_{2\infty}e^{\nu_0},\; C_{3\infty}e^{-\nu_0}<10^{-3}.$$

Adsorptionspotential.

In den elektrokinetischen Erscheinungen machen sich an der Grenzfläche von festen Körpern und bewegten Flüssigkeiten Potentialdifferenzen bemerkbar, die seit Helmholtz[3]) darauf zurückgeführt werden, daß die in der Flüssigkeit liegende Belegung einer Doppelschicht von der Flüssigkeit mitgenommen wird. Es ergibt sich das experimentelle bemerkenswerte Resultat, daß die Potentialdifferenzen alle von der gleichen Größenordnung, etwa 0,05 Volt sind. v. Smoluchowski hat die Ansicht ausgesprochen, daß nur ein Teil des ganzen Potentialabfalls von der Flüssigkeitsbewegung erfaßt wird und versucht damit zu erklären, warum diese Potentiale alle so klein gegenüber den üblichen elektrochemischen sind.

1) Bei Chapman steht F statt $2F$, da er mit einwertigen Ionen rechnet.

2) Die Differentiation ist im ersten Fall nach φ_0 bei festem $c_{3\infty}$, im zweiten nach $c_{3\infty}$ bei festem φ auszuführen. Die Lippmannsche Gleichung gibt also ohne den Zusatz des Ions 2 nicht mehr.

3) H. v. Helmholtz, I. Ges. Abh. 855; siehe besonders H. Freundlich, Kapillarchemie, Leipzig 1909, S. 225 f.; M. v. Smoluchowski in Graetz, Handbuch der Elektrizität, Leipzig 1913, Bd. 2, S. 361.

Allerdings beziehen sich alle diese Messungen auf feste Isolatoren, während die einfachen Nernstschen Vorstellungen nur auf Elemente, besonders Metalle, bequem anwendbar sind. Man könnte daran denken, unsere Rechnungen auf diesen Fall anzuwenden. Doch spricht dagegen der von Billiter[1]) gefundene Umstand, daß sich das Vorzeichen dieser Potentialdifferenz bei einem Potentialwert gegen die Normalelektrode umkehrt, der nach unseren sonstigen Kenntnissen nicht dem Nullpunkt des Potentials entspricht. An unserer Formel sehen wir aber, daß das Potential erst im Unendlichen ein Minimum besitzt, eine Umkehr des Vorzeichens vom y also nur bei einer Umkehr des Vorzeichens von y_0 sich ermöglichen läßt. Daraus scheint hervorzugehen, daß noch andere Kräfte außer den rein elektrischen angenommen werden müssen. An Stelle von Formel (4) treten dann folgende

$$C_1=C_{1\infty}e^{y-\frac{V_1}{RT}},$$

$$C_2=C_{2\infty}e^{y-\frac{V_2}{RT}},$$

$$C_3=C_{3\infty}e^{-y-\frac{V_3}{RT}}.$$

Die Größen V_1, V_2, V_3 bedeuten dabei die Potentialfunktionen der nichtelektrischen Kräfte, die auf die Ionen ausgeübt werden. Jetzt sind die Produkte C_1C_3 und C_2C_3 nicht mehr vom Orte unabhängig, die Konzentrationen des neutralen Quecksilber- bzw. Magnesiumsalzes sind also proportional

$$e^{-\frac{V_1+V_3}{RT}},\quad e^{-\frac{V_2+V_3}{RT}}$$

wenigstens wenn wir annehmen, daß das chemische Gleichgewicht durch die äußeren Kräfte nicht beeinflußt wird.

V_1+V_2 bzw. V_2+V_3 ist dann die Potentialfunktion der Oberflächenkräfte, die auf das neutrale Quecksilbersalz- bzw. Magnesiumsalzmolekül einwirken. Leider läßt sich die dann an Stelle von Gleichung (3) tretende Formel nicht integrieren. Doch wäre es möglich, daß sich auf diese Weise innerhalb der Doppelschicht eine Nullstelle für das Potential erhalten läßt. Unsere Schlußfolgerung, daß die Konzentration an der Oberfläche vom äußeren Potential unabhängig ist, wird aber dadurch nicht geändert, wenn auch die Bedeutung der Lösungstension eine andere wird, da ein Teil der nichtelektrischen Arbeit beim Überführen der Ionen aus dem Metall in die Lösung noch nach dem Verlassen der Metalloberfläche zu leisten ist.

1) J. Billiter, Drudes Ann. 11, 913, 1903; Zeitschr. f. Elektroch. 8, 638, 1902; Zeitschr. f. phys. Chem. 45, 307, 1903; 48, 513, 1904; 49, 709, 1904; 51, 167, 1905.

Zur Erklärung der eben erwähnten Potentiale hat H. Freundlich[1]) die Adsorptionspotentiale heranzuziehen versucht. Er scheint die Auffassung zu haben, daß dieselben neben den Nernstschen Potentialen auftreten und wegen ihrer geringeren Größe für gewöhnlich keine Rolle spielen[2]). Doch scheint mir die Trennung zwischen Nernstschen und Adsorptionspotentialen überhaupt nicht berechtigt. Betrachten wir zuerst Quecksilber in einer Quecksilbersalzlösung, so ist für die Gesamtpotentialdifferenz zwischen Metall und Lösung nur die Arbeit maßgebend, die beim Überführen der Ionen aus dem Innern des Metalls in das Innere der Lösung geleistet wird, unabhängig davon, wie sich diese Arbeit längs des Weges verteilt. Aus dieser Arbeit folgt aber die Nernstsche Potentialdifferenz, ohne daß für eine andere Platz bleibt. Man könnte höchstens die oben erwähnte Arbeit in drei Teile teilen. Erstens Überführung der Ionen aus dem Innern des Metalls in die unmittelbar an das Metall angrenzende Schicht der Lösung, zweitens Weiterbeförderung unter Durchlaufen der vorerwähnten Oberflächenpotentialdifferenz V_1, drittens Expansion auf die gewünschte Konzentration. Da man aber den letzten Teil stets zur Nernstschen Potentialdifferenz rechnet $\left(\text{rührt von ihm ja der Teil } \frac{RT}{F}\log C \text{ her}\right)$, so könnte man höchstens von dem von der Konzentration unabhängigen Teil die unter 2 genannte Arbeit V_1 abspalten und diese als Adsorptionspotential bezeichnen. Ganz analog liegen die Verhältnisse, wenn man das indifferente Ion betrachtet; auch hier ist der Potentialunterschied durch die Arbeit des Herausschaffens der Ionen aus dem gebildeten Amalgam in die Lösung vollständig bestimmt. Ja, sogar beim Anion müssen wir die gleichen Betrachtungen anstellen, auch hier wird sich, wenn auch in ganz minimaler Menge, das Anion im Elektrodenmetall lösen, und zwar in solcher Menge, daß wieder die Potentialdifferenz sich aus der Arbeit beim Herausschaffen in die Lösung berechnet. Die Messungen und damit auch die Bemerkung von Freundlich bezieht sich allerdings in erster Linie auf Isolatoren, jedoch kann man auch diesen prinzipiell wohl eine Lösungstension zuschreiben, so daß eine logische Trennung zwischen Nernstschem und Adsorptionspotential kaum berechtigt ist.

(Fortsetzung folgt.)

1) H. Freundlich, l. c., S. 245; vgl. dagegen v. Elisafoff, Zeitschr. f. phys. Chem. 79, 385, 1912.

2) l. c., S. 249.

Zur Theorie der Halbschatten-Polarimeter.

(Mitteilung aus der optischen Anstalt C. P. Goerz, Berlin-Friedenau.)

Von Hans Schulz.

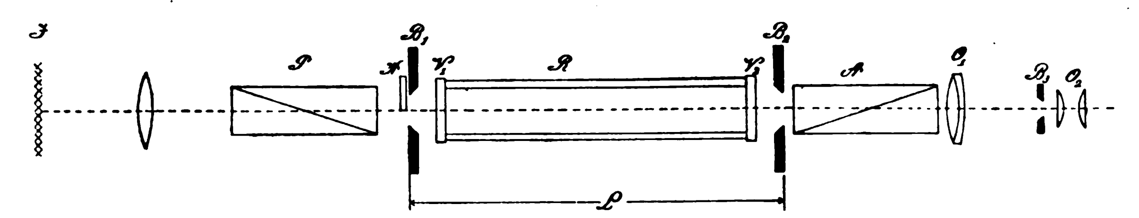
§ 1.

Die Halbschatten-Polarimeter lassen sich in zwei Klassen teilen: 1. Polarimeter, deren Halbschattenvorrichtung stets streng linear polarisiertes Licht erzeugt und 2. solche, deren Halbschattenvorrichtung elliptisch polarisiertes Licht aussenden kann. Zur ersten Klasse gehören die Polarimeter nach Jellet-Cornu, Lippich und das vierteilige Kontrast-Polarimeter nach Lummer. Zur zweiten Klasse zählen: das Polarimeter nach Laurent und das von Lummer vorgeschlagene Polarimeter[1]), welches die bei Totalreflexion und Silberreflexion entstehenden Phasendifferenzen zur Erzeugung der Halbschattenwirkung benutzt. Lippich zeigte, daß ein wesentlicher Unterschied in der Wirkung dieser beiden Klassen von Polarimetern nachzuweisen ist[2]). Während bei dem mit streng linear polarisiertem Licht arbeitenden Polarimeter die Empfindlichkeit im wesentlichen nur von dem Halbschattenwinkel und der physiologischen Empfindlichkeit des Auges für die betreffende Farbe abhängt, also mit variabler Wellenlänge nur langsam sich ändert, ist bei Polarimetern der zweiten Klasse die Empfindlichkeit bei gegebenen Halbschatten sehr stark von der Wellenlänge abhängig, weil mit geringer Änderung derselben eine sehr schnelle Änderung der Elliptizität des auftretenden Lichtes verknüpft ist. Überdies macht sich bei den Apparaten der zweiten Klasse in ihrer jetzigen Bauart der Übelstand bemerkbar, daß der gemessene Drehungswinkel stets mit einem merkbaren systematischen Fehler behaftet ist, der von der spektralen Intensitätsverteilung in der benutzten Lichtquelle, von der im Apparat erzeugten Elliptizität, von der absoluten Größe des Drehungswinkels und der Rotationsdispersion der gemessenen Substanz abhängig ist, so daß die Apparate der zweiten Klasse für wissenschaftlich strenge Messungen nicht verwendet werden dürften.

Ginge streng homogenes paralleles Licht durch die Polarimeter, so würde jeder beliebige Apparat die gleiche Drehung anzeigen und nur die Empfindlichkeit würde bei den Apparaten der zweiten Klasse etwas geringer sein können,

1) Müller-Pouillet, Lehrb. d. Physik, Band II (Optik), herausgeg. von O. Lummer, Braunschweig 1907, S. 1028 29.

2) Lippich, Sitzungsber. d. math.-nat. Klasse d. Akademie d. Wiss., Wien 1891, S. 695—724.



als bei denen der ersten Klasse. Die Bedingung, welche die Theorie an die Apparate der zweiten Klasse stellt, daß nämlich die durch die Halbschattenvorrichtung erzeugte Phasendifferenz genau gleich der halben Wellenlänge des benutzten Lichtes ist, daß also das auftretende Licht auch bei ihnen streng linear polarisiert ist, kann technisch nie erfüllt werden, es würde dies fordern, daß bei den Laurent-Apparaten die Dicke der Quarzplatte, die Planparallelität, die Achsenlage in der Platte, bei den Lummer-Apparaten der Einfallswinkel an der Silberfläche genau dem theoretischen Wert entspricht, und daß ferner das Material der Quarzplatte beim Laurentschen und das Glasprisma beim Lummerschen Apparat absolut spannungsfrei ist. Abgesehen von dieser Forderung, der man immerhin bis zu einem gewissen Grade Rechnung tragen kann, ist zu bedenken, daß jede Lichtquelle einen endlichen, wenn auch kleinen Wellenlängenbezirk umfaßt, so daß bei den Apparaten der zweiten Klasse schon aus diesem Grunde das aus der Halbschattenvorrichtung austretende Licht alle Formen des elliptisch polarisierten Lichtes annehmen muß. Bei Voraussetzung parallelen Strahlenganges hat nun Lippich die oben angeführten Fehler der Apparate der zweiten Klasse abgeleitet. Da elliptisch polarisierte Strahlen keine vollständige Auslöschung ergeben, so folgt, daß ihr Einfluß um so mehr hervortritt, je mehr die Phasendifferenz wächst. Weil nun die Einstellung ohne drehende Substanz (Nullstellung) bedingt ist durch die spektrale Intensitätsverteilung in der Lichtquelle und die Apparatkonstanten, und weil bei zwischengeschalteter drehender Substanz durch ihre Rotationsdispersion, wie leicht ersichtlich, die Intensitätsverteilung des austretenden Lichtes geändert wird, so muß der gemessene Drehungswinkel zweifellos mit einem Fehler behaftet sein. Überdies wird der gemessene Drehungswinkel von Apparat zu Apparat verschieden sein, da es nie möglich sein wird, zwei Laurentsche Platten vollkommen identisch zu machen. Nach Angaben von Lippich findet man bei Messungen von Drehungswinkeln mit Hilfe des Laurentschen Apparats Fehler von 45″ bezw. 82″ bei einem absoluten Drehungswinkel von 24° gegenüber den Angaben eines Lippichschen Polarimeters, während nach der Theorie sogar bei 22° Drehung Fehler von 160″ möglich sind.

§ 2.

Es ist nun noch eine zweite Fehlerquelle vorhanden, die aber sowohl für die Apparate der ersten, als auch der zweiten Klasse in Betracht kommt, wenn auch für beide mit verschiedenem Gewicht. Wie aus obigen Ausführungen hervorgeht, hat Lippich nur den Fehler berücksichtigt, der durch die endliche spektrale Breite der Lichtquelle bei streng parallelem Strahlengang veranlaßt wird. Der Einfluß der Neigung der Lichtstrahlen gegen die Achse des Apparates ist wohl erwähnt, aber nicht behandelt worden. Ich möchte im folgenden auf diesen Fehler eingehen, der sich bei vollkommen monochromatischer Beleuchtung infolge der Divergenz der Strahlenbündel bemerkbar macht. Es sei Fig. 1 die schematische Darstellung eines Polarisationsapparates. Von der Lichtquelle gehen Strahlen aus, die der Reihe nach den Polarisator P, die Halbschattenvorrichtung H, die Polarisatorblende B_1, das Rohr R mit den Verschlußplatten v_1 und v_2, die Analysatorblende B_2, den Analysator A, das Objektiv O_1 des Beobachtungsfernrohres, die Gesichtsfeldblende B_3 und das Okular O_2 durchsetzen. Von dem Beleuchtungssystem, welches sich zwischen Polarisator und Lichtquelle befindet, werde, weil es für die vorliegenden Untersuchungen unwesentlich ist, abgesehen. Die Linse O_1 des Fernrohres bildet nun die Blendenebene B_1 in der Ebene B_3 ab. Es werden somit sämtliche, von einem Punkte S der Blendenebene B_1 ausgehenden Strahlen in einem Punkte S' der Ebene B_3 vereinigt, soweit sie nicht durch die Analysatorblende B_2 vernichtet werden. Ist L der Abstand zwischen Polarisator- und Analysatorblende, l die Länge des Polarisationsrohres, N der Brechungsindex der in der Röhre befindlichen Substanz und b der Durchmesser der Polarisatorblende, B derjenige der Analysatorblende, so folgt, daß der größte Winkel ν, den ein dem Strahlenkegel MSN' angehörender Strahl mit der Achse des Apparates bilden kann, durch die Beziehung

$$\operatorname{tg} \nu = \frac{b + B}{2\left(L - \frac{l(N-1)}{N}\right)}$$

gegeben ist.

Für die bei Polarisationsapparaten gebräuchlichen Abmessungen ergibt sich nun bei einem Blendendurchmesser $B = b = 7$ mm

L	l	ν_0	ν
230 mm	200 mm	$1^0\,44'\,35''$	$2^0\,27'\,16''$
430 „	400 „	$0^0\,55'\,58''$	$1^0\,21'\,6''$
630 „	600 „	$0^0\,38'\,12''$	$0^0\,55'\,58''$

wobei ν_0 den größten möglichen Winkel bei leerem Rohr, ν denjenigen bei gefülltem Rohr bedeutet und der Brechungsindex der Füllungsflüssigkeit den Wert 1,5 hat. Es zeigt sich, daß die Werte von ν bzw. ν_0 immerhin merkbare Beträge annehmen können.

Ein Strahl vom Neigungswinkel $\alpha < \nu$ möge nun von einem Punkte S der Analysatorblende ausgehen; sein Schwingungszustand sei durch die Amplituden seiner vertikalen und horizontalen Komponenten v bzw. h und die Phasendifferenz δ zwischen diesen Komponenten gegeben. Ist der Winkel, welchen die parallel zur Achse des Apparates durch den Strahl gelegte Ebene mit der Horizontalebene bildet, gleich ϑ, so ist der Strahl vollkommen bestimmt. Die eben definierte Ebene ist dann gleichzeitig die Einfallsebene für den Strahl an der Vorderfläche der Verschlußplatte v_1. Um den Einfluß der Brechung an dieser Ebene zu ermitteln, müssen die Komponenten v und h parallel und senkrecht zur Einfallsebene zerlegt werden. Wird der Phasenwinkel mit χ bezeichnet, so wird der Schwingungszustand der Komponenten parallel und senkrecht zur Einfallsebene:

$$a_{\parallel} = v \cdot \cos\vartheta \cos\chi - h \cdot \sin\vartheta \cdot \cos(\chi + \delta)$$
$$a_{\perp} = v \cdot \sin\vartheta \cdot \cos\chi + h \cdot \cos\vartheta \cdot \cos(\chi + \delta).$$

Es seien $\varrho_{\parallel}$ und $\varrho_{\perp}$ die Fresnelschen Koeffizienten der Amplitudenänderungen bei Brechung an der Außenfläche der Verschlußplatten, $\varsigma_{\parallel}$ und $\varsigma_{\perp}$ diejenigen bei Brechung an den Innenflächen, welche mit der Flüssigkeit im Kontakt sind. Bezeichnet α den Einfallswinkel an der Außenfläche, n den Brechungsindex der Verschlußplatten, N den Brechungsindex der Flüssigkeit, so ist, wenn α klein ist:

$$\varrho_{\parallel} = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\left\{1 - \left[\frac{\alpha(n-1)}{2n}\right]^2\right\}$$

$$\varrho_{\perp} = \frac{2\sqrt{n}}{n+1}\left\{1 + \left[\frac{\alpha(n-1)}{2n}\right]^2\right\}$$

$$\varsigma_{\parallel} = \frac{2\sqrt{nN}}{n+N}\left\{1 - \left[\frac{\alpha(n-N)}{2n}\right]^2\right\}$$

$$\varsigma_{\perp} = \frac{2\sqrt{nN}}{n+N}\left\{1 + \left[\frac{\alpha(n-N)}{2n}\right]^2\right\}.$$

Die parallel bzw. senkrecht zur Einfallsebene schwingenden Komponenten sind dann nach Eintritt in die Flüssigkeit

$$b_{\parallel} = a_{\parallel}\varrho_{\parallel}\varsigma_{\parallel}$$
$$b_{\perp} = a_{\perp}\varrho_{\perp}\varsigma_{\perp}.$$

Der Strahl möge in der Flüssigkeit um den Winkel Δ gedreht werden. Nach Durchlaufen der Flüssigkeit ist dann die parallel bzw. senkrecht zur Einfallsebene der Innenfläche der Verschlußplatte v_2 polarisierte Komponente

$$c_{\parallel} = b_{\parallel}\cos\Delta + b_{\perp} \cdot \sin\Delta$$
$$c_{\perp} = b_{\parallel}\sin\Delta + b_{\perp} \cdot \cos\Delta.$$

Nach dem Verlassen der zweiten Verschlußplatte sind diese

$$d_{\parallel} = c_{\parallel}\varrho_{\parallel}\varsigma_{\parallel}$$
$$d_{\perp} = c_{\perp}\varrho_{\perp}\varsigma_{\perp}.$$

Bezieht man diese Komponenten wieder auf die Horizontale und Vertikale als Achsen, so folgt

$$H = -d_{\parallel} \cdot \sin\vartheta + d_{\perp}\cos\vartheta$$
$$V = d_{\parallel}\cos\vartheta + d_{\perp}\sin\vartheta.$$

Hieraus folgt

$$H = -v\sin\Delta\cos\chi \cdot \varrho_{\perp}\varsigma_{\perp}\varrho_{\parallel}\varsigma_{\parallel} +$$
$$+ v\sin\vartheta\cos\vartheta\cos\Delta\cos\chi\,(\varrho_{\perp}^2\varsigma_{\perp}^2 - \varrho_{\parallel}^2\varsigma_{\parallel}^2) +$$
$$+ h\cos\Delta\cos(\chi+\delta)\,[\cos^2\vartheta \cdot \varrho_{\perp}^2\varsigma_{\perp}^2 +$$
$$+ \sin^2\vartheta\,\varrho_{\parallel}^2\varsigma_{\parallel}^2]$$
$$V = +h\sin\Delta\cos(\chi+\delta)\,\varrho_{\perp}\varsigma_{\perp}\varrho_{\parallel}\varsigma_{\parallel} +$$
$$+ v \cdot \cos\Delta\cos\chi\,[\cos^2\vartheta\,\varrho_{\parallel}^2\varsigma_{\parallel}^2 + + \sin^2\vartheta\,\varrho_{\perp}^2\varsigma_{\perp}^2] +$$
$$+ h \cdot \sin\vartheta\cos\vartheta\cos\Delta\cos(\chi+\delta)\,[\varrho_{\perp}^2\varsigma_{\perp}^2 - \varrho_{\parallel}^2\varsigma_{\parallel}^2].$$

Es ist nun

$$\varrho_{\parallel}^2\varsigma_{\parallel}^2 = \frac{16n^2N}{(n+1)^2(n+N)^2}\left\{1 - \frac{\alpha}{2}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{n-N}{n}\right)^2\right]\right\}$$

$$\varrho_{\perp}^2\varsigma_{\perp}^2 = \frac{16n^2N}{(n+1)^2(n+N)^2}\left\{1 + \frac{\alpha}{2}\left[\left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \left(\frac{n-N}{n}\right)^2\right]\right\}$$

$$\varrho_{\parallel}\varsigma_{\parallel}\varrho_{\perp}\varsigma_{\perp} = \frac{16n^2N}{(n+1)^2(n+N)^2}.$$

Läßt man den Proportionalitätsfaktor

$$\frac{16Nn^2}{(n+1)^2(n+N)^2}$$

fort, so folgt, wenn man noch abkürzend setzt

$$\varphi = \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n-N}{n}\right)^2$$

$$\varrho_{\parallel}^2\varsigma_{\parallel}^2 = 1 - \frac{\alpha^2\varphi}{2},$$

$$\varrho_{\perp}^2\varsigma_{\perp}^2 = 1 + \frac{\alpha^2\varphi}{2},$$

$$\varrho_{\parallel}\varsigma_{\parallel}\varrho_{\perp}\varsigma_{\perp} = 1,$$

woraus dann folgt

$$H = -v\sin\Delta\cos\chi + h\cdot\cos\Delta\cdot\cos(\chi+\delta) + \\ + \frac{\alpha^2\varphi}{2}\left\{v\cdot\sin 2\vartheta\cos\chi + h\cdot\cos 2\vartheta\cos(\chi+\delta)\right\}$$

$$V = v\cos\Delta\cdot\cos\chi + h\sin\Delta\cos(\chi+\delta) + \\ + \frac{\alpha^2\varphi}{2}\cos\Delta\left\{-v\cdot\cos 2\vartheta\cos\chi + \right. \\ \left. + h\sin 2\vartheta\cos(\chi+\delta)\right\}.$$

Der Drehungswinkel Δ ist, da er eine Funktion der Dicke der durchsetzten Schicht ist, selbst vom Neigungswinkel abhängig. Es ist

$$\Delta = \Delta_0\left\{1 + \frac{\alpha^2}{2N^2}\right\},$$

wenn durch Δ_0 die Drehung für parallel zur Achse des Apparats verlaufende Strahlen bezeichnet wird. Bei Einführung von Δ_0 folgt:

$$H = -v\sin\Delta_0\cdot\cos\chi + h\cdot\cos\Delta_0\cos(\chi+\delta) + \\ + \frac{\alpha^2\varphi}{2}\left\{v\cdot\cos\chi\cdot\cos\Delta_0\left(\varphi\sin 2\vartheta - \frac{\Delta_0}{N^2}\right) + \right. \\ \left. + h\cdot\cos(\chi+\delta)\left[\varphi\cos\Delta_0\cos 2\vartheta - \frac{\Delta_0\sin\Delta_0}{N_2}\right]\right\}$$

$$V = v\cdot\cos\Delta_0\cdot\cos\chi + h\cdot\sin\Delta_0\cos(\chi+\delta) + \\ + \frac{\alpha^2}{2}\left\{-v\cos\chi\left[\varphi\cos\Delta_0\cos 2\vartheta + \frac{\Delta_0\sin\Delta_0}{N^2}\right] + \right. \\ \left. + h\cos(\chi+\delta)\cos\Delta_0\left[\varphi\sin 2\vartheta + \frac{\Delta_0}{N^2}\right]\right\}.$$

Bildet die Schwingungsrichtung des Analysators mit der Horizontalen den Winkel η, so folgt für die Amplitude der den Analysator verlassenden Schwingung

$$A = H\cdot\cos\eta - V\sin\eta$$

oder

$$A = -v\cdot\cos\chi\sin(\eta+\Delta_0) + h\cos(\chi+\delta)\cos \\ (\eta+\Delta_0) + \frac{\alpha^2}{2}\left\{v\cdot\cos\chi\left[\varphi\cos\Delta_0\sin(\eta+2\vartheta) - \right.\right. \\ \left. - \frac{\Delta_0\cos(\eta+\Delta_0)}{N^2}\right] + h\cos(\chi+\delta) \\ \left.\left[\varphi\cos\Delta_0\cos(\eta+2\vartheta) - \frac{\Delta_0\sin(\eta+\Delta_0)}{N^2}\right]\right\}.$$

Also ergibt sich für die Intensität

$$I = v^2\sin^2(\eta+\Delta_0) + h^2\cos^2(\eta+\Delta_0) - \\ - 2hv\sin(\eta+\Delta_0)\cos(\eta+\Delta_0)\cos\delta + \\ + \alpha^2\left\{-v^2\sin(\eta+\Delta_0)\left[\varphi\cos\Delta_0\sin(\eta+2\vartheta) - \right.\right. \\ \left. - \frac{\Delta_0}{N^2}\cos(\eta+\Delta_0)\right] + h^2\cos(\eta+\Delta_0) \\ \left[\varphi\cos\Delta_0(\cos\eta+2\vartheta) - \frac{\Delta_0}{N^2}\cos(\eta+\Delta_0)\right] + \\ + v\cdot h\cos\delta\left[\varphi\cos\Delta_0\sin(2\vartheta-\Delta_0) - \right. \\ \left.\left. - \frac{\Delta_0}{N^2}\cos^2(\eta+\Delta_0)\right]\right\}.$$

Für den betrachteten Strahl der einen Hälfte ist somit

$$I = f(v_1, h_1, \delta_1, \eta),$$

wo in den Konstanten der Funktion die Bestimmungsstücke des Strahles α und δ und die Konstanten Δ_0, N, η enthalten sind. Für den analog verlaufenden Strahl der anderen Gesichtsfeldhälfte ist

$$I_2 = f(v_2, h_2, \delta_2, \eta).$$

Die Gleichheitsstellung η muß nun, wie eine einfache Überlegung zeigt, gegeben sein durch

$$\eta = -\Delta_0 + \varepsilon,$$

wo ε einen so kleinen Winkel bezeichnet, daß die zweiten und höheren Potenzen vernachlässigt werden können. Setzt man nun für die eine Hälfte des Gesichtsfeldes

$$h_1 = \sin\xi$$
$$v_1 = \cos\xi$$

und für die andere

$$h_2 = p\cdot\sin\xi$$
$$v_2 = -p\cdot\cos\xi$$

und nimmt für das erste Feld linearpolarisiertes Licht an ($\delta_1 = 0$), so tritt Gleichheit der Intensitäten der zugeordneten Strahlen ein, wenn

$$\varepsilon = \frac{\operatorname{tg}\xi}{2}\cdot\frac{1-p^2}{1+p^2\cos\delta_2} + \frac{\alpha^2}{2}\left\{\operatorname{tg}\xi\frac{1-p^2}{1+p^2\cos\delta_2}\varphi\cdot\right. \\ \cdot\cos\Delta_0\cos(2\vartheta-\Delta_0) + \varphi\cos\Delta_0\sin(2\vartheta-\Delta_0) - \\ \left. - \frac{\Delta_0}{N^2}\right\}.$$

Bei jeder Messung wird nun zunächst die Nullstellung ermittelt ($\Delta_0 = 0$) und dann die Drehung. Die Differenz der zugehörigen Analysatorablesungen gibt den Drehungswinkel. Es folgt also, daß der Fehler in der Messung des Drehungswinkels gegeben ist durch

$$\varepsilon - \varepsilon_0 = \frac{\alpha^2}{2}\left\{\operatorname{tg}\xi\cdot\frac{1-p^2}{1+p^2\cos\delta}\varphi\sin\Delta_0\right. \\ \left.\sin(2\vartheta-\Delta_0) - \varphi\sin\Delta_0\cos(2\vartheta-\Delta_0) - \frac{\Delta_0}{N^2}\right\}.$$

Der für die betrachteten Strahlen sich ergebende Fehler in der Messung des Drehungswinkels Δ_0 ist also abhängig

1. von dem Quadrat des Neigungswinkels α, welchen der Strahl mit der Achse des Apparats bildet. Je länger der Apparat ist, desto kleiner ist der mögliche Neigungswinkel und somit auch der Fehler der Messung,

2. von der Größe des Halbschattenwinkels,

3. von der Elliptizität des im Halbschattenfelde ausgehenden Lichtes. Der Einfluß auf den Fehler der Messung ist umso größer, je größer die Elliptizität ist. Auch bei streng linear polarisiertem Licht verschwindet das erste Glied in der Klammer nicht. Es verschwindet



nur dann, und der Fehler ist dann gleichzeitig vom Halbschattenwinkel unabhängig, wenn die Intensität in beiden Halbschattenfeldern gleich groß ist ($p = 1$),

4. vom Drehungswinkel der gemessenen Substanz.

Die obige Ableitung gilt nun zunächst nur für ein Strahlenpaar. Für den bei der Messung wirklich auftretenden Fehler würde ein Mittelwert zu bilden sein. Und zwar würde zunächst der Mittelwert über das ganze von den konjugierten Punkten ausgehende Strahlenbündel in Betracht kommen. Ferner würde die Wirkung sämtlicher Punkte der anvisierten Halbschattenfelder zu berücksichtigen sein. Dabei würde den in einer schmalen Zone längs der Trennungslinie liegenden Punkten der größte Einfluß zuzumessen sein. Eine strenge theoretische Ableitung des Fehlers wird somit zur Unmöglichkeit und es kann sich nur darum handeln, die Größe des Fehlers einigermaßen abzuschätzen.

Bedenkt man, daß für jedes von einem Punkt ausgehende Strahlenbündel der größte Teil der Energie außerhalb des Zentralstrahls sich fortpflanzt, und damit deren Einfluß überwiegt, daß ferner für Punkte mit zunehmendem Abstand von der Mitte des Gesichtsfeldes der Fehler wegen der wachsenden Unsymmetrie der Strahlenbündel wächst, und daß sogar für den in der Achse des Apparats gelegenen Punkt der Fehler nicht völlig verschwinden kann, so wird sich der Fehler nicht zu groß ergeben, wenn man annimmt, daß bei jeder Mittelwertbildung der mittlere Fehler sich auf die Hälfte des Höchstfehlers reduziert. Es folgt dann bei Berücksichtigung der oben abgeleiteten Grenzwerte ν

$$\overline{\varepsilon - \varepsilon_0} = \frac{\nu^2}{8}\left\{\operatorname{tg}\xi\,\frac{1-p^2}{1+p^2\cos\delta}\,\varphi\sin^2\Delta_0 - \right.$$
$$\left. - \varphi\sin\Delta_0\cos\Delta_0 - \frac{\Delta_0}{N^2}\right\}.$$

Der erste Summand in der Klammer kann nur dann wesentlichen Einfluß haben, wenn der Drehungswinkel Δ_0 groß ist. Für kleines Δ_0 folgt

$$\overline{\varepsilon - \varepsilon_0} = \frac{\nu^2}{8}\Delta_0\left\{\operatorname{tg}\xi\,\frac{1-p^2}{1+p^2\cos\delta}\,\varphi\cdot\Delta_0 - \varphi - \frac{1}{N^2}\right\}.$$

Für das Vorzeichen des Fehlers werden stets das zweite und dritte Glied maßgebend sein, da sowohl $\operatorname{tg}\xi$ als auch

$$\frac{1-p^2}{1+p^2\cos\delta}$$

im allgemeinen kleiner als eins sind. Nur für $\delta > \frac{\pi}{2}$ wird der Bruch $\frac{1-p^2}{1+p^2\cos\delta} > 1$ und somit sein Einfluß größer. Da aber im durchgelassenen Licht sämtliche Werte von δ vorkommen, wird an Stelle von δ mit großer Näherung der Wert $\frac{\pi}{2}$ eingeführt werden können, so daß der Bruch den Wert $(1-p^2)$ für elliptisch polarisiertes Licht annimmt, während für linear polarisiertes der Wert $(1-p^2):(1+p^2)$ gilt.

Es mögen nun einige Zahlenbeispiele gegeben werden. Es sei

$$\nu = 2^0;\ \xi = 10^0;\ p = 0{,}8,\ N = 1{,}33,\ n = 1{,}5 \text{ und } \Delta_0 = 20^0.$$

Dann wird

$$\overline{\varepsilon - \varepsilon_0} = \dot{-}\, 7{,}2''$$

also ein Fehler, der bei exakten Messungen sehr wohl in Betracht kommt (der Einfluß des ersten Gliedes ist dabei unmerklich). Wird der Drehungswinkel größer, so wächst damit auch der Fehler; für $\Delta_0 = 90^0$ z. B. ist, wenn die übrigen Angaben die gleichen bleiben

$$\overline{\varepsilon = \varepsilon_0} = \dot{-}\, 29{,}2'',$$

während die entsprechenden Fehlerwerte für $\nu = 1^0$ (entsprechend einem Rohr von 600 mm) sich ergeben

$$\Delta_0 = 20^0 \qquad \overline{\varepsilon - \varepsilon_0} = -\ 1{,}8''$$
$$\Delta_0 = 90^0 \qquad \overline{\varepsilon - \varepsilon_0} = -\ 7{,}3''.$$

Der wesentlichste Einfluß ist also in der Zunahme der Länge der drehenden Schicht mit zunehmendem Neigungswinkel zu suchen. Es läßt sich nun hieraus vor allem eine einfache Beziehung zwischen der Ablesungsgenauigkeit F der Apparate, ihrer Länge und der Blendendurchmesser entwickeln. Wie aus Obigem hervorgeht, ist für Rohre von 200 mm Länge ($\nu = 2^0$ etwa) die größte Ablesungsgenauigkeit, welche von systematischen Fehlern nicht beeinflußt wird, vorausgesetzt, daß die sonstige Bauart des Apparats fehlerfrei ist, 30 Sekunden. Mithin ist für diese Apparate als Teilung des Analysatorkreises $^1/_{100}{}^0$ möglich. Die Beziehung, welche die größtmöglichste Ablesungsgenauigkeit für Apparate der Länge L angibt, ist somit

$$F > \frac{(b+B)^2\Delta_0}{32L^2}\cdot 0{,}67,$$

wo b, B, L und Δ_0 die angegebenen Bedeutungen haben. Nimmt man als Grenze der zu bestimmenden Drehungswinkel $\Delta = 90^0 = \frac{\pi}{2}$, so folgt

$$F > \frac{(b+B)^2\pi}{64L^2}\cdot 0{,}67,$$

wobei dann F den Wert im Bogenmaß ergibt.

Soll also bei einem Apparat eine Ablesungsgenauigkeit von $^1/_{1000}{}^0$ erzielt werden, so ist die Gesamtlänge und die Blendengröße gegeben durch die Beziehung

$$B + b = 0{,}023\,L$$

oder für $b = B$:

L	b
230 mm	2,6 mm
430 „	4,9 „
630 „	7,2 „

Erst bei Apparaten von mehr als 400 mm Blendenabstand läßt sich für die üblichen Blendengrößen eine Genauigkeit von $^1/_{1000}{}^0$ erreichen.

(Eingegangen 21. Juni 1919.)

Ableitung der chemischen Konstanten mehratomiger Gase aus dem Planckschen Wahrscheinlichkeitsbegriff.

Von Léon Schames.

§ 1. Während für einatomige Gase der Wert der chemischen Konstanten genau bekannt ist, ist dies bisher, trotz der schönen Arbeiten von Sackur[1]) und Tetrode[2]), für mehratomige Gase noch nicht mit gleicher Sicherheit der Fall. Auf den schwachen Punkt im Resultat dieser Arbeiten wollen wir eingehen, nachdem wir zuvor in allgemeiner Form die chemische Konstante mehratomiger Gase für so hohe Temperaturen, daß der Quanteneffekt nicht mehr merkbar ist (vgl. den folgenden Artikel) aus dem Planckschen Wahrscheinlichkeitsbegriff abgeleitet haben, wobei wir uns ganz und gar an die übersichtliche und elegante Ableitung der chemischen Konstanten einatomiger Gase von Planck[3]) anlehnen. Allgemein — und dementsprechend ergänzungsbedürftig — bleibt unsere Ableitung insofern, als wir hier nicht versuchen wollen, weiterzugehen und das Elementargebiet der Wahrscheinlichkeit streng zu bestimmen. Wir wollen dies vielmehr durch Vergleich unseres Resultats mit dem Sackur-Tetrodeschen ableiten, wobei wir dann auf den erwähnten schwachen Punkt stoßen werden.

§ 2. Wir haben N gleichartige Moleküle mit 3 Freiheitsgraden der Translation und ebenso vielen der Rotation. Der Zustandsraum wird also gebildet von 3 Koordinaten x, y, z mit den dazugehörenden Momenten $m\xi$, $m\eta$, $m\zeta$ und den 3 Winkelkoordinaten ϑ, f, φ mit den dazugehörenden Winkelmomenten Pp, Qq, Rr (m Masse P, Q, R die 3 Hauptträgheitsmomente, ξ, η, ζ, bzw. p, q, r die Komponenten der Translations- bzw. Rotationsgeschwindigkeit). Das Elementargebiet ist also

$$G_3 = m^3 PQR \int d\sigma, \tag{1}$$

wobei

$$dx\,dy\,dz \cdot d\xi\,d\eta\,d\zeta \cdot d\vartheta\,df \cdot d\varphi \cdot dp\,dq\,dr = d\sigma. \tag{2}$$

Die Verteilungsdichte w ändert sich beim idealen Gas nur sehr wenig von einem Elementargebiet zum andern, so daß sich die Summierung über alle Elementargebiete durch die Integration über den ganzen Zustandsraum ersetzen läßt. Es wird dann.

$$\Sigma w_1 = \frac{m^3 PQR}{G_3} \int w\,d\sigma = 1. \tag{3}$$

Aus der Planckschen Entropiegleichung:

$$S = -kN\,\Sigma w_1 \log w_1 \tag{4}$$

folgt dann

$$S_3 = -kN \frac{m^3 PQR}{G_3} \int w \log w\,d\sigma. \tag{5}$$

Durch w ist die Energie E des Gases bestimmt. Ist E_0 die unveränderlich gedachte innere Energie der ruhenden Moleküle, so wird:

$$E - E_0 = \frac{N}{2} \frac{m^3 PQR}{G_3} \int \Big\{ m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 \Big\} w\,d\sigma. \tag{6}$$

Die Bedingung des thermodynamischen Gleichgewichts, $\delta S = 0$, führt zu

$$w = \alpha \cdot e^{-\beta' \{ m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 \}}. \tag{7}$$

wo α und β' Konstante sind (β bei Planck $= \beta' m$). Ihre Größe ergibt sich aus E und dem Volumen V

$$V = \int\!\!\int\!\!\int dx\,dy\,dz. \tag{8}$$

(2), (3) und (8) liefern:

$$\frac{G_3}{m^3 PQR} = \alpha V \underbrace{\int\!\!\int\!\!\int}_{-\infty}^{+\infty} \int_0^{\pi} \underbrace{\int\!\!\int}_{0}^{2\pi} \underbrace{\int\!\!\int\!\!\int}_{-\infty}^{+\infty} e^{-\beta' \{ m(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + Pp^2 + Qq^2 + Rr^2 \}}\, d\xi\,d\eta\,d\zeta \cdot d\vartheta\,df\,d\varphi \cdot dp\,dq\,dr \tag{9}$$

1) O. Sackur, Ann. d. Phys. 40, 87, 1913.
2) H. Tetrode, Amst. Proc. 17, 1167, 1915.
3) M. Planck, Vorl. über die Theorie der Wärmestrahlung, S. 125ff., 1913.

Nach dem Vorgang Kirchhoffs[1]) setzen wir

$$\xi \sqrt{m} = \xi'$$
$$\eta \sqrt{m} = \eta'$$
$$\zeta \sqrt{m} = \zeta'$$
$$p \sqrt{P} = p'$$
$$q \sqrt{Q} = q'$$
$$r \sqrt{R} = r',$$

dann können wir das Integral in (9) auswerten und erhalten

$$\frac{G_3}{m^{3/2}(PQR)^{1/2}} = \alpha V \left(\frac{\pi}{\beta'}\right)^3 \tag{10}$$

und aus (6)

$$E - E_0 = \frac{N}{2} \alpha V \frac{3 m^{3/2}(PQR)^{1/2}}{G_3} \frac{1}{\beta'} \left(\frac{\pi}{\beta'}\right)^3 \cdot \tag{11}$$

Also ist

$$\alpha = \frac{G_3}{(PQR)^{1/2} V} \left(\frac{3N}{2\pi m^{1/2}(E - E_0)}\right)^3 \tag{12}$$

$$\beta' = \frac{3N}{2(E - E_0)} \tag{13}$$

und nach (5)

$$S_3 = kN \ln \left\{ \frac{(PQR)^{1/2} V m^{3/2}}{G_3} \left(\frac{2\pi e (E - E_0)}{3N}\right)^3 \right\}. \tag{14}$$

Für die chemische Konstante $a \left(= \frac{a}{kN} \text{ bei Planck}\right)$ folgt hieraus

$$a_3 = \ln \left\{ \frac{kN}{eG_3} (PQR)^{1/2} m^{3/2} (2\pi k)^3 \right\} \cdot \tag{15}$$

Für die zweiatomigen Gase spezialisieren wir aus (14) und (15) ($P = Q$, $R = 0$)

$$S_2 = kN \ln \left\{ \frac{P V m^{3/2}}{G_2} \left(\frac{4\pi e (E - E_0)}{5r}\right)^{5/2} \right\} \tag{16}$$

und

$$a_2 = \ln \left\{ \frac{kN}{e G_2} P m^{3/2} (2\pi k)^{5/2} \right\} \tag{17}$$

und schließlich für die einatomigen Gase

$$S_1 = kN \ln \left\{ \frac{V}{G_1} \left(\frac{4\pi e m (E - E_0)}{3N}\right)^{3/2} \right\} \tag{18}$$

$$a_1 = \ln \left\{ \frac{kN}{e G_1} (m\, 2\pi k)^{3/2} \right\}, \tag{19}$$

letztere Werte in vollständiger Übereinstimmung mit denen Plancks.

§ 3. Die Größe des Elementargebiets der Wahrscheinlichkeit G bestimmen wir nun durch den Vergleich mit anderen Formeln für die chemische Konstante. Für einatomige Gase folgt, da hierfür bekanntlich

$$a_1 = \ln \frac{(2\pi m k)^{3/2} k}{h^3} \tag{20}$$

$$G_1 = \frac{N h^3}{e}; \tag{21}$$

für zweiatomige Gase, für die das Sackur-Tetrodesche Resultat streng ist,

$$a_2 = \ln \frac{(2\pi m k)^{3/2} k \cdot 2\pi k P \cdot 4\pi}{h^5}, \tag{22}$$

folgt

$$G_2 = \frac{N h^5}{e\, 4\pi}. \tag{23}$$

Für die beiden hinzutretenden Freiheitsgrade der Rotation des zweiatomigen Moleküls tritt also pro Freiheitsgrad das Glied

$$\ln \frac{2\pi \sqrt{2kP}}{h}$$

hinzu. Es scheint uns logisch, daß das Glied für den dritten Freiheitsgrad der Rotation beim drei- und mehratomigen Molekül sich — abgesehen von den individuellen Werten P, Q, R — von den beiden ersten nicht unterscheidet, so daß wir hätten

$$a_3 = \ln \frac{(2\pi m k)^{3/2} k (8\pi^2 k)^{3/2} \sqrt{PQR}}{h^6} \tag{24}$$

und mithin

$$G_3 = \frac{N h^6}{e (4\pi)^{3/2}}. \tag{25}$$

Beim Sackur-Tetrodeschen Resultat für die chemische Konstante drei- und mehratomiger Gase bedingt hingegen der dritte Rotationsfreiheitsgrad ein um $\sqrt{\pi}$ größeres Glied, als die beiden ersten, was uns also nicht richtig erscheint, und was mithin die eingangs erwähnte Schwäche dieses Resultats ist.

Frankfurt a/M., 3. August 1919.

(Eingegangen 10. August 1919.)

Chemische Konstante, Trägheitsmoment des Moleküls und Quantentheorie der Gase.

Von Léon Schames.

§ 1. Ist die chemische Konstante mehratomiger Gase im Gebiet, in dem einerseits der Quanteneffekt, andererseits die inneren Freiheitsgrade unmerklich sind, numerisch bekannt, so läßt sich daraus das Trägheitsmoment berechnen. Das so erhaltene Resultat wollen wir mit denjenigen anderer Autoren vergleichen. Dann wollen wir weiter aus der chemischen Konstante der Rotation deren charakteristische Temperatur ableiten, welche in der — noch nicht

1) G. Kirchhoff, Vorl. über die Theorie der Wärme, S. 170, 1894.

Tabelle I.

		O_2	CO	N_2	CO_2	H_2O
i_Σ nach Langen		0,54	— 0,04	— 0,05	— 0,406	— 1,930
$10^{40} \cdot P$ bzw. $\sqrt[3]{PQR}$	nach Gl. (2) bzw. (3)	31,2	10,07	9,91	5,80	1,365
	„ anderen Autoren	7,51		10,06		1,382
char. Temp. Θ_r	nach Gl. (4) bzw. (5)	1,29	4,01	4,07	6,95	29,5
	aus Rotationsspektrum		4,00			29,2

eindeutig festgelegten — den Quantenabfall der Rotation bestimmenden Funktion auftritt. In vollkommener Analogie hierzu wird uns die chemische Konstante der Translation zu deren charakteristischen Temperatur führen; das ist also die Größe, die den Abfall der Translationswärme des entarteten Gases beherrscht.

§ 2. Die chemische Konstante einatomiger Gase a_1, oder allgemeiner die chemische Konstante der Translation beliebiger Gase a_t ist [Gl. (20) des voranstehenden Artikels]

$$a_t = \ln \frac{(2\pi m k)^{3/2} k}{h^3}. \qquad (1)$$

Bei Einführung gewöhnlicher Logarithmen und des Druckes in Atmosphären gehe a in i über. Dann wird mit $h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}$, $k = 1{,}347 \cdot 10^{-10}$, $N = 6{,}17 \cdot 10^{23}$

$$i_t = -1{,}608 + \frac{3}{2} \lg M. \qquad (1\,a)$$

Die chemische Konstante mehratomiger Gase wird dann

$$a_\Sigma = a_t + a_r,$$

wobei für zweiatomige Gase nach Gl. (22) voranstehenden Artikels

$$a_{r2} = \ln \frac{8\pi^2 k P}{h^2}, \qquad (2)$$

bzw.

$$i_{r2} = 38{,}394 + \lg P, \qquad (2\,a)$$

für drei- und mehratomige Gase nach (24)

$$a_{r3} = \frac{3}{2} \ln \frac{8\pi^2 k (PQR)^{1/3}}{h^2} \qquad (3)$$

bzw.

$$i_{r3} = 57{,}592 + \frac{1}{2} \lg PQR. \qquad (3\,a)$$

In einer demnächst zu veröffentlichenden größeren Arbeit über das Dampfdruckproblem habe ich u. a. eine Methode entwickelt, um bei genügend bekannten kalorischen Daten i_Σ aus den Dampfdrucken der Flüssigkeit bis zum kritischen Punkt durch graphische Integration zu bestimmen. Die so ermittelten Werte stimmen gut mit denen überein, die Langen[1]) unlängst aus den Dampfdrucken der festen Substanz im Gültigkeitsgebiet des idealen Gasgesetzes berechnet hat; hingegen sind die in letzterer Arbeit aus chemischen Gleichgewichten berechneten Werte noch recht unzuverlässig (vgl. dort die Abweichungen beim O_2 und hier weiter unten beim H_2) und schließen wir diese deshalb hier von der Betrachtung aus.

1) A. Langen, Zeitschr. f. Elektrochem. **25**, 25, 1919.

Zum Vergleich haben wir in Tabelle I unter die hier berechneten Werte des Trägheitsmoments für O_2 und N_2 die von Laski[1]) gesetzt. Diese sind mittels des Bohr-Debyeschen Modells berechnet und fußen auf Daten (spez. Wärmen) im Gebiet hoher Temperaturen (1200 bis 2800°), während unsere Werte auf Dampfdrucken, also auf Temperaturen unterhalb der kritischen basieren. Für N_2 ist die Übereinstimmung sehr gut, hingegen gehen die beiden Werte bei O_2 stark auseinander. Das Bohr-Debyesche Modell bestätigt sich hiernach sehr wohl beim N_2, nicht aber beim O_2. Für CO scheint das Trägheitsmoment anderweitig noch nicht berechnet; jedoch stimmt der hier gegebene Wert mit dem Rotationsspektrum vorzüglich überein (vgl. den nächsten Paragraphen). Auf CO_2 werden wir demnächst zurückkommen.

Für H_2O hat Hettner[2]) die Trägheitsmomente — von zwei verschiedenen Standpunkten aus — aus dem Rotationsspektrum berechnet. Ausgehend von der neueren Planckschen Fassung der Quantentheorie (kontinuierliche Absorption) fand Hettner als mittleres Trägheitsmoment $\sqrt[3]{PQR} = 2{,}48 \cdot 10^{-40}$, während die weitergehende Fassung der Quantentheorie ihn zu denselben Trägheitsmomenten führte, die schon Eucken[3]) benutzte. Aus diesen folgt der in der Tabelle verzeichnete Wert. Man sieht, daß er mit dem hier berechneten sehr gut übereinstimmt. *Die Berechnung des Trägheitsmoments aus der chemischen Konstanten entscheidet also eindeutig zugunsten der weitergehenden Fassung der Quantentheorie.*

In Tabelle II wollen wir verschiedene Ausgangswerte (unterstrichen) verschiedener Autoren

1) G. Laski, Diese Zeitschr. **20**, 269, 1919.
2) G. Hettner, Ann. d. Phys. **55**, 545, 1918.
3) A. Eucken, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 1195, 1913.

für H_2 und die hieraus berechneten Werte zusammenstellen; da sich H_2 im ganzen Dampfdruckgebiet „einatomig" verhält, läßt sich die chemische Konstante seines normalzweiatomigen Zustands i_Σ nur auf anderem Wege ableiten.

Tabelle II.

H_2 nach	Langen	Debye	Reiche[1])
chem. Konst. i_Σ	— 3,767	— 3,30	— 3,38 bis — 3,43
Trägheitsmoment $P\cdot 10^{40}$	0,10	0,29	0,23 „ 0,21
char. Temp. Θ_r	410	140	170 „ 190

Das aus dem Langenschen Wert der chemischen Konstanten berechnete Trägheitsmoment ist bestimmt zu klein; die mittleren Werte von Reiche dürften wohl der Wirklichkeit am nächsten kommen.

§ 3. Die Berechnung der chemischen Konstanten — und mithin auch des Trägheitsmoments — ist von „der Quantentheorie der Gase" vollkommen unabhängig, ein Umstand, auf den kürzlich erst Stern[2]) wieder mit Nachdruck hingewiesen hat. Umgekehrt läßt sich nun aber die Quantentheorie der Gase aus dem Wert der chemischen Konstanten entwickeln. Die charakteristische, den Quantenabfall der Rotation beherrschende Temperatur Θ_r ist für zweiatomige Gase

$$\Theta_r = \frac{h^2}{8\pi^2 k P} \qquad (4)$$

bzw. für drei- und mehratomige Gase[3])

$$\Theta_r = \frac{h^2}{8\pi^2 k (PQR)^{1/3}}. \qquad (5)$$

Aus den Gleichungen (2) und (3) folgt dann

$$\ln \Theta_r = -a_{r2} \qquad (4a)$$

bzw.

$$\ln \Theta_r = -\frac{2}{3} a_{r3}. \qquad (5a)$$

Das so berechnete Θ_r ist in unseren Tabellen enthalten. Nernst und seine Mitarbeiter setzen

$$\Theta_r = \beta \nu_r. \qquad (6)$$

Um aber einerseits Übereinstimmung mit dem Ansatz von Ehrenfest[4])

$$\left.\begin{aligned} \nu &= n\,\nu_r \\ \nu_r &= \frac{h}{4\pi^2 P}, \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

andererseits Übereinstimmung mit dem aus dem Rotationsspektrum abgeleiteten ν zu erhalten, ist es nötig, statt (6) zu setzen

$$\Theta_r = \frac{\beta\nu}{2} \qquad (6a)$$

bzw. für drei- und mehratomige Moleküle

$$\Theta_r = \frac{\beta}{2} (\nu_1 \nu_2 \nu_3)^{1/3}. \qquad (6b)$$

Für CO gibt v. Bahr[1]) $\lambda_R = 365\,\mu$, für H_2O gibt Hettner $\nu_1 = 0{,}75\cdot 10^{12}$, $\nu_2 = 1{,}73\cdot 10^{12}$, ν_3[2]) $= 1{,}33\cdot 10^{12}$, was zu den in Tabelle I angeführten Werten von Θ_r führt.

Θ_r ist ein Maß für den Abfall der Rotationswärme, und zwar darf man diesen Abfall oberhalb etwa $\beta\nu_r = 1$, d. h. nach (6a) von $T \sim 2\Theta_r$ an vernachlässigen; hier beginnt also das Gebiet, in welchem mit der chemichen Konstanten a_Σ gerechnet werden darf.

§ 4. Der einfache Zusammenhang zwischen dem Rotationsquanteneffekt und der chemischen Konstanten legt einen ähnlich einfachen zwischen dieser und dem Translationsquanteneffekt nahe. Es handelt sich also noch darum, die charakteristische Temperatur der Translation Θ_t abzuleiten, welche im Quantenabfall der Translationswärme beim entarteten Gas auftreten wird. Zu diesem Zweck gehen wir auf den Ausdruck für die Translationsentropie zurück [Gl. (18) und (21) voranstehenden Artikels]. Einfache Umformung ergibt

$$S_t = kN\left\{\frac{3}{2}\ln eT\frac{2\pi mk}{h^2}\left(\frac{eV}{N}\right)^{2/3}\right\}. \qquad (8)$$

Dem Glied 4π bzw. $(4\pi)^{2/3}$ bei der Rotation entspricht also bei der Translation das Glied $\left(\frac{eV}{N}\right)^{2/3}$, so daß wir vollkommen analog mit (4) und (5) erhalten:

$$\Theta_t = \frac{h^2}{2\pi mk}\left(\frac{N}{eV}\right)^{2/3}, \qquad (9)$$

oder mit (6b)

$$\nu_t = \frac{h}{\pi m}\left(\frac{N}{eV}\right)^{2/3}, \qquad (10)$$

wobei ν_t das algebraische Mittel aus drei „Schwingungszahlen der Translation" ist. Abgesehen von dem durch die Differenz zwischen (6) und (6a) bedingten Faktor 2 findet Nernst[3])

1) F. Reiche, Ann. d. Phys. 58, 657, 1919.
2) O. Stern, Zeitschr. f. Elektrochem. 25, 66, 1919.
3) Die zu (4) vollkommen analoge Gleichung (5) ergibt sich nur aus unserer chemischen Konstanten (3) bzw. (24) voranstehenden Artikels, während der Sackur-Tetrodesche Wert einen um $\sqrt[3]{\pi}$ vergrößerten Nenner ergeben würde.
4) P. Ehrenfest, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15, 451, 1913.

1) E. v. Bahr, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 15, 728, 1913.
2) G. Hettner, l. c. S. 493.
3) W. Nernst, Die theoretischen und experimentellen Grundlagen d. neuen Wärmesatzes 1918, S. 166.

aus seinem speziellen Modell der Gasentartung einen verhältnismäßig ähnlichen Wert.

Θ_t ist ein Maß für den Abfall der Translationswärme, also für den Quanteneffekt des entarteten Gases. Der Effekt ist also — wie bekannt — um so größer, je kleiner V ist. Im Grenzfall des idealen Gases ($V = \infty$) verschwindet dieser Quanteneffekt.

Frankfurt a/M., 6. August 1919.

(Eingegangen 10. August 1919.)

Über unipolare Leitung an Kristallen.

Von F. Streintz und A. Wesely.

In einem in dieser Zeitschrift[1]) erschienenen Nachruf auf Ferdinand Braun schreibt H. R.: „1875 entdeckte er die unipolare Stromleitung der Schwefelmetalle, eine Erscheinung, deren Natur trotz vieler mühevoller Arbeiten von ihm und anderen noch immer rätselhaft geblieben ist. Nach vielen Jahren hat er ihr eine wichtige technische Anwendung in dem Kristalldetektor der drahtlosen Telegraphie gegeben."

Vor einigen Jahren sind eingehende Untersuchungen über das Verhalten metallisch aussehender Kristalle von Sulfiden im Schließungskreise einer elektromotorischen Kraft angestellt worden[2]). Vielleicht ist es auf ihrer Grundlage möglich, einer Lösung des Rätsels näher zu kommen.

Der gemessene Widerstand eines Kristalles besteht aus der Summe zweier Widerstände. Der eine kommt dem Erz selbst zu und soll sein Eigenwiderstand σ genannt werden, der andere entsteht an den Grenzflächen mit der metallischen Zuleitung, ist unter dem Namen Übergangswiderstand bekannt und soll mit u bezeichnet werden. Der Eigenwiderstand hat sich stets, soweit es gelungen ist, ihn in reiner Form zu erhalten, als klein erwiesen, so daß man annehmen kann, daß er sich unmittelbar an jenen der Metalle anschließt. Man erhielt, um drei Beispiele anzugeben, für Bleiglanz $10^4 \sigma < 14{,}2$, für Schwefelkies < 23, für Silberglanz < 67 Ohm. Das Ungleichheitszeichen wurde gewählt, um auszudrücken, daß auch noch in diesen Zahlen ein geringer Übergangswiderstand steckt. Der Eigenwiderstand befolgt das Ohmsche Gesetz und hängt von der Temperatur in derselben Weise ab, wie der der Metalle. Für Bleiglanz beträgt der Temperaturkoeffizient 0,005, für Schwefelkies 0,0023 bis 0,0035.

Der Übergangswiderstand dagegen wird von der Temperatur mehr oder weniger stark beeinflußt, gehorcht nicht dem Ohmschen Gesetze und läßt sich befriedigend durch die Beziehung zur Temperatur

$$u_t = u_0 e^{-at}$$

ausdrücken. Es ist somit der Gesamtwiderstand w_t bei einer Temperatur von t^0 C gegeben durch

$$w_t = \sigma_0 (1 + at + \beta t^2) + u_0 e^{-at}.$$

Unter gewöhnlichen Verhältnissen überwiegt der Übergangswiderstand derart, daß der Eigenwiderstand vernachlässigt, also $w = u$ gesetzt werden kann.

Der Übergangswiderstand wird in ähnlicher Weise, wie von der Temperatur, auch von der Stromstärke beeinflußt, außerdem hängt er ab vom Druck, unter dem der Kristall gegen die Zuleitungen gepreßt wird, von der Dauer der Berührung mit ihnen und endlich von der Natur des Metalles, aus dem sie bestehen. Die Ursache dieses Verhaltens wurde Gasschichten zugeschrieben, die zwischen Metall und Kristall gelagert sind. Für diese Annahme spricht, daß ein Sulfidkristall auf einer polierten Goldfläche einen Hof erzeugt (bei Silberglanz bereits bei Zimmertemperatur), bei höheren Temperaturen aber einen rotbraunen Fleck hervorruft, der sein Entstehen offenbar der Bildung von Schwefelgold verdankt. Wird Silberglanz von Quecksilber umspült, so zeigte es sich, daß die Kristallflächen versilbert wurden, während auf dem Quecksilber kleine Stückchen einer roten Substanz auftauchten, woraus also auf einen chemischen Umsatz entsprechend der Gleichung

$$Ag_2S + Hg = HgS + Ag_2$$

geschlossen werden konnte. Noch sei ein Versuch erwähnt, der seinerzeit nicht beschrieben worden ist. Wird in der Anordnung von Wesely[1]) ein Kristallzylinder aus Silberglanz in die trennende Glasplatte des Glastroges eingekittet, seine Grundflächen mit einer Klinge abgeschabt und der Trog sofort mit Quecksilber gefüllt, das Platinelektroden zur Leitung beliebiger Ströme durch den Kristall aufnimmt, so ergibt sich trotz dieser Vorsichtsmaßregeln zuerst noch ein beträchtlicher Übergangswiderstand. Steigert man die Stromstärke allmählich — es geschah dies mit Strömen bis zu 15 Weber, dann entsteht von Zeit zu Zeit ein

1) Diese Zeitschr. 19, 537, 1918.

2) F. Streintz u. A. Wellik, diese Zeitschr. 12, 845, 1911; 13, 162, 1912; F. Streintz, diese Zeitschr. 13, 673, 1912; A. Wesely, diese Zeitschr. 14, 76, 1913; F. Streintz, Jahrb. d. Radioakt. u. Elektr. 10, 221, 1913; F. Streintz, Ann. d. Phys. (IV) 44, 545, 1914.

1) A. Wesely, diese Zeitschr. 14, 77, 1913.

eigentümlich schmorendes Geräusch und es treten winzige Bläschen, meist war eine Seite des Troges bevorzugt, aus der Quecksilberfläche. Mit dem Auftreten der Bläschen erfolgte eine zuweilen ruckweise Abnahme des Widerstandes. Durch die Stromwärme, die sich fast ausschließlich an den Grenzflächen entwickelt, werden eben die daselbst festgehaltenen Gase in Freiheit gesetzt.

Aus diesen Erscheinungen kann geschlossen werden, daß ein Schwefelmetall von einer Atmosphäre umgeben ist, die durch seine Verdampfung gebildet wird. Die Dampftension des schon bei Zimmertemperatur wenig harten Silberglanzes scheint nun eine verhältnismäßig große zu sein, weshalb es nur unter Anwendung besonderer Geduld gelingt, ihn von seiner Atmosphäre zu befreien und damit vom Übergangswiderstand zu reinigen.

Bleiglanz ist härter, die Tension seines Dampfes bei gleichen Umständen wahrscheinlich geringer, sein Übergangswiderstand, der aber gleichfalls von Temperatur und Stromstärke, nur in geringerem Grade, sehr beeinflußt wird, wesentlich kleiner. Dasselbe gilt für die noch härteren Kristalle Schwefelkies, Magnetkies und Arsenkies, desgleichen für den Oxydkristall Eisenglanz (Fe_2O_3). Nach der Annahme entstehen somit zu beiden Seiten des Kristalles Plattenkondensatoren (K_1, K_2 der Fig. 1) mit dem Gase als Dielektrikum. Diese

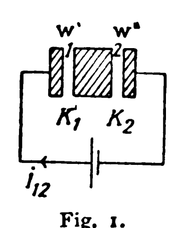


Fig. 1.

„Molekularkondensatoren" besitzen eine sehr große Kapazität.

Der scheinbare Übergangswiderstand besteht somit aus zwei Teilen, die an beiden Grundflächen des Kristalles auftreten. Vernachlässigt man σ, so kann man für den Übergangswiderstand setzen:

$$w = w' + w'',$$

wobei w' von w'' im allgemeinen verschieden sein wird. Lag der Kristall im Stromkreise zwischen amalgamierten Goldplatten, so konnte wahrgenommen werden, daß eine Goldfläche erhitzt wurde, während die andere kalt blieb oder sich nur mäßig erwärmte.

Der Einfluß, den das als Stromzuleitung verwendete Metall auf den Übergangswiderstand ausübt, ist verschieden. An Elektroden von Platin, Gold und Quecksilber entsteht der größte Übergangswiderstand, an Silber und Messing ist er geringer, an Blei, besonders im amalgamierten Zustande, am kleinsten. Zu erklären ist das Verhalten damit, daß die erstgenannten Metalle Schwefelverbindungen bilden, die Nichtleiter sind, dagegen Silber und Blei als Sulfide Leiter bilden und Messing durch seinen Anteil an Kupfer wenigstens zum Teil auch ein leitendes Sulfid abgibt.

Auf Grund dieser Erfahrungen erscheint es als erste Aufgabe, festzustellen, ob und inwieweit eine Beziehung zwischen dem Übergangswiderstand und der unipolaren Leitung vorhanden ist. Eine kurze Kritik einer Theorie, die unipolare Leitung durch das Auftreten einer galvanischen Polarisation an den Grenzflächen zu erklären, soll vorausgeschickt werden.

Die Unhaltbarkeit einer elektrochemischen Theorie.

In einer jüngst veröffentlichten sorgfältigen Untersuchung bestätigt Fräulein Székely[1]) die Anschauung, daß die Wirkung eines Kontaktdetektors durch seine Unipolarität hervorgerufen werde. Gestützt auf eine Dissertation O. Weigels[2]) versucht sie, eine Erklärung auf elektrochemischer Grundlage zu geben. An der Berührungsstelle des Detektors soll eine Flüssigkeitshaut vorhanden sein, durch deren elektrolytische Leitung Polarisation entsteht. Zum Vergleich diente ein kleines Element, bestehend aus Graphit als positivem, aus einem Bleiglanzkristall als negativem Pol in Wasser oder verdünnter Schwefelsäure. Die mit dem Leitungsdrahte verbundenen Enden waren elektrolytisch verkupfert. Es zeigte sich, daß diesem Element Eigenschaften mit dem Bleiglanz-Graphit-Detektor gemeinsam waren. Die Analogie ist gewiß keine zufällige. In einer polarisierten Zelle bedecken die durch die Zersetzung entwickelten Gase die Elektroden. Es entstehen Kondensatoren, so daß in der Zelle neben einer elektrolytischen auch eine dielektrische Polarisation wirksam wird, die besonders in Fällen hervortritt, wo die mit dem schwereren Gase beladene Anode sehr klein ist und auf hohes Potential gebracht wird. Auf dieses Verhalten wurde bereits im Jahre 1888 aufmerksam gemacht[3]).

Eine Wiederholung des Versuches mit der Zelle kam in folgender Weise zur Ausführung.

1) A. Székely de Doba, Wien. Ber. IIa, 127, 719, 1918.
2) O. Weigel, Diss. Stuttgart 1905.
3) F. Streintz, Wied. Ann. 34, 753—754. 1888.

Ein Stäbchen von Gaskohle und ein kurzer Stift von gepreßtem Bleiglanzpulver standen einander sehr nahe in einem Glasrohr gegenüber, das eine sehr verdünnte Kochsalzlösung enthielt. Die Elektroden waren an den Verbindungsstellen mit den Drähten gleichfalls verkupfert. Das Element wurde in einen Stromkreis zum Weston-Voltmeter und 1000 Ohm Widerstand geschaltet. Als anfängliche elektromotorische Kraft konnten noch 0,3 Volt Spannung ermittelt werden, die rasch polarisiert waren. Kohle war positiver Pol. (Wurde Kohle mit blankgescheuertem Blei vertauscht, so zeigte sich PbS elektronegativ mit etwa 0,2 Volt gegen Pb, verhielt sich also qualitativ wie PbO_2.) Die Zelle wurde nun mit zwei Akkumulatoren polarisiert. Es ergab sich, wenn E_1 die elektromotorische Kraft im Stromkreis bedeutet, sobald C zur Anode, E_2 jene, wenn es zur Kathode gemacht wurde:

$$E_1 = e - \pi_1 = 1{,}50 \text{ Volt}$$

$e = 4$ Volt; ferner ist:

$$E_2 = e - \pi_2 = 2{,}05 \text{ Volt}$$

$$\pi_1 = (C + O)\,|NaCl\,aq|\,(PbS + H_2);$$

$$\pi_2 = (PbS + O)\,|NaCl\,aq|\,(C + H_2).$$

Die Differenz $\pi_1 - \pi_2$ beträgt somit 0,55 Volt, vorausgesetzt, daß die Zelle über die Zersetzungsspannung des Wassers — ungefähr 2 Volt — polarisiert ist. Aber auch bei Anwendung geringer Kräfte wird immer galvanische Polarisation nachzuweisen sein. Diese ist bekanntlich das sicherste und oft einzige Kennzeichen für elektrolytische Leitung. Nun ist es aber Frl. Székely nicht gelungen, auch nur Spuren von Polarisation im Detektor aufzufinden, selbst dann nicht, wenn sie sich einer elektromagnetischen Stimmgabel als Wippe bediente. Nebenbei bemerkt, wurden Versuche an Blei- und Silberglanz mit dem gleichen negativen Erfolge vor vielen Jahren mit Hilfe derselben Stimmgabel angestellt[1]).

Bei der Anordnung, wie sie von uns getroffen wurde, liegt ein kleiner Kristallzylinder von eben geschliffenen Grundflächen zwischen zwei Platten aus Metall, z. B. Kupfer. In diesem Fall wären also zu beiden Seiten des Kristalles Wasserhäutchen vorhanden, deren Widerstände w_1 und w_2 heißen mögen. Die Differenz $\pi_1 - \pi_2$ verschwindet hier, da

$$\pi_1 = -\pi_2\,(Cu + O)\,|H_2O|\,PbS + H_2) + \\ + (PbS + O)\,|H_2O|\,(Cu + H_2)$$

wird. Es ist also bei jeder Stromrichtung dieselbe elektromotorische Kraft tätig. Sorgt man durch entsprechende Wahl von Drahtwiderständen R_1 und R_2 dafür, daß die Stromstärken einander gleich werden, dann ergibt sich

$$w_1 - w_2 = R_2 - R_1.$$

Der Widerstand von Wasserhäutchen ist wohl als sehr klein anzunehmen, die Differenz kann aber überhaupt nicht in Betracht kommen. Damit erweist sich eine Erklärung der Unipolarität auf elektrochemischer Grundlage als unzureichend. Dazu kommt, daß, wenn Ströme bis zu 15 Weber geraume Zeit durch Kristalle geleitet wurden, die unipolare Leitung bestehen blieb. Flüssigkeitshäutchen hätten längst ihre Daseinsberechtigung eingebüßt, ganz abgesehen davon, daß sie nebenbei durch die entwickelte Stromwärme verdampft wären.

An Stelle der Flüssigkeitshäutchen müssen demnach, wie bereits hervorgehoben wurde, Gasschichten angenommen werden. Denn nur unter dieser Annahme findet das Verhalten derartiger Leiter gegenüber Stromstärke-Druck und Temperatur eine ungezwungene Erklärung. Auch die beobachteten Entladungserscheinungen sind auf das Vorhandensein derartiger Schichten zurückzuführen. Zweifellos können Übergangswiderstände durch Fremdkörper in allen Aggregatzuständen entstehen. Sie unterscheiden sich aber wesentlich voneinander: „Sind sie gasförmig, dann nimmt der Widerstand mit der Temperatur ab und läßt sich durch eine Exponentialfunktion ausdrücken, die dem Vorgange der Entladung zwischen den Schichten Rechnung trägt, sind sie im flüssigen Zustand im Innern enthalten, dann beginnt der Widerstand von einer bestimmten Temperatur an zu schwanken (Schwefelkies und Markasit von ungefähr 90° an), sind sie endlich fest, so entsteht eine lineare Verschiebung von Widerstand und Widerstandsänderung"[1]).

Versuchsanordnung und Bezeichnungsweise.

Da nach einem bereits erwähnten Versuche zu erwarten stand, daß sich die Grundflächen der Kristalle beim Durchleiten von Strömen verschieden, ihren gleichfalls verschiedenen Übergangswiderständen u_1 und u_2 entsprechend, erwärmen werden, so erschien es notwendig, in ihrer unmittelbaren Nachbarschaft Temperaturmessungen vorzunehmen. Der zu prüfende Kristall, bestehend aus einem Kreiszylinder von 4,30 mm Höhe, 9,74 mm Durchmesser und vollkommen ebenen Grundflächen, wurde zwischen zwei kreisförmige Messingscheibchen von etwas

1) F. Streintz, Ann. d. Phys. (IV) 9, 872 u. 882, 1902.

1) F. Streintz, Jahrb. d. Radioakt. u. Elek. 10, 245, 1913.



größeren Durchmesser eingeschoben. An die Ränder jedes Scheibchens waren Thermoelemente, Eisen-Konstantan, gelötet, deren Drähte durch Glasröhren isoliert in ein größeres Gefäß mit Wasser von Zimmertemperatur, das außerdem ein empfindliches Thermometer aufnahm, tauchten. In der Mitte der Glasröhren befanden sich die Lötstellen Eisen bzw. Konstantan mit der Kupferzuleitung. Die auftretenden Thermoströme wurden mit einem empfindlichen Drehspulengalvanometer von Siemens & Halske gemessen. Die Eichung der Elemente geschah mit dem von der Phys.-techn. Reichsanstalt geprüften Normalthermometer, das in zehntel Grade geteilt ist. Die beiden Thermoelemente weichen etwas voneinander ab. Ein Element, das zur Messung der Temperaturen T' diente, gab 21,63 mm Doppelausschlag für den Grad, das andere für T'' verwendete 21,92 mm. Auch alle anderen Messungen wurden durch Doppelausschläge ermittelt. An die Messingscheibchen waren außerdem Drähte für die Zuleitung von Strömen durch den Kristall gelötet. Die Scheibchen wurden mit dem Kristall zwischen zwei kurze Messingsäulen einer Stahlpresse gebracht, die einst zur Bestimmung der Leitfähigkeit von Pulvern Dienste geleistet hatte[1]). Von den Säulen waren die Scheibchen durch Glimmerblätter isoliert. Die zierliche, aber trotzdem für große Drucke geeignete Presse wurde in aufrechter Stellung durch ein Stativ festgehalten.

In unmittelbarer Verbindung mit den Temperaturmessungen wurden die Strommessungen vorgenommen. Ein Weston-Voltmeter gestattete mit entsprechenden Nebenschlüssen Stromstärken von 0,0001 bis zu 15 Weber zu messen. Die Übergangswiderstände konnten, da sie meist erheblich waren, durch Substitution vom Rheostatenwiderstand ermittelt werden. Zuweilen handelte es sich darum, sehr kleine Übergangswiderstände kennen zu lernen. Diese wurden mit dem Spiegelgalvanometer aus dem Gefälle in bekannten hinter den Kristall geschalteten Dekadenwiderständen ($10 \times 0{,}001$, $10 \times 0{,}01$, $10 \times 0{,}1$ Ohm) gefunden.

Über die vorkommenden Größen wurde folgendermaßen verfügt: Mit 1 wird jene Grenzfläche bezeichnet, an der die zu Beginn einer Versuchsreihe gemessene Temperatur T' die höher gelegene ist, die also stärker erwärmt wird; an der Stelle 2 herrscht dagegen die niedrigere Temperatur T''. Fließt der Strom in der Richtung von 1 nach 2, wie in Fig. 1, dann entsteht in 1 die Temperatur T_{12}', fließt er in der entgegengesetzten, dann erhält man daselbst die Temperatur T_{21}'. Dieselbe Bezeichnung gilt für die an 2 gemessenen niedrigeren Temperaturen T_{12}'' und T_{21}''. Die in 1 und 2 gelagerten Einzelwiderstände w' und w'' entziehen sich der Beobachtung. Man kann nur ihre Summen

$$w_{12} = w_{12}' + w_{12}''$$

und

$$w_{21} = w_{21}' + w_{21}''$$

ermitteln. w_{12} wurde größer als w_{21} gefunden, i_{12} kleiner als i_{21}.

Unipolarität wird das Verhältnis

$$U = \frac{i_{21} - i_{12}}{i_{21}}$$

genannt, ist also ein echter Bruch, der den Unterschied der Stromstärken nach beiden Richtungen angibt für den Fall, als in der besser leitenden Richtung der Strom 1 fließt. Für jene seltenen Fälle, wo während einer Versuchsreihe eine Umkehrung der Unipolarität eintritt, wird sie durch das Verhältnis

$$U' = \frac{i_{12} - i_{21}}{i_{12}}$$

ausgedrückt.

Die Versuche.

Die Versuche nahmen viel Zeit in Anspruch, da es meist eine halbe Stunde und länger dauert, bis sich ein stationärer Zustand in der Wärmeverteilung des Systems eingestellt hat. Ferner gelangen die Entladungen, die zwischen den Belegen der Molekularkondensatoren zum Durchbruch kommen und ihr Vorhandensein durch mehr oder minder heftige Stöße auf die Nadel des Voltmeters anzeigen, erst nach geraumer Zeit zum Abflauen. Es wurde beobachtet, daß in der Richtung 1—2, wo also die Stromstärke i_{12} die schwächere ist, gewissermaßen ein Kampf um bessere Leitung entsteht. Die Nadel schreitet langsam in Oszillationen vor bis zu einer gewissen Grenze, um dort gleich einer elastischen Feder zurückgeworfen zu werden. Dann tritt eine Abspannung ein, die Nadel kriecht zurück; nach kurzem hat sie sich erholt, sie birscht sich abermals zu größeren Werten heran, gelangt unter Umständen sogar über die erste Grenze hinaus, um neuerdings einen empfindlichen Rückschlag zu erleiden. Endlich scheint sie sich mit ihrem Geschick abgefunden zu haben. Dieser Kampf um Energiegewinn hätte etwas Fesselndes für den Beschauer, wenn er sich nicht zu oft wiederholen würde. In der Richtung 2—1 entspinnt sich kein Kampf. Die

1) F. Streintz, Ann. d. Phys. (IV) 9, 855, 1902.

Nadel sucht sich, von geringen Zuckungen abgesehen, langsam vorwärts zu tasten.

Unmittelbar nach Umkehrung der Stromrichtung von der besser zur schlechter leitenden Seite schlägt die Nadel nach den größeren Zahlen häufig über den Wert i_{21} hinaus, um dort kurze Zeit, je nach der Dauer der vorangegangenen Strombelastung bis zu einer halben Minute, zu verweilen. Dann nimmt der Strom ab, bis er sich der neuen Stromstärke genähert hat. Nun beginnt das bereits geschilderte Spiel. Damit ist das Bild, das ein Bleiglanzkristall zwischen Messingelektroden gibt, so ziemlich gezeichnet. Bei Arsenkies und Schwefelkies ist das Verhalten ein ähnliches, jedoch gedämpftes. Befindet sich dagegen Silberglanz im Stromkreise, dann führt die Nadel einen tollen Tanz auf. Bei Wechsel der Stromrichtung fährt sie, die sich früher im Bereich von 20 bis 30 Strichen herumgetrieben hatte, über die 150 Striche der Skala hinaus, um früher oder später wieder in die Tiefe zu sinken und dort eine scherende Bewegung zu beginnen. Die Aussicht, einen Einblick in irgendwelche Regeln, denen auch diese Oberfläche unterworfen sein wird, zu gewinnen, ist nicht allzu groß. Möglicherweise gelingt es bei Anwendung elektrostatischer Methoden Aufklärung über die Ursache der Erscheinungen zu erhalten, die sich übrigens qualitativ wie die an Bleiglanz geschilderten verhalten.

In der vorliegenden Arbeit wurde zunächst das Ziel gesteckt, eine Wechselwirkung zwischen Übergangswiderstand und Unipolarität festzustellen. Ist eine solche vorhanden, dann wird auch U abhängig sein neben der Dauer der Belastung von Druck, Stromstärke, dem Metall der Zuleitung und von der Temperatur. Die Unipolarität als Funktion der Temperatur darzustellen, wäre nur bei großem Aufwand von Zeit möglich gewesen; außerdem würden Änderungen des zur Erreichung einer stärkeren Unipolarität geeigneten geringen Druckes mit der Temperatur es kaum gestatten, eine sichere Beziehung zu erhalten. Es wurde daher darauf verzichtet und nur der Einfluß von Stromstärke und Druck verfolgt. Da es sich zeigte, daß bei gleicher Stromstärke auch die im gesamten Schließungskreise herrschende Spannung für die Größe der Unipolarität maßgebend war, d. h. daß es nicht einerlei war, ob die konstant erhaltene Stromstärke i_{21} von einem Akkumulator oder von zwei oder mehreren Akkumulatoren erzeugt war, mußte auch diesem Verhalten ein besonderes Augenmerk zuteil werden.

Die Untersuchung wurde auf Bleiglanz und Arsenkies beschränkt.

1. Abhängigkeit von der Stromstärke.

Die mit einem Akkumulator vorgenommenen Messungen am Bleiglanzzylinder zwischen Messingelektroden wurden mit einer Stromstärke $i_{21} = 0{,}013$ Weber begonnen und in ziemlich gleichen Stufen bis 0,089 Weber fortgesetzt. Das Verhältnis $\frac{i_{21}}{i_{12}}$ — man vgl. das Diagramm der Fig. 2 — wächst fast

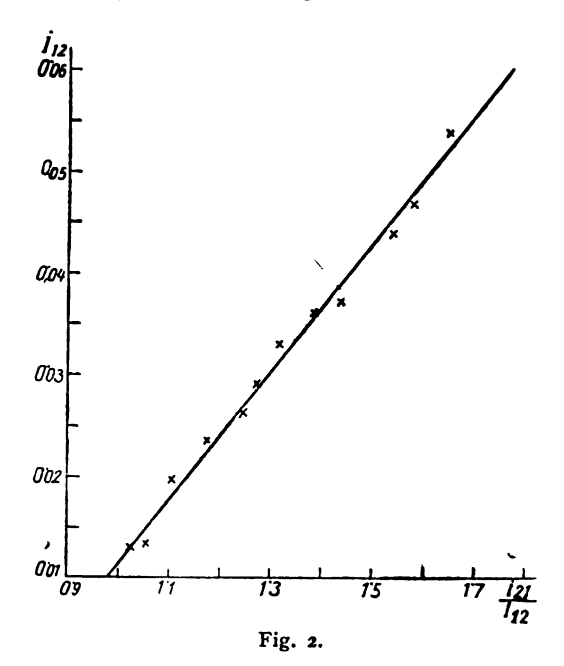


Fig. 2.

völlig linear mit der Stromstärke an von $U = 0{,}007$ bis 0,39. Dieses lineare Verhalten führt zur merkwürdigen Beziehung zwischen den beiden Stromstärken:

$$i_{12} = -0{,}0243 + \sqrt{0{,}00059 + 0{,}0610\, i_{21}},$$

Die bei beiden Stromrichtungen gemessenen Temperaturen T' sind größer als T''. Sie sind in nachstehender Tabelle in hundertstel Graden eingetragen. Es ist somit anzunehmen, daß an der Stelle 1 der größere Übergangswiderstand w' ausgebildet worden war. Die Werte für T_{12}' und T_{21}' wachsen von kleinen in der Natur dieser heiklen Messungen gelegenen Störungen abgesehen, ziemlich gleichmäßig mit der Stromstärke. Die Differenz $T_{12}' - T_{21}'$ ist größer als Null; fließt also der Strom in der Richtung 1—2, dann hat er, wie ja auch aus einigen direkten Messungen hervorgeht, den größeren Widerstand w_{12} zu überwinden. Weniger stark und auch weniger regelmäßig wachsen die Temperaturen T'' mit der Stromstärke an. Ihre Differenzen $T_{12}'' - T_{21}''$ sind mit zwei Ausnahmen (Nr. 7 und 12) gleichfalls positiv. Aus diesem Grunde sind auch die Differenzen

Nr.	i_{21}	i_{12}	U	T_{21}'	T_{21}''	T_{12}'	T_{12}''	$T_{12}''-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{21}'$	$T_{12}'-T_{12}''$	$T_{21}'-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{12}''-(T_{21}'-T_{21}'')$	w_{21}	w_{12}
1	0,01313	0,01304	0,0069	24	13	32	22	9	8	10	11	—1	—	—
2	0,01491	0,01411	0,054	20	10	25	12	2	5	13	10	3	21,3	29,1
3	0,0222	0,0199	0,10	31	19	44	23	4	13	21	12	9	17,4	29,0
4	0,0279	0,0237	0,15	24	10	37	15	5	13	22	14	8	14,7	27,7
5	0,0328	0,0263	0,20	36	17	59	24	7	23	35	19	16	11,7	26,5
6	0,0371	0,0291	0,22	27	13	59	19	6	32	40	14	26	11,4	26,1
7	0,0438	0,0331	0,25	67	43	79	31	—12	12	48	24	24	—	—
8	0,0510	0,0367	0,28	79	53	87	59	6	8	28	26	2	—	—
9	0,0539	0,0373	0,29	62	37	113	46	9	51	67	25	32	—	—
10	0,0678	0,0440	0,35	84	50	131	62	12	47	69	34	35	—	—
11	0,0738	0,0470	0,36	93	63	147	71	8	54	76	30	46	—	—
12	0,0889	0,0540	0,39	114	76	163	74	—2	49	89	38	51	—	—

$$(T_{12}'-T_{12}'')-(T_{21}'-T_{21}'')$$

größer als Null und nehmen, von dem Werte bei Nr. 8 abgesehen, mit steigender Stromstärke zu.

Die mit zwei Akkumulatoren ausgeführten Messungen von $i=0{,}098$ bis $0{,}102$ ergaben die halbe Unipolarität von Nr. 12. Ob sie ebenso gleichmäßig mit der Stromstärke zunimmt, konnte leider nicht festgestellt werden, da bei $i_{21}=0{,}112$ eine Störung der Unipolarität eingetreten war. Auch bei später angestellten Versuchen gelang es nicht, eine von Störungen freie Reihe zu erhalten. Die über das Verhalten der vier Temperaturen gemachten Bemerkungen gelten auch hier.

Nr.	i_{21}	i_{12}	U	T_{21}'	T_{21}''	T_{12}'	T_{12}''	$T_{12}''-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{21}'$	$T_{12}'-T_{12}''$	$T_{21}'-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{12}''-(T_{21}'-T_{21}'')$
13	0,0978	0,0778	0,20	142	89	267	127	38	125	140	53	87
14	0,1023	0,0810	0,21	140	90	258	115	25	118	143	50	93
15	0,1121	0,0979	0,13	175	126	284	159	33	109	125	49	76

Der Arsenkieszylinder von gleichen Dimensionen wie der aus Bleiglanz hergestellte, spiegelte an seinen Grundflächen vollkommen. Bei $i_{21}=0{,}00749$ zeigte sich eine schwache Unipolarität, die bei $i_{21}=0{,}0427$ auf $0{,}272$ stieg. Auch hier wächst das Verhältnis $\frac{i_{21}}{i_{12}}$ ziemlich linear mit der Stromstärke an. Die Unipolarität unterlag gleichfalls zeitlichen Änderungen, wie sich aus dem Vergleiche von 16 mit den Versuchen von 21 und 23 ergibt, bei denen auf den Anfangswert des eingeschalteten Rheostatenwiderstands zurückgegangen worden war. In Verwendung stand ein Akkumulator.

Die Nummern 24—26 beziehen sich auf Messungen an demselben Zylinder mit geänderter Einspannung und einer elektromotorischen Kraft von zwei Akkumulatoren.

Nr.	i_{21}	i_{12}	U	T_{21}'	T_{21}''	T_{12}'	T_{12}''	$T_{12}''-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{21}'$	$T_{12}'-T_{12}''$	$T_{21}'-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{12}''-(T_{21}'-T_{21}'')$	w_{21}	w_{12}
16	0,00749	0,00721	0,037	208	198	214	203	+ 5	+ 6	+11	+10	+1	69,7	79,7
17	0,00887	0,00852	0,039	217	205	215	202	— 3	— 2	13	12	1	67,4	76,8
18	0,01037	0,00983	0,052	208	199	217	205	+ 6	+ 9	12	9	3	64,5	75,1
19	0,01252	0,01171	0,053	213	202	216	202	0	+ 3	14	11	3	60,8	71,9
20	0,0239	0,0200	0,16	244	222	246	223	1	+ 2	23	22	1	44,2	60,6
21	0,00812	0,00801	0,014	154	147	153	146	— 1	— 1	7	7	0	48,5	51,7
22	0,0427	0,0311	0,27	288	252	264	232	—20	—24	32	36	—4	32,0	49 6
23	0,00856	0,00750	0,12	155	142	169	159	+17	+14	10	13	—3	35,7	68,7

Nr.	i_{21}	i_{12}	U	T_{21}'	T_{21}''	T_{12}'	T_{12}''	$T_{12}''-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{21}'$	$T_{12}'-T_{12}''$	$T_{21}'-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{12}''-(T_{21}'-T_{21}'')$
24	0,0851	0,0812	0,046	123	142	143	151	9	20	—8	—19	11
25	0,1048	0.0979	0,066	174	199	198	204	5	24	—6	—25	19
26	0,1473	0,1321	0,103	261	300	329	323	23	63	+1	—39	40

Die Temperaturverteilung bietet wenig Charakteristisches.

2. Abhängigkeit vom Druck.

Die Versuche mußten auf verhältnismäßig enge Grenzen beschränkt werden. Einerseits durfte der Kristall nicht allzu locker zwischen den Messingplatten liegen, da bei der unruhigen Umgebung des Hauses Erschütterungen häufig waren und die Unipolarität änderten; anderseits mußte mit Rücksicht auf die Sprödigkeit der zu prüfenden Erze auf die Anwendung großer Drucke verzichtet werden.

Die Ergebnisse für Arsenkies und Bleiglanz sind tabellarisch zusammengestellt. Für den erstgenannten Kristall ergeben die Messungen bei steigendem Druck die von Nr. 27 bis 31 eingetragenen Zahlen. Die schon anfänglich geringe Unipolarität von 0,11 schlägt in der dritten Reihe um, um bei höheren Drucken ganz zu verschwinden. Arsenkies verhält sich überhaupt weniger aktiv als Bleiglanz[1]). Außerdem bestand die elektromotorische Kraft im Stromkreise aus fünf Akkumulatoren. Erst nachdem die Versuchsreihe abgeschlossen war, hat es sich herausgestellt, daß mit Zunehmen der elektromotorischen Kraft eine Schwächung der Unipolarität eintritt.

Nr.	i_{21}	i_{12}	U (U')	T_{21}'	T_{21}''	T_{12}'	T_{12}''	$T_{12}''-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{21}'$	$T_{12}'-T_{12}''$	$T_{21}'-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{12}''-(T_{21}'-T_{21}'')$	w_{21}	w_{12}
27	0,509	0,455	0,11	2820	2547	3204	2654	97	384	550	273	277	9,1	6,1
28	0,513	0,500	0,018	1865	1669	2060	1711	42	195	349	196	153	4,5	4,3
29	0,539	0,544	0,0092	1719	1600	1714	1473	—127	— 5	241	119	122	3,3	3,5
30	0,520	0,520	—	739	805	702	851	— 46	— 37	—149	— 66	— 83	1,80	1,80
31	0,520	0,520	—	746	823	720	794	— 29	— 26	— 74	— 77	+ 3	1,80	1,80

Bleiglanz wurde auf die entsprechende Änderung mit Verwendung nur eines Akkumulators geprüft. Der Zylinder war in Trümmer gegangen, seine Stelle nahm ein zugeschliffenes Stück eines aus Bleiberg in Kärnten stammenden Kristalles ein. Vom großen Anfangswert $U = 0,62$ fällt die Unipolarität mit wachsendem Druck ab bis $U = 0,061$.

Nr.	i_{21}	i_{12}	U	T_{21}'	T_{21}''	T_{12}'	T_{12}''	$T_{12}''-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{21}'$	$T_{12}'-T_{12}''$	$T_{21}'-T_{21}''$	$T_{12}'-T_{12}''-(T_{21}'-T_{21}'')$	w_{21}	w_{12}
32	0,0530	0,0200	0,62	339	370	297	290	—80	—42	+ 7	—31	+38	38,5	102,0
33	0,0527	0,0369	0,30	376	447	359	352	—95	—17	+ 7	—71	+78	34,8	51,4
34	0,0521	0,0349	0,33	252	294	273	292	— 2	+21	—19	—42	+23	29,9	48,5
35	0,0523	0,0491	0,061	285	348	279	372	+24	— 6	—93	—63	—30	26,0	28,5

Die Widerstände nehmen mit wachsender Belastung ab. In der Richtung 2—1 war der Strom konstant erhalten. Dessenungeachtet sank w_{21} von 38,5 auf 26,0 Ohm bei Bleiglanz, von 9,1 auf 1,8 Ohm bei Arsenkies. In der Richtung 1—2 stieg die Stromstärke, infolgedessen sank w_{12} viel stärker, von 102 auf 28,5 Ohm und von 6,1 auf 1,8 Ohm. Die Temperaturen nahmen mit der Drucksteigerung ab. In hohem Grade kommt dies an Arsenkies zum Ausdruck, da durch dessen Zylinder Ströme von 0,5 Weber geleitet worden waren. Verschwindet die Unipolarität, dann wird $w_{12} = w_{21}$. Auch die Temperaturen streben zum Ausgleich.

Ganz anders gestalten sich die Verhältnisse, wenn man Messing durch **amalgamiertes** Blei[1]) ersetzt. Schon bei loser Berührung des Kristalles mit den Blechen läßt sich Unipolarität mit Hilfe des Voltmeters nicht mehr nachweisen. Es ergibt sich $i_{21} = i_{12} = 0,060$ W., $w_{21} = w_{12} = 1,2$ Ohm. Wurden die Bleiplatten stärker an den Kristall gepreßt, dann erhielt man der Reihe nach für w 0,5 und 0,1 Ohm. Und trotzdem ließ sich mit Hilfe des Galvanometers feststellen, daß die Unipolarität doch nicht vollständig verschwunden war. Denn man erhielt

Nr.		i_{21}	i_{12}
36	bei starkem Druck	0 06169	0,06163
37	bei loser Berührung	0,06144	0,06138
38	bei starkem Druck	0,06169	0,06163

Bei einem andern Versuch wurden die Widerstände mit dem Galvanometer gemessen; bei einer Stromstärke von

	w_{21}	w_{12}
0,0149 W. fanden sich	0,02039	0,02054 Ohm
	0,02041	0,02051 „ .

1) Blei wurde amalgamiert, da es sich in diesem Zustande an der Luft lange Zeit blank erhält.

1) „An Arsenkies ist bei einem entsprechend hohen Druck die Erreichung eines Minimalwiderstandes (an den Grenzflächen) nicht ausgeschlossen, während ein derartiges Minimum an Bleiglanz kaum erreichbar sein wird". **Streintz u. Wallik**, a. a. O., S. 849.

Ebenso zäh wie der Übergangswiderstand haftet also auch die Unipolarität! Es ist wahrscheinlich, daß mit dem Verschwinden der Unipolarität auch der Übergangswiderstand beseitigt ist.

Auch am Kristall hafteten die amalgamierten Elektroden sehr gut.

3. Abhängigkeit vom Ladungspotential.

Die Annahme, daß der Widerstand durch Gasschichten hervorgerufen wird, findet eine weitere Bekräftigung durch den Umstand, daß die Unipolarität auch von der im gesamten Stromkreise wirksamen Potentialdifferenz und zwar in hohem Grade beeinflußt wird. Die Versuche wurden derart angestellt, daß die Zahl der Akkumulatoren geändert wurde, dabei aber die Stromstärke i_{21} durch Zuschalten von Ballast möglichst konstant erhalten blieb. Die Unipolarität nimmt mit steigendem Potential ab, wie aus der nachstehenden Tabelle zu entnehmen ist.

Bleiglanz zwischen Messing.

Nr.	i_{21}	i_{12}	V Volt	U	VU
39	0,0720 0,0730	0,0430 0,0430	2	0,41	0,82
40	0,0718 0,0701	0,0560 0,0560	4	0,21	0,84
41	0,0723 0,0722	0,0620 0,0622	6	0,14	0,84
42	0,0721 0,0720	0,0640 0,0640	8	0,11	0,88
43	0,0721 0,0720	0,0665 0,0660	10	0,081	0,81
44	0,0720 0,0720	0,0670 0,0670	12	0,069	0,83
45	0,0720 0,0710	0,0420 0,0410	2	0,42	0,84

Aus der Tabelle geht aber auch der für die angestrebte Lösung des Rätsels wahrscheinlich bedeutungsvolle Satz hervor:

Die Unipolarität ist umgekehrt proportional dem Ladungspotential: VU = konst. innerhalb der Grenzen von 2 bis 12 Volt.

Bei der weiteren Untersuchung trat eine kaum überwindliche Schwierigkeit auf; sie bestand darin, daß die Unipolarität, soll sie sich nachdrücklich zur Geltung bringen, von einer außerordentlichen Empfindlichkeit gegen Erschütterungen war. Die eben mitgeteilten Zahlen wurden, nachdem die Einstellung am Tage vorher getroffen worden war, an einem Sonntag Vormittag gefunden. Da gab es keine Last- und Kraftwagen auf der Straße. An Wochentagen ist es oft schwierig, zuweilen unmöglich, das System dauernd unipolar konstant zu erhalten. Nur zu häufig ist es von Haus aus instabil. Die Unipolarität ändert sich plötzlich oder schlägt um. Als Beleg für den letzteren Fall dienen:

Nr.	i_{21}	i_{12}	V Volt	U	UV
46	0,0660	0,0455	2,02	0,31	62,6
47	0,0660	0,0485	2,34	0,265	62,0
48	0,0575	0,0768	2,02	—	—

Beim dritten Versuch war es also, ohne daß eine Ursache aufgefunden werden konnte, zur Umkehrung gekommen. UV zeigte sich vorher wieder konstant. Die elektromotorische Kraft von 2,34 Volt wurde durch Gegenschaltung von Akkumulatoren verschiedener Säurekonzentrationen hergestellt; nach dieser Methode können Stromquellen von jeder erwünschten Spannung gewonnen werden.

Man wird zur Prüfung des Satzes am besten verfahren, immer wieder auf die Ausgangsspannung zurückzukehren; denn daß die Unipolarität in der ersten Versuchsreihe so lange standhielt, war gewiß nur einem besonders glücklichen Zufall bei der Einstellung des Kristalls zu danken.

Es soll eine Versuchsreihe angegeben werden, bei der die Unipolarität zwar nicht standhielt, jedoch noch zur rechten Zeit ihrer Untreue überführt werden konnte:

Nr.	i_{21}	i_{12}	V	U	VU	w_{21}	w_{12}
49	0,065	0,041	2	0,37	0,74	—	—
50	0,066	0,054	4	0,18	0,72	19,4	33,0
51	0,064	0,056	6	0,125	0,75	20,5	30,7
52	0,064	0,059	8	0,077	0,62	20,8	31,3
53	0.064	0,060	10	0,062	0,62	21,0	32,0
54	0,064	0,0455	2	0,31	0,62	20,2	34,3
55	0,0656	0,0628	12	0.042	0,50	20,5	28,8
56	0,0635	0,0470	2	0,26	0,52	21,3	32,7

Zweimal also war die Unipolarität während einer Versuchsreihe ins Wanken geraten. Für einen Akkumulator ergaben sich die Zahlen 0,74, 0,62 und 0,52. Trotzdem leistete eine beliebige Gesellschaft von zwei bis sechs Akkumulatoren treue Gefolgschaft!

Die Widerstände w_{21} blieben während der Versuchsreihe unverändert. Mit Zunahme der Stromstärken i_{12} findet eine entsprechende Abnahme der Widerstände w_{12} statt. Der Übergangswiderstand ist somit von der La-

dungsspannung unabhängig. Demzufolge müssen es auch die Temperaturänderungen sein. Das ist auch der Fall. Um nicht die Arbeit überflüssig mit Ziffern zu belasten, wurde auf die Angaben von Temperaturen verzichtet.

Die Ergebnisse lassen sich in folgende fünf Sätze zusammenfassen:

1. Die unipolare Leitung ist mit einem Temperaturunterschied an den Endflächen des Kristalles verbunden. Der schwächere Strom fließt durch den Kristall von der wärmeren zur kälteren Verbindungsstelle.
2. Der Temperaturunterschied zwischen beiden Verbindungsstellen hängt von der Stromrichtung ab.
3. Mit wachsender Stromstärke sinkt der Übergangswiderstand, steigt die Unipolarität.
4. Übergangswiderstand und Unipolarität nehmen bei steigendem Druck ab.
5. Mit zunehmender Spannung im Gesamtkreise nimmt die Unipolarität innerhalb weiter Grenzen proportional ab; der Übergangswiderstand bleibt dabei ungeändert.

Der letzte Satz gibt den Fingerzeig, die Untersuchung mit elektrostatischen Methoden weiterzuführen.

Zweites Phys. Inst. der Techn. Hochschule Graz, 23. Juli 1919.

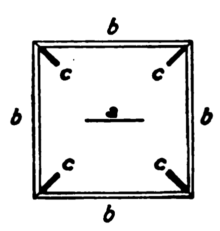
(Eingegangen 28. Juli 1919.)

Spiegelablesung für große Ausschläge.

Von W. S. Gripenberg.

Der theoretisch größtmögliche Ausschlag bei der Spiegelablesung beträgt 180 Grad. Um ihn zu erzielen, muß der Spiegel in allen Richtungen seiner Schwingungsebene von einer durchsichtigen Wand umgeben sein. Die Wand kann aus einem Zylinder oder aus ebenen Platten bestehen. Aus verschiedenen Gründen scheidet der erste Ausweg für den allgemeinen praktischen Gebrauch aus. Der zweite hat offenbar den Nachteil, daß das Skalenbild verschoben wird, sobald das Strahlenbündel zu einer angrenzenden Platte übergeht.

Dieser Nachteil ist aber nicht so groß, daß der beträchtliche Vorteil des weiten Ausschlages dadurch aufgehoben wird, denn die Verschiebung des Skalenbildes ist leicht und genau meßbar und kann in einer Korrektionstabelle verzeichnet werden. Es ist nämlich bei einer gewissen Stellung des Spiegels beide Bilder gleichzeitig gleich gut sichtbar; bei einigermaßen guter Beschaffenheit der Glasplatten kann die Verschiebung auf ein zehntel Skalenteil genau gemessen werden.



Aber nicht genug damit; man kann die Wände aus mikroskopischem Deckglase — also Spiegelglasplatten von 0,16 mm Dicke — herstellen. Dann wird die Verschiebung so gering, daß sie für die meisten Zwecke vernachlässigt werden kann[1]).

Wie nahe an 180° die Ablesung gelingt, beruht wohl zum großen Teil vom beweglichen Spiegel, ob auf der Vorderseite belegt oder nicht, sowie auf seiner Größe.

Ein beiderseitig belegter Spiegel dürfte in einigen Fällen vorteilhaft sein.

Die Skala kann, außer kreisförmig, wohl auch quadratisch oder auch kurz oder gerade wie vorher, aber beweglich in einem Kreise mit dem Spiegel als Mittelpunkt.

Die Figur zeigt das Gehäuse des Spiegels im Durchschnitt in der Drehungsebene. *a* ist der Spiegel, *b* die Glaswände und *c* metallene Stützen für das Gehäuse und die Suspension.

1) Platten davon sind in der erforderlichen Größe fertig geschnitten im Handel erhältlich.

Helsingfors (Finnland), Juni 1919.

(Eingegangen 19. Juli 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Metallographie.

Von Rudolf Ruer.

(Fortsetzung.)

B. Polymorphe Umwandlungen finden nicht statt. Die Komponenten bilden beim Zusammenschmelzen eine oder mehrere chemische Verbindungen miteinander, welche ohne Zersetzung schmelzbar sind.

Die Komponenten des Systems und gleichzeitig ihre Schmelzpunkte seien wiederum mit *A* und *B* bezeichnet. Zur Angabe der Zusammensetzung der einzelnen Mischungen diene wiederum die Konzentration in Gewichtsprozenten *B*. Wir wollen zunächst annehmen, es existiere nur eine einzige chemische Verbindung zwischen *A* und *B* von der Formel A_mB_n, sie enthalte 60 Proz. *B*. Die Verbindung soll unzersetzt schmelzen, ihr Schmelzpunkt sei *C*. Die Voraussetzung der völligen Mischbarkeit im flüssigen, der Nichtmischbarkeit im kristallisierten Zustande soll auch für die Verbindung Geltung haben.

Unter diesen Umständen kann man das vollständige System mit den Komponenten *A* und *B* in zwei Teilsysteme mit den bez. Komponenten *A* und A_mB_n und *B* und A_mB_n zerlegen, von denen jedes dem unter *A* (s. S. 21) behandelten Falle entspricht. Die Schmelzdiagramme dieser beiden Systeme seien durch die Fig. 10a und 10b dargestellt.

Das Schmelzdiagramm Fig. 10c des vollständigen Systems wird durch Vereinigung der Schmelzdiagramme Fig. 10a und 10b der beiden Teilsysteme zu einem einzigen erhalten. Jedoch findet sich in *C* theoretisch[1]) niemals eine scharfe Spitze, sondern ein mehr oder minder flaches Maximum, wie es in dem Diagramm durch das ausgezogene Kurvenstück zum Ausdruck gebracht ist.

Hiernach weist das Schmelzdiagramm folgende Merkmale auf:

1. Die Schmelzkurve besteht aus den drei Ästen *AD*, *DCE* und *BE*. Auf jedem dieser Äste befindet sich eine bestimmte Kristallart im Gleichgewichte mit der Schmelze. Auf den Kurvenästen *AD* bzw. *BE* sind dieses die reinen Stoffe *A* und *B*, während sich auf dem Aste *DCE* die Verbindung A_mB_n primär ausscheidet.

2. Von den drei Ästen hat einer, nämlich *DCE*, ein Maximum bei *C*, welches der Verbindung A_mB_n entspricht.

3. Es existieren zwei verschiedene Temperaturen eutektischer Kristallisation. Die eine eutektische Horizontale beginnt beim reinen Stoffe *A*, die andere beim reinen Stoffe *B*.

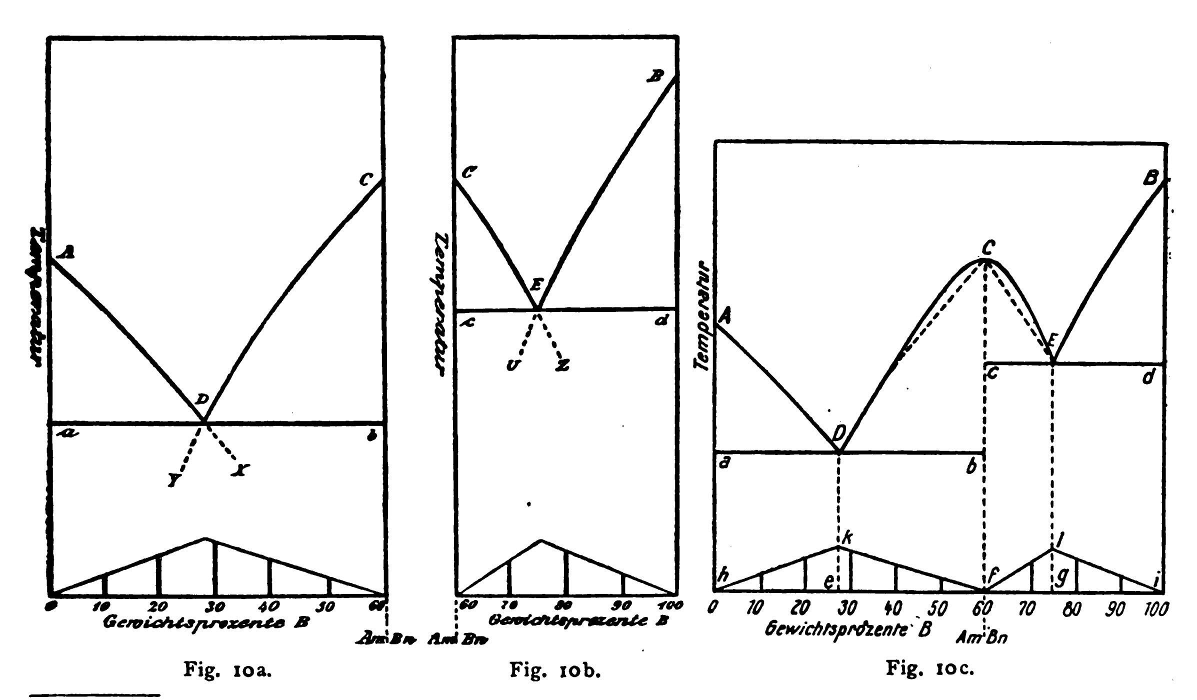


Fig. 10a. Fig. 10b. Fig. 10c.

1) Vgl. H. A. Lorentz, Zeitschr. f. phys. Chem. 10, 194, 1892; Ruer, Zeitschr. f. phys. Chem. 59, 1, 1907.

Beide endigen genau bei der Konzentration des Maximums C des mittleren Kurvenastes.

Ergibt umgekehrt die experimentelle Untersuchung eines binären Systems ein Schmelzdiagramm mit den unter 1, 2 und 3 angegebenen Merkmalen, so schließt man:

1. Es besteht vollständige Mischbarkeit im flüssigen, vollständige Nichtmischbarkeit im kristallisierten Zustande.

2. Die beiden Komponenten bilden beim Zusammenschmelzen eine Verbindung miteinander, welche unzersetzt schmelzbar ist.

Die Zusammensetzung der Verbindung entspricht:

1. dem Maximum C auf dem mittleren Aste der Schmelzkurve,

2. den Endpunkten b und c der eutektischen Horizontalen aDb und cEd.

Diese mit Hilfe der eutektischen Zeiten ermittelten Endpunkte liefern zwei besonders wertvolle Kriterien für die Zusammensetzung der Verbindung[1]).

Die Abkühlungskurve der Konzentration C muß die eines reinen Stoffes sein.

Eine Kontrolle der Aussagen des Schmelzdiagramms liefert wiederum die mikroskopische Untersuchung des Gefüges der erstarrten Reguli. Es erübrigt sich, auf dieselbe einzugehen,

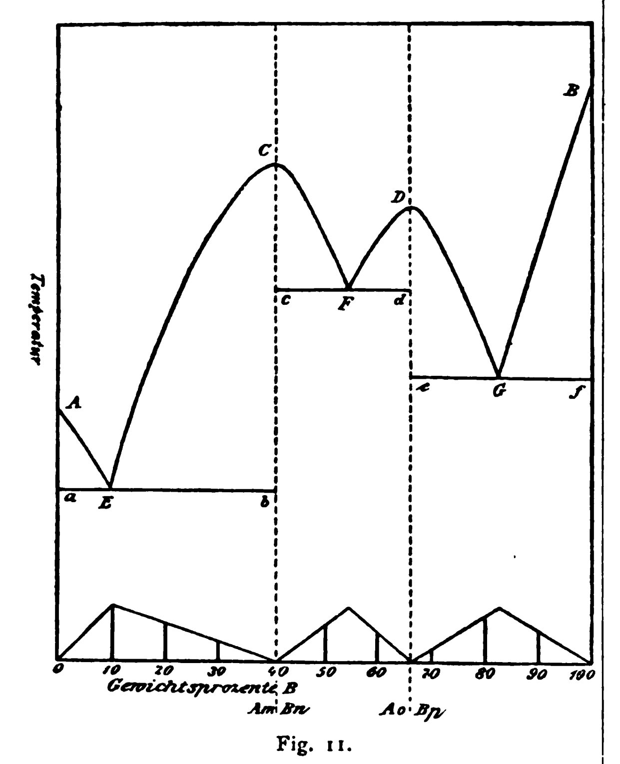


Fig. 11.

1) Tammann, Zeitschr. f. anorgan. Chem. **37**, 303, 1903.

da sich die zu erwartenden Strukturen in Anbetracht des Umstandes, daß man das vollständige System als aus zwei Teilsystemen bestehend ansehen kann, aus den unter A (S. 19 bis 23) gemachten Ausführungen ergeben. Es sei daher hier nur darauf hingewiesen, daß ein Schliff von der Konzentration C nur einen Gefügebestandteil enthalten darf, da sich hier zwei Kristallarten restlos zu einer dritten vereinigen, und weiterhin, daß wegen der Unlöslichkeit von A und B in kristallisiertem $A_m B_n$ das Auftreten von Eutektikum schon in der nächsten Nähe der Konzentration C nachweisbar sein muß.

Fig. 11 stellt den Fall dar, daß zwischen A und B zwei Verbindungen mit den bez. Formeln $A_m B_n$ und $A_o B_p$ existieren. Das Diagramm ist durch die beiden gestrichelten Senkrechten, die auf der Konzentrationsachse bei den Konzentrationen der beiden Verbindungen errichtet sind, in drei Teildiagramme geteilt, von denen jedes einem Zweistoffsystem ohne Verbindung entspricht.

C. Veränderungen im kristallisierten Zustande.

Die Legierungen erleiden häufig auch nach erfolgter Erstarrung noch Zustandsänderungen, die sowohl in polymorphen Umwandlungen, als auch in solchen Vorgängen bestehen können, bei denen zwei Kristallarten zu einer dritten, einer chemischen Verbindung, zusammentreten. Nach Tammann[1]) kann man eine polymorphe Umwandlung leicht von einer chemischen Reaktion, bei der sich zwei Kristallarten bei der Abkühlung zu einer dritten vereinigen, unterscheiden.

Eine polymorphe Umwandlung kennzeichnet sich bei vollständiger Nichtmischbarkeit im kristallisierten Zustande dadurch, daß sich eine schon vorhandene Kristallart ohne Änderung ihrer Zusammensetzung in eine neue umwandelt[2]). Eine solche Umwandlung findet daher bei konstanter Temperatur statt, und zwar bei allen Konzentrationen, in denen die betreffende Kristallart vorhanden ist, sei es als primäres Strukturelement, sei es als Bestandteil des Eutektikums. Die Wärmetönung ist natürlich der Menge der sich umwandelnden Kristallart proportional, und das gleiche gilt unter den üblichen Voraussetzungen für die Zeitdauer der entsprechenden Haltepunkte auf den Abkühlungskurven. Fig. 12 gibt ein Dia-

1) Tammann, Zeitschr. f. anorgan. Chem. **47**, 296, 1705.

2) Vgl. hierzu jedoch Bornemann, Metallurgie **7**, 40, 1910.

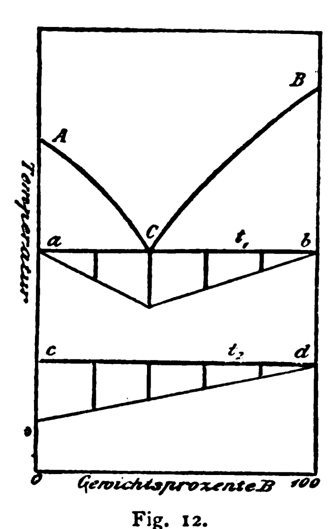


Fig. 12.

gramm für den Fall, daß zwei Stoffe A und B keine Verbindung miteinander eingehen, und daß der eine Stoff A bei der unterhalb der eutektischen Temperatur t_1 liegenden Temperatur t_2 eine polymorphe Umwandlung von der β-Form in die α-Form erleidet. Die Umwandlungswärme, welche bei den einzelnen Konzentrationen frei wird, ist durch Senkrechte auf der Horizontalen cd dargestellt und nimmt von 0 (= reines A), wo das Maximum liegt, zu 100 (= reines B), wo sie Null wird, linear ab.

In Fig. 13 ist der Fall dargestellt, daß die unmittelbar nach erfolgter Erstarrung aus-

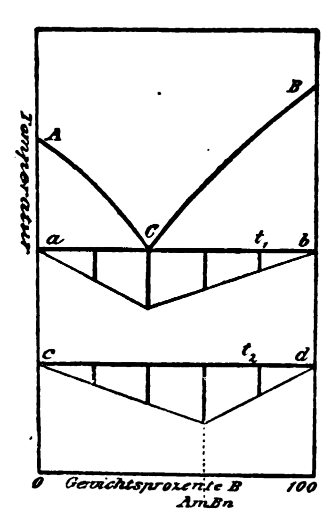


Fig. 13.

schließlich vorhandenen Kristallarten A und B bei weiterer Abkühlung zu einer Verbindung A_mB_n zusammentreten. Die Gleichung der, wie wir annehmen, vollständig verlaufenden Reaktion laute

$$mA + nB \rightleftarrows A_mB_n.$$

Die beiden zu einem Gleichheitszeichen vereinigten Pfeile sollen die Umkehrbarkeit (Reversibilität) der Reaktion andeuten. Entziehung von Wärme bewirkt die Entstehung der Verbindung, also Verlauf der Reaktion von links nach rechts, Wärmezufuhr den entgegengesetzten Verlauf. Das Gleichgewicht zwischen den drei Kristallarten ist ein vollständiges. Die Reaktion findet daher bei konstanter Temperatur statt, ihr entspricht die bei t_2^0 verlaufende Horizontale cd. Die Zusammensetzung der Verbindung wird durch das Maximum der Haltezeiten bei t_2^0 bestimmt.

Der Unterschied zwischen der in Fig. 12 dargestellten polymorphen Umwandlung und der in Fig. 13 dargestellten Vereinigung zweier Kristallarten zu einer dritten. dokumentiert sich also dadurch, daß das Maximum der Wärmetönung im ersten Falle bei einer solchen Konzentration liegt, bei der das System nur eine Kristallart enthält, während es im zweiten Falle bei einer Konzentration liegen muß, bei der zwei Kristallarten (in dem durch die Reaktionsgleichung gegebenen Verhältnisse) vorhanden sind.

In den Schliffen der Reguli wird man natürlich unter normalen Verhältnissen nur die bei gewöhnlicher Temperatur stabilen Kristallarten beobachten können. Doch gelingt es in vielen Fällen durch rasche Abkühlung (sog. Abschrecken), die Vorgänge im kristallisierten Zustande zu verhindern und die bei höherer Temperatur stabilen Kristallarten ohne Veränderung in das Gebiet gewöhnlicher Temperatur hinüberzubringen.

II. Es herrscht unvollständige Mischbarkeit im flüssigen, vollständige Nichtmischbarkeit im kristallisierten Zustande.

Hat man zwei reine Stoffe A und B im flüssigen Zustande, die sich bei der Versuchstemperatur t_1 nicht vollständig miteinander mischen, zusammengebracht und durch Umrühren oder Schütteln dafür gesorgt, daß sich das Gleichgewicht zwischen beiden hergestellt hat, so sind natürlich beide miteinander gesättigt. Wird nun das System sich selbst überlassen, so trennen sich nach genügend langem Stehen die beiden Lösungen vermöge ihres verschiedenen spezifischen Gewichtes voneinander und bilden zwei Schichten. Die eine besteht aus dem Stoffe A gesättigt mit B, die zweite aus B gesättigt mit A. Die Zusammensetzung der beiden Schichten hängt von der Gleichgewichtstemperatur ab. Unter der im allgemeinen zutreffenden Annahme, daß die gegen-

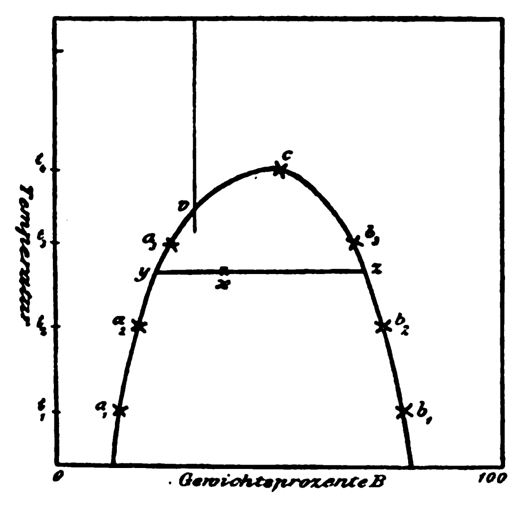


Fig. 14.

seitige Löslichkeit mit steigender Temperatur zunimmt, stellt Fig. 14 diese Abhängigkeit graphisch dar. Die beiden bei der Temperatur t_1 gesättigten Lösungen entsprechen den Punkten a_1 und b_1. Bei der höheren Temperatur t_2 sind die entsprechenden Punkte a_2 und b_2, sie sind einander näher gerückt, weil eben bei höherer Temperatur *A* mehr *B* und *B* mehr *A* zu lösen vermag. Bei fortgesetzter Temperaturerhöhung nähern sich die beiden Konzentrationen *a* und *b* immer mehr, um schließlich, falls das Gemisch nicht vorher zu sieden beginnt, im Punkte *c* zusammenzufallen. Bei dieser und bei allen höheren Temperaturen haben also die beiden gesättigten Lösungen die gleiche Zusammensetzung, d. h. sie sind identisch. Eine Trennung der Mischung in zwei Schichten kann also nicht mehr stattfinden, wir befinden uns im Gebiete vollständiger Mischbarkeit. Die Löslichkeitskurve a_1, a_2, a_3, c, b_3, b_2, b_1 trennt daher das Gebiet der homogenen Lösung von dem von ihr umschlossenen Gebiete, in dem eine Trennung in zwei Schichten stattfindet. Beispielsweise ist ein durch den Punkt *x* dargestelltes System in zwei Schichten von den Konzentrationen *y* und *z* zerfallen, deren Mengenverhältnis sich durch die Hebelbeziehung zu

$$\frac{\text{Menge } y}{\text{Menge } z} = \frac{xz}{xy}$$

ergibt.

Die Entmischung einer erkaltenden homogenen Mischung beginnt bei der Temperatur *v* des ihrer Konzentration entsprechenden Punktes der Löslichkeitskurve. Bei durchsichtigen Flüssigkeiten ist die hierbei auftretende Trübung sehr scharf zu erkennen und demnach die Bestimmung der Löslichkeitskurve leicht durchführbar. Bei den undurchsichtigen Metallen ist dieses Verfahren natürlich nicht anwendbar. Auch gelingt es nicht, die Temperatur der beginnenden Entmischung der erkaltenden Legierungen auf thermischem Wege zu bestimmen, da die bei der Entmischung auftretende Wärmetönung zu gering ist. Man ist daher in diesen Fällen auf die Trennung und Analyse der beiden Schichten angewiesen[1]).

Das vollständige Schmelzdiagramm für den einfachsten Fall, daß die beiden Komponenten *A* und *B* keine Verbindung miteinander bilden, wird durch Fig. 15 dargestellt. Die Lös-

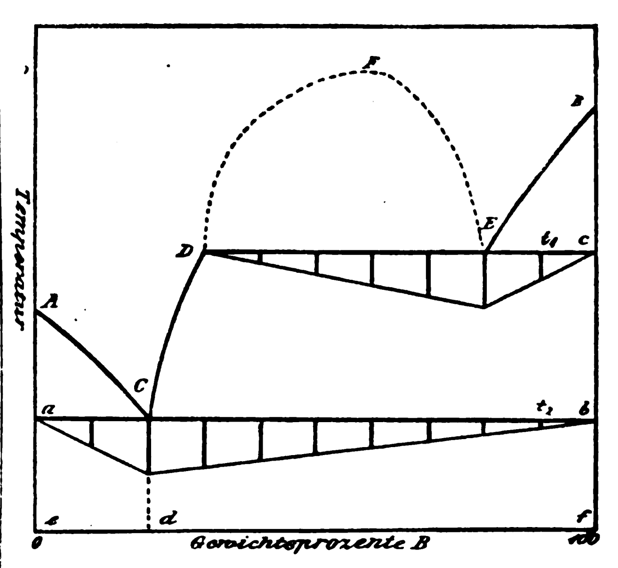


Fig. 15.

lichkeitskurve *DFE* der beiden Schmelzen ist, weil wegen der geringen Entmischungswärme auf thermischem Wege nicht nachweisbar, gestrichelt gezeichnet. In dem von ihr nicht umschlossenen Gebiete besteht also die Schmelze aus nur einer Schicht. In diesem Gebiete herrscht demnach vollständige Mischbarkeit im flüssigen und nach Voraussetzung vollständige Nichtmischbarkeit im kristallisierten Zustande. Hier muß also das Gesetz der Schmelzpunktserniedrigung gelten und der Schmelzpunkt sowohl von reinem *A* durch Zusatz von *B* längs des Kurvenastes *AC*, als auch von reinem *B* durch Zusatz von *A* längs des Kurvenastes *BE* erniedrigt werden. Im Schnittpunkte *E* des Kurvenastes *BE* der Schmelzkurve mit der Löslichkeitskurve *DFE* befindet sich die Lösung *E* gleichzeitig mit *B*-Kristallen und der Lösung *D* im Gleichgewichte. Der hier stattfindende Vorgang findet in der Reaktionsgleichung

1) Nach Bornemann findet bei der Temperatur der beginnenden Entmischung eine diskontinuierliche Änderung des Temperaturkoeffizienten der elektrischen Leitfähigkeit statt.

Schmelze $E \rightleftarrows$ Kristallart B + Schmelze D seinen Ausdruck, wobei die Reaktion durch Wärmeentziehung von links nach rechts verläuft. Das Gleichgewicht zwischen den drei Phasen ist ein vollständiges, die Temperatur t_1 muß daher bis zur Aufzehrung einer der Phasen, bei Wärmeentziehung bis zum Verschwinden der Schmelze E konstant bleiben. Die weitere Ausscheidung von B aus der nach Aufzehrung von E allein vorhandenen A-reichen Schmelze findet längs des Kurvenastes DC statt, welcher den Kurvenast AC im eutektischen Punkte C schneidet.

Das Charakteristische des Diagramms ist, daß zwei Perioden konstanter Temperatur vorhanden sind, trotzdem weder eine Verbindung entsteht, noch eine polymorphe Umwandlung stattfindet. Daß keine Verbindung entsteht, folgt daraus, daß die eutektische Gerade aCb das ganze Diagramm durchzieht.

Die mikroskopische Untersuchung der Schliffe muß ebenso wie in dem unter *IA* durch Fig. 8 dargestellten Falle entweder primär ausgeschiedenes A oder primär ausgeschiedenes B, umgeben von Eutektikum, erkennen lassen. Oft kann man aus dem Aussehen der Schliffe schon makroskopisch erkennen, daß die Kristallisation in zwei Schichten stattgefunden hat.

Die partielle Mischbarkeit von A und B in der Nähe des Schmelzpunktes der höchstschmelzenden Komponente kann sehr verschiedenen Grades sein. In Fig. 16 ist sie bei dieser

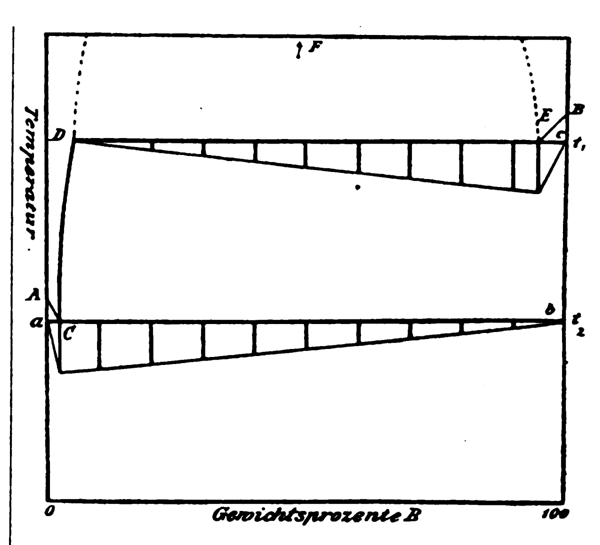


Fig. 16.

Temperatur als gering angenommen. Der Grenzfall, daß beide Stoffe im flüssigen Zustande beim Schmelzpunkte von B sich nicht mehr lösen, daß also die beiden Schichten die reinen Metalle darstellen, ist in Fig. 17 dargestellt. Alle Konzentrationen mit Ausnahme der reinen Stoffe lassen auf ihren Abkühlungskurven zwei Haltepunkte t_1 und t_2 erkennen, die mit den Schmelzpunkten der reinen Metalle übereinstimmen.

(Fortsetzung folgt.)

BESPRECHUNGEN.

H. Kauffmann, Allgemeine und physikalische Chemie. II. Teil. Sammlung Göschen, Bd. 698. 2. Aufl., 148 S. mit 2 Figuren. Berlin, Vereinigung wiss. Verleger. 1919. M. 1.50.

Der vorliegende Teil des Werkchens behandelt die wichtigsten Daten der Valenzlehre, die konstitutiven Eigenschaften, Thermochemie, Elektrochemie und Photochemie in trotz der Kürze klarer und teilweise außerordentlich anschaulicher Darstellung. Höhere Mathematik ist nicht angewandt; wenn aus diesem Grunde manche wichtigen Entwicklungen, wie beispielsweise die über maximale Arbeit, freie Energie, Beziehung zwischen Wärmetönung und Gleichgewichtskonstanten, keine ganz präzise Ableitung finden konnten, so muß doch zugegeben werden, daß der Verfasser es verstanden hat, auch diesen Begriffen in gedrängter Form eine recht gute Veranschaulichung zu geben.

Weniger läßt sich dies von dem letzten Kapitel sagen, das „die Eigenschaften der Atome" behandelt. Hier wird bei einer weiteren Neuauflage eine gründliche Umarbeitung nicht zu umgehen sein, damit die jüngsten Forschungsergebnisse auf diesem Gebiete etwas eingehender gewürdigt und harmonischer mit der gesamten Darstellung verknüpft werden können. Für die Veranschaulichung des periodischen Systems in diesem Abschnitt ist die gewöhnlich benutzte Tabellenform gewählt, die sich eng an die ursprünglich von Mendelejeff verwandte anschließt. Obgleich diese Darstellungsweise für eine Übersicht über die Homologien der Elemente unter pädagogischen Gesichtspunkten immer noch als die beste bisher bekannte angesprochen werden kann, dürfte in einem Kapitel über Atomeigenschaften eine Zusammenstellung ähnlich der von A. Werner (vgl. Neuere Anschauungen usw., 3. Aufl., 1913, S. 7 ff.) vorgeschlagenen mehr am Platze sein, da diese in ihrer Zusammenfassung des Wasserstoffs und des Heliums zu einer ersten Periode usw. den modernen Anschauungen über den Atombau weit besser entspricht. Die Inkonsequenz, die darin liegt, daß S. 19 der Valenzwechsel, an NH_3 und NH_4Cl erläutert wird, daß dagegen später (S. 23 und 29) NH_4Cl mit Nebenvalenzen, also mit **3** wertigem Stickstoff, formuliert wird, ist insofern bemerkenswert, als sie auf die noch bestehende Unausgeglichenheit unserer Valenzlehren hinweist. S. 87 werden die Ionen-

wanderungsgeschwindigkeiten mittels der unscharfen Bezeichnung „Strombetrag“[1]) statt unter Verwendung des anschaulichen Begriffs der „Geschwindigkeit von Grenzflächen“ definiert. Der Ausdruck „Billiarde“ für „Trillion“ auf S. 120 ist wenig gebräuchlich.

Diese kleinen Ausstellungen halten mich nicht ab, das Büchlein als ein ganz ausgezeichnetes Hilfsmittel für eine erste kurze Orientierung auf den darin behandelten Gebieten zu bezeichnen. H. Remy.

1) Dieser Ausdruck ist nicht etwa gleichbedeutend mit „Stromstärke“, denn er muß nach dem Text die Dimension des Äquivalentleitvermögens ($= [m^{-1/2}t]$) haben.

Paul Spies, Vorschule der Physik. Ausgabe B, ohne Anhang „Chemie“. 8. IV u. 192 S. mit 269 Abb. und 1 Spektraltafel. Berlin, Winckelmann & Söhne. 1919. M. 4.

Das Buch ist für den Physikunterricht in den Mittelklassen höherer Lehranstalten bestimmt und soll die „Elementarphysik“ von Hermes und Spies ersetzen, die nur ein Auszug aus dem bekannten, für die Oberstufe bestimmten „Grundriß der Elementarphysik“ von Jochmann, Hermes und Spies war. Im Umfang etwa der „Elementarphysik“ entsprechend ist die Darstellung und die Auswahl der Versuche wesentlich besser der Fassungskraft der Schüler angepaßt und durch vortreffliche Figuren unterstützt. Viele der beschriebenen Versuche lassen sich auch zu Schülerübungen verwenden, die auf der Mittelstufe hoffentlich bald überall eingeführt werden. Auch die wichtigsten technischen Anwendungen der Physik sucht das Buch, durch gute Bilder unterstützt, dem Schüler verständlich zu machen. Götting.

Das Erdöl. Seine Physik, Chemie, Geologie, Technologie und sein Wirtschaftsbetrieb in 5 Bänden. Herausgegeben von C. Engler u. H. v. Höfer. V. Band. Die Erdölwirtschaft. Redigiert von Hans Höfer Edler v. Heimhalt. Unter Mitwirkung von Dr. Gerhard Albrecht, E. Camerana, Dr. E. Graefe, Felix Hasse, Dr. Joh. Herbing, Joseph Mendel, J. D. Northrope, Dr. M. Rusch, Dr. Paul Schwarz u. Joan Tanasescu, bearbeitet von Dr. rer. pol. Hellmuth Wolff. gr. 8°. IX u. 517 S. m. 9 Abbildungen. Leipzig, S. Hirzel. 1919. Geheftet M. 47.50.

In diesem letzten Bande sind die rechtlichen und wirtschaftlichen Grundlagen der Erdölindustrie zusammengestellt. Sein Inhalt hat daher nur für diejenigen Physiker Interesse, die sich mit Erdöl oder einem seiner Nebenprodukte (Erdgas, Benzin, Erdwachs usw.) im besonderen befassen. Sie aber werden in diesem ersten, großen Sammelwerke die gesuchte Auskunft und Belehrung finden. Mit dem V. Bande liegt nun, etwa 7 Jahre nach dem Erscheinen des I., dieses gewaltige Werk vollständig vor, die Bedeutung des Erdöls rechtfertigt seinen Umfang. Sie wird vom Verfasser trefflich durch die Worte gekennzeichnet: „Das Erdöl schuf in reichem Maße Arbeit, Kapital und selbst in Einöden blühende Anwesen; es gibt der Menschheit Behagen, Wohlstand, Energien und Macht. Darum kämpft jetzt England, dessen Kapital sich seit Jahren in allen Erdölgebieten einnistete, um Mesopotamien, und darum wird Mexiko so vielseitig umworben. Die weitere Entwicklung der Kriegs- und Handelsmarine ist an den Besitz von Erdölfeldern gebunden. Die Ölländereien beeinflussen die moderne Handelspolitik und Diplomatie, denn Erdöl ist eines der gewaltigsten Machtmittel eines Staates“. Riesenfeld.

O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik. 2. verbesserte und vermehrte Auflage. II. Band, 1. Abteilung: Die Lehre vom Schall. Herausgegeben von G. Schmidt. 8°. $10^1/_8$ Bogen. Mit 93 Abbildungen. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1919. Geheftet M. 7.—; geb. M. 9.60 u. 10 Proz. Teuerungszuschlag.

Die großen Vorzüge dieses Lehrbuches haben wir bei der Besprechung des I. Bandes genügend gewürdigt. Auch die erste Abteilung des II. Bandes zeigt diese deutlich. Nur einige geringe Mängel sollen im Interesse des Buches erwähnt werden. Seite 47 wird das Rollen des Donners auf Reflexion des Schalles an den Wolken usw. zurückgeführt, das ist nicht richtig. Auf Seite 116 wird bei der Machschen Methode, um das Dopplersche Prinzip zu demonstrieren, gesagt: die Höhe des Tones schwanke, da die „Entfernung“ der Pfeife sich ändere. Es schwankt aber die „Geschwindigkeit“. — Bei den Methoden zur Erzeugung von Schwebungen hätte Habers Schlagwetterpfeife erwähnt werden müssen. Ebenso hätten es die akustischen Untersuchungen von W. Köhler verdient, bei der Schallwahrnehmung mittels des Gehörorgans herangezogen zu werden, zumal aus ihnen die Funktion des Tensor tympani klar hervorgeht. — Für Studierende ist das Buch wärmstens zu empfehlen. Karl Bergwitz.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Heinrich Franck für synthetische Nahrungsmittelchemie und physiologische Chemie, und Dr. Helmut Klever für Chemie, an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Reinhold Rieke für keramische Chemie, an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Friedrich Hahn für Chemie.

Ernannt: Der Privatdozent für theoretische Physik an der Universität Wien Dr. Karl Herzfeld zum Assistenten am chemischen Laboratorium der Universität München, der ord. Professor der Physik an der Universität Tübingen Dr. Friedrich Paschen in gleicher Eigenschaft an der Universität Bonn, der a. o. Professor an der Universität Göttingen Dr. Richard Courant zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Münster, cand. polyt. C. P. C. Jacobsen zum Professor der technischen Chemie an der Polytechnischen Lehranstalt in Kopenhagen, Professor Dr. Hubert Kappen von der Landwirtschaftlichen Akademie in Tetschen zum ord. Professor für Chemie und Technologie an der Landwirtschaftlichen Hochschule in Bonn, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Kiel Dr. Heinrich Jung in gleicher Eigenschaft an der Universität Halle.

Gestorben: Der Geh. Regierungsrat Professor Dr. Anton Boersch in Homburg (Mitglied der europäischen Gradmessung).

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 3. 1. Februar 1920. 21. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 5 am 10. Februar 1920.

INHALT:

Arthur Szarvassi.

Geboren am 17. November 1873 in Wien, gestorben zu Wien den 1. September 1919.

Wenn man mit Wilhelm Ostwald die Männer der Wissenschaft in Klassiker und Romantiker einteilen darf, in langsamer und schnell reagierende, in wesentlich auf sich selbst beruhende und andere, deren Lebenselement die stete Wechselwirkung mit der Außenwelt ist: so haben wir in Arthur Szarvassi das reine Bild des Klassikers vor uns. Besser noch wird sein Wesen verstehen, wer sich den Gegensatz eines auf Auswirkung der eigenen Persönlichkeit und eines allein auf Leistung und Können eingestellten Lebens, den Gegensatz zwischen vorwiegend beschaulichen und vorwiegend tätigen Naturen, vor Augen stellt.



In engen Verhältnissen geboren, von Natur aus körperlich schlecht ausgestattet, hat Szarvassi gewiß keine frohe oder leichte Jugend durchlebt. Vortrefflicher Schüler eines humanistischen Gymnasiums in Wien, mußte er schon während der Schulzeit einen Teil seines Unterhaltes mühsam durch Stundengeben erwerben und dieser Zwang ist erst viele Jahre später von ihm gewichen. Trotzdem wandte er sich ohne Zögern dem Studium der Physik an der Wiener Universität zu, wo er 1893—1898 Schüler von Franz Exner, Boltzmann und Mach wurde. Entscheidend für seine Denk- und Arbeitsweise blieb der Einfluß Machs, auch in den letzten Jahren seines Lebens, in der die modernen atomistischen Theorien ihn zu erfolgreichen Arbeiten angeregt hatten. Im Jahre 1898 promovierte er bei Franz Exner mit einer optischen Arbeit (1), die nicht gedruckt worden ist, der einzigen experimentellen Untersuchung, die von ihm herrührt. Sie knüpft an die von Gouy im Jahre 1883 entdeckten Anomalien der Beugungserscheinungen an und bringt sorgfältige Messungen über die Drehung der Polarisationsebene eines an Stahlklingen bzw. an Glaskeilen unter verschiedenen Verhältnissen gebeugten Lichtstrahls; es zeigte sich, daß die Beugung am Dielektrikum annähernd der von Stokes angegebenen Formel entspricht, während die Drehung

der Polarisationsebene bei Beugung an Metallen quantitativ ganz anders ausfällt.

Nach Abschluß seiner Studien wurde Szarvassi Assistent von Gustav Jäger in Wien, ging aber bald darauf (1901) nach Brünn, wo ihn in Jaumann der hervorragende Mach-Schüler anzog. Hier finden wir ihn, seit 1903 in dauernder Stellung als Adjunkt am Physikalischen Institut der Deutschen Technischen Hochschule, bis an sein frühes Lebensende. 1905 habilitierte er sich auf Grund einer umfassenden theoretischen Untersuchung (3) über Thermo- und Kontaktelektrizität, einer Arbeit, die starke kritische Begabung nicht minder als gediegene physikalische Bildung erkennen ließ. Sie gewinnt die über die reine Thermodynamik hinausgehenden Ansätze, die sonst aus der Elektronentheorie der Metalle abgeleitet werden, aus einer rein phänomenologischen Hypothese. Als „Grundgesetz" der metallischen Thermoelemente wird im Anschluß an Ansätze von F. Kohlrausch die Gleichung für den Peltiereffekt Π:

$$\Pi = T\frac{dE}{dT},$$

entwickelt, wo dE die elektromotorische Kraft in einem Leiterstück von der Temperaturdifferenz dT bedeutet. Diese Beziehung, die auch aus der Thomson-Helmholtzschen Theorie folgt, erweist sich tatsächlich als gültig, während die Ausgangsgleichungen jener Theorie mit der Erfahrung in Widerspruch stehen. Andererseits läßt sich die Annahme eigentlicher „Berührungs"-Elektrizität mit dem zweiten Hauptsatz der Thermodynamik nicht in Einklang bringen. Dehnt man die Untersuchung auf elektrolytische Leiter aus, so ergeben sich ohne besondere Hypothesen die von Nernst gefundenen elektromotorischen Kräfte von Konzentrationsgefällen in verdünnten Lösungen.

Frühzeitig haben die Schwierigkeiten der Elektrizitätstheorie bewegter Medien Szarvassis Aufmerksamkeit auf sich gezogen. In einer kurzen Note, in der er auf Grund der Hertzschen Gleichungen die Größe der sogenannten unipolaren Induktion berechnet (5), klärt er einen vielfach, auch einmal von ihm selbst in einer früheren Arbeit (2). begangenen Fehler auf: sowohl bei der Unipolarinduktion als beim Rowland- und Röntgeneffekt finden die durch die Rotation hervorgerufenen Erscheinungen ihre Erklärung in dem Vorhandensein einer Wirbelschicht an der Oberfläche des bewegten Körpers, während im Außen- und Innenraum das Potential statisch verteilt ist. — Als um 1908 im Anschluß an die Minkowskischen Arbeiten die neue Elektrodynamik Einsteins sich zur herrschenden Lehre zu entwickeln begann, da wurde dies für Szarvassi zu einer tiefernsten Angelegenheit. Sich soweit von allen bewährten klassischen Ansätzen und Begriffsbildungen zu entfernen, schien dem überzeugten Anhänger Machs zunächst denkökonomisch nicht hinreichend gerechtfertigt. Dazu kam der unmittelbare Einfluß Jaumanns, der einen extrem phänomenalistischen Standpunkt vertrat und die Lösung aller Probleme von einer umfassenden, am Energiegesetz orientierten und von neuen formalen Hilfsmitteln — der Dyadenrechnung — getragenen, Erweiterung des Maxwellschen Gleichungssystems erwartete. So entstand die große, in zwei Teilen erschienene Arbeit Szarvassis (7, 8), deren wesentlichsten Gedankengang er in einem Vortrag auf der Salzburger Naturforscher-Versammlung (6) bekannt gab. Sie geht von einer möglichst allgemein formulierten „Differentialgleichung des Energieprinzips" aus:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \operatorname{div}(\psi \mathfrak{w} + \mathfrak{s}) - (X_x \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial x} + + X_y \frac{\partial \mathfrak{w}_x}{\partial y} + \ldots.. Z_z \frac{\partial \mathfrak{w}_z}{\partial z} + q = 0$$

(ψ Energiedichte, $\mathfrak{s}$ Energiefluß, q Wärmeproduktion, $\mathfrak{w}$ Geschwindigkeit, $X_x \ldots . Z_z$

Spannungs-Komponenten) und zeigt durch umständliche Rechnungen, daß diese nur dann im Einklange mit Feldgleichungen der Form

$$c \operatorname{rot} \mathfrak{H} = \frac{\partial \mathfrak{D}}{\partial t} + i + \mathfrak{F}(\mathfrak{D}, \mathfrak{w}),$$

$$-c \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial t} + \mathfrak{G}(\mathfrak{B}, \mathfrak{w})$$

$$\mathfrak{D} = \varepsilon \mathfrak{E} + \mathfrak{f}(\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{w}), \quad \mathfrak{B} = \mu \mathfrak{H} + \mathfrak{g}(\mathfrak{E}, \mathfrak{H}, \mathfrak{w})$$

steht, wenn die hierbei unbestimmt gelassenen Funktionen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{G}$ wesentlich die Werte, die ihnen in der Hertzschen Theorie zukommen, besitzen. Da dies bei den Minkowskischen Gleichungen nicht der Fall ist, müssen diese als dem Energieprinzip zuwiderlaufend abgelehnt werden. Der zweite Teil der Arbeit enthält ein mit großem mathematischem Geschick durchgerechnetes Beispiel eines abgeschlossenen periodischen Vorganges, für den die Lorentzschen (und ebenso die Minkowski-Einsteinschen) Gleichungen im Sinne des oben formulierten Prinzips ständige Arbeitsproduktion ergeben. — Es mag heute leicht sein, zu erklären, daß die ganze Betrachtungsweise für denjenigen nicht bindend ist, der sich den Standpunkt der Relativitätstheorie zu eigen macht und in den klassischen Festlegungen des Energiebegriffes nicht von vornherein unantastbare Schemen erblickt. Trotzdem wird dem Verständigen das Ergebnis nicht wertlos und die subjektive Leistung nicht gering erscheinen; sicher aber ist die zögernde Zurückhaltung dem Neuen gegenüber ein vornehmerer Zug als das Verhalten der allzu Vielen, die gar nicht schnell genug ihre schwache Stimme auf eine neue Tonart einzustellen wissen.

In den äußeren Verhältnissen Szarvassis hatte sich inzwischen wenig verändert. Im Jahre 1908 erhielt er einen Lehrauftrag für Meteorologie und Klimatologie, womit auch die Leitung der zugehörigen Beobachtungen und die Herausgabe der laufenden Berichte (9) verbunden war. Ein Zeichen seines Fleißes und seiner Arbeitsfreude war die schon 1906 (in Gemeinschaft mit Wogrinz) vollendete deutsche Bearbeitung von J. W. Mellors Mathematik für Physiker (4). Im Herbst 1910 wurde ihm der Titel eines außerordentlichen Professors verliehen, von 1912 an versah er fast ununterbrochen den Lehrstuhl für Mechanik an der Technischen Hochschule.

Großen Nutzen wird aller Voraussicht nach die Elektrotechnik aus der einfachen und schönen Theorie der Entladungserscheinungen ziehen, die Szarvassi auf der Wiener Naturforscher-Versammlung vorgetragen (10) und dann etwas ausführlicher dargestellt hat (11). Es handelt sich hier um eine elementare Betrachtungsweise von Stromkreisen, in die Lichtbogen oder Funkenstrecken eingeschaltet sind; der Ansatz besteht aus drei linearen gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung für die Leitfähigkeit der Gasstrecke und die beiden Elektrodentemperaturen als Funktionen der Zeit. Unter den charakteristischen Zügen der Erscheinung, die von der Theorie in schöner Übereinstimmung mit der Erfahrung wiedergegeben werden, sei etwa das Fehlen der ungeradzahligen Oberschwingungen in der Strom- und Spannungskurve eines gewöhnlichen Wechselstromlichtbogens hervorgehoben. — Etwas abseits von seinem sonstigen Arbeitsgebiet steht die aus dem Jahre 1914 stammende Note über das Turbulenzproblem der Hydromechanik (12), in der versucht wird, durch eine neue Wendung in der Auffassung der Anfangs- und Randbedingungen einen Weg zur Lösung zu bahnen.

Zu einer bedeutenden Leistung, die nicht ohne Einfluß auf die weitere Entwicklung bleiben kann, erhob sich Szarvassi mit zwei eben erst erschienenen Arbeiten. Die „Grundlagen der statistischen Mechanik“ (14) stellen einen tiefdurchdachten, in vielen Punkten völlig

geglückten Versuch dar, die Widersprüche zwischen Quantentheorie und klassischer Mechanik zu lösen. Von den Ergebnissen der Schrift, die jeder Quantentheoretiker wird lesen müssen, seien nur zwei hervorgehoben: Das immer wieder auftretende Mißverständnis, der Gleichverteilungssatz der Energie sei die notwendige Folge bekannter mechanischer Prinzipien, wird — hoffentlich endgültig — beseitigt; und eine wesentliche, der heutigen Quantentheorie eigentümliche Hypothese (die hier die Rolle der Ergodenhypothese der klassischen Statistik übernimmt) wird zum erstenmal festgestellt und als „Ergozonenhypothese" formuliert. Sehr aufklärend ist die Bemerkung über die notwendige „Quasiregularität" der Systeme, die Gegenstand der physikalischen Statistik bilden. Ob die Szarvassische Grundauffassung der Quanten, die gewissermaßen die Entwicklung von der älteren zur neueren Planckschen Theorie über diese hinaus noch fortsetzt, sich wird behaupten können, muß die Zukunft lehren. Die klar geschriebene und dabei knapp gefaßte Untersuchung führt von den ersten Elementen der Statistik bis zu ganz speziellen Anwendungen, z. B. auf die Theorie der spezifischen Wärme fester Körper; besondere Folgerungen, betreffend die statistische Auffassung des Bohrschen Atommodells, sind in einer getrennt erschienenen Note (13) zusammengestellt. Nur ein hohes Maß von gedanklicher Selbstzucht, verbunden mit einem wohlerworbenen Besitz an gründlicher Bildung konnte dieses Werk hervorbringen, das den Namen seines Urhebers hoffentlich noch lange lebendig erhalten wird.

In einer erst nach seinem Tode erschienenen Arbeit (15) wendet sich Szarvassi nochmals der Quantentheorie zu und gibt einen Beweis für den interessanten Satz, daß bei jeder Transformation kanonischer Variablen eines mechanischen Systems in neue kanonische Variable das Volumen des Phasenraumes invariant bleibt.

Von den Erfolgen, die seinen letzten Arbeiten noch beschieden sein mögen, hat nun Szarvassi nichts mehr erlebt, wie denn überhaupt von ihm gesagt werden kann, daß er zu den seltenen Menschen gehört, die nicht als Schuldner aus dieser Welt scheiden. Recht wenig an äußerem Lohn für redliches Mühen und Schaffen ist ihm zuteil geworden — er starb, als seine Ernennung für eine ordentliche Professur eben bevorstand — doch kam ihm nie, auch nicht im vertrautesten Gespräch ein Wort der Klage über die Lippen. Tiefe Ehrfurcht vor den Großen der Wissenschaft bewahrte ihn davor, sein eigenes Geschick als etwas Beklagenswertes zu empfinden, selbst wenn er sich häufig genug von anders gearteten Naturen zu Unrecht überholt hah. Sein einziges Streben war: alle Kräfte zu sammeln, um reinen Herzens, von keinem Außen gestört, teilnehmen zu können an der Aufrichtung des erhabenen Gebäudes der Wissenschaft, dessen Anblick ihm Liebe und Ehrfurcht einflößte. Er war ein bescheidener Diener an der Kunst und dienend erwarb er sich die rechte Meisterschaft.

R. M.

Verzeichnis der Arbeiten.

(1) Über die Drehung der Polarisationsebene des gebeugten Lichtes (Manuskript.) Inaug.-Dissert. Wien 1898. (Referent Franz Exner, Korreferent Boltzmann.)

(2) Über die magnetischen Wirkungen einer rotierenden elektrischen Kugel. Sitzungsber. Akad. Wien, Abt. IIa, 111, 1053—1065, 1902.

(3) Über elektromotorische Kräfte und die reversiblen Wärmetönungen des elektrischen Stromkreises. (Brünner Habilitationsschrift.) Ann. d. Phys. (4) 17, 248—284, 1905.

(4) J. W. Mellor, Höhere Mathematik für Studierende der Chemie und Physik und verwandter Wissensgebiete. In freier Bearbeitung der zweiten englischen Ausgabe herausgegeben von Dr. Alfred Wogrinz und Dr. Arthur Szarvassi. Berlin, Springer 1906.

(5) Über die unipolare Induktion. Ann. d. Phys. (4) **23**, 73—83, 1907.
(6) Die Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Medien und das Energieprinzip. (Vortrag a. d. Salzburger Naturforscherversammlung.) Diese Zeitschr. **10**, 811—813, 1909.
(7) (8) Das Prinzip der Erhaltung der Energie und die Theorie der elektromagnetischen Erscheinungen in bewegten Körpern. I. Teil: Sitzungsber. Akad. Wien, Abt. IIa, **119**, 281—336, 1910; II. Teil: Ebenda. Abt. IIa, **120**, 337—382, 1911.
(9) Bericht der meteorologischen Kommission des naturforschend. Vereins in Brünn XXVI—XXXI, Ergebnisse der meteorol. Beobachtungen im Jahre 1906—1911, Brünn 1910—1917. (Herausgegeben von A. Szarvassi.)
(10) Zur Elektrodynamik der Bogen- und Funkenentladung. (Vortrag a. d. Wiener Naturforscherversammlung.) Diese Zeitschr. **14**, 1126—1127, 1913 und Elektrotechnik und Maschinenbau, Wien **41**, 864—866, 1913.
(11) Elektrodynamische Theorie der Lichtbogen- und Funkenentladung. Ann. d. Phys. (4) **42**, 1031—1053, 1913.
(12) Über das Turbulenzproblem. Sitzungsber. Akad. Wien, Abt. IIa, **123**, 1307—1318, 1914.
(13) Über das Bohrsche Atommodell. Diese Zeitschr. **19**, 505—508, 1918.
(14) Über die Grundlagen der statistischen Mechanik. Denkschr. Akad. Wien **95**, 391—460, 1918.
(15) Über einen für die Quantentheorie wichtigen Satz der analytischen Mechanik. (Ann. d. Phys. (4) **60**, 591—520, 1919.

(Eingegangen 12. November 1919.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über Doppelschichten und Oberflächenspannung an polarisierten Elektroden.

Von Karl F. Herzfeld.

(Schluß.)

Äußere polarisierende Kraft.

Wir führen die gleichen Bezeichnungen ein wie im ersten Abschnitt, die äußeren Bedingungen sollen ebenfalls die gleichen sein wie dort. Nur sei jetzt an die Quecksilberoberfläche eine polarisierende äußere Kraft gelegt. Die Wirkung der Polarisation erstrecke sich bis zur Tiefe x_∞ in die Lösung hinein. In dieser Entfernung beginne die unveränderte Konzentration $C_{1\infty}$ bzw. $C_{2\infty}$ und $C_{3\infty}$. Solche Verhältnisse haben wir z. B. bei einer Kapillare von der Länge x_∞, die in eine verhältnismäßig große Flüssigkeitsmasse eintaucht, so daß sich an der Mündung durch Diffusion oder Rührung die Konzentration unverändert aufrecht erhält. Dabei wollen wir im folgenden durchweg $e^{-\xi_\infty}$ neben 1 vernachlässigen, d. h. den Potentialabfall, der nach dem ersten Abschnitt sich noch von der Mündung ins Unendliche erstrecken würde. Wir können das tun, da

$$\xi_\infty = 2 F x_\infty \sqrt{\frac{2\pi C_{3\infty}}{DRT}} \sim 3{,}2 \cdot 10^7 \sqrt{C_{3\infty}}\, x_\infty$$

$$\left(x \text{ in cm}, C_{3\infty} \text{ in } \frac{\text{Mol}}{\text{Liter}}\right),$$

also auch bei sehr kleinem x_∞ noch sehr groß ist. Allerdings liegt in unseren Rechnungen insofern eine gewisse Inkonsequenz, als wir das Problem als eindimensionales behandeln, d. h. von jeder Randwirkung absehen, weil sonst die Integration nicht gelingt, während in Wirklichkeit die Querdimensionen der Kapillaren meistens kurz gegen die Längsdimension x_∞ sind.

Wir gehen nun von den allgemeinen Ionenbewegungsgleichungen[1]) aus und spezialisieren auf eindimensionale Probleme

$$\begin{aligned} \frac{2F}{V_1RT}\frac{\partial C_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 C_1}{\partial x^2} + \frac{2F}{RT}\frac{\partial}{\partial x} C_1 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \\ \frac{2F}{V_2RT}\frac{\partial C_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 C_2}{\partial x^2} + \frac{2F}{RT}\frac{\partial}{\partial x} C_2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}\,. \qquad (11)^{2)} \\ \frac{2F}{V_3RT}\frac{\partial C_3}{\partial t} &= \frac{\partial^2 C_3}{\partial x^2} - \frac{2F}{RT}\frac{\partial}{\partial x} C_3 \frac{\partial \varphi}{\partial x}. \end{aligned}$$

Im stationären Zustand sind die linken Seiten der Gleichungen 0, wir können einmal integrieren und finden

1) Die v bedeuten die Ionenbeweglichkeiten. Der Faktor 2 rührt von der Zweiwertigkeit unserer Ionen her.
2) W. Nernst, Zeitschr. f. phys. Chem. **2**, 613, 1888; **4**, 129, 1889; M. Planck, Wied. Ann. **39**, 166, 1890.

$$K_1 = \frac{dC_1}{dx} + C_1 \frac{d\frac{2\varphi F}{RT}}{dx},$$
$$K_2 = \frac{dC_2}{dx} + C_2 \frac{d\frac{2\varphi F}{RT}}{dx}, \qquad (12)$$
$$K_3 = \frac{dC_3}{dx} - C_3 \frac{d\frac{2\varphi F}{RT}}{dx}.$$

Der Vergleich dieser Formeln mit der Formel, S. 178, bei Planck zeigt, daß die Größen K den Teil des Reststromes, der von der betreffenden Ionenart getragen wird, dividiert durch die Beweglichkeit derselben und durch RT, darstellen, oder mit anderen Worten gleich dem Massenstrom der betreffenden Ionenart, ausgedrückt in Konzentrationen, sind. Sobald sich im Quecksilber soviel Amalgam gebildet hat, daß seine Potentialdifferenz gegen das entsprechende zugesetzte Ion gleich der zwischen Quecksilber und Quecksilberion ist, kann nur soviel von dem betreffenden Metall abgeschieden werden, als der Wegdiffusion des Amalgams durch das Quecksilber entspricht. Wir wollen annehmen, daß diese Wegdiffusion so langsam erfolgt, daß wir sie vernachlässigen können und setzen daher $K_2 = 0$. Entsprechendes gilt auch für den Stromtransport durch das Anion, dann wird auch $K_3 = 0$, der ganze Strom wird dann durch das Quecksilberion transportiert. In Wirklichkeit ist eine geringe Teilnahme der beiden anderen Ionen an der Leitung dadurch ermöglicht, daß eine Rückdiffusion von neutralem Salz eintritt, doch wollen wir eine so starke Dissoziation annehmen, daß wir diesen Anteil des neutralen Salzes vernachlässigen können. Dann beruht das Wesen der Polarisation also darauf, daß die Teilnahme des Anions und des indifferenten Kations am Stromtransport ausgeschaltet werden und nur das in sehr geringer Masse vorhandene Quecksilberion denselben vermittelt. Die zweite und dritte Gleichung können wir nun nach Division durch C_2 bzw. C_3 sofort integrieren und finden

$$C_2 = C_{2\infty} e^{\nu}, \; C_3 = C_{3\infty} e^{-\nu}. \qquad (13)$$

Für diese beiden Ionen, die an der Bewegung nicht teilnehmen, gelten also die Formeln des Gleichgewichts wie in Teil 1. Sie ordnen sich so an, daß sie eine Konzentrationskette mit der E.M.K. φ_0 geben. Dividieren wir in der ersten Gleichung durch C_1 und integrieren, so erhalten wir

$$-\varphi_0 = \frac{RT}{2F} \lg \frac{C_{01}}{C_{1\infty}} - \frac{RT}{2F} \int_{x_\infty}^{0} \frac{K_1}{C_1} dx. \qquad (14)$$

Wie wir in der Einleitung behauptet haben, setzt sich die Potentialdifferenz aus zwei Teilen zusammen, der erste ist die Nernstsche Potentialdifferenz zwischen der Oberfläche und dem Innern der Lösung, der zweite Teil ist die Ohmsche Potentialdifferenz, denn man sieht leicht an der Bedeutung von K_1, daß die Größe

$$\frac{RT}{2F} \int_{x_\infty}^{0} \frac{K}{C_1} dx$$

gleich Stromdichte mal Widerstand der Querschnittseinheit ist (der Widerstand ist natürlich von Ort zu Ort variabel). Zur Rechnung führen wir die früheren Bezeichnungen ein und setzen weiter

$$\frac{K_1}{2F} \sqrt{\frac{2DRT}{4\pi C_{3\infty}}} = \frac{J}{2Fv_1 RT} \cdot \sqrt{\frac{2DRT}{4\pi C_{3\infty}}} = K \qquad (15)$$

dann lautet unsere Gleichung

$$K = \frac{dC_1}{d\xi} - C_1 \frac{dy}{d\xi}. \qquad (16)$$

Zur Integration multiplizieren wir beide Seiten mit $e^{-\nu}$, dann wird die Gleichung

$$K \cdot e^{-\nu} = \frac{d}{d\xi} C_1 e^{-\nu}, \qquad (17)$$

das integrieren wir von ξ_∞ bis ξ und finden

$$C_1 \cdot e^{-\nu} - C_{1\infty} = \int_{\xi_\infty}^{\xi} K \cdot e^{-\nu} d\xi. \qquad (18)$$

Die Poissonsche Gleichung lautet wieder

$$\frac{d^2 y}{2 d\xi^2} = \frac{C_1 + C_2 - C_3}{C_{3\infty}}.$$

Setzen wir hier Formel (13), (17) ein und beachten, daß

$$C_{1\infty} + C_{2\infty} = C_{3\infty},$$

so finden wir als Ausgangsgleichung

$$\frac{d^2 \nu}{2 d\xi^2} = e^{\nu} - e^{-\nu} + \frac{K}{C_{3\infty}} e^{\nu} \int_{\xi_\infty}^{\xi} e^{-\nu} d\xi. \qquad (19)$$

Wir wollen nun die Lösung in eine nach Potenzen von $\frac{K}{C_{3\infty}}$ fortschreitende Reihe entwickeln, und die quadratischen Glieder wegstreichen. Wie wir später sehen werden, kommt das wesentlich auf eine Entwicklung nach $\frac{C_{1\infty}}{C_{3\infty}}$ hinaus. Was die Zahlwerte betrifft, wird es nötig sein, daß

$$K\xi = K_1 \cdot x = \frac{J \cdot x 10^7}{V_1 RT}$$

klein gegen 1 sei, d. h. wenn die Länge der Kapillare von der Größenordnung 0,1 mm ist,

die Dichte des Reststromes J klein gegen $150\,\frac{\text{Amp.}}{\text{cm}^2}$, das ist natürlich stets erfüllt.

Das erste Glied unserer Reihenentwicklung erhalten wir, wenn wir $K = 0$ setzen, es ist also identisch mit der im ersten Abschnitt gefundenen Lösung im Falle natürlicher Polarisation. Es erweist sich als bequem die Reihenentwicklung nicht für y, sondern für e^{-y} anzusetzen, und zwar soll dies in folgender Form geschehen

$$e^{-y} = \operatorname{cotgh}^2(\xi-\xi_0)\left(1+\frac{K}{C_{3\infty}}\cdot z\right). \qquad (20)$$

Im letzten Glied der Gleichung (19), das selbst erster Ordnung in K ist, wird natürlich nur die nullte Ordnung der Reihe beibehalten, dann finden wir für dieses Glied

$$-\frac{K}{C_{3\infty}}\cdot e^{y}(\operatorname{cotgh}(\xi-\xi_0)-1-(\xi-\xi_\infty)) =$$
$$-\frac{K}{C_{3\infty}}\cdot(\operatorname{tangh}(\xi-\xi_0)-\operatorname{tangh}^2(\xi-\xi_0)(1- -\xi_\infty+\xi_0]-(\xi-\xi_0)\operatorname{tangh}^2(\xi-\xi_0)).$$

Hierbei haben wir nach unserer anfangs erwähnten Voraussetzung an der Mündung der Kapillare tangh und cotgh gleich 1 gesetzt. Die Gleichung für z wird dann

$$\frac{d^2 z}{d\xi^2} = 2z\cdot\{\operatorname{tangh}^2(\xi-\xi_0)+\operatorname{cotgh}^2(\xi-\xi_0)\} + 2\{\operatorname{tangh}(\xi-\xi_0)-\operatorname{tangh}^2(\xi-\xi_0)[1- -\xi_\infty+\xi_0]-(\xi-\xi_0)\operatorname{tangh}^2(\xi-\xi_0)\}. \qquad (21)$$

Eine partikuläre Lösung der homogenen Gleichung ist

$$\operatorname{sh}(\xi-\xi_0)\cdot\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)$$

aus dieser findet man dann die vollständige Lösung zu

$$z = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{sh}^3(\xi-\xi_0)}{\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)}\,\frac{1}{4}(\operatorname{ch}^2(\xi-\xi_0)+ +\operatorname{sh}^2(\xi-\xi_0)) - \frac{(\xi-\xi_0)^2}{2\operatorname{sh}(\xi-\xi_0)\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)} - -\frac{1}{2}\operatorname{tangh}(\xi-\xi_0)+\left((\xi_\infty-\xi_0-\frac{3}{4}\right)\cdot\frac{(\xi-\xi_0)}{\operatorname{sh}(\xi-\xi_0)\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)}+1+\xi-\xi_\infty\right\}. \qquad (22)$$

Hier sind die Konstanten schon so bestimmt, daß z mit der oben erwähnten Annäherung an der Mündung verschwindet.

Wir setzen nun die erste Annäherung für e^y in Formel (18) ein und erhalten

$$C_1 e^{-y} - C_{1\infty} = K(-\operatorname{cotgh}(\xi-\xi_0)+ +(1+\xi-\xi_\infty)), \qquad (23)$$

oder wenn wir mit e^y multiplizieren und für $\operatorname{tangh}\xi-\xi_0$ in erster Annäherung wieder $e^{\frac{y}{2}}$ setzen

$$C_1 = e^y C_{1\infty} + K(e^y[1+ +\xi-\xi_\infty]-e^{\frac{y}{2}}. \qquad (24)$$

Diese Gleichung ist natürlich als Definitionsgleichung für K aufzufassen, wenn wir $y = y_0$ setzen, dann finden wir

$$K = \frac{C_{10}e^{-y}-C_{3\infty}}{-\xi_\infty+1-e^{\frac{y}{2}}}, \qquad (25)$$

oder

$$K_1 = \frac{J}{RTv_1} = 2F\sqrt{\frac{2\pi C_{1\infty}}{DRT}}$$
$$K = \frac{C_{1\infty}-C_{10}e^{-y_0}}{x_\infty-\frac{1}{2F}\sqrt{\frac{DRT}{2\pi C_{3\infty}}}\left(1-e^{-\frac{y_0}{2}}\right)} \qquad (26)$$

Da das Glied mit x_∞ im Nenner alle anderen überwiegt, so stimmt diese Formel mit der üblichen Formel für den Reststrom überein[1]). Die Abweichung, die von den andern Gliedern herrührt, ist eine Raumladungserscheinung und tritt sonst deshalb nicht auf, weil die elektrische Dichte in den anderen Abhandlungen gleich Null gesetzt wird. Bezüglich Formel (26) sei noch bemerkt, daß

$$C_{1\infty}-C_1 e^{-y_0}$$

die Abweichung der wirklichen Dichte $C_{1\infty}$ von der Gleichgewichtsdichte $C_{10}e^{-y_0}$ darstellt. Die Formel (24) selbst enthält nur Glieder in nullter Ordnung in bezug auf $\frac{K}{C_{3\infty}}$, das ist ganz in der Ordnung, da $\frac{C_{1\infty}}{C_{3\infty}}$ von der gleichen Ordnung wie $\frac{K}{C_{3\infty}}$ ist. Weiter haben wir zu bilden

$$\frac{dy}{d\xi} = \frac{2}{\operatorname{sh}(\xi-\xi_0)\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)} - \frac{K}{2C_{3\infty}}$$
$$\Big\{\operatorname{tangh}^2(\xi-\xi_0)+\operatorname{sh}^2(\xi-\xi_0)\operatorname{sh}(\xi-\xi_0)\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)+ +\frac{1}{2}+\left(\xi_\infty-\xi_0-\frac{3}{4}\right)\left[\frac{1}{\operatorname{sh}(\xi-\xi_0)\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)}- -(\xi-\xi_0)\left(\frac{1}{\operatorname{sh}^2(\xi-\xi_0)}+\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\xi-\xi_0)}\right)\right] - -\frac{\xi-\xi_0}{\operatorname{sh}(\xi-\xi_0)\operatorname{ch}(\xi-\xi_0)}+ +\frac{(\xi-\xi_0)^2}{2}\left[\frac{1}{\operatorname{sh}^2(\xi-\xi_0)}+\frac{1}{\operatorname{ch}^2(\xi-\xi_0)}\right]\Big\}. \qquad (27)$$

Und wenn wir berücksichtigen, daß

1) Vgl. z. B. A. Eucken, Zeitschr. f. phys. Chem. 59, 72, 1904. Es fehlt der Faktor 2 im Zähler, weil nur die Kationen hier den Strom tragen, außerdem steht dort C_{10} statt $C_{10}e^{-y}$.

$$\frac{1}{\text{sh}^2(\xi-\xi_0)}=e^{-y}\left(1-\frac{Kz}{C_{3\infty}}\right)-1,$$

$$\frac{1}{\text{ch}^2(\xi-\xi_0)}=1-e^{y}\left(1+\frac{Kz}{C_{3\infty}}\right),$$

daher

$$\frac{1}{\text{sh}(\xi-\xi_0)\,\text{ch}(\xi-\xi_0)}=e^{-\frac{y}{2}}-e^{\frac{y}{2}}-$$

$$-\frac{Kz}{2C_{3\infty}}\left(e^{-\frac{y}{2}}+e^{\frac{y}{2}}\right)$$

ist, erhalten wir für

$$\frac{dy}{d\xi}=2\left(e^{-\frac{y}{2}}-e^{\frac{y}{2}}\right)-$$

$$-\frac{K}{C_{3\infty}}\{\text{sh}^2(\xi-\xi_0)[1-\text{tg}(\xi-\xi_0)]+$$

$$+(\xi-\xi_\infty)\,\text{tg}(\xi-\xi_0)\}=$$

$$=2\left(e^{-\frac{y}{2}}-e^{\frac{y}{2}}\right)-\frac{Ke^{\frac{y}{2}}}{C_{3\infty}}\left(\xi-\xi_\infty+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1+e^{-\frac{y}{2}}}\right), \qquad (28)$$

im Unendlichen wird das $-\frac{K}{2C_{3\infty}}$. Das ist natürlich der einfache Ohmsche Spannungsabfall im neutralen Elektrolyten der Ionenkonzentration $C_{3\infty}$. Für die Ladung erhalten wir

$$E=-\frac{D}{4\pi}\left[\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0-\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_\infty\right]=$$

$$=\frac{DRT}{4\pi\cdot 2F}\,2F\sqrt{\frac{2\pi C_{3\infty}}{DRT}}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)_\infty^0=$$

$$\sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}\left[e^{-\frac{y_0}{2}}-e^{\frac{y_0}{2}}+\frac{Ke^{\frac{y_0}{2}}}{2C_{3\infty}}\right.$$

$$\left.\left(1+\xi_\infty-\frac{1}{1+e^{-\frac{y_0}{2}}}\right)\right]. \qquad (29)$$

Nun haben wir den Überschuß u der vorhandenen Ionen über die bei gleichmäßiger Verteilung vorhandenen zu bilden. Setzen wir

$$U=-u\frac{1}{C_{3\infty}}\frac{2F}{\sqrt{\frac{DRT}{2\pi C_{3\infty}}}},$$

so wird

$$U=\int_{\xi_\infty}^{0}\frac{C_1+C_2+C_3-2C_{3\infty}}{C_{3\infty}}d\xi=$$

$$=\int_{\xi_\infty}^{0}\frac{C_1+C_2-C_3}{C_{3\infty}}d\xi+2\int_{\xi_\infty}^{0}\left(\frac{C_3}{C_{3\infty}}-1\right)d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\xi_\infty}^{0}\frac{d^2y}{d\xi^2}d\xi+2\int_{\xi_\infty}^{0}(e^{-y}-1)\,d\xi\,.$$

das ist weiter

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)_{\xi_\infty}^0+2\int_{\xi_\infty}^{0}\left[\text{cotgh}^2(\xi-\xi_0)-1+\right.$$

$$\left.+\frac{K}{C_{3\infty}}\cdot\text{cotgh}^2(\xi-\xi_\infty)\cdot z\right]d\xi. \qquad (30)$$

Nach längerer Rechnung ergibt sich

$$U=-\left(e^{-\frac{y_0}{4}}-e^{\frac{y_0}{4}}\right)^2+\frac{K}{2C_{3\infty}}\left[\frac{3}{4}-e^{\frac{y_0}{2}}-\right.$$

$$\left.-\xi_\infty(1-\xi_\infty-e^{\frac{y_0}{2}})\right] \qquad (31)$$

und daraus folgt für

$$u=\frac{1}{2F}\frac{1}{2}\sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}\left\{\left(e^{-\frac{y_0}{4}}-e^{\frac{y_0}{4}}\right)^2-\right.$$

$$\left.-\frac{K}{2C_{3\infty}}\left[\frac{3}{4}-e^{\frac{y_0}{2}}-\xi_\infty\left(1-\xi_\infty-e^{\frac{y_0}{2}}\right)\right]\right\}. \qquad (32)$$

Nun haben wir weiter die elektrostatische Spannung zu berechnen und zu diesem Zwecke wieder

$$\frac{D}{8\pi}\int_0^{\xi_\infty}\left(\frac{d\varphi}{dx^2}\right)^2dx$$

zu bilden. Es wird

$$\frac{1}{4}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2=\frac{1}{2}\int_{\xi_\infty}^{\xi}\frac{d^2y}{d\xi^2}\frac{dy}{d\xi}d\xi=e^{y}+e^{-y}-2+$$

$$+\frac{K}{C_{3\infty}}\int_{\xi_\infty}^{\xi}\frac{dy}{d\xi}e^{y}d\xi\int_{\xi_\infty}^{\xi}e^{-y}d\xi=e^{y}-e^{-y}+$$

$$+2(e^{-y}-1)+\frac{K}{C_{3\infty}}\int_{\xi_\infty}^{\xi}\frac{dy}{d\xi}e^{y}d\xi\int_{\xi_\infty}^{\xi}e^{-y}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2y}{d\xi^2}+2(e^{-y}-1)-$$

$$\frac{K}{C_{3\infty}}e^{y}\int_{\xi_\infty}^{\xi}e^{-y}d\xi+\frac{K}{C_{3\infty}}\int_{\xi_\infty}^{\xi}\frac{dy}{d\xi}e^{y}d\xi\int_{\xi_\infty}^{\xi}e^{-y}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{d^2y}{d\xi^2}+2(e^{-y}-1)-\frac{K}{C_{3\infty}}(\xi-\xi_\infty) \qquad (33)$$

mit Benutzung von (19) und partieller Integration. Dann wird

$$\frac{1}{4}\int_{\xi_\infty}^{0}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2d\xi=\int_{\xi_\infty}^{0}\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{d\xi^2}+2e^{-y}-2\right)d\xi-$$

$$-\frac{K}{C_{3\infty}}\frac{\xi_\infty^2}{2}=U-\frac{K}{C_{3\infty}}\frac{\xi_\infty^2}{2}. \qquad (34)$$

$$\frac{D}{8\pi}\int_0^{x_\infty}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)^2 dx = -\frac{D}{8\pi}\left(\frac{RT}{2F}\right)^2 2F\sqrt{\frac{2\pi C_{3\infty}}{DRT}}.$$

$$4\cdot\frac{1}{4}\int_{\xi_\infty}^{0}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 d\xi = -\frac{RT}{2F}\sqrt{\frac{DRT}{2\pi}}\,C_{3\infty}$$

$$\frac{1}{4}\int_{\xi_\infty}^{0}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2 d\xi = RTu + \frac{RTK}{2}\xi_\infty x_\infty. \quad (35)$$

Wenn wir nun zur Berechnung der Kräfte übergehen, so wirken senkrecht zur Oberfläche erstens ein Zug

$$\frac{D}{8\pi}\left(\frac{d\varphi}{dx}\right)_0^2 = \frac{C_\infty RT}{4}\left(\frac{dy}{d\xi}\right)_0^2 =$$

$$RTC_{3\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{d^2y}{d\xi^2} + 2e^{-y_0} - 2 + \frac{K\xi_\infty}{C_{3\infty}}\right) = RTC_{3\infty}\left(\frac{C_{10}+C_{20}-C_{30}}{C_{3\infty}} + 2C_{30} - 2 + \frac{K\xi_\infty}{C_{3\infty}}\right) = RT(C_{10}+C_{20}+C_{30} - 2C_{3\infty} + K\xi_\infty).$$

Zweitens ein Druck

$$(C_{10}+C_{20}+C_{30})RT,$$

der zu dem obigen Zug addiert, einen Druck

$$2C_{3\infty}RT - RTK\xi_\infty$$

ergibt. Die Größe $2C_{3\infty}RT$ ist der gewöhnliche osmotische Druck, der zweite Summand wird durch einen hydrodynamischen Effekt kompensiert, den wir folgendermaßen berechnen. Die den Strom aufrecht erhaltende, auf die Ionen wirkende Kraft ist gegeben durch (12)

$$RT\frac{\partial C_1}{\partial x} + C_1\frac{\partial^2\varphi F}{\partial x} = RTK_2 \text{ pro Volumeinheit,}$$

also

$$RTK_1 x_\infty = RTK\xi_\infty \text{ pro Flächeneinheit.}$$

Diese Kraft wird aber durch Reibung vollständig auf die Flüssigkeit übertragen. Die Flüssigkeit übt daher in der negativen x-Richtung auf die Unterlage, in diesem Falle auf die Quecksilberoberfläche, einen Druck

$$RTK\xi_\infty$$

aus, der den obengenannten gerade aufhebt. Gehen wir zur Berechnung der Kräfte senkrecht zur Oberfläche über, so haben wir zu dem in Formel (35) berechneten Druck senkrecht auf die Kraftlinien noch die Wirkung des Molekulardruckes RTu zu addieren[1]) und finden dann für die Oberflächenspannung

$$\sigma - \sigma_0 = -RT\left(2u + K\xi_\infty x_\infty\frac{K}{2}\right) =$$

$$= \frac{RT}{2F}\sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}\left\{-2\left(e^{-\frac{y_0}{4}} - e^{\frac{y_0}{4}}\right)^2 + \frac{K}{C_{3\infty}}\left[\frac{3}{4} - e^{\frac{y_0}{2}} - \xi_\infty\left(1 - \frac{\xi_\infty}{2} - e^{\frac{y_0}{2}}\right)\right]\right\}. \quad (36)$$

Wir wollen nun hier noch für K den aus Gleichung (25) folgenden Wert einsetzen, dabei werden wir die Glieder

$$\frac{1}{2F}\sqrt{\frac{DRT}{2\pi C_{3\infty}}}\left(1 - e^{-\frac{y_0}{2}}\right)$$

neben x_∞ vernachlässigen außer bei dem Gliede mit ξ_∞^2, ebenso $\frac{3}{4} - e^{\frac{y_0}{2}}$. Es ergibt sich dann für die Formeln (29), (32), (36)

$$E = \sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}\left\{e^{-\frac{y_0}{2}} - e^{\frac{y_0}{2}} + \frac{e^{\frac{y_0}{2}}}{2}\,\frac{C_{1\infty} - C_{10}e^{-y_0}}{C_{3\infty}}\right\} \quad (29')$$

$$u = \frac{1}{2F}\sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}\left\{\left(e^{-\frac{y_0}{4}} - e^{\frac{y_0}{4}}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(e^{\frac{y_0}{2}} - e^{-\frac{y_0}{2}}\right)\frac{C_{1\infty} - C_{10}e^{-y_0}}{C_{3\infty}}\right\} - \frac{C_{1\infty} - C_{10}e^{-y_0}}{2}x_\infty \quad (32')$$

$$\sigma - \sigma_0 = \frac{RT}{2F}\sqrt{\frac{DRTC_{3\infty}}{2\pi}}\left\{-2\left(e^{-\frac{y_0}{4}} - e^{\frac{y_0}{4}}\right)^2 - \left(e^{\frac{y_0}{2}} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{\frac{y_0}{2}}\right)\frac{C_{1\infty} - C_{10}e^{-y_0}}{C_{3\infty}}\right\} + \frac{C_{1\infty} - C_{10}e^{-y_0}}{2}x_\infty. \quad (36')$$

Vor der Diskussion wollen wir noch einmal unsere Annahme hervorheben: Es sollen überall die idealen Gasgesetze gelten, d. h.

$$C_1\cdot e^{y},\ C_2\cdot e^{y},\ C_3\cdot e^{-y}\left(C \text{ in } \frac{\text{Mol}}{\text{cm}^3}\right)$$

müssen klein gegen 10^{-3} sein. Dann sollen auf die Ionen nur rein elektrische, auf die neutralen Salzmoleküle gar keine Kräfte wirken. Im stationären Endzustand soll die ganze Leitung von den Quecksilberionen übernommen sein, der Einfluß der Diffusion der neutralen Moleküle und der Einfluß der Ionen des Lösungsmittels ist vernachlässigt. Alle Gleichungen sollen bis an die als Ebene gedachte Metalloberfläche gelten. Endlich sind die Quecksilberionen überall als $Hg_2^{\cdot\cdot}$ angenommen, während bei ganz hohen Verdünnungen viel-

1) Die hydrodynamische Zusatzkraft wurde vernachlässigt, da es sich zeigt, daß sie einer höheren Potenz des Bruches $\frac{\text{Umfang}}{\text{Oberfläche}}$ proportional ist.

leicht ein Zerfall in einwertige Ionen[1]) stattfindet.

Infolge des kleinen Wertes von C_{10} und der Beschränkung, die wir y_0 auflegen mußten, können wir stets $C_{10} \cdot e^{-y}$ neben $C_{1\infty}$ vernachlässigen, wenn nicht $C_{1\infty}$ durch die Anwesenheit von Komplexe bildenden Ionen abnorm herabgesetzt ist. Nun zeigen unsere Formeln durchwegs eine Abweichung gegen die Formel bei natürlicher Polarisation. Doch ist in den meisten praktisch vorkommenden Fällen $\frac{C_{1\infty}}{C_{3\infty}}$ als klein gegen das erste Glied aufzufassen, denn $C_{1\infty}$ bedeutet ja die Menge Quecksilberionen, die tief in der Lösung vorhanden sind. Wenn auch an der Quecksilberoberfläche selbst sich die Lösung bald mit Quecksilberionen sättigen wird, so ist das, wenn keine besonderen Maßregeln angewandt werden (wie z. B. lange dauerndes Schütteln) in der Lösung selbst doch nicht der Fall, und die Ionen, die anfangs in der Kapillare waren, kommen im stationären Zustand nicht mehr in Betracht. So werden praktisch die Glieder in der geschlungenen Klammer, die die Abweichungen vom Fall der natürlichen Polarisation darstellen, nicht in Betracht kommen. Das Glied $RTC_{1\infty}x_\infty$ dagegen kann merklich in Betracht kommen, denn es ist, wenn x in Millimetern, die Konzentration in Mol pro Liter ausgedrückt wird, $\sim 25 \cdot 10^5 Cx$ und für gesättigtes Hg_2SO_4 ist $C \sim 8 \cdot 10^{-4}$ [2]).

Das entspricht also einer Erhöhung des Wertes der Oberflächenspannung auf der ganzen Kurve, die proportional der Konzentration der Quecksilberionen und daher vom Anion abhängig ist. Die Proportionalität mit der Länge der Kapillare kann bei denjenigen Meßmethoden, bei denen die Stellung der Kuppe in der Kapillare sich ändert, Fehler verursachen. Im übrigen bleibt aber das Maximum der Kapillarkurve an der Stelle $y_0 = 0$, bestimmt also den Nullpunkt des Potentials (unter Vernachlässigung des Gliedes $RTC_{10}e^{-y}$). Die Kurve ist nicht mehr exakt symmetrisch, doch dürften die Abweichungen kaum merklich sein. Weder die Lippmann-Helmholtzsche, noch die Gibbs-Warburgsche Gleichung sind exakt richtig.

Zusammenfassung.

1. Es wird vorausgesetzt, daß sich das Quecksilber, daß die Elektrode bildet, bis an eine scharfe Grenzfläche heran praktisch wie ein idealer Leiter verhält. Dann herrscht bei der Berührung mit einer Lösung im Gleichgewicht an dieser Grenzfläche stets (bei gegebener Temperatur) eine konstante Konzentration der Quecksilberionen. Wirken auf diese Ionen in der Lösung keine anderen als die elektrischen Kräfte, so ist diese Konzentration gleich der der Lösungstension entsprechenden.

Der aus dem Boltzmannschen Prinzip folgende Ansatz für die Konzentration

$$C_1 = C_{1\infty} \cdot e^y, \quad C_3 = C_{3\infty} \cdot e^{-y}$$

erweitert die Gültigkeit der Nernstschen Gleichung auch auf das Innere der Doppelschicht, wo sich sowohl Potential als auch Konzentration von Punkt zu Punkt ändern.

2. Eine Unterscheidung zwischen Nernstschen Potentialen und Adsorptionspotentialen ist logisch kaum durchzuführen, man könnte nur unterscheiden, ob sich die Kräfte, die vom Metall auf die Ionen ausgeübt werden, in die Lösung hinein erstrecken oder nicht, und den Teil des Gesamtpotentials, der von den sich über die Oberfläche hinaus erstreckenden Kräften herrührt, Adsorptionspotential nennen.

3. Unter der Annahme, daß auf die Ionen nur elektrische, auf die neutralen Moleküle gar keine Kräfte wirken, wird im Anschluß an Chapman der Bau der Doppelschicht, die von der natürlichen Polarisation herrührt, berechnet, ebenso ihr Einfluß auf die Oberflächenspannung. Es zeigt sich, daß sowohl die Lippmann-Helmholtzsche als auch die Gibbs-Warburgsche Gleichung gelten und beide zum gleichen Resultat führen, wenn außer dem Quecksilbersalz noch ein indifferenter Elektrolyt von gleicher Wertigkeit zugesetzt ist.

4. Eine äußere angelegte polarisierende Kraft bewirkt ein solches Diffusionsgefälle des Anions und des indifferenten Kations, daß sie sich an der Leitung nicht beteiligen. Ihre Konzentration an der Elektrodenoberfläche ist ebenso wie in Punkt 3 durch die Nernstsche Formel gegeben. Beim Kurzschluß der Kette liefern sie die EMK. der Polarisation. Die ganze Leitung übernimmt das Quecksilberion. Das Potential setzt sich aus zwei Teilen zusammen, deren erster sich aus der Nernstschen Formel und der Quecksilberionenkonzentration in der Lösung berechnet, deren zweiter den Ohmschen Spannungsabfall in der Kapillaren, in welcher eine starke Verminderung der den Strom tragenden Ionen eingetreten ist, bedeutet. Die Oberflächenspannung ist nicht identisch mit der im Punkte 3 bei gleichem Potential, doch bleibt praktisch das Maximum beim absoluten Nullpunkt, nur ist sein Wert vergrößert. Weder

1) A. Ogg, Zeitschr. f. phys. Chem. 27, 295, 1899.
2) K. Drucker, Zeitschr. f. anorg. Chem. 28, 361, 1901.

die Gleichung von Lippmann-Helmholtz noch die von Gibbs-Warburg gelten mehr genau.

(Eingegangen 14. Juli 1919.)

Neue Apparate für Lichttelephonie.

Von Hans Thirring.

Durch Simons Entdeckung des sprechenden Lichtbogens wurde um die Jahrhundertwende der Bellschen Lichttelephonie ein starker Impuls erteilt und eine der letzten Leistungen Simons vor seinem Tode bestand wieder darin, an jenen Verbesserungen mitzuwirken, die an der durch den Krieg aktuell gewordenen Lichttelephonie vorgenommen wurden.

Der Verfasser dieser Zeilen hat einen Teil der diesbezüglichen Versuche mit Simon gemeinsam durchgeführt und die Arbeiten auch nach dessen Tode fortgesetzt und zum Abschluß gebracht, so daß jetzt fertig brauchbare Sende- und Empfangsgeräte für Lichttelephonie vorliegen, die im folgenden beschrieben werden sollen.

Soweit sich aus der sehr reichhaltigen, bei Ries[1]) zitierten Literatur über das Selen beurteilen läßt, war vor dem Kriege der erfolgreichste Vorkämpfer der Lichttelephonie Ernst Ruhmer[2]). Daß trotz seiner Bemühungen die Lichttelephonie keinen Eingang in die Praxis gefunden hat, liegt wohl darin, daß die erzielten Reichweiten in keinem Verhältnis zu den aufgewendeten Mitteln standen. Ruhmer verwendete für seine Versuche auf größere Distanzen einen 60-cm-Marinescheinwerfer als Sender und einen 90-cm-Parabolspiegel als Empfänger; Gewicht und Kosten einer derartigen Einrichtung sind für eine Anlage, deren Reichweite einige wenige Kilometer beträgt, viel zu groß. Außerdem sind Ruhmers Angaben betreffs der erzielten Distanzen sicher übertrieben gewesen[3]).

Während des Krieges (allerdings ziemlich spät) kam die Lichttelephonie wieder zur Geltung, weil man in ihr ein Nachrichtenmittel erkannte, daß den Vorteil einer drahtlosen, gerichteten, vom Gegner nicht abhörbaren telephonischen Verbindung besaß. Es wurden daher im Jahre 1917 zuerst unabhängig voneinander in Deutschland (von Simon) und in Österreich (vom Verfasser) Versuche angestellt, die nachher gemeinsam fortgesetzt wurden und auf die Ausarbeitung eines praktisch brauchbaren Typs von Apparaten abzielten[1]). Die Fertigstellung der Apparatur nahm einige Zeit in Anspruch, so daß die Geräte an der Front selbst nicht mehr in Verwendung kamen. Es ist aber zu erwarten, daß die Lichttelephonie in ihrem jetzigen Zustande ein auch für Friedenszwecke brauchbares Nachrichtenmittel darstellen wird, so daß die auf ihre Verbesserung abzielenden Versuche ein nicht bloß theoretisches Interesse besitzen.

Den Ausgangspunkt für die Verbesserungen bildete natürlich die Verwendung von Lautverstärkern im Empfänger; man konnte damit rechnen, daß dadurch bei gleichzeitiger Erhöhung der Reichweite die Dimensionen des Sende- und Empfangsspiegels herabgesetzt werden könnten. Nun ist aber der Verstärkung von Strömen bei der drahtlosen Telegraphie und verwandten Gebieten eine obere Grenze gesetzt durch die Größe der Störungen, die sich den zu verstärkenden Strömen überlagern. Bei der drahtlosen Telegraphie z. B. kann man bei gegebener Sendeleistung die Reichweite durch genügende Empfangsverstärkung darum nicht ins Unbegrenzte steigern, weil die atmosphärischen Störungen, die ja bis zu einem gewissen Grade mitverstärkt werden, schließlich die Signale übertönen. Bei der Lichttelephonie liegt nun die Quelle derartiger Störungen zum größten Teil in der Selenzelle selbst. Beim Stromdurchgange durch metallisches Selen scheinen sich fortwährend molekulare Prozesse (Umlagerung von Kristallen und dgl.) abzuspielen, die spontane Widerstandsschwankungen zur Folge haben. Es tritt deswegen auch bei unbelichteter Selenzelle eine Erscheinung auf, die dem von Schottky[2]) behandelten „Schroteffekt" verwandt ist, und die sich durch ein mehr oder weniger starkes Rauschen im Telephon kundgibt. (Dieser Effekt ist übrigens keine spezielle Eigenheit der Selenzellen; er machte sich gelegentlich eines Versuches, bei dem eine Kalium-Photozelle als Empfänger benutzt wurde, noch stärker bemerkbar.) Dieses Rauschen der Zellen ist ungefähr proportional der durch die Zellen fließenden Gleichstromleistung; es wächst also einerseits mit der Belastung, andererseits mit der Leitfähigkeit der Zellen. Zur deutlichen Sprachübertragung ist es nun notwendig, daß die Amplituden des

1) Chr. Ries, Das Selen, Dießen vor München 1918.
2) E. Ruhmer, Elektrotechn. Zeitschr. 23, 859, 1902 und 25, 1021, 1904.
3) Nach Simons Aussage war es ganz ausgeschlossen, daß Ruhmer (wie l. c. behauptet wird) über eine Entfernung von 15 km eine deutliche Sprachübertragung erzielen konnte.

1) Ein großer Teil der Versuche wurde im K-Laboratorium des Wernerwerkes von Siemens & Halske durchgeführt, welche Firma sich um den Ausbau der Lichttelephonie besondere Verdienste erworben hat.
2) W. Schottky, Ann. d. Phys. 57, 541, 1918.



durch die Lichtschwankungen aufgeprägten Wechselstromes groß seien gegenüber den Amplituden der durch die spontanen Widerstandsänderungen verursachten Stromschwankungen. Bezeichnen wir die ersteren mit A_w und die letzteren mit A_s, so ergibt sich folgendes: Während es früher (ohne Verstärker) in erster Linie darauf ankam, den Absolutwert von A_w so groß zu machen, daß man im Telephon die Hörbarkeitsschwelle erreichte, kommt es jetzt, da man hinreichend weit verstärken kann, viel mehr auf das Verhältnis $A_w : A_s$ an. Bezeichnen wir ferner mit I_w die mittlere Amplitude der Intensitätsschwankungen des vom Sender kommenden, auf die Selenzelle fallenden Lichtes und mit I_s die Intensität jenes Anteils des auf die Selenzelle fallenden Lichtes, der vom diffusen Tageslicht herrührt, so wächst $A_w : A_s$ gleichzeitig mit $I_w : I_s$. Denn I_w ruft ja die gewünschten Widerstandsschwankungen hervor, während I_s nur den durch die Zellen fließenden Gleichstrom verstärkt und dadurch das Rauschen vermehrt. Bei gegebener Distanz zwischen Sender und Empfänger und gegebenen Dimensionen des Empfangspiegels ist nun $I_w : I_s$ am größten im Brennfleck des Empfangsspiegels oder der Empfangssammellinse. Während nun Ruhmer eine Selenzelle, deren wirksame Oberfläche mehrere cm² maß, extrafokal stellte, ergibt sich jetzt bei der Verwendung von Lautverstärkern die Möglichkeit, ganz kleine Selenzellen zu benützen, deren Oberfläche von dem (nie ganz scharfen) Brennfleck des Empfängers voll bedeckt wird. Das war früher darum nicht möglich, weil eine Zelle von der Größe des Brennfleckes (wirksame Oberfläche ca. 1 mm²) selbst bei sehr kleinen Elektrodenabständen einen Dunkelwiderstand von der Größenordnung 1 Megohm hat und dabei keine höheren Belastungen als etwa 20 Volt verträgt. Die Leistung des durch die Zelle fließenden Gleichstromes ist also sehr gering; noch geringer ist erfahrungsgemäß die von den Lichtschwankungen bewirkte Wechselstromleistung, sie reicht daher für den Telephonbetrieb ohne Verstärker nicht aus. Jetzt hingegen, wo man sehr weitgehend verstärken kann, ist die Anordnung mit kleiner in den Brennpunkt gestellter Selenzelle am günstigsten, da für sie $A_w : A_s$ am größten ausfällt. Allerdings darf auch bei Verwendung von Lautverstärkern der Wert von A_w selbst eine gewisse Grenze nicht unterschreiten, da sonst die Nebengeräusche, die bei sehr hoher Verstärkungszahl in den Audionröhren selbst unvermeidlich auftreten, störend wirken. Es zeigte sich, daß dies eintritt, wenn der Dunkelwiderstand der Selenzellen ca. 10 Megohm überschreitet. Definieren wir als spezifische Flächenleitfähigkeit σ einer Selenzelle ihre Dunkelleitfähigkeit dividiert durch die wirksame Oberfläche, so ergibt sich aus dem Gesagten, daß bei einer Zelle der angegebenen Größe

$$\sigma \gtrless 10^{-5}\,\Omega^{-1}\,\mathrm{cm}^{-2}$$

sein muß. Bei den am meisten gebräuchlichen Zellen des Bidwellschen[1]) Typus mit bifilarer Drahtwicklung ist es nun (insbesondere bei kleiner Dimensionierung der ganzen Zelle) schwer möglich den angegebenen Mindestwert für σ zu erreichen. Von vornherein scheinen die gravierten Zellen des Liesegangschen[2]) Typus für den angestrebten Zweck am geeignetsten zu sein. Simon verwendete nun auch bei seinen Versuchen 1917 solche Zellen, vertauschte sie aber später gegen die vom Verfasser konstruierten. Es zeigte sich nämlich, daß gerade die gravierten Zellen eine gewisse Neigung zum Rauschen besitzen, und zwar um so mehr, je größer ihr σ ist. Das dürfte auf den Umstand zurückzuführen sein, daß beim Ritzen des Platinspiegels kleine Zacken an den Rändern des Metalls entstehen, so daß also der Elektrodenabstand längs eines Gitterstriches variiert. Das hat nun eine ungleichmäßige Verteilung der Stromdichte zur Folge, was unter Umständen zu kleinen lokalen Erhitzungen und zu kleinen Stromschwankungen nach Art des Schroteffektes Anlaß geben kann.

Der Verfasser hatte nun schon früher Selenzellen mit kleiner Oberfläche und möglichst großen σ-Werten gebaut, die dazu bestimmt waren, Scheinwerfersignale auf größere Entfernungen zu empfangen und zum Schließen eines Relais zu verwenden. Sie bestehen im wesentlichen aus zwei Scharen kammartig ineinander greifender Elektroden aus sehr dünnem Metallblech, die durch Glimmer voneinander isoliert sind (Fig. 1). Dieses kondensatorartige

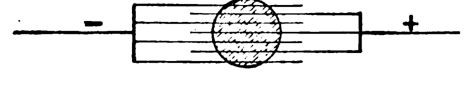


Fig. 1.

Gebilde wird auf der Hochkantseite abgeschliffen und poliert und hierauf mit einem kreisrunden Selenfleck von ca. 1 mm Durchmesser und etwa 0,01 mm Dicke versehen[3]). Es war nun naheliegend, diese Zellen auch für die Lichttelephonie

1) Chr. Ries, a. a. O. S. 45.
2) a. a. O. S. 50.
3) Diese Zellen, die übrigens auch für eine bequeme, allerdings nicht sehr exakte Methode der Sternphotometrierung gut brauchbar sind, werden von der Firma L. Malovich & Cie, Wien-Hernals erzeugt.

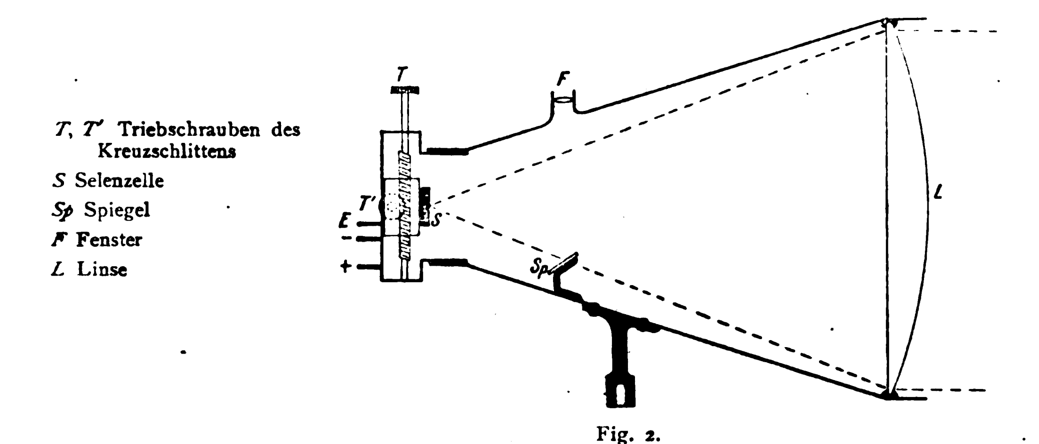


Fig. 2.

zu verwenden. Dabei zeigten gleich die ersten Versuche ihre Überlegenheit gegenüber einer Reihe von anderen zur Verfügung stehenden Zellen, da infolge der vollen Ausnützung des intensiven Brennfleckes in der Empfangskamera das in Frage kommende Verhältnis $A_w : A_s$ bedeutend größer war als bei den Vergleichszellen. Allerdings trat auch hier anfangs bei Steigerung der Reichweite und entsprechend größerer Verstärkung das Rauschen der Zellen sehr störend auf und erst nach langwierigen Versuchen gelang es, Zellen herzustellen, für die die Störungsamplituden A_s bei der verwendeten Spannung von ca. 14 Volt so klein wurden, daß sie auch bei der höchsten erreichbaren Verstärkung unterhalb einer gewissen zulässigen Grenze bleiben.

Die zweite Schwierigkeit beim Arbeiten mit maximaler Verstärkung (4 Röhren in Kaskadenschaltung) bietet das bekannte Pfeifen der Röhren, das gerade dann leicht auftritt, wenn im Primärkreis ein hoher Widerstand liegt, wie das ja bei der Lichttelephonie eben der Fall ist, wo die Selenzelle im Eingangskreise liegt. Diese Schwierigkeit zu beseitigen gelang nur bei den Viererkasten von Siemens & Halske vermittelst statisch geschützter Zuleitungen. Die von der Selenzelle zur Eingangssteckbüchse des Lautverstärkers führenden, isolierten Drähte sind mit einem Netz von Drahtlitzen umsponnen, das gleichzeitig mit dem metallischen Teil der Empfangskamera und dem Gehäuse des Lautverstärkers geerdet ist. Diese Vorsichtsmaßregel gestattet es, sehr hohe Verstärkungszahlen zu erreichen, ohne daß ein Selbsttönen der Verstärkerröhren eintritt.

Das Empfangsgerät.

Das Empfangsgerät besteht aus einem optischen Teil, der Empfangskamera, in deren Brennebene die Selenzelle angebracht ist und einem elektrischen Teil, dem Lautverstärker samt Anoden- und Heizbatterie und einem Telephon (Kopfhörer). Als Empfangskamera verwendete der Verfasser einen konischen Blechtubus, der mit einer einfachen Plankonvexlinse von 22 cm Durchmesser und 30 cm Brennweite ausgestattet war (Fig. 2). An seiner Rückseite trägt der Tubus einen abschraubbaren Deckel, in den auf einem Kreuzschlitten hoch und seitlich verstellbar die Selenzelle eingesetzt wird. Ein kleines Fenster F und ein Spiegel S gestatten es, nach Art einer Spiegelreflexkamera den Brennfleck der vom Sender kommenden Strahlen auf die Selenzelle einzustellen. Man sieht nämlich auf der Oberfläche des Selenzellengehäuses das reelle Bild der vor der Empfangskamera liegenden Landschaft und kann mittels der Schrauben des Kreuzschlittens das Bild der Sendelichtquelle mit dem Selenfleck der Zelle zur Deckung bringen. Bei großen Distanzen vom Sender machte manchmal dieses Einstellen Schwierigkeiten, da die Abbildung durch die sphärisch und chromatisch nicht korrigierte Linse äußerst mangelhaft ist, so daß man bei sehr hellem Tageslicht den Brennfleck der Scheinwerferstrahlen auf der Zelle gar nicht sieht. In diesem Falle half man sich dadurch, daß man den Tubus mittels einer groben, außen angebrachten Visiervorrichtung zunächst ungefähr in die richtige Stellung brachte und mit dem Telephon am Ohr den Kreuzschlitten so lange verstellte, bis man die auch auf sehr große Distanzen gut hörbaren Summersignale des Senders (siehe unten) wahrnahm. Der Deckel trägt an seiner Außenseite einen dreifachen Stecker; zwei Kontakte davon dienen zur Zu- und Ableitung des Selenzellenstromes; der dritte Kontakt hat Schluß mit dem Gehäuse und wird mit dem Mantel der geschützten Zuleitungsschnur verbunden.

Neben der beschriebenen Empfangskamera wurden auch die in der deutschen Armee einge-

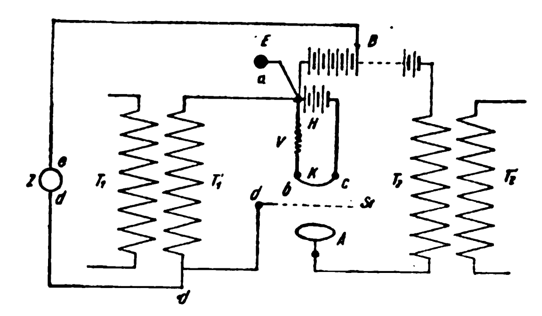
führten Blinkgeräte als Empfänger verwendet, indem man einfach an Stelle des Glühlampenhalters einen Kontaktschlitten aufmontierte, der die Selenzelle trug. Und zwar konnte sowohl das *G*-Blinkgerät (25-cm-Spiegel) als auch das *M*-Blinkgerät (16-cm-Spiegel) ohne weiteres verwendet werden.

Neuerdings stellt die Firma Carl Zeiß, Jena, die die Fabrikation der Geräte übernommen hat, einen Linsenempfänger her, bei dem der Kreuzschlitten ganz entfällt. Die Feineinstellung geschieht mit Hilfe des durch Trieb hoch und seitlich verstellbaren Stativfußes, der auch bei den Blinkgeräten verwendet wurde.

Von Lautverstärkern gelangten verschiedene Typen zur Erprobung. Simon verwendete einen Viererkasten der Süddeutschen Telephon- und Kabelfabrik, der mit A.-E.-G.-Röhren ausgestattet war. Der Verfasser benützte zunächst einen Dreiröhrenverstärker der Telefunkengesellschaft, hernach einen ebensolchen der Wiener Lorenz-Werke und schließlich Viererkasten von Siemens & Halske und von der A.-E.-G. Von allen diesen Verstärkern bewährte sich der Viererkasten von Siemens & Halske weitaus am besten. Die beiden anderen Vierröhrenverstärker pfeifen bei der unten angegebenen Schaltung, sobald man alle 4 Röhren einschaltet, selbst dann, wenn man die geschützten Zuleitungen verwendet, und erreichen auch nicht den Verstärkungsgrad des Siemens-Lautverstärkers. Die Apparate mit drei Röhren verstärken für die großen Distanzen nicht ausgiebig genug. Es wurden daher Reichweiten über 6 km nur mit dem Siemens-Lautverstärker erzielt. Für Reichweiten bis zu 6 km leistet auch der Telefunkenverstärker gute Dienste.

Die neuen Verstärker mit den Zweigitterröhren und niedriger Anodenspannung standen dem Verfasser zur Erprobung noch nicht zur Verfügung.

Die Viererkasten enthalten gebräuchlicherweise einen Eingangsübertrager mit mehreren Primärwicklungen, die verschiedene Windungszahlen haben und an ein Pachytrop angeschlossen sind. Man kann damit das Umformungsverhältnis des Eingangsübertragers stufenweise variieren und so der Impedanz des jeweils benützten Empfängerkreises anpassen. Bei der Lichttelephonie ist nun diese Impedanz sehr groß, da die hochohmige Selenzelle im Empfänger liegt. Sie ist von derselben Größenordnung (ca. 1 Megohm) wie der Scheinwiderstand des Gitterstromkreises; man würde also für die lichttelephonischen Zwecke am besten einen Eingangsübertrager mit sehr hoher Windungszahl und dem Umformungsverhältnis 1 : 1 wählen. Um nun an die schon in den Verstärkerkasten vorhandenen Eingangsübertrager (die in allen Stufen die Stromstärke heruntertransformieren, also für hochohmige Selenzellen schlecht angepaßt sind) anzuschließen, wurde die aus dem beistehenden Schema (Fig. 3)



Z Selenzelle, T_1, T_1', T_2, T_2' Transformatorwicklungen, *B* Anodenbatterie, *H* Heizbatterie, *V* Variatur, *K* Glühkathode, *St* Steuerelektrode, *A* Anode, *E* Kontaktklemme des Gehäuses.

Fig. 3.

ersichtliche Schaltung angewendet, die sich sehr gut bewährte. Die für die Selenzelle benötigte Spannung von ca. 14 Volt wurde direkt von der Anodenbatterie abgezweigt. Dadurch entfällt die Verwendung einer zweiten Trockenbatterie, was angesichts der Unzuverlässigkeit dieser Stromquellen vorteilhaft ist. Der von der Selenzelle kommende Strom wird nun nicht an die Primärwicklung des Eingangsübertragers angeschlossen (diese bleibt vielmehr unbenützt und offen), sondern direkt an die Enden der Sekundärwicklung. Daß nun die Widerstandsschwankungen der Selenzelle Potentialschwankungen des Gitters [auf denen ja die Wirkung des Verstärkers beruht[1])] hervorrufen muß, geht aus dem Schaltungsschema hervor. Es handelt sich nur noch um die Frage, ob im Zeitmittel das Gitterpotential den für die günstigste Verstärkung erforderlichen Wert (einige Volt negativ gegenüber der Mitte des Glühfadens) hat. Das ist nun, wie man leicht zeigen kann, bei der angegebenen Schaltung in der Tat der Fall. Das negative Ende der Anodenbatterie ist an das Gehäuse des Lautverstärkers angeschlossen; wir wollen die willkürliche Konstante des Potentials so wählen, daß das Gehäuse (Punkt *a*, Fig. 3) das Potential Null hat. Die eine Klemme der Selenzelle (Punkt *e*) hat dann, wenn die Selenzellenspannung bei ca. 14 Volt (10 Trockenelemente) abgezweigt wird, das Potential + 14. Der Ohmsche Widerstand der Sekundärwicklung des Eingangstransformators ist ca. 50000 Ohm, wenn also

1) Über die Theorie der Verstärkerröhren vgl. H. Barkhausen, Jahrb. d. drahtlosen Telegr. 14, 27, 1919.

die Selenzelle 1 Megohm Widerstand hat, dann hat die andere Klemme der Zelle und gleichzeitig das Gitter (Punkt *d*) das Potential + 0,7. Der Potentialabfall im Heizstromkreis ist nun bei der verwendeten Spannung von 6 Volt so, daß im Variator ca. 3 Volt verloren gehen; es hat also der Punkt *b* das Potential + 3 und der Punkt *c* das Potential + 6; die Mitte des Glühfadens daher + 4,5. Das Gitter hat also eine mittlere Bremsspannung von — 3,8 Volt, was vollkommen ausreichend ist. (Im normalen Betrieb beträgt bei diesen Lautverstärkern die Bremsspannung ca. — 4,5 Volt, die Potentialverschiebung von + 0,7 Volt hat, wie die Versuche zeigten, auf die Verstärkerwirkung keinen merklichen Einfluß.) Natürlich läßt sich diese Schaltung nur für hochohmige Selenzellen verwenden. Hätte die Zelle etwa nur 50000 Ohm Widerstand, so würde die durch die Schaltung bewirkte Potentialverschiebung ca. + 7 Ohm betragen, wodurch die Verstärkerwirkung, wie die Theorie der Audionröhren lehrt, vernichtet würde. Von Siemens & Halske wurde daher bei einer Reihe von Lautverstärkern eine Schaltung eingebaut, die der hier angegebenen im Prinzip verwandt ist, bei der aber durch eine geeignete Überbrückung mittels Widerstands und Kapazität die Potentialverschiebung des Gitters unabhängig vom Widerstand der Selenzelle auf Null reduziert wird.

Das Sendegerät.

Als Sender wurden in erster Linie Bogenlichtscheinwerfer, und zwar die beiden kleinsten feldmäßigen Typen mit 25 cm- und 35 cm-Spiegel benützt, später auch Blinkgeräte, wobei also an Stelle des sprechenden Lichtbogens Glühlampen in Verwendung kamen.

Die Schaltung war in beiden Fällen die ursprüngliche, von Simon angegebene: Induktive Überlagerung des Mikrophonstromes über den Lampenstrom (Fig. 4). Der Duddelsche Kunstgriff (Überbrückung der Generatormaschine durch eine Kapazität) wurde auch wiederholt angewendet, es ergab sich aber kein Unterschied gegenüber der einfachen Schaltung (Fig. 4). Im Transformator, der das Umformungsverhältnis 1 : 1 hat, sind beide Wicklungen ineinander gewickelt, damit der gegenseitige Induktionskoeffizient möglichst groß wird. Als Stromquelle für das Mikrophon diente eine 12-Volt-Sammlerbatterie. Später wurde dann, um die Verwendung der schweren und teueren Sammler zu ersparen, die in Fig. 5 angegebene Schaltung verwendet, bei der die für das Mikrophon benötigte Spannung direkt aus dem Hauptstromkreis abgezweigt wird.

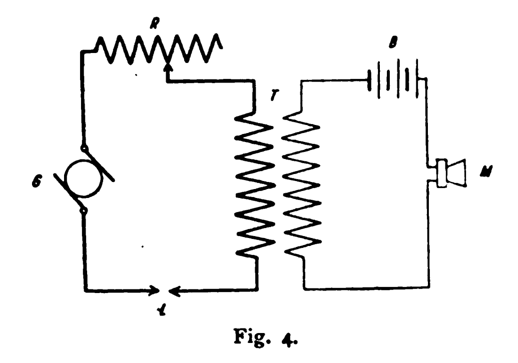


Fig. 4.

Zu Fig. 4 u. 5: *G* Generatormaschine, *R* Regulierwiderstand, *L* Lichtbogen, *T* Transformator, *B* Batterie, *M* Mikrophon.

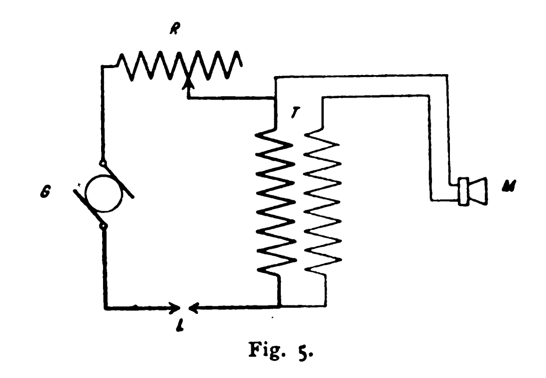


Fig. 5.

Die Auswahl geeigneter Mikrophone bot zunächst einige Schwierigkeiten, da sich zeigte, daß die wenigsten von den im Postbetrieb verwendeten Mikrophonen der hohen Strombelastung, die man ihnen zumuten mußte, gewachsen waren. Gute Resultate ergaben: Körnermikrophone der Telephonfabrik-A.-G. vormals Berliner und ein ebensolches von der österreichischen Ericson-Elektrizitätsgesellschaft für diesen Zweck eigens gebautes Mikrophon. (Beide mit horizontal liegender Membran.) Es ist wesentlich, daß die Füllung aus nicht zu feinen Kohlekörnern besteht und ziemlich locker ist. Ferner wurden verschiedene Typen von Starkstrommikrophonen durchprobiert, wobei sich am besten jenes der Tagtelephon A.-B. Stockholm bewährte. Die verwendete Stromstärke war 1,4—1,8 Ampère. Als Anrufsignal werden Summerzeichen verwendet; mittelst eines Umschalters kann mit einem Handgriff an Stelle des Mikrophons ein Summer eingeschaltet werden. Versuche ergaben, daß diese Summerzeichen auf große Distanzen hörbar sind, selbst wenn die Einstellung des Scheinwerfers und des Empfängers noch nicht das Optimum erreicht hat.

Bei der in Fig. 5 angegebenen Schaltung kann das ganze für die Lichttelephonie erforderliche Zubehör (Transformator, Mikrophone,

Summer usw.) in einer Holzkiste von der Größe 35×25×25 cm und ca. 15 kg Gewicht untergebracht werden. Man braucht bloß diese Zusatzkiste zwischen Scheinwerfer und Stromquelle einzuschalten, um das Beleuchtungsgerät als Sendegerät für Lichttelephonie zu verwenden. Die in der österreichischen Armee für den Betrieb der 25- und 35-cm-Scheinwerfer normierten kleinen, fahrbaren Benzindynamos ließen sich für die Lichttelephonie ohne weiteres benützen. Hingegen traten bei Verwendung von Boschapparaten als Stromquelle die Kollektorgeräusche des Generators so stark hervor, daß die deutliche Sprachübertragung gestört wurde. Wenn der Scheinwerfer an ein städtisches Netz angeschlossen wird, so hört man im Empfänger die von den großen Dynamos verursachten Stromschwankungen fast gar nicht durch. Es kam nur mitunter vor, daß in der Nachbarschaft ein kleiner Gleichstrommotor mit defektem Kollektor an das gleiche Netz angeschlossen war; das wirkte störend.

Eine notwendige Bedingung für deutliche Sprachübertragung ist gute Fokussierung und korrekte Richtungseinstellung des Scheinwerfers. Die ersten Versuche auf größere Entfernungen mißlangen hauptsächlich infolge Versagens der Richtmittel. Erst nachdem auf die Scheinwerfer Zeißsche Visierfeldstecher aufmontiert worden waren, konnte man auch bei Tageslicht stets mit Sicherheit den Strahlenkegel auf die Empfangsstation werfen.

Die Visiervorrichtung mit Tripelstreifen war von den deutschen Signalgeräten (Blinkgeräten) her übernommen worden. Der nächste Schritt zum Ausbau der Lichttelephonie bestand nun in dem Versuche, die Blinkgeräte selbst als Sender für Lichttelephonie herzurichten, da es für die angestellten Zwecke wichtig war, ein kleines tragbares, von jeder Starkstromquelle unabhängiges Sendegerät zur Verfügung zu haben. In der Tat gelang es nun auch mit den in den Blinkgeräten verwendeten „Nachtlampen", die einen Leistungsverbrauch von kaum 5 Watt haben, auf mehrere Kilometer Distanz zu telephonieren. Die gegenüber den Scheinwerfern weitaus geringere Lichtintensität wurde dadurch wettgemacht, das das Verhältnis des überlagerten Sprechstromes zum Speisestrom viel größer war als bei der Bogenlampe. Zu diesem Zweck wurden bei den Blinkgeräten Sendeverstärker verwendet, die von Siemens & Halske gebaut wurden. Über die Einrichtung dieses Primärverstärkers ist der Verfasser noch zu Stillschweigen verpflichtet.

Die erzielten Resultate.

Mit den im vorstehenden beschriebenen Geräten konnte die Reichweite der Lichttelephonie gegenüber den früher erzielten Resultaten wesentlich gesteigert werden. Die Angaben Ruhmers sind, wie schon in der Einleitung erwähnt, mit einem großen Fragezeichen zu versehen. Simon hat in Göttingen um 1901 mit einem 90-cm-Marinescheinwerfer als Sender Versuche angestellt. Nach einer mündlichen Mitteilung an den Verfasser konnte damals knapp auf 1 km gesprochen werden[1]).

Mit den Blinkgeräten und Sendeverstärkern wurde nun im Herbst 1918 eine größere Anzahl von gelungenen Versuchen auf Distanzen von ca. 3 km ausgeführt. Die größte mit diesen Geräten bisher erzielte Reichweite war 4,6 km.

Mit den 25- und 35-cm-Scheinwerfern (Schaltung nach Fig. 4 und 5) wurde seit September 1918 meist auf Distanzen von 5—6 km gesprochen. Hier ist die Sprachübertragung noch so deutlich und laut, daß auch bei weniger klarem Wetter (z. B. bei leichtem Regen) eine Verständigung erzielt werden kann. Auch auf 8 km Entfernung funktionieren die Apparate noch ganz verläßlich. Bei einem Versuch auf 12 km waren zwar noch einzelne Worte verständlich, dabei war aber die Lautstärke und Deutlichkeit für die praktische Durchführung eines Ferngespräches nicht mehr ausreichend. Man kann also die praktische Reichweite der Lichttelephoniegeräte bei Verwendung eines 35-cm-Scheinwerfers als Sender ohne Primärverstärkung auf ca. 8—9 km festsetzen. Eine Erhöhung der Reichweite wird sich zweifellos erzielen lassen, wenn die für die Blinkgeräte benützten Sendeverstärker auch für die Scheinwerfer in Anwendung kommen. Diesbezügliche Versuche werden in der nächsten Zeit ausgeführt werden.

Die Bedeutung der Lichttelephonie wird zweifellos durch die Tatsache verringert, daß man in der letzten Zeit mit der Radiotelephonie Reichweiten ganz anderer Größenordnung erzielt hat. Trotzdem dürften sich für gewisse Zwecke die Lichttelephoniegeräte neben den Radioapparaten als sehr brauchbar erweisen, wobei hauptsächlich der Umstand ins Gewicht fallen muß, daß die Lichttelephonie eine wahrhaft gerichtete drahtlose Telephonie ist, bei der ein gegenseitiges Stören der Stationen, sowie ein Abhören der Gespräche durch Unbefugte ausgeschlossen ist. Es ist hier nicht der Ort, um auf die praktische Bedeutung der Lichttelephonie näher einzugehen; es sei daher nur beispielsweise erwähnt, daß für den Schiffs-

1) Die in dieser Zeitschr. 3, 285, 1901 gemachte Entfernungsangabe (2,5 km) scheint auf einem Irrtum zu beruhen.



verkehr im Hafen die oben beschriebenen Apparate aus naheliegenden Gründen derzeit das geeignetste Nachrichtenmittel darstellen dürften.

Meinen beiden Mitarbeitern, Herrn Hauptmann E. Soldan vom technischen Militärkomitee in Wien und Herrn cand. phil. J. Machek, sei an dieser Stelle mein bester Dank ausgedrückt.

Institut für theoretische Physik der Universität Wien, 10. September 1919.

(Eingegangen 20. September 1919.)

Zum Prinzip der singulären Lösungen.

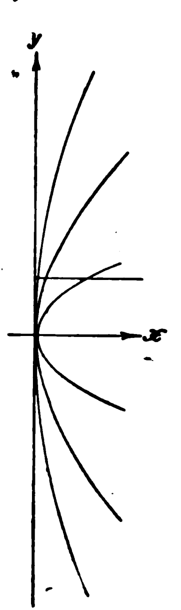
Von Siegbert Wiesner.

Die analytische Bedingung für das Bestehen der Einhüllenden einer die Ebene zwei- oder mehrfach bedeckenden Kurvenschar $f(x, y, a) = 0$, worin also a in höherem als erstem Grade vorkommt,

$$\frac{\partial f}{\partial a} = 0, \tag{1}$$

führt, auf die Ebene einfach bedeckende Kurvenscharen angewandt, zu einer ausgearteten Kurve[1]), die ein Grenzgebilde der Schar darstellt, derart, daß jenseits dieser Kurve kein Punkt der Ebene der Schar angehört. So z. B. ist die y-Achse eine Ausgeartete der Parabelschar

$$y^2 - ax = 0.$$



Lassen wir nämlich die eine Veränderliche (in der Figur y) konstant, so ist das der Ausgearteten entsprechende x ein Extremwert und wird aus Gleichung (1) gewonnen.

1) Falls eine solche existiert.

Wird so die Ausgeartete ebenso wie die Einhüllende als a-Diskriminante der Kurvengleichung erzielt, so läßt sich auch die Ausgeartete gewisser Scharen in erweitertem Sinne ebenfalls als Einhüllende betrachten, indem sie nämlich sämtliche Kurven der Schar im Unendlichen berührt. Einen solchen Fall bieten die Scharen

$$r = \sqrt{\frac{g}{k}}\,\frac{e^{-2\sqrt{gk}\,(\omega+a)} - 1}{e^{-2\sqrt{gk}\,(\omega+a)} + 1} \tag{2a}$$

und

$$r = \frac{e^{k(\omega+a)} - g}{k}. \tag{2b}$$

Dabei bedeuten g und k Konstante, a einen Parameter, r und ω seien Polarkoordinaten. Die a-Diskriminanten sind Kreise,

$$r = \sqrt{\frac{g}{k}}, \tag{3a}$$

$$r = \frac{g}{k}, \tag{3b}$$

welche von den Kurven (2) in unendlich vielen Windungen umschlungen werden und sie für ein unendliches ω berühren.

Unter der Einwirkung einer konstanten Kraft P bewegt sich ein Punkt von der Masse m in einem Mittel, dessen Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, gemäß der Differentialgleichung

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -P + km\left(\frac{dx}{dt}\right)^2. \tag{4a}$$

Einmalige Integration liefert:

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{P}{mk}}\,\frac{e^{-2\sqrt{\frac{P}{m}k}\,(t+a)} - 1}{e^{-2\sqrt{\frac{P}{m}k}\,(t+a)} + 1}. \tag{5a}$$

Die in erweitertem Sinne verstandene singuläre Lösung von (4a) ist somit nach (3a)

$$m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 = \frac{P}{k}.$$

Hieraus folgt bei bekannter Bedeutung der Buchstaben

$$\frac{dQ}{T} = k\,dx. \tag{6a}$$

Makroskopisch oder, wie wir passender sagen wollen, „makrophän" gelesen haben wir hier den zweiten Hauptsatz vor uns, so daß die Zunahme der Entropie der Abnahme der $k$fachen molekularen potentiellen Energie entspricht.

Wenn der Widerstand der Geschwindigkeit proportional ist, so hat man

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -P + km\frac{dx}{dt}. \tag{4b}$$

Das allgemeine erste Integral ist:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{e^{k(t+a)} - \frac{P}{m}}{k}. \qquad (5b)$$

Die a-Diskriminante liefert:

$$m\frac{dx}{dt} = \frac{P}{k}, \qquad (6b)$$

dessen makrophäne Deutung das Ohmsche Gesetz ist.

(Eingegangen 10. August 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Metallographie.

Von Rudolf Ruer.

(Fortsetzung.)

III. Es besteht vollständige Mischbarkeit im flüssigen und kristallisierten Zustande.

Wir setzen in diesem Kapitel voraus, daß die beiden Metalle A und B sowohl im flüssigen wie im kristallisierten Zustande in allen Verhältnissen miteinander mischbar sind. In solchem Falle besteht in dem Verhalten der kristallisierten und der flüssigen Phase eine große Analogie. Die Voraussetzung der vollständigen Mischbarkeit im flüssigen Zustande besagt, daß Schmelzen jeder Konzentration zwischen 0 Proz. (= reines A) und 100 Proz. (= reines B) darstellbar sind, deren Eigenschaften sich erfahrungsgemäß kontinuierlich mit der Konzentration ändern. Das gleiche gilt für den Fall vollständiger Mischbarkeit im kristallisierten Zustande, den man häufig auch als Fall des vollkommenen oder lückenlosen Isomorphismus bezeichnet. Der Analogie der Mischkristalle mit den flüssigen Mischungen, die in vielen Fällen eine sehr weitgehende zu sein scheint, hat van't Hoff[1]) durch Einführung der Bezeichnung „feste Lösungen" Ausdruck gegeben.

Vollständige Mischbarkeit im flüssigen und kristallisierten Zustande bewirkt, daß die mit der stets homogenen Schmelze im Gleichgewichte befindlichen Kristalle unter sich die gleiche Zusammensetzung haben. Es kann daher bei allen Konzentrationen nur eine flüssige und eine kristallisierte Phase vorhanden sein, von denen jede beide Komponenten enthalten muß. Über die Schmelzkurve, wie, vorläufig wenigstens, die Kurve, welche die Temperatur des Kristallisationsbeginns in Abhängigkeit von der Konzentration darstellt, wiederum genannt sein möge, kann man von vornherein aussagen, daß sie plötzliche Richtungsänderungen nicht aufweisen kann, da eine solche Diskontinuität auf der Gleichgewichtskurve einer diskontinuierlichen Änderung im System entspricht, die beispielsweise in dem Auftreten einer neuen Kristallart bestehen kann. Im Falle der vollständigen Mischbarkeit im flüssigen und kristallisierten Zustande müssen sich aber die Zusammensetzung und daher auch die Eigenschaften der mit der Schmelze im Gleichgewichte befindlichen Kristallart kontinuierlich mit der Zusammensetzung der Schmelze ändern und demgemäß die Kurven, die dieses Gleichgewicht darstellen, aus nur einem Aste bestehen.

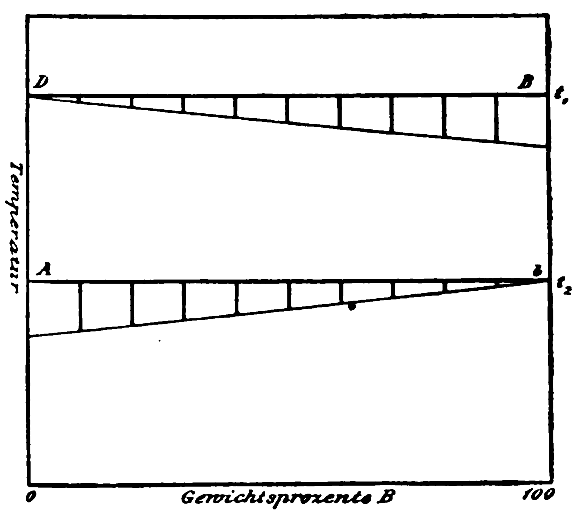


Fig. 17.

Bei Mischbarkeit im kristallisierten Zustande verliert das S. 17 hergeleitete Gesetz der Gefrierpunktserniedrigung seine Gültigkeit. Wir wollen untersuchen, inwieweit der Konzentrationsunterschied der beiden koëxistierenden Phasen für die Richtung der Schmelzkurve bestimmend ist.

Unter der Voraussetzung, daß die Ausscheidung von Kristallen aus einer Flüssigkeit stets Wärme liefert, hatten wir (S. 17) folgenden Satz hergeleitet: Sofern eine Lösung nicht bei konstanter Temperatur kristallisiert, muß ihr Erstarrungspunkt durch fortgesetzte Kristallausscheidung sinken. Wir betrachten nun die

1) van't Hoff, Zeitschr. f. phys. Chem. 5, 322, 1890.

Konzentrationsänderung der flüssigen Phase l (liquidus), welche mit der kristallisierten Phase s (solidus) im Gleichgewichte sein möge, bei Entziehung einer geringen Wärmemenge und dadurch bewirktem geringen Fortschreiten der Kristallausscheidung. Bei vorhandener Mischbarkeit im kristallisierten Zustande sind folgende drei Fälle möglich:

1. In irgend einem Punkte l_1 der Schmelzkurve sei der B-Gehalt der Schmelze größer als der B-Gehalt der mit ihr im Gleichgewichte befindlichen Kristalle s_1. Dann reichert sich die flüssige Phase beim Fortschreiten der Kristallisation, wodurch ihr Erstarrungspunkt sinkt, an B an, d. h. die Schmelzkurve hat in diesem Punkte eine mit steigendem B-Gehalte zu tieferer Temperatur gehende Richtung oder Tangente (Fig. 18).

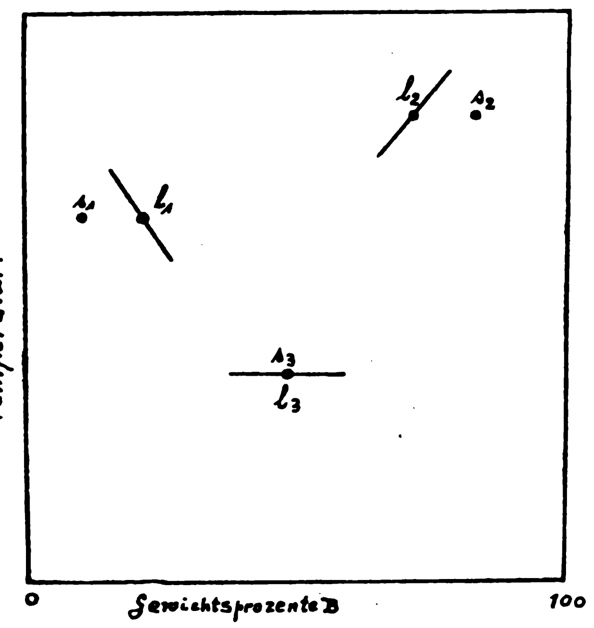


Fig. 18.

2. Ist dagegen im Punkte l_2 der Schmelzkurve der B-Gehalt der Schmelze kleiner als der B-Gehalt der mit ihr im Gleichgewichte befindlichen Kristalle s_2, so verarmt die flüssige Phase beim Fortschreiten der Kristallisation an B, d. h. die Schmelzkurve hat in diesem Punkte eine mit steigendem B-Gehalte zu höherer Temperatur gehende Richtung oder Tangente (Fig. 18).

3. Haben endlich die beiden koëxistierenden Phasen in irgendeinem Punkte l_3 der Schmelzkurve die gleiche Zusammensetzung, so kann die Schmelzkurve in diesem Punkte eine weder zu tieferer noch zu höherer Temperatur gehende Richtung, d. h. sie muß eine horizontale Tangente haben (Fig. 18).

Die drei vorstehenden Sätze gelten nur für ein aus zwei Phasen bestehendes Zweistoffsystem. Es darf also nur eine einzige flüssige und eine einzige kristallisierte Phase vorhanden sein, was, wie oben erwähnt, bei vollständiger Mischbarkeit im flüssigen und kristallisierten Zustande stets zutrifft.

Die Sätze gestatten auch ihre Umkehrung, d. h. man kann aus der Richtung der Tangente an der Schmelzkurve auf das Vorzeichen der Konzentrationsdifferenz der beiden koëxistierenden Phasen schließen. Je nachdem die Tangente in einem Punkte der Schmelzkurve mit wachsendem B-Gehalte zu tieferer oder höherer Temperatur geht oder horizontal verläuft, ist die Differenz des B-Gehalts zwischen Schmelze und Kristallen positiv, negativ oder gleich Null.

Die beiden im Gleichgewichte befindlichen Phasen haben demnach im allgemeinen verschiedene und nur bei einer solchen Konzentration die gleiche Zusammensetzung, bei der die Schmelzkurve ein Maximum, ein Minimum oder einen Wendepunkt mit horizontaler Tangente hat. Nur bei diesen Konzentrationen findet die Kristallisation bei konstanter Temperatur wie bei einem reinen Stoffe statt. Bei der Betrachtung der hier vorhandenen Möglichkeiten sollen die Fälle, in denen solche Konzentrationen im System vorkommen, von dem einfachsten Falle, in dem dieses nicht stattfindet, getrennt und mit Besprechung des letzteren begonnen werden.

A. Die ausgeschiedenen Kristalle haben bei allen Konzentrationen eine andere Zusammensetzung als die Schmelze, mit der sie sich im Gleichgewichte befinden. Typus I nach Roozeboom[1]).

Die Schmelzpunkte der beiden Komponenten A und B seien in gewohnter Weise ebenfalls mit A und B bezeichnet. B schmelze bei höherer Temperatur als A, dann muß die Schmelzkurve von B nach A kontinuierlich sinken, da wegen der Voraussetzung, daß die ausgeschiedenen Kristalle bei allen Konzentrationen bezüglich ihrer Zusammensetzung von der Mutterlauge verschieden sein sollen, Maxima, Minima und horizontale Wendetangenten auf ihr nicht auftreten können.

In dem beistehenden Schmelzdiagramm (Fig. 19) ist die Schmelzkurve durch die l-Kurve (liquidus) dargestellt. Aus dem Um-

1) Roozeboom, Zeitschr. f. phys. Chem. **30**, 385, 1899.

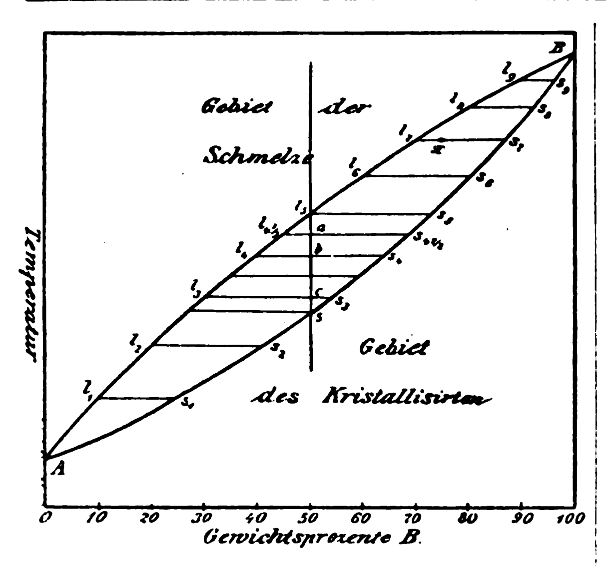


Fig. 19.

stande, daß sie mit wachsendem A-Gehalte zu immer tieferer Temperatur fällt, folgt, daß die mit der Schmelze im Gleichgewichte befindlichen Kristalle B-reicher sein müssen, als diese. Die s-Kurve (solidus) gibt zu jedem Punkte der l-Kurve die Zusammensetzung der mit der betreffenden Schmelze im Gleichgewichte befindlichen Kristallart an.

Die beiden Kurven teilen das Schmelzdiagramm in drei Gebiete. Oberhalb der Schmelzkurve $All..B$ ist alles flüssig, hier ist das Gebiet der Schmelze. Unterhalb der s-Kurve $Ass..B$ ist alles kristallisiert. Innerhalb des von beiden Kurven umschlossenen Gebietes befinden sich Kristalle und Schmelze miteinander im Gleichgewichte, und zwar geben die Schnittpunkte l und s jeder Horizontalen mit den beiden Kurven die Zusammensetzung der Schmelze und der Kristalle an, die bei der Temperatur der betreffenden Horizontalen miteinander im Gleichgewichte sind. Das Mengenverhältnis von Schmelze und Kristallen für einen beliebigen Punkt x innerhalb dieses Gebietes ergibt sich aus der Hebelbeziehung

$$\frac{\text{Menge Schmelze}}{\text{Menge Kristalle}} = \frac{xs}{xl}.$$

Nimmt man nach Roozeboom an, daß während der Kristallisation stets Gleichgewicht vorhanden ist, so vollzieht sich der Kristallisationsvorgang einer beliebigen Schmelze, etwa von der Konzentration 50 Proz., in folgender Weise: Beim Erkalten beginnt bei der Temperatur l_5 die erste Kristallausscheidung. Die Kristalle haben die Zusammensetzung s_5. Durch die Ausscheidung der B-reichen Kristalle verarmt die Schmelze allmählich an B, sie habe nach einer bestimmten Zeit die Konzentration 45 Proz. B. Die Kristallisationstemperatur ist dann bis $l_{4^1/_2}$ gesunken, die sich ausscheidenden Kristalle haben jetzt nach Aussage des Diagramms die Konzentration $s_{4^1/_2}$. Mit einer Schmelze dieser Konzentration sind aber die bis jetzt ausgeschiedenen Kristalle, deren B-Gehalt größer ist als $_{4^1/_2}$, nicht mehr im Gleichgewichte. Wir wollen nun annehmen, daß die Abkühlung so langsam erfolgt, daß die ausgeschiedenen Kristalle genügend Zeit haben, sich durch Diffusion stets mit der Schmelze ins Gleichgewicht zu setzen. Dann haben, wenn Temperatur und Konzentration der Schmelze dem Punkte $l_{4^1/_2}$ entsprechen, die ausgeschiedenen Kristalle sämtlich die Zusammensetzung $s_{4^1/_2}$. Die Anwendung der Hebelbeziehung

$$\frac{\text{Menge Schmelze}}{\text{Menge Kristalle}} = \frac{s_{4^1/_2}\,a}{l_{4^1/_2}\,a}$$

ergibt, daß das System unter diesen Umständen zu fast $1/4$ aus Kristallen $s_{4^1/_2}$ und demgemäß zu etwas über $3/4$ aus Schmelze $l_{4^1/_2}$ besteht. Konzentration und Temperatur des Systems werden nämlich durch den Punkt a dargestellt. Mit fallender Temperatur durchläuft das System in gleicher Weise die Punkte b und c und besteht nacheinander aus Schmelze von der Zusammensetzung l_4 und l_3, die sich mit Kristallen von der Zusammensetzung s_4 und s_3 im Gleichgewichte befindet. Hierbei nimmt die Menge der Schmelze beständig ab, die der Kristalle zu. Im Punkte s endlich wird die s-Kurve erreicht. Die Menge der Schmelze ist gleich Null, das System besteht ausschließlich aus Kristallen von der Zusammensetzung $s = 50$ Proz. B.

Die idealisierte Abkühlungskurve einer so erstarrenden Mischung (Fig. 20 I) läßt zwei

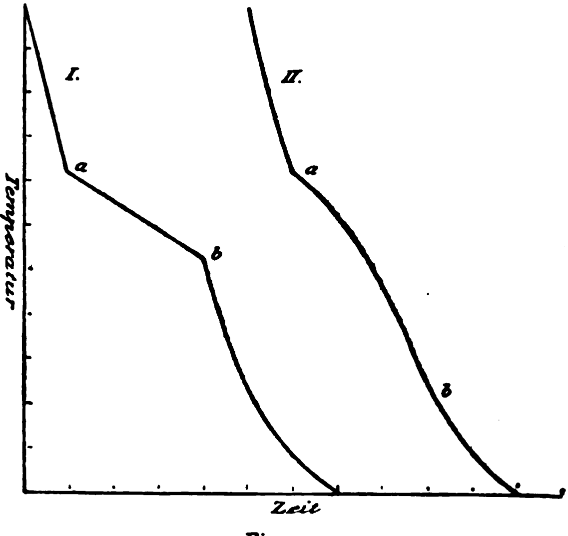


Fig. 20.

Knicke erkennen. Im Punkte *a* beginnt die Kristallisation, wodurch die Abkühlungsgeschwindigkeit verringert wird, im Punkte *b* ist sie beendet. Daher liefert die Aufnahme der Abkühlungskurven ein Mittel, nicht nur den Verlauf der *l*-Kurve, sondern auch den der *s*-Kurve zu bestimmen, ohne daß es nötig wäre, die in jedem Falle schwierige, in vielen Fällen unmögliche Trennung von Kristallen und Mutterlauge zum Zwecke der Analyse vorzunehmen. Denn ebenso, wie der Punkt *a* der Abkühlungskurve den der betreffenden Konzentration entsprechenden Punkt der *l*-Kurve liefert, gibt *b* den eben dieser Konzentration entsprechenden Punkt der *s*-Kurve. Die Temperaturdifferenz zwischen *a* und *b* nennt man das Kristallisationsintervall.

Die Bestimmung der durch den Kristallisationsbeginn *a* gegebenen Punkte der *l*-Kurve ist unabhängig von der Voraussetzung des Konzentrationsausgleichs zwischen Kristallen und Schmelze und demgemäß, sofern Unterkühlungen vermieden werden, einwandfrei. Für die Bestimmung der *s*-Kurve trifft dies nicht zu. Ihre Punkte werden nur dann den *b*-Punkten auf den Abkühlungskurven entsprechen, wenn sich das Gleichgewicht zwischen den Kristallen und der Schmelze wirklich eingestellt hat, und demgemäß nach beendeter Kristallisation alle Kristalle dieselbe, der ursprünglichen Mischung entsprechende Zusammensetzung haben. Da der hierzu notwendige Konzentrationsausgleich der Kristalle mit der Schmelze niemals vollständig stattfindet, so werden alle mit Hilfe von Abkühlungskurven erhaltenen Resultate über den Verlauf der *s*-Kurve mit einem einseitigen Fehler behaftet sein.

Unvollständiger Konzentrationsausgleich bewirkt, daß die zuerst ausgeschiedenen Kristalle, welche *B*-reicher sind, als dem Gleichgewichte mit der sich allmählich an *A* anreichernden Schmelze entspricht, ihren *B*-Überschuß zum mehr oder weniger großen Teile beibehalten. Dadurch sinkt der *B*-Gehalt und damit der Erstarrungspunkt der Schmelze mit fortschreitender Erstarrung stärker, als es bei vollständigem Konzentrationsausgleich der Fall wäre, und demgemäß wird die Kristallisation erst bei einer tieferen Temperatur beendet sein, als dem der betreffenden Konzentration zugehörigen Punkte der *s*-Kurve entspricht. Die Bestimmung der *s*-Kurve mittels Abkühlungskurven wird daher in praxi stets eine zu tiefe Lage derselben ergeben. Weiterhin wird der Punkt *b* um so weniger scharf auf der Abkühlungskurve hervortreten, je unvollständiger der Konzentrationsausgleich ist. Unter Umständen wird er sich daher der Beobachtung entziehen (Fig. 20 II).

Die Schliffe der Reguli müssen bei vollständigem Konzentrationsausgleich vollkommen homogen, wie bei einem reinen Stoffe, erscheinen, während sie bei unvollständigem Konzentrationsausgleich im allgemeinen Kristalle von zonalem Aufbau mit einem von innen nach außen abnehmenden *B*-Gehalte zeigen. Um möglichst homogene Struktur zu erzielen, läßt man entweder die Kristallisation sehr langsam vor sich gehen, oder man erhält die erstarrte Schmelze längere Zeit bei einer Temperatur, welche dem ihrer Konzentration entsprechenden Punkte der *s*-Kurve möglichst nahe liegt oder ihn vielleicht um einige Grade überschreitet.

B. Die ausgeschiedenen Kristalle haben bei einer bestimmten Konzentration dieselbe Zusammensetzung wie die Schmelze, mit der sie sich im Gleichgewichte befinden.

In solchen Fällen muß die Schmelzkurve entweder ein Maximum oder ein Minimum oder eine horizontale Wendetangente haben.

1. Schmelzkurve mit Maximum. Typus II nach Roozeboom[1]).

Im Schmelzdiagramm dieses Falles (Fig. 21) ist die *l*-Kurve voll ausgezogen, die *s*-Kurve gestrichelt gezeichnet. Im Maximum *C* der Schmelzkurve haben Schmelze und Kristalle die gleiche Zusammensetzung. Dieser Punkt muß demnach auch ein Punkt der *s*-Kurve sein.

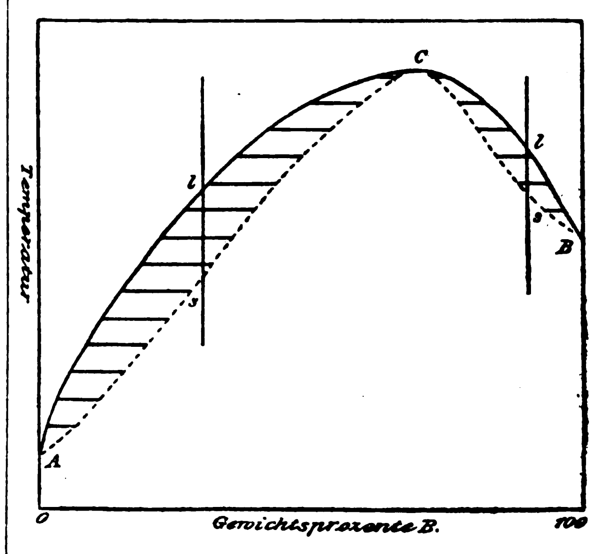


Fig. 21.


1) Roozeboom loc. cit.

Hiervon abgesehen muß die *s*-Kurve (auf der das Gemisch vollständig erstarrt ist) stets unterhalb der *l*-Kurve (auf der alles geschmolzen ist) verlaufen.

Im Maximum *C*, dem Berührungspunkte der *l*- und *s*-Kurve, besteht vollständiges Gleichgewicht zwischen Kristallen und Schmelze. Eine Mischung dieser Konzentration erstarrt bei konstanter Temperatur wie ein einheitlicher Stoff. Alle anderen Konzentrationen erstarren in Intervallen, deren Größe bei vollständigem Konzentrationsausgleich durch die respektiven Strecken *ls* der Fig. 21 gegeben ist. In diesem Falle muß die Struktur aller Konzentrationen vollständig homogen sein.

2. Schmelzkurve mit Minimum. Typus III nach Roozeboom[1]).

Dieser Fall ist dem vorhergehenden ganz analog. Im Minimum *C* (Fig. 22) berühren

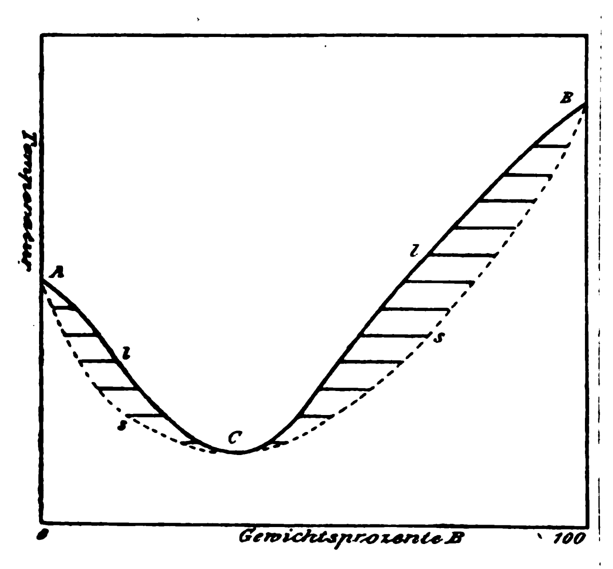


Fig. 22.

sich die voll ausgezogene *l*-Kurve und die gestrichelt gezeichnete *s*-Kurve.

Schmelzkurve mit horizontaler Wendetangente. Typus Ia[2]).

Dieser Fall ist durch Fig. 23 dargestellt. Die *l*-Kurve ist voll ausgezogen, die *s*-Kurve ist gestrichelt gezeichnet. Im Wendepunkte *C* berühren sich die *l*- und *s*-Kurve, eine Schmelze dieser Konzentration erstarrt bei konstanter Temperatur wie ein einheitlicher Stoff. Alle anderen Konzentrationen erstarren in Intervallen.

1) Roozeboom loc. cit.

2) Ruer, Zeitschr. f. phys. Chem. **59**, 1, 1907.

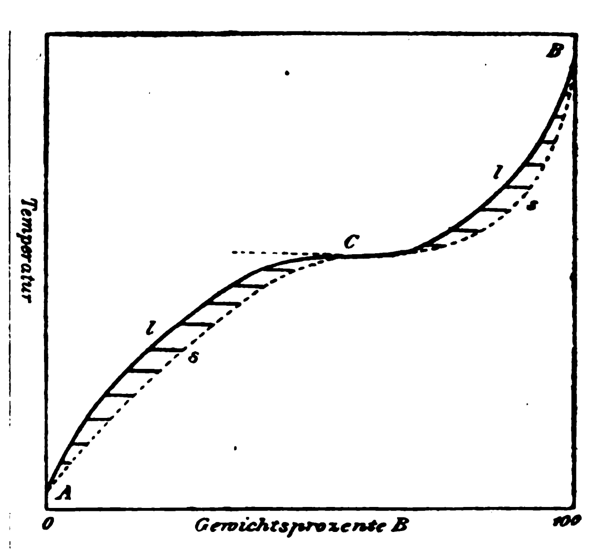


Fig. 23.

C. Polymorphe Umwandlungen.

Bei vollständiger Mischbarkeit im kristallisierten Zustande zeigen die Umwandlungskurven den gleichen Typus wie die Schmelzkurven. Fig. 24 zeigt die Kombination einer Schmelzkurve vom Typus I mit einer Umwandlungskurve vom Typus II. Die aus der Schmelze ausgeschiedenen β-Kristalle wandeln sich mit sinkender Temperatur in die α-Form um. Fig. 25 stellt den Fall dar, daß nur die Kristallart *B* einen Umwandlungspunkt hat.

D. Chemische Verbindungen.

Wenn bei einer bestimmten Konzentration die Erstarrung oder Umwandlung wie bei einem reinen Stoffe bei konstanter Temperatur vor sich geht, so kann man bei vorhandener Mischbarkeit im kristallisierten Zustande nicht ohne

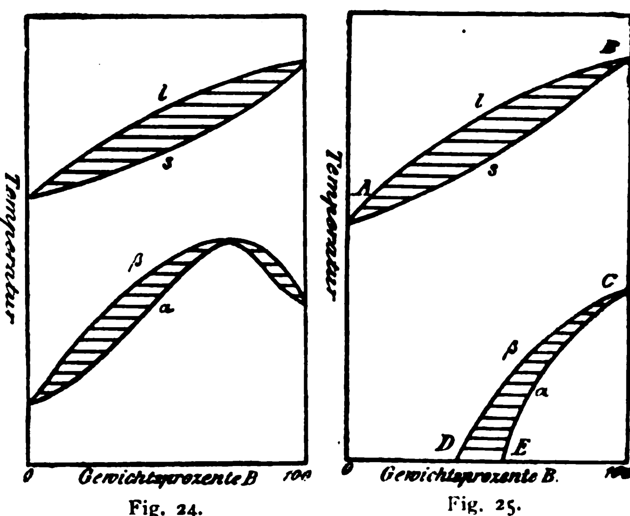


Fig. 24. Fig. 25.

weiteres schließen, daß diese Konzentration einer chemischen Verbindung entspricht. Besteht keine Mischbarkeit im kristallisierten Zustande, so ist eine solche Konzentration noch dadurch ausgezeichnet, daß sie innerhalb eines bestimmten Konzentrationsgebietes die einzige ist, bei der sich zwei Kristallarten restlos zu einer einzigen vereinigen. In solchen Fällen ist daher die Zusammensetzung der entstehenden Kristallart unabhängig von dem Mengenverhältnis, in dem ihre Bestandteile bei der Darstellung vorhanden sind. Bei Mischbarkeit im kristallisierten Zustande trifft dieses nicht zu, vielmehr findet restlose Vereinigung zweier Kristallarten zu einer einzigen innerhalb des ganzen Konzentrationsgebietes statt, in dem Mischbarkeit besteht. Unter diesen Umständen hat man so lange kein Recht, ein Gemisch mit konstantem Schmelz- oder Umwandlungspunkt als Verbindung anzusprechen, als man nicht sicher ist, daß das betreffende Gemisch seinen einheitlichen Schmelz- oder Umwandlungspunkt beibehält, wenn der auf dem System lastende Druck verändert wird.

Bei Mischbarkeit im kristallisierten Zustande muß also die Konzentration des Maximums usw. unabhängig von dem auf dem System lastenden Druck sein, wenn sie einer chemischen Verbindung entspricht. Bei einem Wendepunkte mit horizontaler Tangente trifft dies stets zu, ein solcher entspricht also immer einer chemischen Verbindung[1]).

Bei einem Maximum oder Minimum kann dieses nur durch den Versuch entschieden werden. Leider stehen der praktischen Anwendung des Kriteriums im vorliegenden Falle große Schwierigkeiten entgegen, da die Wirkung des äußeren Druckes auf das Gleichgewicht flüssiger und kristallisierter Phasen sehr gering ist. Vielleicht wird man sich für oder gegen die Annahme einer Verbindung entscheiden, je nachdem das Maximum oder Minimum einer einfachen Formel entspricht oder nicht. Ferner wird man die Existenz einer Verbindung in solchen Fällen annehmen, in denen eine einheitliche Umwandlung bei der innerhalb der Versuchsfehler gleichen Konzentration stattfindet, bei der das Gemisch einheitlich erstarrt.

IV. Es herrscht vollständige Mischbarkeit im flüssigen, unvollständige Mischbarkeit im kristallisierten Zustande.

Die durch Fig. 14 für beschränkte Mischbarkeit im flüssigen Zustande dargestellten Verhältnisse lassen sich im wesentlichen auf den kristallisierten Zustand übertragen. Auch hier existieren bei beschränkter Mischbarkeit für jede Temperatur zwei Konzentrationen a und b, die bei dieser Temperatur miteinander im Gleichgewichte sind, sie werden als gesättigte Mischkristalle bezeichnet. So stellt a_1 den bei der Temperatur t_1 mit B gesättigten Mischkristall von A dar und ebenso b_1 den bei der Temperatur t_1 mit A gesättigten Mischkristall des Stoffes B. Die Löslichkeitskurve trennt das außerhalb liegende Gebiet einer Kristallart von dem von ihr umschlossenen Gebiete, in dem eine Spaltung in zwei Kristallarten stattfindet. Die durch Fig. 14 ausgedrückte Annahme, daß die gegenseitige Mischbarkeit mit steigender Temperatur zunimmt, steht auch mit den für den kristallisierten Zustand gemachten Erfahrungen im allgemeinen in Übereinstimmung.

Allerdings ist bis jetzt bei Metallegierungen kein Fall bekannt, in dem der obere Teil der Löslichkeitskurve für den kristallisierten Zustand verwirklicht ist, da in den bisher untersuchten Fällen die Schmelzung schon bei einer unterhalb c liegenden Temperatur beginnt. Von dem speziellen Falle, daß die bei der Temperatur der beginnenden Schmelzung auftretende Schmelze die Zusammensetzung eines der gestättigten Mischkristalle hat, möge vorläufig abgesehen werden. Dann sind zwei Fälle möglich, entweder die Zusammensetzung der Schmelze liegt bei einer Konzentration zwischen den beiden gesättigten Mischkristallen (Typus V nach Roozeboom), oder sie liegt bei einer solchen, die reicher an einer der beiden Komponenten des Systems ist (Typus IV nach Roozeboom).

Da die beiden gesättigten Mischkristalle der Stoffe A und B in der gleichen oder in verschiedener Kristallform auftreten können, so hat man streng genommen den ersten Fall als den der „beschränkten Isomorphie" von dem zweiten Falle der „Isodimorphie" zu trennen. Bei flüssigen Lösungen fällt ein derartiger Unterschied natürlich fort. Es soll auch hier keine Rücksicht auf diesen Unterschied genommen, sondern nur darauf hingewiesen werden, daß Isodimorphie die Existenz zweier Mischungslücken (= Gebieten zweier Kristallarten) bewirken kann.

A. Typus IV nach Roozeboom[1]).

Dieser verhältnismäßig selten auftretende Fall ist durch das Schmelzdiagramm Fig. 26 dargestellt. Die l-Kurve besteht aus den beiden Ästen AC und CB, die s-Kurve aus den beiden

1) Ruer, Zeitschr. f. phys. Chemie 64, 371, 1908.

1) Roozeboom loc. cit.



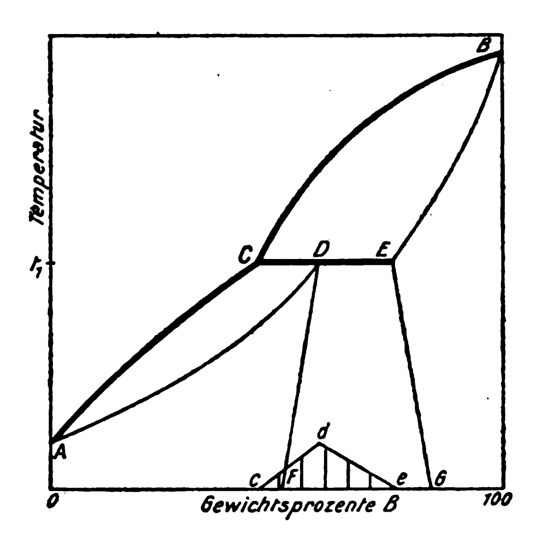


Fig. 26.

getrennten Stücken *AD* und *EB*. Sämtliche Konzentrationen zwischen *C* und *E* reagieren bei Wärmezufuhr von links nach rechts nach der Gleichung:

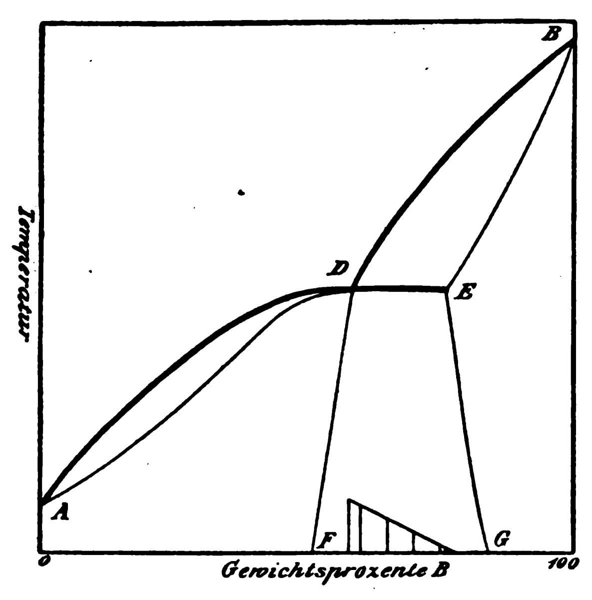


Fig 27.

Ges. Mischkristalle $D \leftrightarrows$ Schmelze C + Ges. Mischkristalle E.

Das Gleichgewicht zwischen den drei Phasen ist ein vollständiges. Die Dauer der Haltepunkte auf den Abkühlungskurven bei der der Gleichgewichtstemperatur *CDE* entsprechenden Temperatur t_1 ist in gewohnter Weise durch die gebrochene Linie *cde* dargestellt. Ihre Beobachtung liefert ein Mittel zur Bestimmung der Konzentrationen der Punkte *C*, *D* und *E*.

Die Löslichkeitskurve der beiden Kristallarten zerfällt in die beiden Stücke *DF* und *EG*, welche die Zusammensetzung der nach vollendeter Erstarrung miteinander im Gleichgewichte befindlichen Kristallarten in Abhängigkeit von der Temperatur angeben.

Fallen die Konzentrationen *C* und *D* in *D* zusammen, so ergibt sich Fig. 27 mit horizontaler Tangente an *DA* in *D* (wegen einheitlicher Erstarrung in *D*).

(Fortsetzung folgt.)

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Berlin Dr. v. Hofe für astronomische Optik.

Ernannt: Der ord. Professor der Mineralogie und Petrographie an der Universität Kiel Dr. Arrien Johnsen in gleicher Eigenschaft an der Universität Frankfurt a. M., der a. o Professor an der Universität Tübingen Dr. Hans Happel zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Breslau, Dr. E. Newbery von der Universität Manchester zum ord. Professor der physikalischen Chemie an der Universität Capetown, der Privatdozent Dr. Milan Josef Stritar zum a. o. Professor der Chemie an der Hochschule für Bodenkultur in Wien, der a. o. Professor für Astronomie an der Universität Göttingen Dr. L. Ambronn, Observator an der Sternwarte zum ord. Honorarprofessor an der gleichen Hochschule.

Berufen: Der Konstruktionsingenieur an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Franz Unger zum ord. Professor für Elektromaschinenbau an der Technische Hochschule Braunschweig.

Verliehen: Dem ord. Professor der anorganischen und Experimentalchemie an der Universität München Dr. Richard Willstätter der Titel Geheimer Rat.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 4. 15. Februar 1920. 21. Jahrgang.

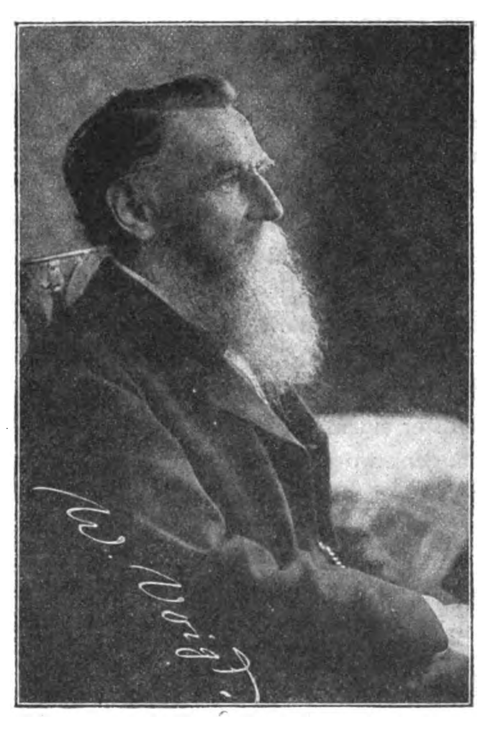
Redaktionsschluß für No. 6 am 20. Februar 1920.

INHALT:

Woldemar Voigt.

Von C. Runge.

Am 13. Dezember ist Woldemar Voigt nach kurzem schweren Krankenlager verschieden. Er hat die 70 Jahre des Menschenlebens nicht ganz erreicht. Im vollen Besitz seiner Kraft ist er plötzlich von uns gegangen und die Lücke, die sein Tod reißt, macht sich dadurch um so empfindlicher fühlbar.



Die wissenschaftliche Welt verliert viel, mehr noch seine Universität Göttingen, am härtesten aber sind alle die getroffen, die das Glück gehabt haben, ihm persönlich näher zu treten. Die Universität Göttingen, deren Rektor er zweimal gewesen ist, wird ihn nicht nur als Forscher und Lehrer schmerzlich entbehren, der seine Wissenschaft rastlos förderte und sich nie genug tat, den jüngeren Generationen die Fackel weiter zu reichen. Denn alle Universitätsangelegenheiten fanden bei ihm das wärmste Interesse. Auf seine freigebige Hand war immer zu rechnen. Durch die persönlichen Opfer, die er brachte, hat er manches Universitätsunternehmen ermöglicht, manche Berufung verwirklicht, ohne daß selbst die Näherstehenden es wußten. Voigt gehört zu der Reihe von bedeutenden Physikern aus der Schule von Franz Neumann, bei dem er in den Jahren 1871—1874 in Königsberg studiert hat. Er ist im Jahre 1850 in Leipzig geboren, wo er 1868 seine Schulbildung mit dem Maturitätsexamen abschloß. Dort hat er auch die ersten Jahre seines Universitätsstudiums zugebracht bis zum Ausbruch des deutsch-französischen Krieges, an dem er als 20jähriger Jüngling teilnahm. Nach dem Feldzuge nahm er seine Studien in Königsberg unter

Richelot und Franz Neumann wieder auf und erwarb dort 1874 den Doktorgrad.

Nach Leipzig zurückkehrend, nahm er an der Nikolaischule, deren Schüler er als Knabe gewesen war, eine Stelle als außerordentlicher Hilfslehrer an; aber schon bald darauf entschloß er sich auf Franz Neumanns Anregung zur akademischen Laufbahn und gab zu Ostern 1875 seine Lehrerstelle auf, um sich in Leipzig zu habilitieren. Noch vor seiner Probevorlesung in Leipzig erging an ihn der Ruf nach Königsberg als außerordentlicher Professor, um dort Franz Neumann zu vertreten, der als 77 jähriger Mann sich mehr seinen eignen wissenschaftlichen Arbeiten widmen und von den regelmäßigen Vorlesungen und der Leitung der physikalischen Abteilung des mathematisch-physikalischen Seminars entbunden sein wollte. Die Vertretung war bei den äußerst beschränkten Mitteln der Universität nicht leicht. Besaß die Universität doch damals noch nicht einmal ein physikalisches Laboratorium. Erst zu Neumanns 50 jährigem Doktorjubiläum im Jahre 1876 überbrachte der Oberpräsident von Ostpreußen im Auftrage des Ministeriums das definitive Versprechen zur Errichtung eines physikalischen Laboratoriums. Das Institut wurde aber erst 1885 fertig, als Voigt schon Königsberg verlassen hatte. Denn im Jahre 1883 folgte er einem Rufe als Ordinarius nach Göttingen, wo er bis zu seinem Tode gewirkt hat. Auch hier ließ der versprochene Bau eines neuen physikalischen Instituts für ihn und E. Riecke lange auf sich warten. Erst 1905 konnte es dem Gebrauch übergeben werden. Im Sommer 1914 trat Voigt von seiner Stellung als Direktor des Instituts zurück und beschränkte seine Universitätstätigkeit auf seine Vorlesungen über theoretische Physik.

Seine wissenschaftliche Tätigkeit gebührend zu würdigen, übersteigt den Rahmen dieses Nachrufs. Er hat durch seine Arbeiten hauptsächlich die Kristallphysik gefördert, „das große herrliche Gebiet", wie er in der Vorrede seines 1910 erschienenen Lehrbuches der Kristallphysik sagt, „zu dessen Bearbeitung ich seit 36 Jahren immer wieder zurückgekehrt bin". Aber seine vielseitigen Studien gingen auch nach andern Richtungen: Elastizität und Festigkeitslehre, Thermodynamik und insbesondere Magneto- und Elektro-Optik, über die er ebenfalls ein zusammenhängendes Lehrbuch geschrieben hat. Neben den Hunderten von Abhandlungen, die in den Annalen der Physik, den Göttinger Nachrichten und in der Physikalischen Zeitschrift erschienen sind, neben seinem Kompendium der Physik und seiner Thermodynamik, sind auch die vielen Arbeiten seiner Schüler zu nennen, die auf seine Anregung zurückgehen. Eine große Zahl von Physikern Deutschlands und des Auslandes haben bei ihm gelernt, theoretisch und experimentell.

Voigt besaß neben seiner wissenschaftlichen eine hervorragende künstlerische Begabung. Er hat als junger Mann geschwankt, ob er sich nicht ganz der Musik widmen sollte. Aber „in der Musik gibt es nur ganz oben oder ganz unten, in der Physik gibt es auch eine gute Mitte", sagte er mit allzu großer Bescheidenheit. Die Liebe zur Musik behielt er jedoch durch sein ganzes Leben. Er war einer der besten Bach-Kenner. Eine große Zahl von Bachs Kantaten sind unter seiner Leitung in der Göttinger Universitätskirche aufgeführt worden. Sein gastliches Haus war ein Tempel der Kunst. Die köstlichsten Konzerte hat er dort mit den musikalischen Freunden veranstaltet, die er um sich zu versammeln wußte.

Dort, wo er so oft begeistert und begeisternd den Taktstock geschwungen, vor seiner Hausorgel, stand am 15. Dezember seine Bahre. Von dort wurde er unter den Klängen eines Bachschen Chorales zur ewigen Ruhe hinausgetragen.

(Eingegangen 9. Januar 1920.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Eine Methode für Intensitätsmessungen bei Röntgenstrahlen nebst einigen vorläufigen Absorptionsbestimmungen.

Von Manne Siegbahn und K. A. Wingårdh.

Einleitung.

Eine Reihe Probleme aus der experimentellen Röntgenstrahlenforschung erfordern zu ihrer Lösung eine genaue Methode für Intensitätsmessungen. Es sind dies besonders die Absorption der chemische Stoffe, das Reflexionsvermögen von Kristallen, Intensitätsverteilung in Linien- und kontinuierlichen Spektren usw. Es ist der Zweck der vorliegenden Arbeit, über einige Versuche zu berichten, die nach einer der genannten Ziele entsprechenden Methode ausgeführt sind.

Die Methode ist als Nullmethode ausgearbeitet worden und zwar so, daß zwei monochromatische von derselben Röntgenröhre kommende Strahlen in zwei verschiedenen Ionisationskammern zur gleichen Intensität abgeglichen werden. Zur Zerlegung des Röntgenlichtes dienen zwei auf eine gemeinsame Grundplatte montierte (Halb)-Spektrometer, jedes mit zwei regulierbaren Spalten vor dem Kristall und einem ebensolchen dicht an der Ionisationskammer. Die zwei Halbspektrometer sind gegeneinander um eine vertikale Achse zwischen den vordersten Spalten drehbar. Dadurch ist es möglich, beide Spektrometer gegen denselben Punkt der Antikathode zu richten, wodurch eine Verschiebung des Brennfleckes ohne Belang wird.

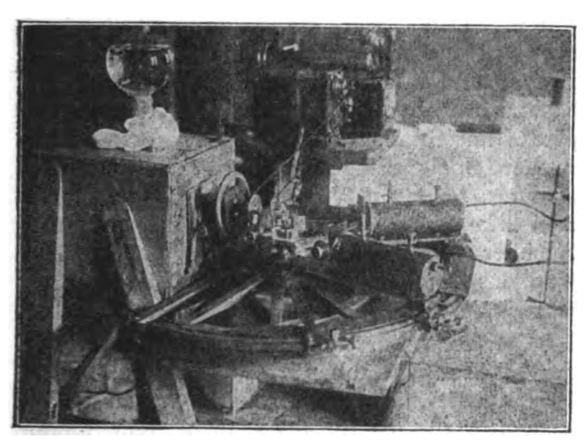


Fig. 1.

Das Abgleichen der zwei Strahlungen auf gleiche Intensität wird in üblicher Weise durch Aufladen der Kammern (oder einer besonderen Elektrode in jeder Kammer) zu gleicher Höhe, aber entgegengesetzter Potentiale und Verbindung der isolierten Elektroden untereinander und mit einem als Nullinstrument dienenden Elektrometer bewirkt.

Die eine der einfallenden monochromatischen Strahlungen kann jetzt mit Hilfe einer verstellbaren Sektorenscheibe mehr oder weniger geschwächt werden, bis gleiche Intensität der zwei Strahlungen erzielt worden ist.

Näheres über die Apparatur.

Als Kristallgitter für die spektrale Zerlegung des Röntgenlichtes wurden zwei Steinsalzkristalle benutzt, um möglichst große Intensität bei genügender Dispersion zu erhalten. Ein Nachteil des Steinsalzes liegt darin, daß die 2. Ordnung bei den größeren Wellenlängen sich leicht bemerkbar machen kann. Dieser Schwierigkeit wurde durch Betreiben des Rohres mit verhältnismäßig kleiner Spannung ausgewichen. Besser wäre die Benutzung einer Kristallfläche, die keine Reflexion in 2. Ordnung gibt. Von solchen Kristallen stand uns aber kein genügend gutes Exemplar zur Verfügung.

Die Ionisationskammern waren zum Schutz gegen zerstreute Strahlung mit 2 mm dickem Blei bekleidet. Alle Isolatoren waren aus Schwefel, um die Füllung mit Methyljodid zu vertragen. Allerdings brachte auch dieses Material für die Isolatoren Unannehmlichkeiten, und sie mußten oft erneuert werden. Die Zuleitung zur inneren Elektrode geschah durch einen Schleifkontakt durch den Boden der Kammer. Der Schleifdraht war dabei in einer Trommel an der Innenseite der Kreisteilung angebracht.

Die Drehung von Kristall und Kammer wurde an einer gemeinsamen Kreisteilung abgelesen.

Zur Aufladung der Kammern zu ± 250 Volt diente eine Batterie kleiner Akkumulatoren der Firma Jungner-Stockholm, sogenannte Nifeakkumulatoren. Das Elektrometer war auf eine Empfindlichkeit von etwa 1600 mm pro Volt eingestellt.

Die Vorrichtung zur Variation der Strahlungsintensität des einen Strahles bestand aus zwei dicken, aufeinander gelegten Kreisplatten aus Messing, beide mit 2 oder 4 identischen sektorenförmigen Ausschnitten. Diese Platten waren gegeneinander verstellbar und mit einer Kreisteilung versehen, um die Größe der effektiven Öffnung ablesen zu können. Die unten stehenden Messungen sind mit einem Kreisplattenpaar mit

4 Ausschnitten ausgeführt. Die Ablesung 45^0 entspricht voller Öffnung, bei 0^0 sind dagegen sämtliche Ausschnitte gedeckt.

Die geeignete Drehgeschwindigkeit der Sektorenscheibe bestimmt sich einerseits aus der Frequenz des zum Treiben des Rohres dienenden hochgespannten Wechselstroms; in unserem Falle war er 100 periodig. Für das gute Funktionieren der Abschwächvorrichtung ist selbstverständlich nötig, daß eine genügende Anzahl Stromstöße auf jede Öffnungsdauer entfällt. Andererseits darf die Sektorenscheibe nicht zu langsam rotieren im Verhältnis zur Schwingungsdauer der Elektrometernadel. Es liegt in der Natur dieser Schwächungsvorrichtung, daß eine vollkommene Ruhe der Elektrometernadel nicht erreicht werden kann, sondern daß die Nadel bei der gesuchten Gleichgewichtslage um ihre Nullage kleine Schwankungen ausführt.

Monochromatisches Meßgebiet.

Für die Verwendung der Apparatur ist es nötig, über die Ausdehnung des Röntgenspektrums der ersten Ordnung orientiert zu sein. Durch Änderung der Betriebsspannung liegt dann die Möglichkeit vor, verschiedene Meßgebiete mit rein monochromatischen Strahlen zu erzeugen. Allerdings war bisher der elektrostatische Schutz nicht genügend gut, um mit Spannungen höher als etwa 50 K.V. zu arbeiten. Dies gibt dann auch die Grenze gegen die kürzeren Wellen an. Mit verbessertem Schutz kann selbstverständlich diese Grenze ein wesentliches Stück nach vorwärts geschoben werden.

Nach den längeren Wellen gibt der Anfang der Überlagerung der zweiten Ordnung die Grenze an. Die Ausdehnung des vollständigen Spektrums bei dem benutzten Glühkathodenrohr, wie es von der Ionisationskammer angezeigt wird, ist aus Fig. 1 zu ersehen. Das Voltmeter an der Primärseite des Hochspannungstransformators zeigte dabei 45 K.V. an; die Röhrenspannung dürfte etwa 30 K.V. gewesen sein. Bis zu einem Reflexionswinkel von etwa 8^{0}30′ ist die erste Ordnung rein; von da ab überlagert sich die zweite Ordnung. Der etwaige Verlauf des Spektrums der ersten Ordnung ist durch die untere Kurve angegeben. Ferner sind die drei Gruppen α, β, γ des Linienspektrums des Wolframs zu sehen.

Bei den im folgenden beschriebenen Absorptionsmessungen wurde das Rohr so betrieben, wie es der in Fig. 2 angegebenen Spektralverteilung entspricht. Das dabei verwendbare Wellenlängengebiet liegt zwischen 0,48 Å.-E. bis 0,78 Å.-E.

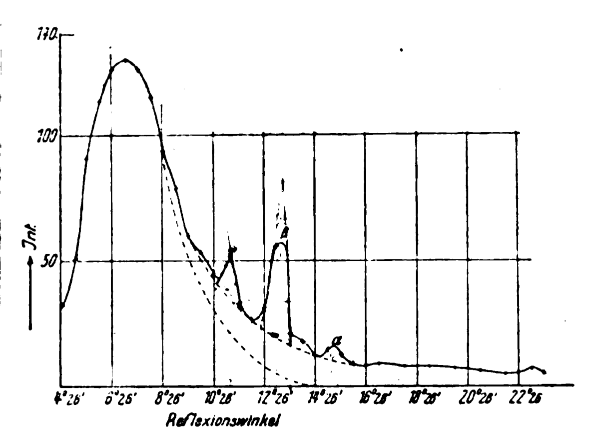


Fig. 2.

Versuchsmethodik bei Absorptionsmessungen.

Bei den im folgenden beschriebenen Absorptionsmessungen wurde so verfahren, daß zuerst die zwei monochromatischen Strahlen durch Änderung der Spaltweite bei den Vergleichsstrahlen auf gleiche Intensität einreguliert wurde. Dabei war die Sektorenscheibe auf etwa 44^0 (d. h. beinahe volle Öffnung) eingestellt und mit geeigneter Geschwindigkeit in Rotation versetzt. Dann wurde die Absorptionsplatte im Strahlenwege zwischen erster und zweiter Spalte eingeführt und die Sektorenöffnung so lange verkleinert, bis wieder die zwei Kammern gleiche Intensität anzeigten. Nachher wurde wieder zur Kontrolle die Absorptionsplatte entfernt und eine neue Nulleinstellung vorgenommen.

Da die Absorptionskoeffizienten stark von der Wellenlänge abhängig sind, ist die größte Fehlerquelle bei diesen Messungen darin zu suchen, daß die Strahlen nicht rein monochromatisch sind. Um genügende Intensität zu bekommen, war es nötig, mit verhältnismäßig großen Spaltöffnungen zu arbeiten (1 mm der zwei ersten, 4 mm bei der Kammer). Bei der Einstellung ist daher wichtig, daß der Brennpunkt der Antikathode in der Mitte der Öffnungskegel der Spalten eingestellt ist. Diese Justierung war, dank der drehbaren Aufstellung der Halbspektrometer, leicht auszuführen.

Zur Beurteilung der erreichbaren Genauigkeit seien in Tabelle I und II zwei Meßreihen bei Aluminium mitgeteilt, wo bei jeder Wellenlänge 10 verschieden dicke *Al*-Platten zur Verwendung kamen. Die 4. Spalte gibt die Gradeinstellung der Sektorenscheibe an, wenn die Absorptionsplatte eingeschoben war. Die 5. Spalte ist die Absorption der Platte, dessen Dicke sich in der ersten Spalte findet. In der letzten Spalte

schließlich steht die daraus pro Einheit der Dicke berechnete Absorption.

Tabelle I.

Reflexionswinkel der Strahlung 6°56′.

Dicke cm	Sektoreinstellung vor und nach	Mittel	mit Platte	μd	μ
0,0098	44,0, 44,4	44,2	38,9	0,1277	13,03
0,0196	44,0, 44,0	44,0	33,8	0,2637	13,14
0,0296	44,0, 44,0	44,0	30,3	0,3753	12,67
0,0395	44,0, 44,0	44,0	26,5	0,5093	12,89
0,0493	44,0, 44,2	44,1	23,3	0,6335	12,85
0,0592	44,0, 44,0	44,0	20,7	0,7541	12,74
0,0691	44,0, 44,0	44,0	18,2	0,8828	12,78
0,0790	44,0, 43,8	43,9	15,7	1,0283	13,02
0,0889	44,0, 43,6	43,8	13,5	1,1770	13,24
0,0988	44,0, 44,0	44,0	11,3	1,2594	12,55

Mittel 12,89 ± 0,05.

Tabelle II.

Reflexionswinkel der Strahlung 5°26′.

Dicke cm	Sektoreinstellung vor und nach	Mittel	mit Platte	μd	μ
0,0098	44,0, 44,0	44,0	41,2	0,0658	6,71
0,0196	43,9, 43,7	43,8	38,6	0,1264	6,45
0,0296	44,0, 44,0	44,0	36,2	0,1951	6,60
0,0395	44,0, 44,2	44,1	33,8	0,2660	6,73
0,0493	44,0, 44,0	44,0	31,6	0,3310	6,72
0,0592	44,0, 44,0	44,0	29,6	0,3964	6,70
0,0691	44,0, 44,0	44,0	27,7	0,4628	6,70
0,0790	44,0, 44,0	44,0	25,8	0,5338	6,76
0,0889	44,0, 44,0	44,0	24,0	0,6061	6,82
0,0988	44,0, 44,0	44,0	22,2	0,6841	6,92

Mittel 6,71 ± 0,027.

Aus der letzten Spalte der Tabellen ist zu ersehen, daß die Abweichungen vom Mittel zufälliger Natur sind und ein Gang nicht vorhanden ist, wie dies auch bei einer monochromatischen Strahlung zu erwarten war. Die Dicke der absorbierenden Schicht ist so gewählt, daß ein möglichst großes Öffnungsgebiet der Sektorscheibe überfahren wird. Die Fehler der Mittelwerte sind von der Größenordnung 0,5 Proz. Doch kann, wie schon erwähnt, der zugehörige Durchschnittswert der Wellenlänge der nicht ganz streng monochromatischen Strahlung nicht mit dieser Genauigkeit bis jetzt ermittelt werden.

Die Absorption bei Kupfer.

Zur Prüfung der Methode und zum Vergleich der Resultate mit schon vorhandenen Meßergebnissen wurde die Absorption bei *Cu* und *Al* untersucht. Kupfer war deswegen besonders geeignet, da dieser Stoff schon oftmals untersucht ist, und ferner in diesem Wellenlängengebiet die Absorption durch Zerstreuung sehr klein ist. Die Absorptionsgrenzwellenlänge (*K*-Strahlung) des Kupfers liegt bei $1{,}385 \cdot 10^{-8}$ cm [E. Wagner, M. de Broglie], während unsere Messungen für Wellen zwischen 0,484 und 0,728 ausgeführt sind. Die Ergebnisse finden sich in folgender Tabelle III.

Tabelle III.

Absorption bei Kupfer.

$\lambda \cdot 10^{-8}$	$\mu \cdot 10^{+2}$ beob.	ber.	Δ Proz.
0,728	4,24	4,19	+ 1,2
0,679	3,38	3,43	− 1,3
0,631	2,75	2,77	− 0,7
0,582	2,21	2,19	+ 0,9
0,533	1,68	1,70	− 1,2
0,484	1,28	1,28	± 0,0

In der dritten Spalte sind die aus der Formel

$$\mu = 10{,}5\, \lambda^{2{,}9}\, 10^{+2}$$

berechneten Absorptionswerte eingetragen. Wie die letzte Spalte zeigt, sind die Abweichungen durchweg von der Größe der Fehler der einzelnen Messungen, so daß diese Formel eine innerhalb der Fehlergrenzen richtige Darstellung der Absorption gibt. Daß einer Formel von dem Typus

$$\mu = A\lambda^b,$$

die früheren mit nicht rein monochromatischer Strahlung gewonnenen Meßergebnissen genügen, ist schon mehrmals gezeigt worden[1]). Dabei ist aber zu bemerken, daß μ den Absorptionsverlust durch die charakteristische Emission bedeutet. Für die gesamte Absorption ist eine Formel

$$\frac{\mu}{\varrho} = A\lambda^b + \frac{\sigma}{\varrho}$$

anzusetzen $\left[\frac{\mu}{\varrho} = \text{Massenabsorption}\right]$, wie dies besonders von Hull und Rice empirisch nachgewiesen ist, $\frac{\sigma}{\varrho}$ stellt darin den Verlust durch Zerstreuung dar. Für den letzteren setzten Hull und Rice[2]) den konstanten Wert 0,12 unabhängig von Wellenlänge und Stoff. Untersucht wurden *Al*, *Cu* und *Pb* mit Wellen von 0,147 bis $0{,}294 \cdot 10^{-8}$ cm ($0{,}392 \cdot 10^{-8}$). Da bei *Cu* die Massenabsorption innerhalb dieses

1) M. Siegbahn, diese Zeitschr. **15**, 753, 1914; Kossel, Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 898, 1914; Glocker, diese Zeitschr. **19**, 66ff., 1918.
2) Hull u. Rice, Phys. Rev. **8**, 326, 1916.

Gebiets von 0,71 bis 3,84 variiert, beträgt die Zerstreuung hier nur einige Prozent (3 Proz. bis max 17 Proz.) der ganzen Absorption. Da ferner die Meßfehler bei diesen kurzen Wellen mehrere Prozent betragen, kann selbstverständlich der numerische Wert von $\frac{\sigma}{\varrho}$ mit einem beträchtlichen Fehler behaftet sein.

In dem von uns benutzten Wellenlängengebiet, wo die Massenabsorption von etwa 15 bis 50 geht, ist eine Zerstreuung von höchstens 1 Proz. zu erwarten, die schon innerhalb der Fehlergrenze der Messungen liegt. Dadurch scheint die Benutzung der abgekürzten Formel 1 berechtigt zu sein. Daß diese Formel auch für einen ausgedehnten Wellenlängenbereich zur Darstellung der Absorption (ohne Zerstreuung) anwendbar ist, scheint aber fraglich, wie von Barkla u. a. hervorgehoben ist.

Betreffend den numerischen Wert der Exponente b gibt Bragg in seinem Buch „X-rays and Crystal-Structure“ den Wert 2,5 an, während Hull u. a. 3,0 ansetzen. Der erste Wert ist unbedingt zu klein; die empirisch gefundenen Werte schwanken zwischen etwa 2,7 bis 3,0. Owen[1]) findet in der Nähe der Absorptionsgrenze (bei *Ag Pd Rh*) den Wert 3,0. Bei *Cu* haben wir oben gefunden 2,9 für Wellen, die wesentlich kürzer als die der Absorptionsgrenzwellenlänge ist. Noch weiter von der Grenze scheinen kleinere Werte herauszukommen. Als einen guten empirischen Mittelwert setzt Glocker[2]) $b = 2,8$ an.

Der angegebenen einfachen Formel nach gewinnt man durch Darstellung der Meßergebnisse in einem logarithmischen Diagramm eine gute Übersicht. In der graphischen Tabelle (Fig. 3) finden sich außer unseren Werten auch die von den Verfassern Hull und Rice, Bragg und Peirce[3]), Barkla und White[4]), Barkla und Sadler erhaltenen. Von diesen Meßreihen sind die von Hull und Rice mit spektroskopisch zerlegtem Röntgenlicht aus dem kontinuierlichen Spektrum ausgeführt, ganz wie die unsrigen, aber mit weit kürzeren Wellen. Die Übereinstimmung dieser Meßreihen ist eine vorzügliche. Die Absorptionswerte von Bragg und Peirce sind mit den $K\alpha$-Strahlungen einiger Substanzen ausgeführt und sind daher im strengeren Sinne monochromatisch als die erwähnten. Merkwürdigerweise sind diese Werte durchweg ein wenig größer als die unsrigen. Eine Erklärung dafür könnte darin gesucht

1) Owen, Proc. Roy. Soc. **94**, 339, 1918.
2) Glocker, l. c.
3) Bragg u. Peirce, Phil. Mag. **28**, 626, 1914.
4) Barkla u. White, Phil. Mag. **34**, 270, 1917.

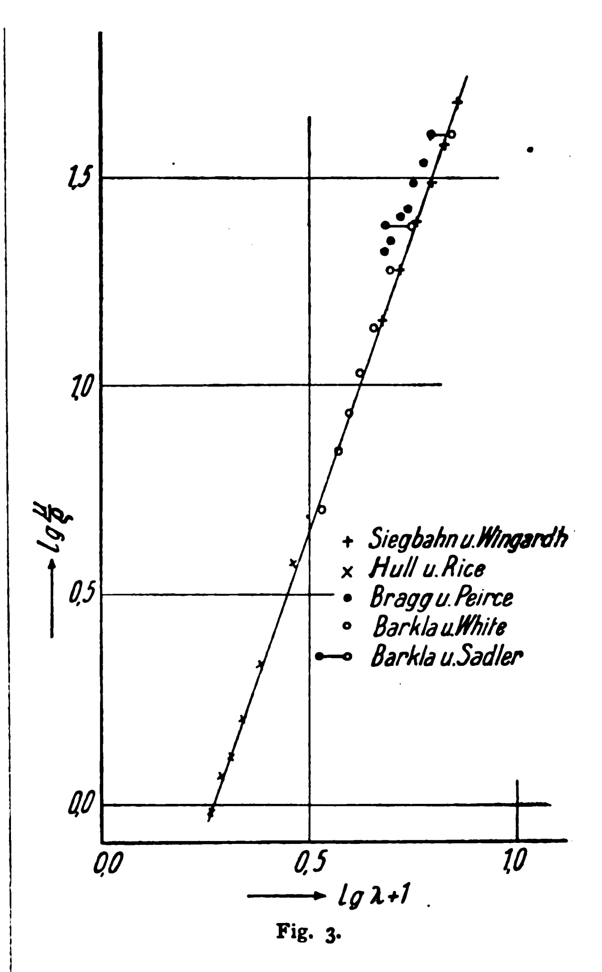


Fig. 3.

werden, daß wir den Schwerpunkt der kleinen Wellenlängenbereiche nicht mit ihren richtigen Wellenlängen angesetzt haben, was einer kleinen Verschiebung und Drehung der ganzen Kurve entsprechen würde. Das scheint allerdings aus mehreren Gründen nicht sehr wahrscheinlich, wird aber demnächst mit rein monochromatischem Licht nachgeprüft werden. Es sei erwähnt, daß die Dichte des von uns benutzten *Cu*-Bleches zu 8,88 bestimmt wurde.

Auch von Williams[1]) ist die Absorption von *Cu* untersucht worden. Williams benutzte spektrometrisch zerlegtes, weißes Licht in dem Wellenlängenbereich 0,431 bis 0,627 10^{-8} cm, d. h. im wesentlichen derselbe wie bei uns. Ferner sind die Messungen nach einer Art Differentialmethode ausgeführt, die zweifellos gute Resultate geben kann. Die Werte bei *Cu* sind aber durchweg weit größer, als sämtliche von anderen Autoren gefundenen Werte, so daß ein Vergleich hier unterlassen wird.

Es sind hier noch einige Worte über die Verwertung älterer mit der charakteristischen

1) Williams, Proc. Roy. Soc. **94**, 571, 1918.

Strahlung der Elemente ausgeführten Absorptionsmessungen zu sagen. Nachdem wir jetzt wissen, daß die L-Strahlung eine sehr komplizierte, über einen großen Wellenlängenbereich ausgebreitete Strahlengruppe ist, können mit dieser Strahlung ausgeführte Messungen nicht gut mit monochromatischen Absorptionsmessungen verglichen werden. Mit der K-Reihe aber, die eine einfache und gedrängte Struktur besitzt, können wir gute approximative Werte erzielen. Viele Autoren haben einfach für die Gruppe die für $K\alpha$ gültige Wellenlänge benutzt. Beim Vergleich mit anderen rein monochromatischen Messungen ist dies selbstverständlich nicht mehr gestattet. Bei *Pd* findet Owen z. B., daß die Intensität der α- und β-Dubletten der K-Reihe sich wie 1,90 verhalten. Dieses Verhältnis dürfte auch bei den nächstliegenden Elementen *Rh*, *Ag* zutreffen, so daß wir hier mit einem Wellenlängenmittelwert entsprechend einer Linie in einem Drittel des Abstandes von α bis β rechnen können. Bei leichteren Elementen ist aber zweifellos das Verhältnis $\frac{\alpha}{\beta}$ bedeutend größer und scheint auch periodischen Schwankungen unterworfen zu sein. Messungen hierüber liegen, soweit uns bekannt ist, noch nicht vor. In unseren zwei graphischen Darstellungen haben wir daher vorgezogen, zwei Punkte einzutragen, wenn die K-Reihe zur Absorptionsbestimmung benutzt ist. Der kleine Punkt entspricht dabei der Wellenlänge der β-Linie, der große Punkt der der α-Linie.

In der graphischen Tabelle sind eingetragen die Absorptionswerte von Hull und Rice nach Korrektion für Zerstreuung. Der gut geradlinige Verlauf der Absorptionskurve von $\lambda = 0{,}147$ bis $0{,}728 \cdot 10^{-8}$ cm gibt keine Stütze für die Existenz eines j-Absorptionssprunges, wie sie Barkla gefunden zu haben glaubt. Allerdings ist diese Zusammenstellung verschiedener Meßresultate ebensowenig beweisend, wie die von Barkla und White in betreff einer j-Strahlung bei *Cu*.

Absorption bei Aluminium.

Bei Aluminium war ein gegenüber der Meßgenauigkeit nicht vernachlässigbarer Einfluß der Zerstreuung innerhalb des benutzten Wellenlängengebietes zu erwarten. Die Zerstreuung dürfte etwa 3—10 Proz. der totalen Absorption bei diesen Wellen betragen. Zusammengestellt mit den Messungen von Hull und Rice bei noch kürzeren Wellen könnte man dann hoffen, zu einer Schätzung der Zerstreuungskoeffizienten zu kommen. Ehe wir zur Besprechung dieser Frage gehen, werden wir einen Vergleich zwischen den unsrigen und früheren Messungen geben. In folgender Tabelle IV sind zusammengestellt die gefundenen Absorptionswerte und die aus der Formel

$$\mu = 3{,}42\ \lambda^{2,70}$$

berechneten Werte, nebst Abweichungen zwischen berechneten und experimentellen Werten in Prozenten. Das bedeutet hier nur, daß wir die experimentellen Werte innerhalb eines verhältnismäßig engen Spektralbezirkes dazu benutzen, die Neigung der Tangente zur Kurve $\lg\mu/\lg\lambda$ zu bestimmen, In Wirklichkeit ist diese Kurve aller Wahrscheinlichkeit nach keine gerade Linie, sondern schwach gekrümmt wegen der Zerstreuung.

Tabelle IV.

Absorption bei *Al*.

λ	μ gef.	μ ber.	Δ Proz.
0,484	5,23	5,24	— 0,2
0,533	6,78	6,80	— 0,3
0,582	8,46	8,62	— 1,8
0,639	10,48	10,47	+ 0,1
0,679	12,85	12,80	+ 0,4
0,728	15,69	15,80	— 0,6
0,776	18,70	18,80	— 0,6

In dem graphischen logarithmischen Diagramm finden sich außer diesen Absorptionswerten, durch welche eine gerade Linie gelegt

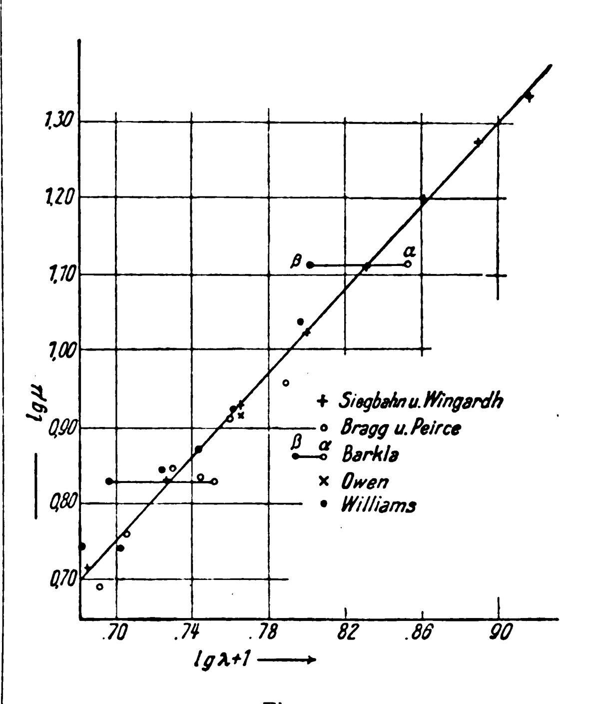


Fig. 4.

werden kann, noch die von Bragg und Peirce, Barkla, Owen und Williams. Die Meßreihen von Bragg und Peirce und von Williams zeigen verhältnismäßig große zufällige Fehler, stimmen aber sonst ebenso wie die vereinzelten Messungen von Barkla und Owen gut mit den unsrigen überein. Gegenüber der Vermutung von Williams, daß die Absorptionskurve von Aluminium eine γ-Strahlung dieses Stoffes bei etwa 0,39 Å.-E. zeigen sollte, ist aus unseren Messungen bestimmt zu schließen, daß eine solche nicht existiert. Barkla hat bekanntlich in seinen letzteren Arbeiten der j-Strahlung von *Al* eine wesentlich kürzere Wellenlänge zugeschrieben. Zu der Frage von einem j-Absorptionssprung sei noch folgendes bemerkt: Nachdem im unterzeichneten Laboratorium eine j-Serie in Emission vielmals vergeblich gesucht worden ist in dem von Barkla angegebenen Wellenlängenbereich, wurde nach einem j-Absorptionssprung nach der spektrophotographischen Methode[1]) gesucht. Trotzdem diese Methode der Ionisationsmethode wesentlich überlegen ist und auch frei von den vielen Einwänden der letzteren bei Benutzung nicht rein monochromatischer Strahlung, konnte ein Sprung noch nicht nachgewiesen werden. Oben wurde bemerkt, daß die Angabe betreffend j-Absorption von Williams sicherlich unrichtig ist. Aber auch der Befund von Owen über eine Senkung in der Kurve des kontinuierlichen Lichtes einer *Pd*-Röntgenröhre, dicht vor der K-Reihe, findet eine weit natürlichere Erklärung[2]) in der Selbstabsorption der *Pd*-Antikathode für diese Wellen, als die herangezogene hypothetische j-Serienabsorption der analysierenden Kristalle.

Die im logarithmischen Diagramm gefundene Neigung der Absorptionskurven bei *Cu* und *Al* bzw. 2,9 und 2,7 ist wohl so zu verstehen, daß die $\lg\mu$-Kurve von ihrem K-Absorptionssprung gerechnet, gekrümmt ist. Owen findet bei *Pd Ag Rh* und dem Wellenlängenbereich dicht an dem K-Sprung eine Neigung von 3,0. Bei zunehmendem Abstand davon finden wir dann 2,9 und 2,7 bzw. Stellt man nun unsere Messungen mit denen von Hull in ein logarithmisches Diagramm zusammen (totale Absorption), so zeigt sich, daß die beste Darstellung der empirischen Befunde durch zwei gerade Linien gegeben wird, die sich bei etwa $\lambda = 0{,}27$ schneiden. Ob dies einen realen Grund besitzt oder nur ein Spiel der zufälligen Fehler ist, muß eine weitere Untersuchung klarlegen.

Lund, Physikalisches Institut der Universität, 5. August 1919.

(Eingegangen 16. August 1919.)

1) Siegbahn und Jönsson, diese Zeitschr. **20**, 251, 1919.
2) Webster, Phys. Rev. 1916; Proc. Nat. Acad. of Sc. 1916.

Eine Untersuchung über die Ampèreschen Molekularströme nach der Methode von A. Einstein und W. J. de Haas.

Von Gustaf Arvidsson.

Im Jahre 1915 wurde von A. Einstein und W. J. de Haas eine Untersuchung über die Ampèreschen Molekularströme in Eisen publiziert[1]). Dieselbe bezweckte zu zeigen, wie man sich den Ferromagnetismus als eine Folge von im Eisen rotierenden Elektronen nach den Theorien von Langevin und H. A. Lorentz denken kann. Dem Elektron wird dabei ein körperliches Impulsmoment zugeschrieben, das auf die Bewegung des magnetisierten Körpers einwirken kann. Wenn in demselben die Magnetisierung variiert, wird er sich verhalten, als wirkte auf ihn ein Drehmoment, D. Dieses läßt sich leicht nach den gewöhnlichen Gesetzen der Elektrodynamik berechnen zu

$$D = \frac{2m}{e}\frac{dI}{dt}.$$

Hier ist $\frac{m}{e}$ das Verhältnis zwischen Masse und Ladung der Elektronen und I das Volumintegral der Magnetisierung in der Richtung der Drehungsachse. Durch Untersuchung von diesem „Einsteineffekt“ wird das Verhältnis $\frac{e}{m}$ bestimmt. Dabei wurde ein kleiner Eisenzylinder an einem Torsionsfaden aufgehängt und in ein mit der Richtung der Achse und zugleich des Fadens paralleles Wechselfeld eingeführt. Die Frequenz des Feldes (50 per/sek.) lag in der Nähe der Eigenfrequenz des Zylinders und konnte variiert werden. Eine Resonanzkurve für die Schwingungsamplitude des Zylinders als Funktion von der Frequenz des Feldes wurde bestimmt. Aus dieser Kurve konnte e/m berechnet werden. Wir setzen

a = die Schwingungsamplitude des Zylinders,
Q = das Trägheitsmoment des Zylinders,
I_s = das Volumintegral der Magnetisierung bei Sättigung,
n = die sekundliche Frequenz des Feldes
$\nu = |n_{res} - n|$; $b = a/a_{max}$.

1) A. Einstein u. W. J. de Haas, Verh. d. Deutschen phys. Ges. **17**, 152—170, 1915.

Dann wird

$$\frac{e}{m} = \frac{2 I_s}{\pi^2 Q \alpha_{\max} \nu \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}}.$$

Dieser Berechnung liegen folgende Voraussetzungen zugrunde:

1. Die Dämpfung ist in jedem Augenblick der Geschwindigkeit proportional. Unter dieser Voraussetzung soll der Faktor

$$\nu \sqrt{\frac{b^2}{1 - b^2}}$$

für die ganze Kurve konstant sein.

2. Die Amplitude des magnetisierenden Feldes wird so groß angenommen, daß die Änderung der Magnetisierung des Zylinders in einem sehr kurzen Bruchteil der ganzen Periode sich abspielt. Wir setzen also

$$\int_0^T D \cos \omega t \, dt = \int_0^T D dt;$$

$\cos \omega t$ soll dann ganz nahe eins sein für alle Werte von D, die nicht sehr klein sind.

3. Nur das Drehmoment, das von Resonanz verstärkt wird, hat etwas zu bedeuten. Das heißt: Nur das erste Glied in einer Fourierreihe

$$D = \sum_{n=1} B_n \cos n \omega t$$

wird berücksichtigt.

4. $\nu = |n - n_{res}|$ wird als eine kleine Größe neben n behandelt. Die Voraussetzung dafür ist ja ein enges Resonanzgebiet.

In der Untersuchung von A. Einstein und W. J. de Haas ergab sich ein Wert

$$\frac{e}{m} = 1{,}8 \cdot 10^7,$$

der sehr nahe mit dem auf andere Weise für Elektronen gefundenen übereinstimmt.

Später wurde von de Haas eine neue Untersuchung publiziert[1]), in der er sich längerer Perioden und momentaner Feldwechsel bedient. Der daraus erhaltene Wert stimmt mit dem vorigen überein und ermöglicht auch, die Phase der Bewegung zu bestimmen. Dabei ging hervor, daß die Phase dieselbe war, die man zu erwarten hat, wenn man negative rotierende Elektronen annimmt.

Noch eine Arbeit von de Haas über denselben Gegenstand ist erschienen[2]). Dieselbe ist mir leider nicht zugänglich gewesen.

1) W. J. de Haas, Verh. d. Deutschen Phys. Ges. **18**, 423, 1916.

2) W. J. de Haas u. G. L. de Haas-Lorentz, Amst. Akad. v. Wetensch. **23**, 1449, 1915; **24**, 398, 1915; **24**, 638, 1915.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung war, das Verhältnis e/m nach der ersten Methode von Einstein und de Haas zu bestimmen. Es ergab sich indessen, daß die erhaltenen Werte sich mit den von diesen Forschern gefundenen nicht vereinigen lassen. Die experimentelle Anordnung war ganz analog mit der von Einstein und de Haas verwandten. Die besonderen Einzelheiten waren folgende:

1. Die Magnetisierungsspule hatte eine Länge von 60 cm und einen inneren Durchmesser von 4 cm. Die Feldstärke im Zentrum betrug 197 Gauß für jedes Ampère der Stromstärke. Dieser Wert verminderte sich um ca. 4 Proz. bei einer Entfernung von 20 cm von der Mitte.

2. Der Wechselstrom wurde von einem Dreiphasengenerator hergenommen. Die Frequenz des Stromes wurde mit einer photographischen Methode gemessen. Auf eine Platte in Fallbewegung wurde nebeneinander aufgenommen: teils das Bild eines Entladungsrohres in dem Sekundärkreis eines Induktoriums, das von dem Strom gespeist wurde, und teils das Bild eines Lampenfadens, dessen Strahlen von einer tönenden Stimmgabel unterbrochen wurden. Durch Zählen der Koinzidenzen auf der Platte während ca. 3 Sekunden konnte die Periode erhalten werden. Bei den geringen Amplituden, die erforderlich waren, zeigte sich die Stimmgabelfrequenz als sehr konstant. Die Bestimmung konnte in solcher Weise ganz objektiv und momentan ausgeführt werden.

3. Die Torsionsvorrichtung bestand aus einem Kupferdraht, der in das Zentrum des Zylinders festgelötet wurde.

4. Die Ablesung der Amplitude geschah mit Hilfe eines Spiegels. Dieser wurde an ein Glasröhrchen befestigt, das aus der Spule hervorragte. Das Röhrchen umgab den unteren Teil des Drahtes und wurde am unteren und oberen Ende festgekittet. Im Spiegel wurde das Bild eines vertikalen Lampenfadens in einem Fernrohr mit Okularmikrometer beobachtet. Das Bild wurde bei der Schwingung des Zylinders zu einem Lichtbande verbreitert, aus dessen Länge die Amplitude berechnet wurde.

5. Die Kompensierung des Erdfeldes wurde mittels zweier Stromspulen ausgeführt. Diese wurden in derselben Stellung zueinander, als bei der Tangentenbussole von Helmholtz, aufgestellt. Der Abstand zwischen den parallelen Spulen war nämlich dem gemeinsamen Radius gleich, der hier 25,5 cm betrug. Jede Spule hatte 28 Windungen. Durch diese Anordnung wurde die größtmögliche Homogenität des kompensierenden Feldes erhalten. Die gemeinsame Axe der Spulen wurde zum Zusammen-

Tabelle.

Zylinder	Nummer der Kurve	Effektive Stromstärke in Ampère	Maximales Feld in Gauß	α_{max}	n_{res}	Q = Trägheitsmoment	$\nu\sqrt{\frac{b^2}{1-b^2}}$	e/m
I	4/8 II	1,5	400	$7,63 \cdot 10^{-4}$	57,58	0,0168	0,21	$3,35 \cdot 10^7$
	17/8 I	1,2	320	$6,36 \cdot 10^{-4}$	56,45	0,0175	0,21	$3,77 \cdot 10^7$
	18/8 I	0,5	135	$8,25 \cdot 10^{-4}$	56,58	0,0175	0,16	$3,85 \cdot 10^7$
II	22/8 I	0,5	135	$10,26 \cdot 10^{-4}$	50,12	0,0304	0,116	$3,69 \cdot 10^7$
	22/8 II	1,0	270	$11,82 \cdot 10^{-4}$	56,88	0,0236	0,115	$4,16 \cdot 10^7$
	23/8 II	1,0	270	$11,34 \cdot 10^{-4}$	49,04	0,0318	0,100	$3,70 \cdot 10^7$

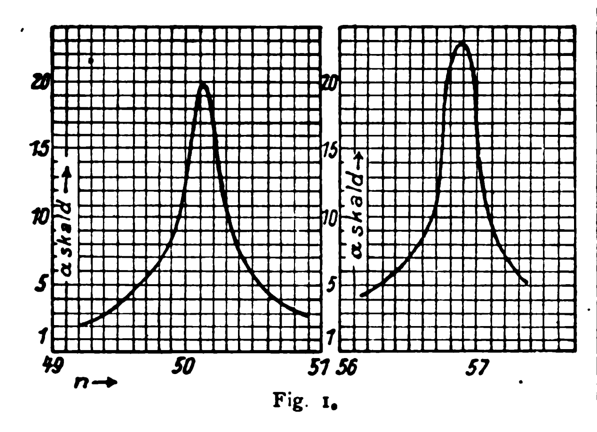


Fig. 1.

fallen mit der Richtung des Erdfeldes gebracht. Die Feineinstellung der Spulenlage und der Stromstärke wurde mit Hilfe einer kleinen Induktionsspule (92 Windungen von 200 cm²) und eines Galvanometers ausgeführt. Die Spule konnte im Zentrum des Spulensystems um einen Durchmesser gedreht werden. Der Durchmesser konnte drei gegeneinander senkrechte Richtungen einnehmen. Durch Regulierung der Lage der Spulen und der Stromstärke konnten bei sukzessiver Approximierung die drei Komponenten des Erdfeldes aufgehoben werden. Nach der Theorie sollte ja bei dieser Einstellung die maximale Amplitude des Zylinders ein Minimum haben. So verhielt es sich auch, und dieses Minimum wurde auch ganz flach befunden. Der Einfluß eines eventuellen kleinen Restfeldes mußte dann auch sehr gering sein.

6. Das Trägheitsmoment des Zylinders wurde nach zwei Methoden bestimmt. Teils durch direkte Zählung der Schwingungen, nach Anbringung eines großen Zusatzmomentes, und teils durch Bestimmung der Änderung der Resonanzfrequenz durch Anbringung eines kleinen Zusatzmomentes. Beide Werte stimmten mit dem durch direkte geometrische Berechnung gefundenen innerhalb 4 Proz. überein.

Zwei Eisenproben wurden untersucht. Die eine, Zylinder I, war eine gewöhnliche Stricknadel, die einigemal in Holzkohle ausgeglüht war. Die Länge war 16,77 und der Durchmesser 0,158 cm. Die andere, Zylinder II, war ein aus weichem Eisen gedrehter Zylinder, von den Dimensionen 16×0,197 cm.

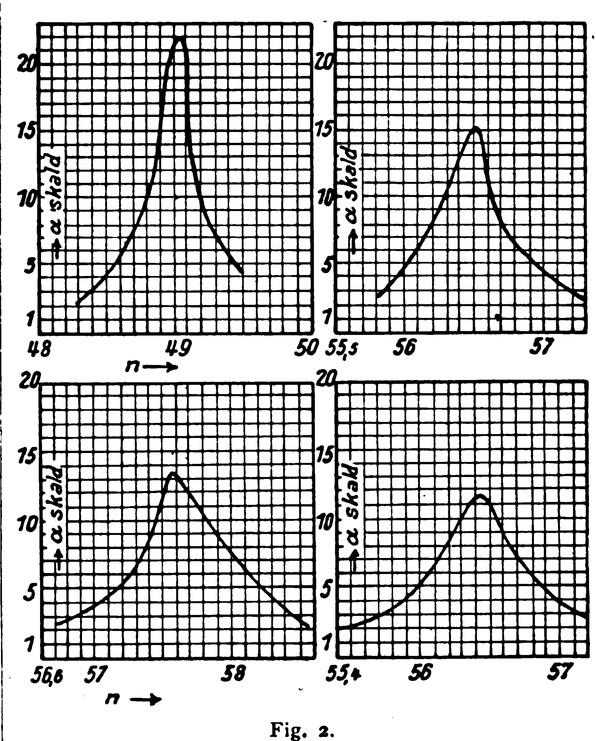


Fig. 2.

In Fig. 1 sind die Resonanzkurven reproduziert. Die aus den Kurven berechneten Werte sind in der Tabelle angeführt. Der Berechnung ist ein Wert $I_s = 1350$ C.G.S. zugrunde gelegt. Die Werte sind ja durchaus nicht mit den vorher erhaltenen vereinbar. Will man denselben Wert für I_s (nämlich 1260), wie Einstein und de Haas annehmen, so würde der Wert für e/m etwa doppelt so groß wie der von ihnen erhaltene ausfallen.

In dem Werte der Sättigungsmagnetisierung muß man jedoch eine große Unsicherheit annehmen. Dieser entspricht ja den Verhältnissen bei statischer Magnetisierung. Meiner Meinung nach muß man eine genauere Kenntnis von denselben bei wechselndem Felde haben, ehe man etwas Genaueres über die Resultate aussagen kann.

Die vorstehende Untersuchung wurde im physikalischen Institut von Uppsala im Sommer 1919 ausgeführt. Dem Präfekten des Instituts, Herrn Professor Gustav Granquist, verdanke ich die Anregung zu dieser Untersuchung, und ich möchte ihm hier für stets wohlwollende Gefälligkeit und lebhaftes Interesse meinen ehrerbietigen Dank sagen.

Nachdem obige Mitteilung bereits eingesandt war, ist eine sehr schöne Untersuchung von Emil Beck[1]) publiziert. Diese ist nach derselben Methode ausgeführt, und die Resultate stimmen gut mit den obigen überein. Durch diese Abhandlung bin ich auch auf eine Untersuchung von J. Q. Stewart aufmerksam gemacht worden, die ich vorher nicht habe einsehen können. Diese behandelt denselben Gegenstand mit ähnlichem Resultate.

1) Emil Beck, Ann. d. Phys. 60, 109, 1919; diese Zeitschr. 20, 490, 1919.
2) J. Q. Stewart, Phys. Rev. 1918 (2) Febr.

Uppsala, Physikal. Institut, Oktober 1919.

(Eingegangen 22. Oktober 1919.)

Die Gleichrichterwirkung von Kristalldetektoren.

Von M. J. Huizinga[1]).

Die von F. Braun[2]) aufgeworfene und ausführlich diskutierte, jedoch nicht gelöste Frage bezüglich der unipolaren Leitung von Kristallkontakten ist später, nach Einführung dieser Kontakte als Detektoren in der Technik der drahtlosen Telegraphie, vielfach untersucht worden.

W. H. Eccles[3]) hat eine thermoelektrische Erklärung gegeben, welche viel Verbreitung fand.

In den folgenden Zeilen werde ich jedoch auf Grund von Experimenten, welche ich auf Anregung des Herrn Prof. Haga im Physikalischen Institut der Universität Groningen angestellt habe, zu zeigen versuchen, daß hier vielmehr eine Wirkung vorliegt, welche jener des Schlömilchdetektors ähnlich ist.

§ 1. Die elektrolytische Zersetzung des Molybdänglanzdetektors.

Wenn man auf ein auf Quecksilber schwimmendes trockenes Stück Molybdänglanz eine Platinspitze drückt und einen Strom von ungefähr 1 Milliamp. von dem Kristall nach der Spitze schickt, so entsteht auf der Kontaktstelle bald ein kleines Tröpfchen einer dunkelblauen Flüssigkeit, worin kleine Gasbläschen aufsprudeln. Verstärkung des Stromes vergrößert das Tröpfchen nur wenig, da die vermehrte Stromwärme ein schnelles Verdunsten der entstandenen Flüssigkeit bedingt.

Wenn man den Strom wendet, zeigt sich der scheinbare Widerstand viel größer, außerdem bekommt die Flüssigkeit bald eine braune Farbe.

Jene blaue Flüssigkeit wurde in dem anorganisch-chemischen Laboratorium von Prof. Jaeger untersucht und ergab nach Verdunstung ein blaues Kolloid MoO_2, $4 MoO_3$, $6 H_2O$. Die braune Farbe dagegen war den Kolloiden MoS_2 und MoS_3 zuzuschreiben.

Je nach der Stromrichtung entstehen also Oxydations- oder Reduktionsprodukte, und der Unterschied der Polarisationsspannung in den zwei Richtungen erklärt den verschiedenen Widerstand, gerade wie beim Schlömilchdetektor. Nachher werde ich hierauf zurückkommen.

§ 2. Zersetzung des Pyritdetektors und anderer Detektoren.

Ähnliche Erscheinungen wie beim Molybdänglanzdetektor zeigten sich beim Pyritdetektor und immer am deutlichsten, wenn der Kontakt die Gleichrichterwirkung am besten hervortreten ließ. In diesem Falle ging der Strom wieder vom Kristall nach der Platinspitze. Diese Richtung war die des größeren Widerstandes im Gegensatz zum Molybdänglanzdetektor. Dieses wird später auch aus den Gleichstromcharakteristiken hervorgehen.

Die Zersetzung ergibt hier eine schwarze und eine farblose Flüssigkeit, aus denen sich weiße Kristalle absetzen. Die Erscheinung ist viel schwächer als beim Molybdänglanzkontakt. Außerdem darf an den Pyritdetektor nicht mehr als 5 Volt Spannung angelegt werden, da sonst die Gleichrichterwirkung und damit die Zersetzung ganz nachläßt.

Weiter wurden noch Bleiglanz-, Rotzinkerz-, Kupferkies-, Kupferglanz-, Buntkupfererz- und Karborunddetektoren untersucht. Dabei zeigte sich keine Zersetzung. Nur beim Bleiglanzdetektor war oft ein sehr kleines dunkles Fleckchen auf der Kontaktstelle ersichtlich. Wenn man die Zersetzung mittels Benetzung der Kristallfläche hervorrief, so hörte sie jedoch bald durch Verdunsten der hinaufgelegten Flüssigkeitsmenge völlig auf.

1) Übersetzt aus Kon. Akad. v. Wetensch., Sitzung 30. Nov. 1918.
2) F. Braun, Pogg. Ann. 153, 556, 1874; Wied. Ann. 1, 95, 1877; 4, 476, 1878, 19, 340, 1883.
3) W. H. Eccles, Proc. Phys. Soc. London 25, 273, 1913.

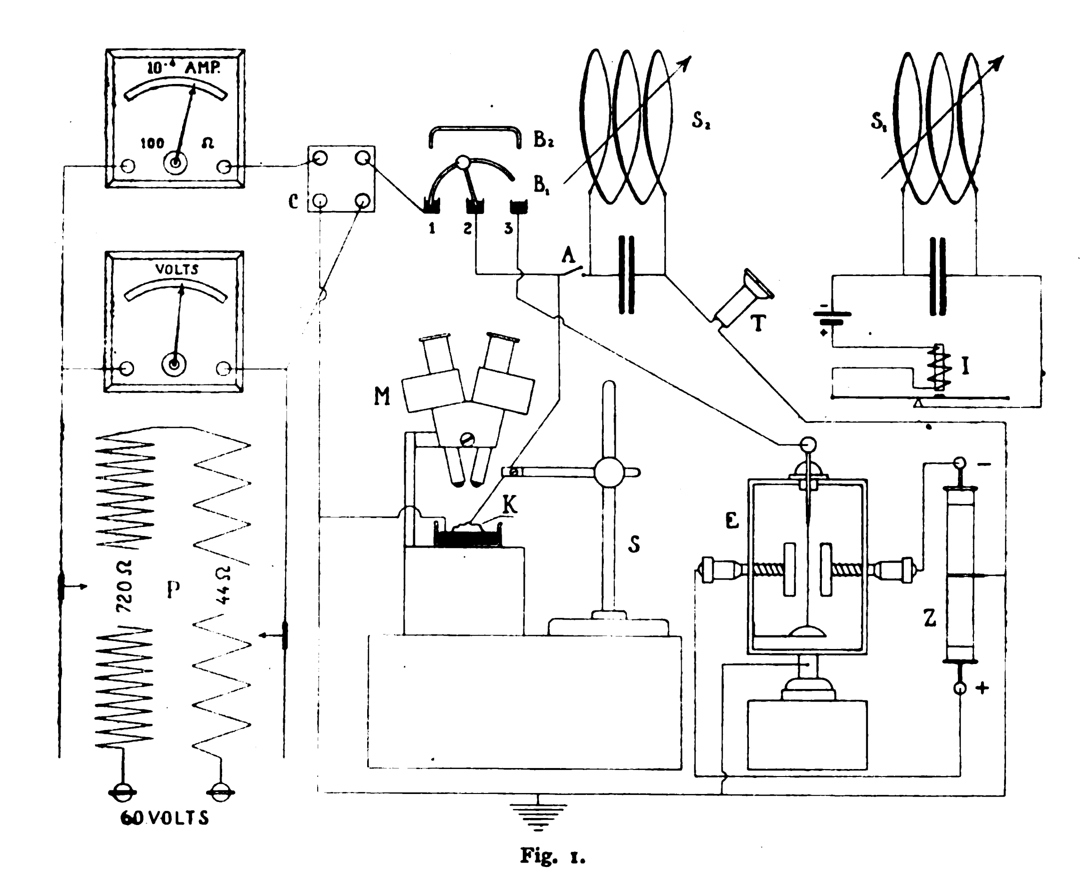


Fig. 1.

§ 3. Versuche im luftleeren Raum.

Man vermutete, daß die Gleichrichterwirkung hervorgerufen werde durch Elektrolyse in einer adhärierten Feuchtigkeitsschicht, wobei die anfänglich noch unsichtbaren Zersetzungsprodukte, wenn sie hygroskopisch sind, aus der Luft Feuchtigkeit anziehen können, so daß die Zersetzung sichtbar werden kann. Letzteres würde dann beim Molybdänglanz- und beim Eisenpyritdetektor der Fall sein.

Eine Untersuchung im Vakuum und in einer Wasserstoffatmosphäre zeigte, daß die Gleichrichterwirkung nicht verschwand, während die Zersetzung niemals sichtbar wurde. Die unipolare Leitung ließe sich jedoch in diesem Falle sehr gut durch eine adhärierte Feuchtigkeitsschicht erklären, da diese sehr schwer und wenigstens nicht durch bloßes Evakuieren entfernt werden kann.

Auch unter einer Paraffinölschicht blieb die Gleichrichterwirkung bestehen, während sich keine Zersetzung zeigte.

Aus diesen Experimenten darf man aber nicht schließen, daß die Zersetzung nur eine Nebenerscheinung sei, welche nicht ursächlich mit der Gleichrichterwirkung zusammenhänge. Die Sachlage wird jedoch erst klar, wenn man die Charakteristiken der Detektoren betrachtet, welche den Zusammenhang zwischen angelegter Spannung und Strom darstellen.

§ 4. Das Messen der Gleichstromcharakteristiken.

Da der durch den Detektor geführte Strom nicht nur von der angelegten Spannung, sondern auch von der Zeit abhängt, während welcher der Strom schon durchgegangen ist, wird die Charakteristik sich mit der Zeit ändern. Man mußte also durch eine genügende Anzahl schneller Ablesungen die Kurve in kurzer Zeit zu bestimmen versuchen.

Da Spiegelgalvanometer zu träge sind, wurden Präzisionsinstrumente von Siemens & Halske gebraucht, welche aperiodisch waren und als Zeigerinstrumente ein schnelles Ablesen ermöglichten.

Die benutzte Schaltung zeigt Fig. 1.

Der Kristall K schwamm auf Quecksilber, das zu gleicher Zeit zur Stromzufuhr diente. Die Kontaktstelle konnte durch das Binokularmikroskop M wahrgenommen werden. Auch zeigt die Figur, wie man mittels Bügels B_1 den Detektor mit dem Wulfschen Elektrometer E verbinden konnte.

Weiter war es möglich, den Kontakt als Detektor zu prüfen. Dazu wurden im Kreis S_1 elektrische Schwingungen nach der Eichhornschaltung erregt und im Kreis S_2 induziert. Nach Entfernung des Bügels B konnte man mittels der Verbindung A den Detektor hinter das Telephon T in den Kreis S_2 einschalten.

§ 5. Gleichstromcharakteristiken der elektrolytischen Detektoren.

Die Charakteristik des elektrolytischen Detektors zeigt, daß die Abweichungen vom Ohmschen Gesetz durch eine Polarisationsspannung erklärt werden, welche eine Folge der Zersetzung ist[1]). Die Charakteristik (Kurve a in Fig. 2) wird

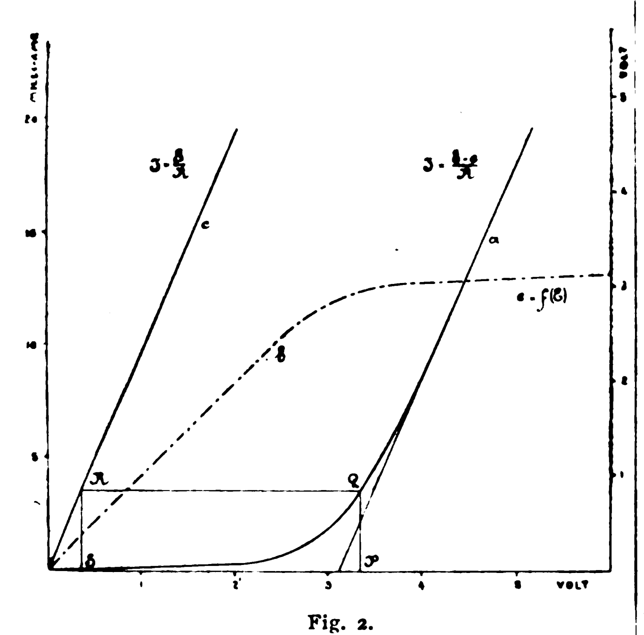


Fig. 2.

nämlich durch die Formel $I=\frac{E-e}{R}$ gegeben, worin I die Stromstärke, E die angelegte Spannung und R ein konstanter Widerstand bedeutet, während e die erregte Polarisationsspannung ist. Die Kurve b zeigt, wie diese Gegenspannung mit der angelegten Spannung anfänglich zunimmt und sich bald einem Maximum nähert (bei der Schlömilchzelle von ungefähr 3 Volt). Wenn das Maximum erreicht worden ist, zeigt die Charakteristik a ein gerades Stück, welches die Abszissenachse schneidet an einem Punkte, der den Maximalwert der Gegenspannung angibt. Diesen aus den Kurven abgelesenen Maximalwert findet man auch durch direkte Messung mit dem Elektrometer.

Wenn es keine Polarisationsspannung gäbe, so würde die Gerade c hier das Ohmsche Gesetz darstellen; dieselbe ist parallel zum geraden Stück von a.

Wenn OP die angelegte Spannung darstellt, gibt RQ die Gegenspannung an, deren Verlauf man also aus der Charakteristik ableiten kann.

Man könnte die oben genannte Größe R den „wahren Widerstand" und

$$\frac{E}{I}=\frac{E}{E-e}R$$

den „scheinbaren Widerstand" des Detektors nennen. Ersterer wird durch die Tangente des Winkels, welchen der gerade Teil der Charakteristik mit der Ordinatenachse macht, gegeben. Aus dem Verlauf dieses Teiles kann also sowohl der Maximalwert der Gegenspannung wie der wahre Widerstand entnommen werden.

Wenn man den Strom in die entgegengesetzte Richtung durch die Schlömilchzelle mit nicht allzu kleiner Platinspitze schickt, so entsteht eine ganz ähnliche Kurve, welche in dem dritten Quadrant zu zeichnen ist. Die zwei Kurven bilden zusammen die vollständige Charakteristik, welche den Ursprung als Symmetriepunkt hat. Den Symmetriepunkt vermag man außerhalb des Ursprungs zu bringen, indem man eine konstante Hilfsspannung anlegt.

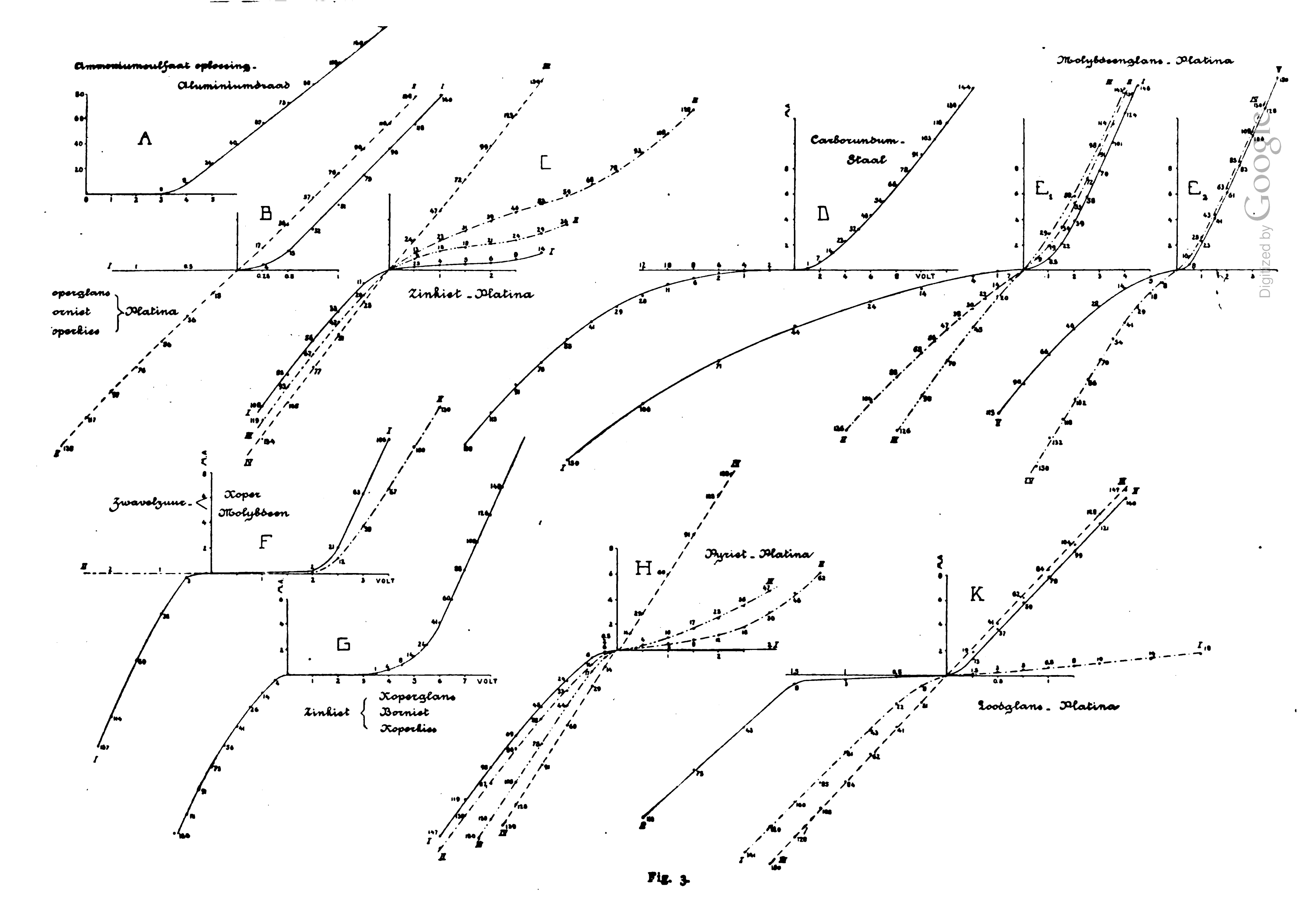
Die Zelle wirkt dann als Gleichrichter für Wechselstrom. Wenn in der Schlömilchzelle an der Stelle der Platinspitze eine Spitze aus Kupfer oder Molybdän tritt, so entsteht eine Zelle, welche auch ohne Hilfsspannung eine unipolare Leitfähigkeit und deshalb eine Charakteristik zeigt, welche dem Ursprung gegenüber unsymmetrisch ist. Diese ist die Kurve FI in Fig. 3. Der wahre Widerstand ist derselbe in den zwei Richtungen, wie der parallele Verlauf der beiden Äste zeigt[1]), aber der Maximalwert der Gegenspannung ist in den zwei Richtungen verschieden und beträgt, wenn der Strom von der Schwefelsäure nach der Spitze geht, ungefähr 2,2 Volt und in der entgegengesetzten Richtung ungefähr 0,75 Volt. Diese soviel kleinere Polarisationsspannung tritt nach Armagnat[2]) immer auf, wenn die Anode in der Flüssigkeit löslich ist.

Eine merkwürdige Erscheinung, welche Armagnat nicht beobachtete, tritt hervor, wenn man die Molybdän- oder Kupferelektrode sehr

1) Armagnat, Journal de Physique 5, 748, 1906.

1) Bemerkung. Da auf den Achsen die Ausschläge des Volt- und des Milliampèremessers unmittelbar abgemessen worden sind, werden die wahren Widerstände, welche man in bekannter Weise aus den Charakteristiken der Fig. 3 ableitet, durch Vermehrung mit dem Widerstand des Milliampèremessers, alle 100 Ohm zu groß. Dies hat, wie man leicht einsieht, auf die Diskussion keinen Einfluß.

2) Armagnat, l. c.



Ammoniumsulfaat oplossing -
Aluminiumdraad
A
B
C
D
E1
E2
F
G
H
K
Koperglans
Bornit
Koperkies
Platina
Zinkiet - Platina
Carborundum -
Staal
Molybdeenglans - Platina
Zwavelzuur -
Koper
Molybdeen
Zinkiet
Koperglans
Bornit
Koperkies
Pyriet - Platina
Loodglans - Platina
VOLT

Fig. 3.

klein nimmt. Die Charakteristik F II zeigt im ersten Quadranten nur eine Abnahme des wahren Widerstands. Im dritten Quadranten läuft die Kurve wagerecht bis ungefähr 20 Volt, bei welcher Spannung man plötzlich einen starken Strom wahrnimmt. Der große scheinbare Widerstand stellt sich sofort wieder her, wenn die angelegte Spannung unter 20 Volt verringert wird. Die merkwürdigen Zersetzungserscheinungen, welche in der Nähe von einer sehr kleinen Elektrode auftreten, bedingen offenbar die hier so bemerkenswerte unipolare Leitung. Die kolloide Sauerstoffverbindung Mo_5O_{14}, welche dabei entsteht, deutet auf einen Zusammenhang zwischen diesen Erscheinungen und denjenigen, welche bei dem Aluminiumgleichrichter auftreten und von G. Schulze ausführlich untersucht worden sind. In der Tat zeigt die Charakteristik A eines Gleichrichters — bestehend aus einer Platinplatte und einer Aluminiumspitze in einer Ammoniumsulfatlösung — eine große Übereinstimmung mit der Charakteristik F II. Die Ventilwirkung der Aluminiumzelle schreiben Schulze und Taylor[1]) einem dünnen Sauerstoffhäutchen zu, welches von einer Schicht kolloiden Aluminiumhydroxyds gehalten wird. Auch hat Schulze gefunden, daß außer Aluminium viele andere Metalle sich ebenso verhalten.

Im dritten Quadranten läuft die Charakteristik A auch genau wagerecht, bis bei ungefähr 25 Volt ein starker Strom durchging, während eine Schicht Aluminiumhydroxyde sich von der Spitze loslöste. Der Gleichrichter stellte sich nach Abnahme der angelegten Spannung sofort wieder her. Clarence Greene[2]) hat gezeigt, daß der wagerechte Teil dadurch entsteht, daß eine Polarisationsspannung der angelegten Spannung entgegenwirkt.

Man könnte also kurz sagen, daß die Charakteristiken der betrachteten elektrolytischen Detektoren immer die Gestalt der Kurve F II zeigen, mit zwei parallelen geraden Zweigen. Es wäre möglich, daß ein Zweig nicht gefunden wird, da der Detektor in einer Richtung nur wenig Strom verträgt. Dabei kann der Ursprung mit dem Kurvenmittelpunkt zusammenfallen oder in der Nähe der einen Biegung liegen.

§ 6. Gleichstromcharakteristiken von Kristalldetektoren.

Molybdänglanz-Platin. Bei der Charakteristik E_1I eines sehr wirksamen Molybdänglanzdetektors tritt im ersten Quadranten deutlich ein gerader Teil hervor. Die daneben verzeichneten Zahlen bedeuten die abgelesene 10^{-4} Amp., wenn die angelegte Spannung jedesmal mit 0,5 oder 1 Volt vermehrt wurde. Bei der Kurve im ersten Quadranten ging der Strom von dem Kristall auf die Spitze über. Die Charakteristik E_1I wurde aufgenommen, bevor irgendeine Zersetzung zu bemerken war. Die Kurve läßt sich unschwer durch die Formel

$$I = \frac{E - e}{R}$$

darstellen. Hierin bedeutet R wieder den wahren Widerstand und e eine Gegenspannung, beide vorläufig nur hypothetisch.

Als man nun hierauf kurze Stromstöße durch den Detektor sandte und dann aufs neue die Charakteristik bestimmte, zeigte sich die Kurve E_1II und später E_1III. Auch diese Kurven haben gerade Teile *und die Neigung dieser geraden Teile ist dieselbe.* Die Kurven verschieben sich also und nähern sich einer durch den Ursprung gezogenen Geraden mit derselben Neigung, welche offenbar das Ohmsche Gesetz darstellen würde. (Dieses wird bei den anderen untersuchten Kristallen noch besser hervortreten.) Hieraus geht das Bestehen der Größe R als wahrer Widerstand des Kontakts und zugleich das Auftreten einer Gegenspannung mit Maximalwert hervor. Daß diese Gegenspannung elektrolytischer Natur ist, zeigte sich, als man den Strom während einiger Minuten durchgehen ließ. Nachdem die bekannte Zersetzung sichtbar geworden war, trat die Kurve E_2IV an die Stelle der Charakteristik E_1III und nachdem der Kontaktdruck etwas verringert war, entstand die Kurve E_2V, welche die unipolare Leitung wieder deutlich zeigt. Als die Zersetzung noch ein wenig weiter geschritten war, wurde eine nun offenbar elektrolytische Gegenspannung von 1,1 Volt gemessen, und dieser Wert wurde auch von dem Schnittpunkt des geraden Teiles der Charakteristik gegeben. Der ganz gleichmäßige Übergang der Kurve E_1I in die Kurve E_2V, während der wahre Widerstand sich nicht ändert, zeigt uns, daß die Abweichungen vom Ohmschen Gesetz beim Molybdänglanzdetektor ohne sichtbare Zersetzung erklärt werden müssen durch eine noch unsichtbare Zersetzung in einer dünnen adhärierten Schicht.

Bei großen Stromstärken zeigt die Charakteristik wieder eine schwache Biegung. Die hohle Seite ist dabei der Vertikalachse zugewendet. Diese Erscheinung wird durch die Widerstandsabnahme erklärt, welche bei derartigen Stoffen

1) A. H. Taylor, Wied. Ann. 30, 984, 998, 1016.
2) Clarence Greene, Phys. Review, 2. Ser., Vol. 3, 1914.

bei steigender Temperatur auftritt[1]). Beim Molybdänglanz geht der Widerstand durch eine Temperatursteigung von 0°—200° C schon auf die Hälfte herunter[2]). Die schnelle Verdampfung eines Öltröpfchens auf der Kontaktstelle zeigt, wie bedeutend die Erhöhung der Temperatur ist, welche ein Strom von 0,03 Amp. erzeugt.

Karborund-Stahl. Beim empfindlichen Karborund-Stahldetektor wurde, wie schon gesagt, keine Zersetzung bemerkt. Auch war es nicht möglich, die Charakteristik D zu ändern, ausgenommen durch sehr große Stromstärke. Doch wird man die besondere Form der Charakteristik im ersten Quadranten am einfachsten erklären durch eine Gegenspannung mit einem Maximalwert von ungefähr 2,5 Volt, welche deshalb elektrolytischer Natur ist.

Zinkit-Bornit. Die Charakteristik G eines Zinkit-Bornitdetektors stimmt genau überein mit der Charakteristik der elektrolytischen Zelle. Genau dieselben Charakteristiken haben die Kombinationen Zinkit-Kupferkies und Zinkit-Kupferglanz. Die geraden Teile schneiden die Achse im ersten Quadranten (Strom vom Kristall nach der Spitze) bei 5 Volt, im dritten Quadranten bei —0,4 Volt. Sie verschieben sich parallel, wenn man Stromstöße durchsendet. Da dieses auch hervorgeht aus den Erscheinungen bei den Detektoren, welche entstehen, wenn man Zinkit und die Kupferverbindungen einzeln mit einer Platinspitze in Kontakt bringt, hat es keinen Zweck, hier näher darauf einzugehen.

Zinkit-Platin. Die Kurve CI ging durch Stromstöße allmählich über in die Gerade CIV. Die Neigung der Kurve I bestimmt also den wahren Widerstand und dadurch ist das Dasein einer Gegenspannung von 0,4 Volt in einer Richtung bewiesen. Hieraus geht hervor, daß auch in der andern Richtung eine Gegenspannung auftreten muß. Wirklich zeigten einige Charakteristiken im ersten Quadranten ein gerades Stück, welches die Axe bei ungefähr 3 Volt schnitt. Als Beispiel ist eine Charakteristik in der untenstehenden Tabelle gegeben.

Von Zinkit nach Platin

0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	Volt
1	3	4	5	6,5	7	8	8,5	$\times$ 0,0001 Amp.
2,25	2,5	2,75	3,0	3,25	3,5	3,75	4,0	Volt
9	9,5	10	11	14	20	31	42	$\times$ 0,0001 Amp.
4,25	4,5	4,75						Volt
52	63	74						$\times$ 0,0001 Amp.

1) O. Reichenheim, Über die Elektrizitätsleitung einiger natürlich kristallisierten Oxyde, Sulfide und des Graphits. Inauguraldissertation, Freiburg 1906.

2) G. W. Pierce, Phys. Review, 1. Ser. Vol. 28, 1909.

Von Platin nach Zinkit

0,25	0,5	0,75	1,0	1,25	1,5	1,75	2,0	Volt
1,5	9	16,5	24	33	45	56	67	$\times$ 0,0001 Amp.
2,25	2,5	2,75	3,0	3,25	3,5	3,75	4,0	Volt
77	86	98	108	118	129	140	150	$\times$ 0,0001 Amp.

Buntkupfererz-Platin. Die Charakteristik BI zeigt, daß in der Richtung von Platin zum Kristall der scheinbare Widerstand sehr groß ist. Sobald in dieser Richtung der Strom merkbar durchging, änderte die Kurve BI sich in BII. Genau dieselben Kurven geben die Kombinationen Kupferglanz-Platin und Kupferpyrit-Platin. Der gerade Teil von BI zeigt uns, daß in einer Richtung eine Gegenspannung von 0,4 Volt erscheint.

Wenn man die Kurven BI und CI betrachtet, tritt es sofort klar zutage, warum der Zinkit-Kupferpyritdetektor die Gleichrichterwirkung so besonders gut zeigt. Man kann nämlich die Kurve G als eine Superposition der Kurven CI und BI betrachten, wobei letztere erst um 180° gedreht wird.

Zinkit-Molybdänglanz. Um diese letzte Auffassung zu prüfen, sind Zinkit und Molybdänglanz, welche jedes für sich in Verbindung mit Platin eine so ganz verschiedene Charakteristik geben, miteinander in Verbindung gebracht worden. Die in der untenstehenden Tabelle angegebene Charakteristik zeigt, wie verschieden in den zwei Richtungen der scheinbare Widerstand ist.

Von Zinkit nach Molybdänglanz

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Volt.
1	2	4	6	7	9	12	14	18	29	49	79	$\times$ 0,0001 Amp.

Von Molybdänglanz nach Zinkit

0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	Volt
1	5,5	15	26	39	51	64	75	86	$\times$ 0,0001 Amp.
5	5,5	6							Volt.
98	110	123							$\times$ 0,0001 Amp.

Auch zeigt sich, daß die Gleichrichterwirkung des Zinkitdetektors ebenso erklärt werden muß, wie die des Molybdändetektors, d. h. durch elektrolytische Polarisation.

Bleiglanz-Platin. Die Charakteristik hatte gewöhnlich die Form der Kurve BI. Bisweilen ergab sich jedoch eine Charakteristik mit der Form der Kurve CI. Bei diesem Detektor war also die Richtung des größten Widerstandes nicht immer dieselbe. Außerdem änderten sich die Charakteristiken schnell mit der Zeit. Es war möglich, eine Charakteristik der einen Form in eine solche der zweiten Art übergehen zu lassen. Nachdem ein Strom von 0,005 Amp. während 15 Minuten von Bleiglanz nach Platin durchgegangen war, wurde die Charakteristik KI gemessen. Im ersten Quadranten konnte keine Krümmung aufgenommen werden, da bei höherer

Spannung die Kurve KI plötzlich in die Gerade III überging. Wurde jedoch ein Strom von 0,01 Amp. während 15 Minuten vom Platin zum Bleiglanz geschickt, so zeigte sich die andere Charakteristik KII. Die Kurven zeigen sehr deutlich, wie in allen Fällen der wahre Widerstand sich nicht ändert. Die Maximalwerte der Gegenspannungen sind scharf angegeben und leicht abzulesen. Daß hier zwei Charakteristiken nebeneinander bestehen, läßt sich durch Änderungen im Kontakt erklären, welche Folge des Stromdurchgehens und ohne Zweifel elektrolytischer Natur sind.

Eisenpyrit-Platin. Die Charakteristiken HI bis IV weisen nach dem Gesagten wenig Neues auf. Die im Anfang beschriebene Zersetzung dieses Detektors wurde erst wahrgenommen, nachdem schon aus den Eigentümlichkeiten der Charakteristik der Beweis hervorgegangen war, daß die elektrolytische Polarisation die Ursache der Gleichrichterwirkung ist.

Zusammenfassung.

Außer beim Molybdänglanzdetektor wurde auch beim Eisenpyritdetektor eine elektrolytische Zersetzung wahrgenommen; die in den zwei Richtungen verschiedene Polarisationsspannung erklärt den Stromunterschied beim Wenden des Stromes.

Es wurden die Gleichstromcharakteristiken dieser Detektoren mit denen anderer Kristalldetektoren und denen der elektrolytischen Zelle verglichen. Aus der Übereinstimmung zwischen den Eigentümlichkeiten dieser Charakteristiken wird der Schluß gezogen, daß die Gleichrichterwirkung bei allen untersuchten Detektoren ihre Ursache in einer elektrolytischen Polarisation innerhalb einer adhärierenden Feuchtigkeits- und Gasschicht findet.

Der Widerstand der untersuchten Detektoren ist kleiner als man gewöhnlich annimmt, und beträgt in den meisten Fällen nicht mehr als 100 Ohm.

(Eingegangen 15. Juli 1919.)

Eine mechanische Theorie der Serienspektra.

Von A. Korn.

II.

Mechanische Erklärung des die Spektraltheorie beherrschenden Wechselwirkungsgesetzes.

In der ersten Abhandlung[1]) habe ich gezeigt, daß ein Massensystem $m_0 m$ zu einer Schwingungsserie, entsprechend der Kayser-Rungeschen Formel, Anlaß geben kann, wenn eine (bei positivem Vorzeichen abstoßend zu rechnende) Zentralkraft $f(r)$ von m_0 auf m ausgeübt wird, welche durch die folgende Bestimmung gegeben ist:

$$f(r) = F'(r),$$
$$F(r) = \left(\alpha + \frac{\beta}{r^2}\right) \cos \frac{r}{\lambda} 2\pi + \frac{2\pi}{3\lambda} \frac{\gamma}{r^3} \sin \frac{r}{\lambda} 2\pi, \tag{1}$$

wo α, β, γ, λ Konstanten sind. In dieser Abhandlung will ich eine mechanische Erklärung eines solchen Wechselwirkungsgesetzes geben.

Die Form des Gesetzes, welche ein wellenartiges Abnehmen und Zunehmen der Zentralkraft mit der Entfernung r anzeigt, deutet, wie ich schon am Schlusse der ersten Abhandlung bemerkte, darauf hin, daß bei einer Erklärung des Wechselwirkungsgesetzes mit Hilfe von Schwingungen der Teilchen und Voraussetzung eines Zwischenmediums dieses letztere als kompressibel[1]) anzunehmen ist. Der erste Gedanke ist, zu versuchen, ob nicht auch hier die Voraussetzung einer Pulsation der Teilchen, welche (allerdings mit ganz außerordentlich kleinen Schwingungsdauern) für gravitierende Teilchen anzunehmen ist, in Betracht gezogen werden kann, bzw. ob uns nicht die Folgerungen, welche sich an eine solche Betrachtung knüpfen, auf den richtigen Weg bringen können.

Bei Voraussetzung von Wirbellosigkeit ist das Geschwindigkeitspotential, welches eine pulsierende Kugel m_0 von dem Radius:

$$R = R_0 - \varepsilon \sin \frac{t}{T} 2\pi \quad (R, \varepsilon, T \text{ Konstanten}) \tag{2}$$

in einer unendlich ausgedehnten, kompressiblen Flüssigkeit hervorruft:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0(x, y, z, t) = \frac{R_0^2}{r} \Big\{ k_1 \cos\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) 2\pi + \\ + k_2 \cos\left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda}\right) 2\pi \Big\} + \\ + \frac{k R_0^2}{r} \Big\{ \sin\left(\frac{t}{T} - \frac{r}{\lambda}\right) 2\pi - \\ - \sin\left(\frac{t}{T} + \frac{r}{\lambda}\right) 2\pi \Big\}, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

wo r die Zentraldistanz des Punktes (x, y, z) vorstellt, k, k_1, k_2 Konstanten sind, welche der Gleichung:

$$k_1 + k_2 = \frac{2\pi}{T} \varepsilon \tag{4}$$

1) Diese Zeitschr. **20**, 491, 1919.

1) Das fordert, wie bereits am Schlusse der ersten Abhandlung hervorgehoben wurde, daß die hier in Betracht zu ziehenden Schwingungsdauern erheblich größer sein müssen, als für die elektro-magnetische Felder hervorbringenden Schwingungen.

genügen, und

$$\lambda = c T \tag{5}$$

(c eine dem kompressiblen Medium zugehörige Konstante) zu setzen ist, bei der Voraussetzung, daß die Bewegung periodisch mit der Schwingungsdauer T ist, von solcher Art, daß:

$$\left.\begin{aligned} \varphi_0 (x, y, z, t) = \varphi_1 (x, y, z) \cos \frac{t}{T} 2\pi + \\ + \varphi_2 (x, y, z) \sin \frac{t}{T} 2\pi. \end{aligned}\right\} \tag{3'}$$

Es ist dann in der Tat, wenn R gegen λ, ε gegen R klein ist, so daß bereits Größen von der Form:

$$k \frac{R^2}{\lambda^2}, \; k \frac{\varepsilon}{R}; \; k_1 \frac{R^2}{\lambda^2}, \; k_1 \frac{\varepsilon}{R}; \; k^2 \frac{R^2}{\lambda^2}, \; k^2 \frac{\varepsilon}{R}$$

gegen bzw. k, k_1, k_2 vernachlässigt werden können:

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu_a} = - \frac{2\pi}{T} \varepsilon \cos \frac{t}{T} 2\pi = \frac{dR}{dt} \tag{6}$$

(ν_a möge die in die Flüssigkeit hineingehende Richtung der Oberflächennormalen bedeuten).

Zu beachten ist die Unbestimmtheit des Problems, da ja k beliebig bleibt und k_1 und k_2 nur die Bedingung (4) zu erfüllen haben. Wie bekannt, können bei Voraussetzung der Kompressibilität des äußeren Mediums im allgemeinen solche Probleme nur durch gewisse Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$ zu bestimmten Problemen gemacht werden.

Ganz allgemein ist jedes Geschwindigkeitspotential, welches nur von r und t abhängen soll, wie bekannt, von der Form:

$$\varphi (x, y, z, t) = \frac{F_1 (r + ct) + F_2 (r - ct)}{r}, \tag{7}$$

wo F_1 und F_2 zwei mit ihren ersten Ableitungen stetige Funktionen ihrer Argumente sind, wenn wir Unstetigkeiten in den Geschwindigkeitskomponenten und ihren ersten Ableitungen ausschließen.

Man kann nun, wie in dem Falle der Annahme der Inkompressibilität des äußeren Mediums, auch in dem Falle der Kompressibilität das Problem für zwei in dem Medium pulsierende Kugeln m_0 und m durch Bestimmung des Geschwindigkeitspotentials φ in Angriff nehmen und die scheinbaren Kräfte

$$X = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_\omega p \cos (\nu x) \, d\omega \, dt, \ldots \tag{8}$$

berechnen, welche infolge der Pulsationen z. B. auf die zweite Kugel m ausgeübt werden, wobei die Integration mit dem Index ω über alle Elemente $d\omega$ (mit der inneren Normalen ν) der Oberfläche der Kugel m zu erstrecken sind, p den hydrodynamischen Druck der Flüssigkeit an der Stelle des Oberflächenelements $d\omega$ vorstellt. Wie in dem Falle eines inkompressiblen Zwischenmediums wird sich das Geschwindigkeitspotential φ zusammensetzen aus dem Geschwindigkeitspotential φ_0, einem entsprechenden der zweiten Kugel zugehörigen Gsechwindigkeitspotential und weiteren Geschwindigkeitspotentialen, welche von den wechselseitigen Reflexionen an den beiden Kugelflächen herrühren. Der Druck p ist mit dieser Funktion φ nach der Formel:

$$p = - \mu \left\{ \frac{d\varphi}{dt} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \right\} \tag{9}$$

zu bilden und in (8) einzusetzen, wobei μ die der Gleichung

$$\frac{d\mu}{dt} = - \mu \left\{ \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right\} \tag{10}$$

entsprechende Dichte des Mediums ist.

Wenn man die Rechnung durchführt, kommt man, analog wie bei Voraussetzung eines inkompressiblen Zwischenmediums, zu dem Resultate, daß von m_0 auf m eine (bei positivem Vorzeichen abstoßende) Zentralkraft[1]):

$$\left.\begin{aligned} R &= \psi' (r_0), \\ \psi (r_0) &= \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \varphi_0 (r_0) \int_\omega \mu \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} \, d\omega \, dt \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

ausübt, wenn man Größen vernachlässigt, welche gegen R von der Ordnung der Quotienten Radien der Kugeln/Zentraldistanz klein sind; die Zentraldistanz ist hier mit r_0 bezeichnet, das Integral mit dem Index ω ist über alle Elemente $d\omega$ der Oberfläche ω des Teilchens m zu erstrecken.

Gegenüber dem Falle der Inkompressibilität des Zwischenmediums, für welchen $\lambda = \infty$ zu setzen wäre und eine Zentralkraft umgekehrt proportional dem Quadrat der Zentraldistanz herauskommt, sehen wir hier, wenn wir den Wert (3) von φ_0 einsetzen, daß die wesentlichen Glieder der Zentralkraft bei der Annahme der Kompressibilität des äußeren Mediums der ersten Potenz der Zentraldistanz umgekehrt proportional sind.

---

1) Am besten mit Hilfe der Transformation:

$$\left.\begin{aligned} X = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \int_\omega \mu \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \right.\right. \\ \left.\left. + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] \cos (\nu x) \right\} d\omega \, dt, \ldots \end{aligned}\right\} \tag{8'}$$

(man vgl. diese Zeitschr. 19, 203, 1918; „Eine mechanische Theorie der Reibung", Ferd. Dümmlers Verlag, Berlin 1901, S. 130—136), die in gleicher Weise, wie für ein äußeres inkompressibles Medium, auch für ein äußeres kompressibles Medium gilt.

In dem von uns gesuchten Wechselwirkungsgesetze (1) sollen grade Glieder mit $\frac{1}{r}$ im Nenner fehlen, wir kommen daher zunächst zu dem negativen Ergebnis, daß wir von ewig pulsierenden Kugeln, wie hier angenommen, das erwartete Resultat nicht erhalten können; die Untersuchung führt uns aber auf einen Weg, um doch die Erfüllung unseres Wunsches, die mechanische Deutung des Wechselwirkungsgesetzes (1), zu erreichen.

Wir betrachten statt des Geschwindigkeitspotentials (3) das folgende:

$$\varphi_0(x, y, z, t) = \\ = C \frac{e^{-\sigma \frac{R}{\lambda}} - e^{-\sigma\left(\frac{r}{\lambda}+\frac{t}{T}\right)}}{r} \cos\left(\frac{t}{T}+\frac{r}{\lambda}\right) 2\pi, \tag{12}$$

wobei C eine Konstante, σ eine sehr kleine positive Zahl sei; das Potential ist von der Form (7), so daß dasselbe eine in dem kompressiblen Medium mögliche, wirbellose, nur von der Zentraldistanz r eines einzigen in dem Medium vorhandenen Teilchens m_0 abhängende Bewegung darstellt.

Die Bewegung der Kugelfläche ist dabei wieder eine Pulsationsbewegung, aber von solcher Art, daß die Pulsationsamplitude in der Zeit von

$$t = 0 \text{ bis } t = t_0$$

(t_0 sei eine kleine Zeitdauer, die gegen T groß sei) von Null bis zu einem gewissen endlichen Werte A_0 zunimmt; wir wollen sagen, daß in diesem Falle (12) die Pulsation des Teilchens m_0 exponentiell von Null bis zu einer gewissen endlichen Pulsationsenergie zunimmt.

Zu bemerken ist, daß wir in diesem Falle bei genügend kleinem t_0 für genügend kleine Werte von r, die im übrigen gegen R noch groß, etwa mit λ vergleichbar sein mögen

$$\frac{e^{-\sigma \frac{R}{\lambda}} - e^{-\sigma\left(\frac{r}{\lambda}+\frac{t}{T}\right)}}{r} = \frac{\sigma}{\lambda} + \frac{\sigma}{T}\frac{t}{r} + \cdots \tag{13}$$

entwickeln können und für unsere Zwecke nur das erste Glied[1]) rechts in Betracht zu ziehen brauchen. Nehmen wir in der Tat jetzt wieder außer diesem Teilchen m_0 noch ein zweites Teilchen m in dem Medium an, welches nach dem Gesetz (2) pulsieren möge, so wird man, da sich die Kraftwirkung von m_0 auf m wieder nach der Formel (11) berechnet, für den Fall, daß die Zentraldistanz r_0 genügend klein (wenn auch groß gegen R, etwa mit λ vergleichbar) ist, in erster Annäherung (Mittelwert im Verlaufe einer Schwingungsdauer T) eine Zentralkraft von der Form

$$\left.\begin{aligned} R &= \psi'(r_0), \\ \psi(r_0) &= \alpha \cos \frac{r_0}{\lambda} 2\pi, \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

in der Zeit

$$0 \leqq t \leqq t_0$$

erhalten, wobei α eine Konstante vorstellt[1]).

Wir können also sagen, daß ein Wechselwirkungsgesetz (14) erreicht werden kann, während das Teilchen m_0 eine exponentiell von Null bis zu einer gewissen endlichen Pulsationsenergie zunehmende Pulsation besitzt.

Wir betrachten jetzt das folgende Geschwindigkeitspotential

$$\varphi_0(x, y, z, t) = \frac{c_1}{r(r+ct)^M} \left\{ \begin{aligned} &\cos\left(\frac{t}{T}+\frac{r}{\lambda}\right) 2\pi, \\ &\sin\left(\frac{t}{T}+\frac{r}{\lambda}\right) 2\pi, \end{aligned} \right. \tag{15}$$

wobei c_1 eine Konstante, M irgendeine positive Zahl bedeuten möge; das Potential ist von der Form (7), so daß durch dasselbe eine in dem kompressiblen Medium mögliche wirbellose, nur von der Zentraldistanz eines einzigen in dem Medium vorhandenen Teilchens m_0 abhängende Bewegung dargestellt wird.

Die Bewegung der Kugelfläche ist dabei wieder eine Pulsationsbewegung, aber von solcher Art, daß die Pulsationsamplitude des Teilchens m_0 in der Zeit von $t = 0$ bis $t = \infty$ von einem bestimmten endlichen Werte A_0 zu Null abnimmt; wir wollen sagen, daß in diesem Falle (15) die Pulsation des Teilchens polar von der Ordnung M von einer gewissen endlichen Pulsationsenergie zu Null abnimmt.

Nehmen wir jetzt wieder außer dem Teilchen m_0 noch ein zweites Teilchen m in dem unendlich ausgedehnten Medium an, welches nach dem Gesetz (2) pulsieren möge, so wird man, da sich die Kraftwirkung von m_0 auf m wieder nach der Formel (11) berechnet, für den

1) Das zweite Glied, welches $\frac{1}{r}$ enthält, ergibt bei der Berechnung des Zeitintegrals in (11) den Faktor

$$\frac{1}{4}\frac{\sigma T t}{T} = \frac{1}{4}\sigma t = \frac{1}{4}\frac{\sigma}{\lambda} T \cdot \frac{\lambda t}{T},$$

der auch nach Division durch T zu vernachlässigen sein wird, wenn $\frac{\lambda t_0}{T}$ gegen die Längeneinheit klein ist.

1) Bei sehr großen r_0 kann natürlich diese erste Annäherung nicht bestehen; sie gilt nur für kleine Werte von r_0, die aber noch sehr groß gegen R (etwa mit λ vergleichbar) sein mögen.

Fall, daß die Zentraldistanz genügend klein (wenn auch groß gegen R, etwa mit λ vergleichbar) ist, in erster Annäherung (Mittelwert im Verlauf einer Schwingungsdauer T) eine Zentralkraft von der Form

$$\left.\begin{aligned} R(t) &= \frac{\partial X(r_0, t)}{\partial r_0}, \\ X(r_0, t) &= \frac{\alpha_M}{r_0 (r_0 + t)^M} \left\{ \begin{matrix} \cos \frac{r_0}{\lambda} 2\pi, \\ \sin \frac{r_0}{\lambda} 2\pi, \end{matrix} \right. \end{aligned}\right\} \quad (16)$$

ergeben, wo α_M eine Konstante ist. Die mittlere Kraft in einer Zeit $0 \leqq t \leqq T$, wo T zwar sehr klein, aber groß gegen T sein möge, wird von der Form:

$$\left.\begin{aligned} R &= X'(r_0), \\ X(r_0) &= \frac{A_M}{r_0^M} \left\{ \begin{matrix} \cos \frac{r_0}{\lambda} 2\pi, \\ \sin \frac{r_0}{\lambda} 2\pi, \end{matrix} \right. \end{aligned}\right\} \quad (17)$$

wobei A_M wieder eine Konstante ist ($M \geqq 2$).

Wir können also sagen, daß Wechselwirkungsgesetze von der Form (17) erreicht werden können, während das Teilchen m_0 polar von einer gewissen endlichen Pulsationsenergie gegen Null abnehmende Pulsationen besitzt.

Wir können nun die von uns gewünschte Wechselwirkung (1) erreichen, indem wir zu einer Kraft von der Form (14) Kräfte von der Form (17) hinzufügen. Die mechanische Erklärung des Wechselwirkungsgesetzes (1) ist hiernach dadurch möglich, daß wir eine Pulsation des Teilchens m_0 exponentiell von Null gegen eine endliche Pulsationsenergie zunehmen und dann wieder in einer gewissen Weise polar gegen Null abnehmen lassen; der Vorgang soll sich in einer sehr kurzen Zeit abspielen, der aber immer noch gegen T groß sein möge. Die Pulsation des Teilchens m haben wir dabei von der Form (2) angenommen, was wir empirisch auch so deuten können, daß das Teilchen m seine Pulsationsmaxima ganz außerordentlich rasch (wesentlich rascher als m_0) annimmt und seine Pulsation wesentlich langsamer wieder verliert.

Bei jeder Erschütterung der Umgebung der Teilchen $m_0 m$ durch Nachbarteilchen wird ein solcher Vorgang erzeugt; in einer Zeitdauer, welche mit den Schwingungsdauern des sichtbaren Spektrums vergleichbar ist, sollen sich ganz außerordentlich viele solche Vorgänge abspielen, dann gelangen wir in der Tat auf diesem Wege zu einer befriedigenden, mechanischen Erklärung der einfachsten Serienspektra, welche einer Kayser-Rungeschen Formel, im einfachsten Falle der Formel von Balmer entsprechen.

Mit Rücksicht auf die Untersuchungen Debyes, im besonderen über die Konstitution des Wasserstoffmoleküls, und die auf quantentheoretischen Grundlagen fußenden Spektraltheorien von Bohr, Sommerfeld u. a. werden die beiden folgenden Bemerkungen von Interesse sein:

1. Wie ich bereits zu Beginn der ersten Abhandlung ausführte, sind die hier einleitend auseinandergesetzten Ideen über die Entstehung der Serienspektra den erwähnten Spekulationen gegenüber nicht in einem unüberbrückbaren Gegensatz; die Zusammenhaltung des Moleküls durch elektrische Kräfte kann auch hier sehr wohl angenommen werden, solange die negativen elektrischen Teilchen (m) sich in ihren äußersten Bahnen bewegen. Sobald aber Erschütterungen durch Nachbarmoleküle eintreten, geraten die negativen Teilchen (m) außerordentlich häufig in (innere) Bahnen, welche dem Kerne (m_0) wesentlich näher liegen, und für welche die Wechselwirkungsgesetze (1) an Stelle der elektrostatischen Wechselwirkungen in Übermacht in Wirksamkeit treten.

2. Die Konstante

$$c_2 = r^2 \frac{d\omega}{dt}$$

des Flächenintegrals (zweite Formel 5 der ersten Abhandlung), das bei beliebigen Zentralkräften ebenso gilt, wie bei Zentralkräften, umgekehrt proportional dem Quadrat der Entfernung, erhält in den Theorien, welche sich auf die Annahme der Quanta stützen, dadurch, daß in denselben

$$r^2 \frac{d\omega}{dt} = \frac{h}{2\pi m}$$

gesetzt wird (h = Plancksches Wirkungsquantum) eine besondere Bedeutung. Es wäre außerordentlich merkwürdig, wenn die Rotationen der negativen Teilchen um ihre Kerne eine solche universelle Konstante bergen sollten; wird die weitere Entwicklung der Theorie wirklich hierin durch die Erfahrung gestützt werden? Wenn dies der Fall sein sollte, dann würde in der Tat hier das Plancksche Wirkungsquantum eine rein mechanische Bedeutung erlangen.

In später folgenden Untersuchungen sollen weitere Folgerungen aus meiner mechanischen Theorie der Serienspektra gezogen werden.

(Eingegangen 6. Oktober 1919.)

Normale Betrachtungsperspektive.

(Antwort auf den Aufsatz des Herrn Seemann, diese Zeitschr. **20**, 328, 1919.)

Von Hans Witte.

In meinem dritten Aufsatz „Über den Sehraum"[1]) hatte ich eine große Anzahl von Beweisen für die Behauptung beigebracht, daß der Mond so groß wie ein Teller aussieht. Zuletzt hatte ich u. a. gemeint, dieser Tellermond mache sich auch in Bildern bemerklich: ein sehwinkeltreu gemalter oder photographierter Mond wirke zu klein; Maler malten demgemäß den Mond meist im Verhältnis größer, usw. Gegen einen Teil dieser letzteren Ausführungen hat Herr Seemann im zweiten Juliheft dieser Zeitschrift Bedenken erhoben.

Herr Seemann meint zunächst, das Heranziehen von Photographien eines bestimmten Formats sei nicht eindeutig; er weist darauf hin, daß meine Schlüsse nur dann gelten, wenn meine Bilder[2]) aus der Entfernung der Objektivbrennweite, 18 cm, betrachtet werden.

Das ist nun durchaus meine eigene Ansicht. Sie steht auf der gleichen Seite 119 meines damaligen Aufsatzes[1]) zu lesen, die Herr Seemann selber in der Überschrift seines Aufsatzes nennt. Ich hatte dort ausdrücklich geschrieben: „Natürlich muß man die Bilder ... aus der richtigen Entfernung betrachten" und „die Bildsehweite beträgt 18 cm (Brennweite des Objektivs)".

Daß der Betrachter wie der Zeichner, wenn er dieser ausdrücklichen Vorschrift zuwider gewohntermaßen aus deutlicher Sehweite blickt (30 cm), einen kleinen Fehler hinzufügt, habe ich allerdings physikalisch gebildeten Lesern gegenüber nicht hervorheben zu sollen geglaubt. Es kann ihn ja jeder leicht berechnen und feststellen, daß dieser Fehler viel zu klein ist, um die zur Rede stehende Täuschung zu erklären[3]).

Auch Herrn Seemanns Gegenbeispiele unterstützen meinen Schluß. Hier handelt es sich darum, daß der Betrachter absichtlich irregeführt wird. Er betrachtet aus deutlicher Sehweite (30 cm) und zeichnet aus dieser ein, er glaubt dabei aus der perspektivisch richtigen Bildsehweite zu betrachten und zu zeichnen, in Wahrheit ist diese viel größer oder kleiner. Wenn der Maler, wie Herr Seemann meint, auch da den Mond so groß einzeichnet, wie in meinen Bildern, so bestätigt dies meine Ansicht, daß der Maler bei einer gegebenen[1]) Bildsehweite den Mond größer zeichnet, als dieser Bildsehweite entspricht. —

Nun ist allerdings hierbei bewußt vorausgesetzt, daß für ein 13 × 18 cm-Bild die perspektivisch richtige Sehweite normalerweise den Wert ca. 30 cm habe, also mit der deutlichen Sehweite zusammenfalle. Damit scheint sich Herr Seemann nicht befreunden zu können. Er will die Gleichsetzung nur für künstlerisch nicht durchgebildete Menschen gelten lassen; der fachmännische Galeriebesucher betrachte Bilder vom Format 13 × 18 cm aus einer Bildsehweite von mindestens 1 m, und dieser oder einer ähnlichen Bildsehweite passe der Maler die Perspektive seines Bildes, in diesem Falle also des eingezeichneten Gestirns, bewußt oder unbewußt an.

Dies nun freilich ist ein Einwand, mit dem ich nicht gerechnet habe. Ich bekenne gern, daß Herr Seemann mit diesem Gedanken eine neue Erklärung für die große Mondeinzeichnung des Künstlers gefunden hat, falls Herrn Seemanns große Zahlen für die Bildsehweiten richtig sind. Aber sind sie richtig?

Herr Seemann hat seine Zahlen nur behauptet, nicht bewiesen. Vielleicht in der Erwägung, daß künstlerische Auseinandersetzungen in dieser Zeitschrift fehl am Orte sind und, abgesehen von dem selten möglichen Nachmessen, auch auf ein Geltendmachen von Autoritäten hinauslaufen würden. Dieser Ansicht schließe ich mich an. Ich muß jedoch zwei Gründe wissenschaftlicher Art nennen[2]).

Herr Seemann erklärt mit seiner angenommenen Bildsehweite von ca. 1 m den eingezeichneten Mond. Nun enthält aber das eine Bild auch eine auf- oder untergehende Sonne, und diese hat der Maler doppelt so groß gezeichnet wie den Mond. Will man diese Sonne mit Herrn Seemanns Bildsehweitenannahme erklären, so muß man annehmen, daß gleichzeitig noch eine zweite Bildsehweite besteht von der Größenordnung 2 m. Dies scheint mir gegen Herrn Seemanns flächenperspektivische und für meine raumperspektivische Erklärung zu sprechen.

1) Diese Zeitschr. **20**, 114, 1919.
2) Ebenda, Tafel III und IV.
3) Der Maler, welcher Mond und Sonne einzeichnete, hat aus deutlicher Sehweite gezeichnet. Herr Seemann tadelt: „Hätte man ihn darauf aufmerksam gemacht, daß er die Bilder in 18 cm Entfernung ......" usw. — Man hatte ihn darauf aufmerksam gemacht.

1) In diesem Falle eben falsch gegebenen!
2) Eine Autorität möchte ich allerdings zu meinen Gunsten anführen, das ist Herr Seemann selber. Herr Seemann beruft sich auf seine Arbeiten in der Photographischen Rundschau 1911. Hier kann ich aber den jetzt befürworteten Bildwinkel von 15° nicht finden, vielmehr ist da als Regel gegeben, daß der Bildwinkel „etwa 50° nicht wesentlich übersteigen" darf (S. 201); und S. 202 heißt es, daß „wir" ein 13 × 18 cm-Bild „in 30 cm Abstand zu betrachten geneigt sind."

Sodann beansprucht Herr Seemann seine Erklärung ausdrücklich nur für Künstler. Sie ist ja auch nur auf Künstler zugeschnitten. Da nun Laien ebenfalls den sehwinkeltreu gezeichneten oder photographierten Mond zu klein empfinden und ihn ebenfalls in der Größe wie mein künstlerischer Gewährsmann einzeichnen, so bleibt es für diese bei meiner ursprünglichen Erklärung: Der Laie zeichnet den Mond nach Maßgabe des Tellerbildes, das er reliefperspektivisch, im Sehraum, sieht; nicht in der Größe, die die Linearperspektive auf der Zeichenfläche fordert. Beide, Laie und Künstler, zeichnen also übereinstimmend falsch, nach Herrn Seemann aus zwei verschiedenen Gründen, nach meiner Ansicht aus einem und demselben Grunde. Ich glaube, es liegt vom allgemeinwissenschaftlichen Standpunkte näher, in solchen Fällen anzunehmen, daß der Grund der gleiche ist. Normale Fachmusiker und normale Laien empfinden beide übereinstimmend Terz, Quinte, Oktave als harmonisch; darf man da für die Fachmusiker eine Ausnahme von der gemeinsamen physikalisch-physiologisch-psychologischen Ursache erdichten, um durch eine Sonderursache schließlich doch zur selben gemeinsamen Wirkung zu kommen? Wie dort, so handelt es sich auch in unserem Falle um ein gemeinsames Gesetz[1]), das in inneren Eigenschaften der menschlichen Natur begründet liegt und von Äußerlichkeiten, wie Berufsunterschieden, nicht wesentlich berührt wird.

1) Über das Gesetz selber, von dem die Gestirnsehgrößen ja nur ein besonderes Beispiel darstellten, vgl. man meine Aufsätze „Über den Sehraum". Der neunte wird gelegentlich noch ein genau entsprechendes irdisches Beispiel durch Bilder erläutern.

Wolfenbüttel (Technische Hochschule Braunschweig), im August 1919.

(Eingegangen 11. August 1919.)

Bemerkung zu einem Demonstrationsversuch des Herrn H. Greinacher. (Diese Zeitschr. 19, 194, 1918.)

Von W. Hallwachs.

Erst dieser Tage bin ich auf eine Mitteilung des Herrn H. Greinacher über einen lichtelektrischen Demonstrationsversuch aufmerksam geworden. An der in der Überschrift angegebenen Stelle ist folgender Versuch zum Nachweis der Selbstaufladung lichtelektrischer Platten angegeben. Eine frisch geschmirgelte Zinkplatte wird mit einem empfindlichen Blattelektroskop verbunden und aus 20 cm Entfernung mit einer Bogenlampe bestrahlt. Auf die Platte treffe ein kräftiger Luftstrom (Blasebalg). Sofort beginnt das Elektroskop sich positiv aufzuladen und zeigt schließlich einen konstanten Ausschlag (Größenordnung 100 Volt). Der Luftstrom hat ohne Belichtung keine Wirkung.

Da keine Literatur erwähnt wird, möchte ich mir gestatten, darauf hinzuweisen, daß ich ganz denselben Vorlesungsversuch schon vor 28 Jahren beschrieben habe[1]). Daß die Erregung bis auf 100 Volt gesteigert werden kann, ist sowohl an der angeführten Stelle, als auch an anderen Stellen erwähnt[2]). Die Mitteilung des Herrn Greinacher bildet übrigens eine willkommene Bestätigung jener Erregungsversuche zu höheren Potentialen, meines Wissens die erste in der physikalischen Literatur, und dürfte als solche von Nutzen sein.

1) W. Hallwachs, Vorlesungsversuche zum Nachweis der lichtelektrischen Erregung. Wied. Ann. **40**, 343—344, 1890.

2) W. Hallwachs, Wied. Ann. **37**, 666, 1889; Tageblatt der 62. Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte, Heidelberg, S. 214, 1889; Photogr. Archiv, S. 289 bis 291, 1896. Vgl. auch W. Hallwachs, Lichtelektrizität, § 8a, 1914 (Marx, Handbuch der Radiologie, Bd. III).

Physikalisches Institut der Technischen Hochschule Dresden. August 1919.

(Eingegangen 19. September 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Metallographie.

Von Rudolf Ruer.

(Fortsetzung.)

B. Typus V nach Roozeboom[1]).

Diesen recht häufig auftretenden Fall stellt das Schmelzdiagramm Fig. 28 dar. Die *l*-Kurve besteht wiederum aus zwei Ästen *AC* und *BC*, die jedoch beide von den reinen Stoffen *A* und *B* aus zu tieferen Temperaturen gehen. Sie ist, ebenso wie die Horizontale *DCE*, weil thermisch ohne Schwierigkeit bestimmbar, stark ausgezogen, während die beiden Stücke *AD* und *BE* der *s*-Kurve dünn gezeichnet sind, um anzudeuten, daß ihrer exakten Bestimmung

1) Roozeboom loc. cit.

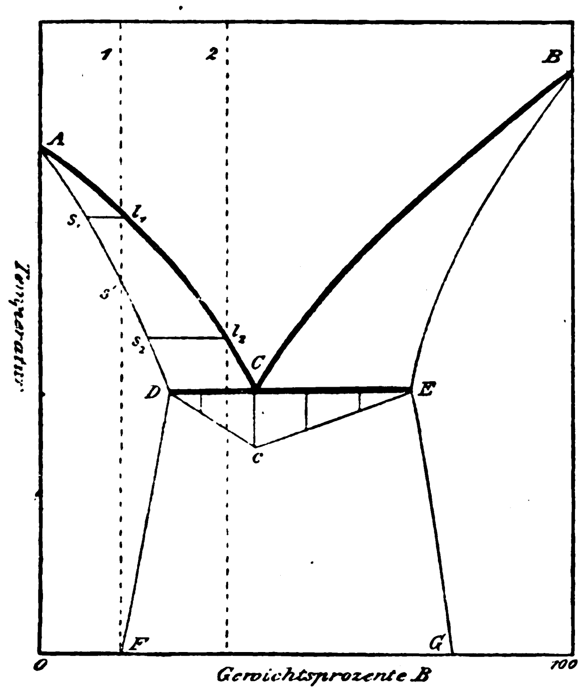


Fig. 28.

in gleicher Weise Schwierigkeiten entgegenstehen, wie im Falle vollständiger Mischbarkeit im kristallisierten Zustande. In noch höherem Grade besteht diese Schwierigkeit für die Bestimmung des Verlaufs der nur bis zur oberen Temperaturgrenze t_1 realisierbaren und daher in zwei voneinander getrennte Stücke *DF* und *EG* zerfallende Löslichkeitskurve der beiden Kristallarten, weil ebenso wie für den flüssigen auch für den kristallisierten Zustand die Mischungswärme im allgemeinen recht gering ist und sich daher der Vorgang der Entmischung auf den Abkühlungskurven nicht bemerkbar macht.

Da die Konzentration der Schmelze *C* zwischen den beiden gesättigten Mischkristallen *D* und *E* liegt (s. S. 79), so kann ihre Bildung nur durch Mitwirkung der beiden vorhandenen Kristallarten *D* und *E* erfolgen, und wir haben die Reaktionsgleichung:

Ges. Mischkristalle D + Ges. Mischkristalle $E \leftrightarrows$ Schmelze C.

Die Reaktion verläuft bei Wärmezuführung von links nach rechts. Da hier wiederum ein vollständiges Gleichgewicht vorliegt, so bleibt die Temperatur t_1 bis zur vollständigen Aufzehrung einer der Phasen konstant. Die Dauer der Haltepunkte auf den Abkühlungskurven bei der der Horizontalen *DCE* entsprechenden Temperatur t_1 ist in gewohnter Weise durch die gebrochene Linie *DcE* dargestellt, ihre Bestimmung liefert daher ein Mittel zur Bestimmung der Konzentrationen der drei Punkte *C*, *D* und *E*.

Unter der Voraussetzung, daß während der Kristallisation stets Gleichgewicht vorhanden ist, zeigt die Abkühlungskurve der Mischung 1 von einer zwischen 0 und *D* liegenden Konzentration nur ein Intervall von der Größe $l_1 s'$. Ob die zunächst homogen erstarrte Legierung sich bei weiterer Abkühlung auf Zimmertemperatur (ohne merkliche Wärmetönung) in zwei Kristallarten spaltet, hängt davon ab, ob die betreffende Vertikale das Stück *DF* der Löslichkeitskurve oberhalb dieser Temperatur schneidet oder nicht.

Die Abkühlungskurve der Mischung 2 mit einer zwischen *D* und *C* liegenden Konzentration zeigt einen Knick bei der Temperatur l_2 und einen Haltepunkt bei der Temperatur t_1 der Horizontalen *DCE*. Der Umstand, daß die gesättigten Mischkristalle *D* und *E* bei weiterem Sinken der Temperatur ihre Zusammensetzung längs der beiden Kurvenstücke *DF* und *EG* ändern, kommt auf den Abkühlungskurven nicht zum Ausdruck.

Eine Mischung von der Konzentration *C* erstarrt wie ein reiner Körper. Die Abkühlungskurve läßt nur einen Haltepunkt erkennen.

Die Abkühlungskurven der Konzentrationen zwischen *C* und *E* bzw. *E* und 100 entsprechen denen der Konzentrationen 2 bzw. 1.

Das Gefüge der Schliffe der Reguli, die bei der Temperatur Null des Koordinatensystems untersucht werden mögen, muß zwischen 0 und *F* und zwischen *G* und 100 homogen sein. Schliffe von Konzentrationen zwischen *F* und *G* weisen die miteinander gesättigten Mischkristalle von *B* in *A* und von *A* in *B* auf, deren bez. Konzentrationen *F* und *G* sind. Schliffe der Konzentrationen zwischen *D* und *C* enthalten primär ausgeschiedene Mischkristalle von *A*, Schliffe der Konzentrationen zwischen *E* und *C* primär ausgeschiedene Mischkristalle von *B*. Das sekundäre Strukturelement ist durch Kristallisation der schließlich zurückbleibenden Schmelze *C* entstanden und muß seiner Entstehung nach ein eutektisches Gefüge zeigen. Bei Konzentrationen zwischen *D* und *F* und zwischen *E* und *G* ist das ursprünglich homogene Gefüge durch nachträgliche Entmischung etwas inhomogen geworden.

Nimmt man an, daß die Konzentrationsdifferenz zwischen der Schmelze *C* und der Kristallart *D* immer mehr abnimmt, so fallen *C* und *D* schließlich zusammen. Diesen Fall stellt Fig. 29 dar, wo *C* und *D* im Punkte *C* zusammenfallen. In *C* findet einheitliche Erstarrung statt, daher muß nach S. 75 *AC* im Punkte *C* eine horizontale Tangente haben.



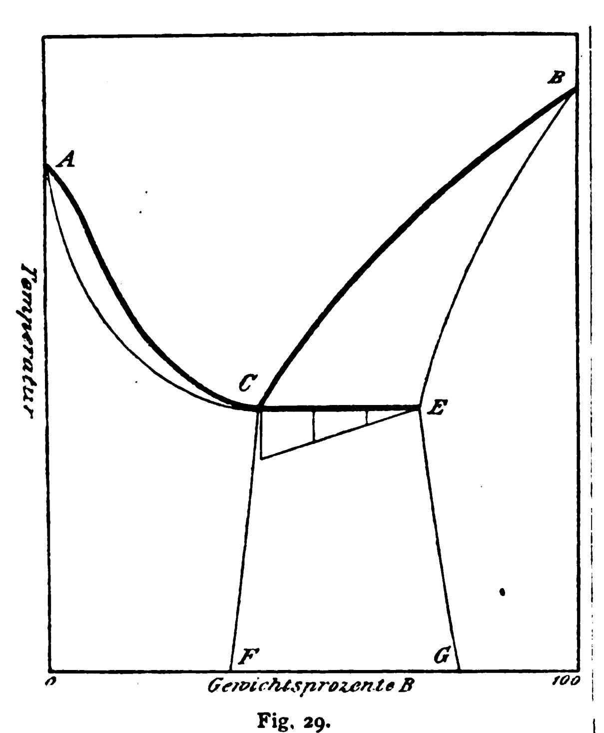


Fig. 29.

Man erhält also zwei verschiedene mögliche Typen (Fig. 27 und 29) für den Fall, daß die Schmelze, die mit den beiden gesättigten Mischkristallen im Gleichgewichte ist, dieselbe Zusammensetzung wie eine der Kristallarten hat.

Läßt man die Mischungslücke immer größer werden und damit die Punkte *D* und *E* (Fig. 28) immer weiter auseinander rücken, so kommt man zu dem Schmelzdiagramm Fig. 30 und schließlich, wenn *D* und *E* auf die Temperaturachsen fallen, zu dem unter I A (S. 19 u. f.) behandelten, durch Fig. 8a dargestellten Fall: „Vollständige Mischbarkeit im flüssigen, vollständige Nichtmischbarkeit im kristallisierten Zustande; keine Verbindung, keine polymorphe Umwandlung." Da absolute Nichtmischbarkeit aus theoretischen Gründen ausgeschlossen ist, so stellt prinzipiell Fig. 30 das gegenseitige Verhalten zweier Stoffe richtiger dar, als der Grenzfall Fig. 8a.

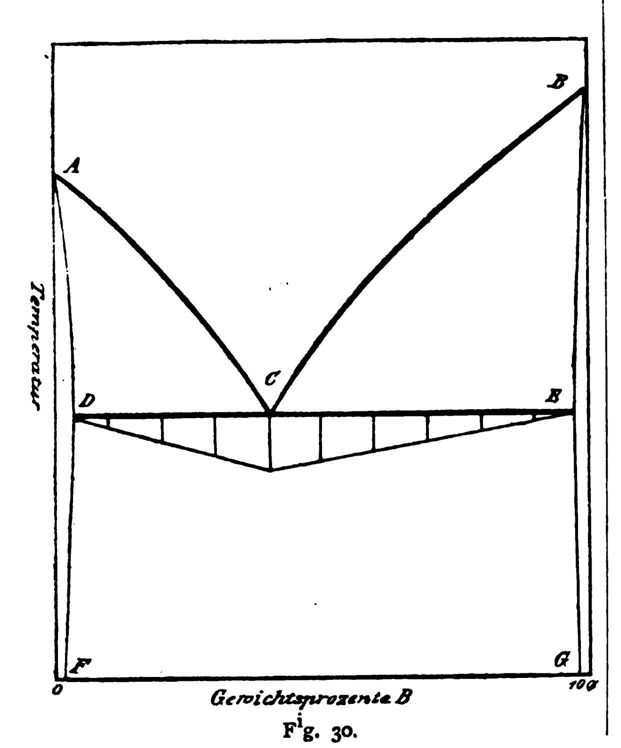


Fig. 30.

Der Hauptunterschied zwischen den Schmelzdiagrammen Fig. 28 und 30 gegenüber dem Schmelzdiagramm Fig. 8a besteht darin, daß nur im letzten Falle die Horizontale *DCE* durch das ganze Diagramm hindurch geht. Die Horizontale *DCE* wird in allen Fällen als eutektische Horizontale bezeichnet.

C. Auftreten mehrerer Mischungslücken bzw. chemischer Verbindungen.

Es ist schon S. 79 darauf hingewiesen, daß Isodimorphie das Auftreten mehrerer Mischungslücken im Gebiete des Kristallisierten bewirken kann. Zwei Schmelzdiagramme mit doppelter Mischungslücke sind durch die Fig. 31 und 32 dargestellt. Das Schmelzdiagramm Fig. 31 wird erhalten, wenn man zwei Schmelzdiagramme von dem durch Fig. 28 dargestellten Typus V in der S. 51 angegebenen Weise zu einem einzigen vereinigt. Aus ihm ergibt sich

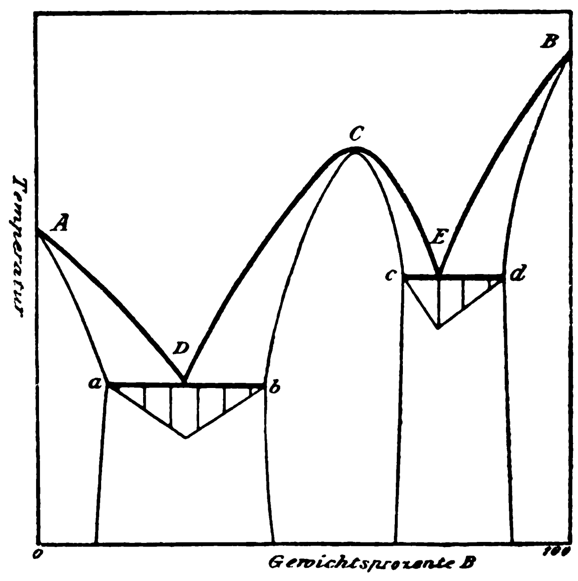


Fig. 31.

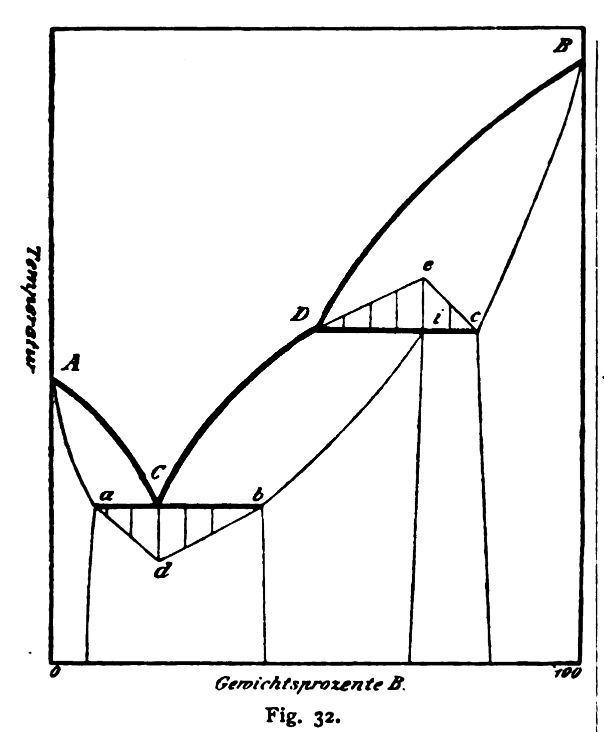


Fig. 32.

der unter I B (S. 51—52) behandelte, durch Fig. 10c dargestellte Fall als Grenzfall, wenn die Mischbarkeit im kristallisierten Zustande immer geringer und schließlich Null wird. Man ist auch bei vorhandener Mischbarkeit im kristallisierten Zustande im allgemeinen geneigt, die einheitlich erstarrende Kristallart von der Konzentration *C* (Fig. 31) als chemische Verbindung anzusehen (vgl. dazu jedoch III D S. 78—79).

Fig. 32 kann als eine Kombination der beiden Typen IV und V aufgefaßt werden. Auch die Kristallart *i* wird häufig als chemische Verbindung angesprochen, besonders dann, wenn ihr Lösungsvermögen für die beiden Komponenten praktisch Null ist. Man spricht in solchem Falle von einer unter Zersetzung, d. h. unter Ausscheidung einer Kristallart schmelzenden Verbindung. Doch zeigt im Gegensatze zu dem durch das Schmelzdiagramm Fig. 31 dargestellten Falle eine Mischung dieser Konzentration beim Schmelzen und Erstarren nicht das Verhalten eines Einstoffsystems (vgl. diese Zeitschr. **20**, 69, 1919).

D. Polymorphe Umwandlungen.

Da beim Auftreten polymorpher Umwandlungen die Verhältnisse recht verwickelt werden können, so sei auf die Abhandlung von Roozeboom[1]) „Umwandlungspunkte bei Mischkristallen" verwiesen.

1) Roozeboom, Zeitschr. f. phys. Chem. **30**, 413, 1899.

V. Es herrscht unvollständige Mischbarkeit im flüssigen und kristallisierten Zustande.

Der durch Fig. 33 dargestellte Fall ist dem

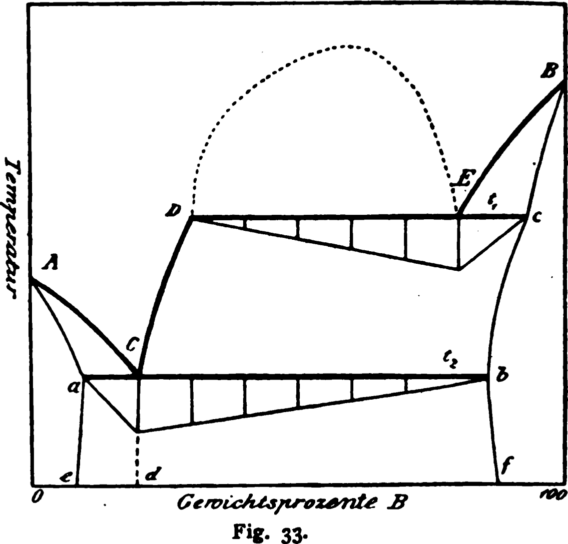


Fig. 33.

durch Fig. 15 dargestellten ganz analog, nur scheiden sich hier nicht die reinen Kristalle *A* und *B* aus, sondern solche, die *B* bzw. *A* gelöst haben.

VI. Ausscheidung nicht vollkommen stabiler Kristallarten.

Die bisherigen Auseinandersetzungen haben zur Voraussetzung, daß der Zustand des im Gleichgewichte befindlichen Systems in jedem Punkte des Konzentrations-Temperaturdiagramms eindeutig bestimmt ist. Diese Voraussetzung ist nicht immer erfüllt, vielmehr sind Fälle bekannt, daß bei gleicher Konzentration und gleicher Temperatur verschiedene Gleichgewichte auftreten, indem beispielsweise zwei verschiedene Kristallarten mit Schmelzen verschiedener Konzentration koëxistieren. Natürlich kommt diesen verschiedenen Gleichgewichten ein verschiedener Grad von Stabilität zu, nach Ablauf einer genügend langen Zeit müssen sich alle anderen Systeme in das stabilste umgewandelt haben, doch kann diese Umwandlung unter Umständen so langsam vor sich gehen, daß sie sich der Beobachtung entzieht. In solchen Fällen läßt die gegenseitige Lage der Umwandlungskurven den verschiedenen Stabilitätsgrad erkennen, da die Kurven des Systems geringerer Stabilität, weil unterkühlte Zustände darstellend, unterhalb von denen höherer Stabilität verlaufen müssen. Ob dem stabilsten der bekannten Systeme vollkommene

Stabilität zuzuschreiben ist, ist nicht zu entscheiden, doch kann man es solange annehmen, als kein System höherer Stabilität bekannt ist. Hiernach gelten die bisher erörterten Gesetzmäßigkeiten für jedes einzelne System, welchen Stabilitätsgrad es besitzen möge. Jedem der Systeme verschiedener Stabilität entspricht ein besonderes Schmelzdiagramm, nach welchem sich in dem betreffenden Falle die Erstarrung vollzieht. Der Zustand einer beliebigen Mischung ist eindeutig bestimmt durch Angabe der Konzentration, der Temperatur und des Diagramms, nach dem die Erstarrung erfolgt. Allerdings ist es nicht immer möglich, über den letzten Punkt eine eindeutige Aussage zu machen, denn häufig erfolgt die Erstarrung gleichzeitig nach verschiedenen Systemen, so daß man in den Schliffen der Reguli die den verschiedenen Systemen eigentümlichen Gefügebestandteile nebeneinander beobachten kann.

§ 4.

Dreistoffsysteme.

Zur Angabe der Zusammensetzung eines ternären Systems bedarf es der Angabe zweier Konzentrationen und demgemäß zur graphischen Darstellung derselben eines zweidimensionalen Gebildes. Aus diesem Grunde ist das Schmelzdiagramm eines ternären Systems nicht mehr in der Ebene, sondern nur noch im Raume darstellbar. Ein näheres Eingehen auf die hier obwaltenden Verhältnisse würde allerdings gegenüber dem binären Systeme eine größere Mannigfaltigkeit und Kompliziertheit der möglichen Typen ergeben, prinzipiell neue Gesichtspunkte würden jedoch dabei nicht zutage treten.

§ 5.

Zusammenhang zwischen Gefüge, Vorbehandlung und Eigenschaften der erstarrten Legierungen.

Mit Hilfe der im Vorstehenden geschilderten Methoden, der thermischen und mikrographischen, sind in verhältnismäßig kurzer Zeit eine größere Anzahl Schmelzdiagramme hauptsächlich binärer Systeme ausgearbeitet worden[1]). Die dadurch ermöglichte Erkenntnis des Zusammenhangs zwischen Struktur und Eigenschaften der erstarrten Mischungen haben umgekehrt neue Methoden zur Erforschung der Konstitution der Legierungen geliefert. Im allgemeinen sind die physikalischen Eigenschaften einer nicht aus einer einzigen Kristallart bestehenden Legierung die Mittelwerte aus den Eigenschaften der sie aufbauenden Kristallarten (vgl. dazu Nernst, Theoretische Chemie, 7. Auflage 1913, S. 101). Zur Kenntnis der Eigenschaften derartiger Legierungen ist die Kenntnis der Eigenschaften der in dem Systeme auftretenden Gefügebestandteile, also der Komponenten, der Verbindungen und der Endglieder der Mischkristallreihen hinreichend. Einige mechanische Eigenschaften, z. B. Zerreißfestigkeit und Härte, werden jedoch bis zu einem gewissen Grade von der Größe und Anordnung der einzelnen Gefügebestandteile abhängig sein. Daraus erklärt es sich, daß die eutektischen Mischungen in dieser Hinsicht eine gewisse Ausnahmestellung einnehmen, beispielsweise eine größere Härte zeigen können, als sich aus der ihrer Bestandteile berechnet[1]). Nach Kurnakow und Zemczuzny[2]) ist diese Erscheinung jedoch instabilen Zuständen (inneren Spannungen) zuzuschreiben.

Häufig jedoch bewirken schon geringe Zusätze fremder Stoffe weitgehende Veränderungen gewisser Eigenschaften der ursprünglichen Metalle. In solchen Fällen handelt es sich ausnahmslos um Bildung von Mischkristallen, d. h. der zugesetzte Stoff tritt nicht als neues Strukturelement in die Legierung ein, sondern bildet mit dem ursprünglichen Stoffe eine feste Lösung. Bezüglich der elektrischen Leitfähigkeit ist dies zuerst von Le Chatelier[3]) erkannt. Bilden zwei Metalle isomorphe Mischungen miteinander, so wird die Leitfähigkeit jedes durch den Zusatz des anderen beträchtlich erniedrigt, und zwar wirken die ersten Zusätze besonders stark. Handelt es sich um eine lückenlose Reihe von Mischkristallen, so hat die Kurve der Leitfähigkeit in Abhängigkeit von der Konzentration die in Fig. 34 angegebene Gestalt. Beim Vergleiche der Wirkungen verschiedener Elemente beim Lösen in Eisen kommt Benedicks[4]) zu dem Resultate, daß diese dem Atomgewicht umgekehrt proportional sei. Nach Kur-

1) Eine Zusammenstellung der Schmelzdiagramme der binären Metallegierungen auf Grund sorgfältiger kritischer Verwertung der bisherigen Untersuchungen gibt Bornemann in der Metallurgie von Bd. 6, 1909 ab. Diese Zusammenstellung erscheint auch in Buchform: Bornemann, „Die binären Metallegierungen". Halle a. S. 1. Lieferung 1909, 2. Lieferung 1912.

1) Sapoznikow u. Kanewsky, Chem. Zentralbl. 1908, I, 110.

2) Kurnakow u. Zemczuzny, Zeitschr. f. anorgan. Chem. 60, 1, 1908.

3) Le Chatelier, Revue générale des Sciences 6, 531, 1895; Contribution à l'étude des alliages, Paris 1901, S. 446.

4) Benedicks, Recherches physiques et physicochimiques sur l'acier au carbone, Upsala 1904.

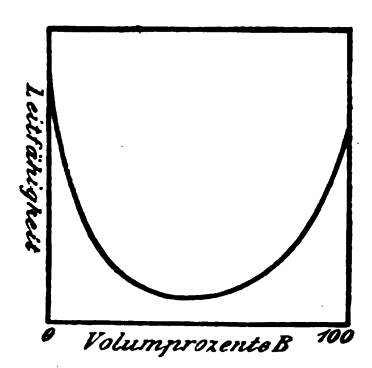


Fig. 34.

nakow und Zemczuzny[1]) soll zwischen der Härte und Leitfähigkeit der Legierungen ein sehr enger Zusammenhang bestehen, und sollen demgemäß für diese ähnliche Beziehungen gelten, wie für jene. Die Härte der reinen Substanz wird durch isomorphe Beimengungen erhöht. Bei lückenlosem Isomorphismus soll nun die Kurve der Härte in Abhängigkeit von der Konzentration ein Spiegelbild der Leitfähigkeitskurve (Fig. 34) darstellen, demnach gleichfalls ohne Knick verlaufen, und das Maximum der Härte soll sich bei derselben Konzentration befinden, wie das Minimum der Leitfähigkeit. Doch zeigte sich bei der Untersuchung der Nickel-Kobaltlegierungen[2]), daß dieses Gesetz jedenfalls nicht allgemein gültig sein kann, indem die Leitfähigkeitskurve den durch Fig. 34 angezeigten, die Härtekurve (nach Brinellschen Graden) jedoch einen ganz anderen Verlauf zeigte, als man nach Kurnakow und Zemczuzny[1]) erwarten sollte. Im Gegensatze zur Leitfähigkeit und Härte läßt sich das spezifische Volumen isomorpher Mischungen angenähert nach der Mischungsregel aus dem der Endglieder berechnen[3]). Zur Kenntnis dieser Eigenschaft genügt also wiederum die Kenntnis des spezifischen Volumens der Komponenten, der Endglieder der Mischkristallreihen und der im Systeme auftretenden Verbindungen.

Die für die technische Verwendung der Legierungen wichtigste chemische Eigenschaft ist ihre Beständigkeit gegen chemische Reagentien. Nach Borchers[4]) liegt das Maximum der Beständigkeit in vielen Fällen da, wo die wichtigsten Bestandteile der Legierung miteinander chemisch verbunden sind. Ein weiteres Beständigkeitsmaximum liegt bei solchen Legierungen, deren Bestandteile Mischkristalle bilden, in der Nähe der Sättigungskonzentration.

1) Kurnakow u. Zemczuzny, loc. cit.
2) Ruer u. Kaneko, Ferrum 10, 257, 1913.
3) Maey, Zeitschr. f. phys. Chem. 29, 119, 1899; 38, 292, 1901.
4) Borchers, Metallurgie 9, 638, 1912.

Dagegen zeigen Eutektika ein Maximum der Angreifbarkeit.

Die Eigenschaften vieler Metallegierungen sind nicht nur von ihrer Zusammensetzung, sondern auch von ihrer Vorgeschichte abhängig. Soweit es sich um die thermische Vorbehandlung, beispielsweise um Unterschiede in der Abkühlungsgeschwindigkeit auf gewöhnliche Temperatur handelt, lassen sich derartige Verschiedenheiten der Eigenschaften chemisch gleich zusammengesetzter Metallegierungen auf Verschiedenheiten der sie aufbauenden Kristallarten (ev. der Größe und Anordnung der Kristalle, s. o.) zurückführen. Es gelingt nämlich in vielen Fällen, durch rasche Abkühlung gewisse Gleichgewichtskurven zu überspringen und so Kristallarten in Temperaturgebiete hinüberzubringen, in denen sie nicht stabil sind (s. S. 53).

Soweit es sich um Unterschiede infolge mechanischer Bearbeitung (Kaltformgebung) handelt, stößt nach Tammann[1]) eine analoge Erklärung auf Schwierigkeiten, er führt die hierbei beobachteten, zum Teil recht erheblichen Eigenschaftsänderungen der Metalle[2]) auf die Entstehung von Gleitflächen zurück. Kurzes Erhitzen auf genügend hohe Temperatur beseitigt die Wirkung der Kaltformgebung. Nach Cohen und Inouye[3]) befinden sich alle Metalle, wie wir sie im täglichen Leben kennen, infolge der vorausgegangenen Bearbeitung in nicht vollkommen stabilem Zustande. Derselbe geht nicht nur durch Temperaturerhöhung, sondern gleichfalls durch Impfen in den den äußeren Verhältnissen entsprechenden stabilen Zustand über.

§ 6.

Das Verhalten der Metalle zueinander.

Die Frage, ob zwei Stoffe eine Verbindung miteinander eingehen oder nicht, wird durch das Schmelzdiagramm nicht immer mit Sicherheit beantwortet. Seine Aussagen beziehen sich nur auf einen bestimmten Druck und ein bestimmtes Temperaturintervall, ferner kann es nur solche Verbindungen anzeigen, die sich in kristallisierter Form ausscheiden. Endlich ist die Frage, ob eine durch Zusammentritt der Komponenten entstandene Kristallart wirklich einer chemischen Verbindung entspricht, bei Mischbarkeit im kristallisierten Zustande oft schwer zu entscheiden (s. S. 78). Da die Ver-

1) Tammann, Zeitschr. f. Elektrochemie 18, 584, 1912.
2) Vgl. dazu P. Goerens, Ferrum 10, 151, 1913.
3) Cohen u. Inouye, Zeitschr. f. phys. Chem. 71, 301, 1909.

bindungen der Metalle miteinander selbst wieder metallischen Charakter zeigen, so stehen sie den sog. Molekularverbindungen, wie den Salzhydraten, näher, als den Verbindungen der Metalle mit den Metalloiden, deren Eigenschaften sich häufig in außerordentlich hohem Grade von denen ihrer Bestandteile unterscheiden. Die Entstehung eines Stoffes ganz anderen Charakters war aber von jeher ein besonders sicheres, nicht zu übersehendes Anzeichen einer chemischen Vereinigung; es verliert, wie ersichtlich, seine Geltung für die Vereinigung der Metalle miteinander.

Trotz der Unsicherheit, die der Deutung der experimentellen Ergebnisse in dieser Hinsicht zuweilen anhaftet, hat die Ausarbeitung der Schmelzdiagramme die ersten und bisher einzigen einigermaßen sicheren und umfassenden Kenntnisse der binären Metallverbindungen ergeben. Dabei hat sich herausgestellt, daß beim Verhalten der Metalle in binären Mischungen zueinander die individuellen Eigenschaften der Elemente mit besonderer Deutlichkeit zutage treten[1]). So entsprechen die Formeln der binären Metallverbindungen im allgemeinen nicht den Forderungen der Valenzlehre und ließen sich bezüglich der Verbindungsfähigkeit der Elemente keine streng gültigen Gesetze, sondern nur einige nicht ohne Ausnahmen gültige Regeln aufstellen. Für die Fähigkeiten zur Bildung von Mischkristallen ist die Temperatur der Kristallisation bestimmender, als die chemische Analogie der Komponenten, und zwar begünstigt hohe Kristallisationstemperatur die Mischbarkeit im kristallisierten Zustande. Dementsprechend löst sich das Metall mit dem tiefer liegenden Schmelzpunkt in der Regel in erheblich größerer Menge in den Kristallen des Metalles mit dem höheren Schmelzpunkt, als das Metall mit dem höheren Schmelzpunkt in den Kristallen des Metalles mit dem tiefer liegenden Schmelzpunkt.

§ 7.

Das System Eisen-Kohlenstoff.

Zur Veranschaulichung der vorstehenden allgemeinen Ausführungen möge das Schmelzdiagramm der Eisen-Kohlenstofflegierungen dienen. Die Erforschung der Konstitution dieser Legierungen hat das Interesse stets in höchstem Maße in Anspruch genommen, in erster Linie deshalb, weil sie in gewerblicher Hinsicht bei weitem die wichtigsten Legierungen sind, in zweiter Linie aber auch, weil die Interpretation der beobachteten Vorgänge der Forschung ungewöhnliche Schwierigkeiten bereitet hat. Die Hauptursache dieser Schwierigkeiten liegt in der Neigung der Eisen-Kohlenstofflegierungen, zu instabilen Kristallarten zu erstarren und in diesem Zustande zu verharren. Selbst sehr langsam abgekühlte Legierungen befinden sich, wie die mikroskopische Untersuchung ihres Gefüges lehrt, nicht in völlig stabilem Zustande. Fig. 35 zeigt in 900facher



Fig. 35. Sehr langsam abgekühltes Eisen mit 4,37 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Ferrit, Graphit, Perlit.

Vergrößerung den mit alkoholischer Pikrinsäure geätzten Schliff einer Legierung mit 4,37 Proz. Kohlenstoff, deren Abkühlung aus dem Schmelzflusse bis auf Zimmertemperatur in etwa 24 Stunden erfolgt war. Sie enthält eine helle Grundmasse aus reinem Eisen, welche zum Teil von schwarzen dicken Graphitlamellen durchsetzt ist, außerdem aber noch einen Bestandteil von deutlich eutektischem Gefüge, der im Gegensatze zum Graphit erst nach erfolgter Ätzung sichtbar wird und daher keinen Graphit enthalten kann. Er wird als Perlit bezeichnet und besteht aus reinem Eisen und sog. Zementit, einem Eisenkarbid von der Formel Fe_3C. Im ganzen enthält der Regulus also drei Kristallarten, reines Eisen, Graphit und Zementit, und zwar nicht nur bei einer bestimmten Temperatur, sondern innerhalb eines Temperaturbereiches von mehreren 100 Graden. Nach der Phasenregel (s. diese Zeitschr. 20, 69, 1919) ist daher eine Kristallart zuviel vorhanden, es kann kein Gleichgewicht bestehen.

Zurzeit können unsere Kenntnisse über das Eisen-Kohlenstoffdiagramm bis zu einem Gehalte von etwas über 4 Proz. Kohlenstoff als gesichert erscheinen. In diesen Konzentrations-

1) Tammann, Zeitschr. f. Elektrochem. 14, 789. 1908. Vgl. auch die dort gegebenen Tabellen über das Verhalten der Metalle in binären Mischungen zueinander.

bereich fallen die technisch wichtigen Legierungen.

Den Nachweis der Polymorphie des Eisens verdankt man Osmond[1]). Indem er den verschiedenen allotropen Modifikationen verschiedene Eigenschaften, speziell verschiedene Härte, zuschrieb, stellte er eine Theorie der Härtung auf, welche als Allotropentheorie bezeichnet wurde. Diese Theorie sagt aus, daß der Vorgang der Härtung, welcher in der Erhitzung der betreffenden Legierung auf eine bestimmte Temperatur mit nachfolgender Abschreckung besteht, darauf beruht, daß durch die rasche Abkühlung die bei höherer Temperatur stabile Modifikation mehr oder weniger vollständig in das Gebiet gewöhnlicher Temperatur hinübergebracht wird. Dem Kohlenstoffgehalt des Stahles schreibt sie dabei nur eine die Umwandlungsgeschwindigkeit vermindernde Wirkung zu. Den Anhängern dieser Theorie, die als Allotropisten bezeichnet wurden, standen die Karbonisten gegenüber, welche die verschiedenen Formen des Kohlenstoffes als ausschließliche Ursache der verschiedenen Eigenschaften der Eisen-Kohlenstofflegierungen ansahen[2]). Einige von ihnen glaubten durch die Annahme, daß die „Härtungskohle" in Gestalt winziger Diamanten in die metallische Masse eingelagert sei, eine befriedigende Erklärung für die Wirkung des Kohlenstoffs auf die Härte des abgeschreckten Stahles zu geben. Die Frage nach dem Vorgange der Härtung zeitigte noch zwei für die Kenntnis der Eisen-Kohlenstofflegierungen besonders wichtige Untersuchungen, einmal eine Studie von Osmond[3]) über die Technik der Metallmikroskopie und die Konstitution der Eisen-Kohlenstofflegierungen, sodann eine Arbeit von Le Chatelier[4]) „Augenblicklicher Stand der Härtungstheorie", in der die Gleichartigkeit der Kristallisationsvorgänge in flüssigen und festen Lösungen betont und in Verbindung mit der Allotropentheorie in glücklichster Weise zur Erklärung der in erstarrten Eisen-Kohlenstofflegierungen stattfindenden Vorgänge herangezogen wurde.

Das erste Schmelzdiagramm der Eisen-Kohlenstofflegierungen verdankt man Roberts-

1) Osmond u. Werth, Théorie cellulaire des propriétés de l'acier. Ann. des mines (8), 8, 5, 1885; Osmond, Transformations du fer et du carbone dans les fers, les aciers et les fontes blanches. Paris 1888.

2) Arnold, Iron and Steel Institute 1891, I, 132.

3) Osmond, Méthode générale pour l'analyse micrographique des aciers au carbone. Bull. Soc. d'Encour. pour l'industrie nationale 1895, 480.

4) Le Chatelier, Etat actuel de la théorie de la trempe. Revue des Sciences, 15. Jan. 1897.

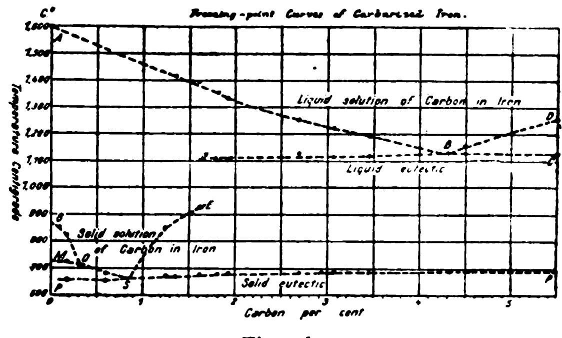


Fig. 36.

Austen[1]). Es ist durch Fig. 36 dargestellt und gibt eine rein empirische Zusammenfassung der bis zu jener Zeit hauptsächlich durch Roberts-Austens und Osmonds Arbeiten gewonnenen experimentellen Ergebnisse über die Erstarrungs- und Umwandlungsvorgänge in den Eisen-Kohlenstofflegierungen. Auf Grund dieser experimentellen Ergebnisse, der Lehre vom heterogenen Gleichgewichte und der Ergebnisse seiner theoretischen und experimentellen Studien über die Erstarrung und Umwandlung von Mischkristallen stellte Roozeboom[2]) im Jahre 1900 das durch Fig. 37 wiedergegebene

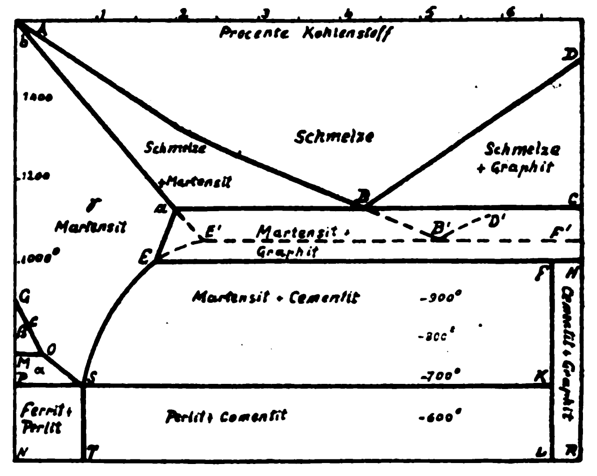


Fig. 37.

Zustandsdiagramm auf. Der wichtigste Fortschritt gegenüber dem Diagramm von Roberts-Austen besteht in Hinzufügung der *s*-Kurve *Aa* (s. S. 76), welche zu jedem Punkte der *l*-Kurve *AB* die Zusammensetzung der mit der betreffenden Schmelze im Gleichgewichte befindlichen Kristalle angibt und damit den Vorgang der Ausscheidung kohlenstoffhaltiger

1) Roberts-Austen, Fourth report to the alloys research committee, Proc. Inst. Mech. Eng. 1897, 31.

2) Roozeboom, Eisen und Stahl vom Standpunkte der Phasenlehre. Zeitschr. f. phys. Chem. 34, 437, 1900.

Eisenkristalle aus erkaltenden Schmelzen klarstellt. Bezüglich der Stabilitätsverhältnisse enthält das Diagramm die Annahme, daß oberhalb 1000° C Graphit stabil und Zementit instabil, unterhalb 1000° C das Entgegengesetzte der Fall sei und daß demnach bei 1000° C, der Temperatur der Horizontalen *EFH*, ein Stabilitätswechsel stattfinde, der sich bei der Abkühlung nach der Gleichung

Mischkristalle 1,8 Proz. C + Graphit = Eisenkarbid Fe_3C

vollziehe. Wenn diese thermisch nicht nachgewiesene Reaktion stattfände, so müßte in langsam abgekühlten Schmelzen weniger Graphit vorhanden sein, als in solchen, welche mit normaler Abkühlungsgeschwindigkeit erstarrten. Dem widerspricht jedoch die Erfahrung, welche lehrt, daß in Schmelzen gleicher Zusammensetzung der Graphitgehalt mit der Dauer der Abkühlung zunimmt. Auch ist es möglich, den in den erstarrten Eisen-Kohlenstofflegierungen enthaltenen Zementit durch längeres Erhitzen auf ca. 900° C mit nachfolgender langsamer Abkühlung (sog. Tempern) unter Ausscheidung von elementarem Kohlenstoff zum Teil zu zerlegen. Auf diesen Widerspruch wurde Roozeboom unmittelbar nach dem Erscheinen seiner Arbeit durch Le Chatelier[1]) und Stansfield[2]) und später durch Heyn[3]) hingewiesen. Das von Heyn bei dieser Gelegenheit vorgeschlagene Schmelzdiagramm, welches zwei Diagramme zu einem einzigen vereinigt, ist durch Fig. 38 dargestellt. Die voll ausgezogenen Linien gehören dem bei allen Temperaturen als stabil angesehenen Systeme Eisen-Graphit an, die gestrichelt gezeichneten ausschließlich dem als metastabil, d. h. nicht vollkommen stabil angesehenen Systeme Eisen-Zementit. Anscheinend liegen die dem stabilen Systeme angehörenden Kurven, soweit sie nicht wie die Kurve *AB* gleichzeitig dem metastabilen Systeme angehören, oberhalb der ihnen entsprechenden Kurven, welche zum metastabilen Systeme gehören (s. S. 105). Dennoch steht dieses Diagramm nicht in Einklang mit den vorausgesetzten Stabilitätsverhältnissen, was darauf zurückzuführen ist, daß die der Kristallisation des Graphit-Eutektikums *B* entsprechende Horizontale *a″aBc* bis zur Konzentration $a'' = 0$ Proz. C reicht, während die der Kristallisation des Zementit-Eutektikums *B′* entsprechende Horizontale *a′B′F* schon bei $a' =$ ca. 2 Proz. C endet. Das bedeutet nämlich, daß sich bei der Kristallisation nach dem stabilen Systeme längs der Schmelzkurve *AB* reines Eisen, bei der Kristallisation nach dem metastabilen Systeme längs der gleichen Schmelzkurve Eisenmischkristalle ausscheiden, deren Zusammensetzung durch die *s*-Kurve *Aa a′* angegeben wird. Nun ist die Schmelzpunktserniedrigung, die ein reiner Stoff (in diesem Falle das Eisen) durch Zusatz eines anderen (hier des Kohlenstoffs) erfährt, dann am größten, wenn sich der betreffende Stoff bei der Kristallisation in reiner Form ausscheidet. Wenn also die Kristallisation des Eisens aus kohlenstoffhaltigen Schmelzen sowohl in reiner Form als auch in Form von Mischkristallen möglich wäre, müßte die reine Form bei ihrer Ausscheidung instabil sein.

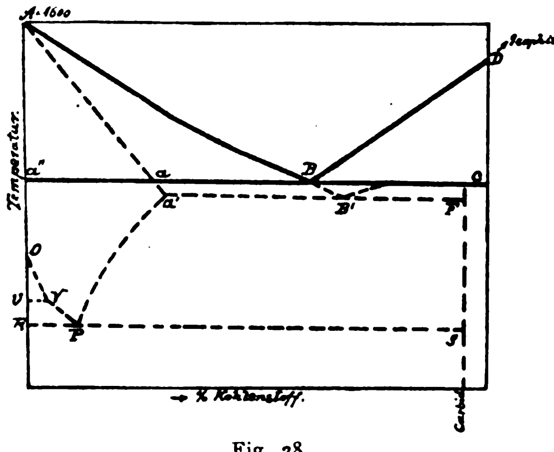


Fig. 38.

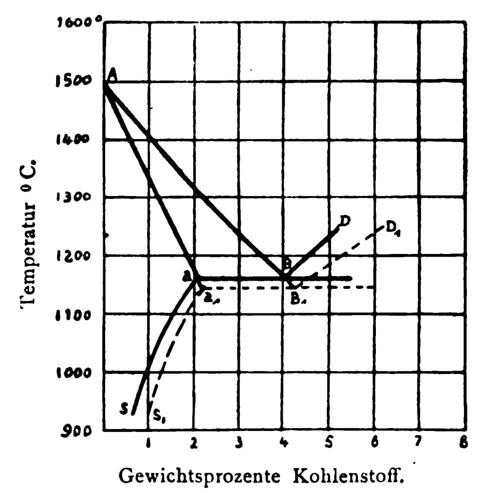


Fig. 39.

Das von Charpy[1]) vorgeschlagene, durch

1) Le Chatelier, Journ. Iron and Steel Institute II, 330, 1900; Bull. Soc. d'Encour. pour l'industrie nationale (5) 6, 661, 1900; Contribution à l'étude des alliages 379, 1901.

2) Stansfield, Journ. Iron and Steel Institute 1900, II, 317.

3) Heyn, Zeitschr. f. Elektrochemie 10, 491, 1904.

1) Charpy, Comptes rendus 141, 948, 1905.

Fig. 39 dargestellte Diagramm, welches wiederum die Vereinigung zweier Diagramme zu einem einzigen darstellt, ist einem solchen Einwande nicht ausgesetzt. Es beruht gleichfalls auf der Annahme, daß das System Eisen-Graphit bei allen Temperaturen stabil, das System Eisen-Zementit metastabil ist. Auch hier sind die ausschließlich dem metastabilen Systeme angehörenden Linien gestrichelt gezeichnet, die übrigen voll ausgezogen. Es ergeben sich so drei Linienpaare, die aus je einer oberen, voll ausgezogenen, ausschließlich dem Graphitsysteme angehörenden, und je einer unteren gestrichelten, ausschließlich dem Zementitsysteme angehörenden Linie bestehen. Es ist Charpy nicht gelungen, das Vorhandensein auch nur eines solchen Linienpaares experimentell nachzuweisen, er nahm jedoch an, daß die Erstarrungstemperatur aB des Graphit-Eutektikums nur wenig, und zwar nicht mehr als 10—15° über der von ihm zu etwa 1150° C bestimmten Erstarrungstemperatur a_1B_1 des Zementit-Eutektikums liege. Unter diesen Umständen ist es begreiflich, daß andere Forscher auf Grund der gleichen Erfahrungen zum entgegengesetzten Resultate kamen. In der Tat schloß Wüst[1]) aus seinen, zu der gleichen Zeit angestellten Versuchen, daß die Erstarrung des Graphit- und Zementit-Eutektikums bei der gleichen Temperatur, die er zu 1130° C bestimmte, erfolge, und daß die Gleichgewichtskurven des Graphitsystems praktisch die gleiche Lage haben, wie die des Zementitsystems. Die längst bekannte Tatsache, daß die graphithaltigen Eisen-Kohlenstofflegierungen bei etwas höherer Temperatur schmelzen, als die zementithaltigen, führte er auf Überhitzung zurück, da es sich beim Schmelzen zweiphasiger Systeme um einen Lösungsvorgang handelt und die beobachtete Temperaturdifferenz durch eine geringere Lösungsgeschwindigkeit des Graphits gegenüber der des Zementits in Eisen verursacht sein kann. Es ist in letzter Zeit gelungen, die Verschiedenheit der eutektischen Temperaturen im Graphit- und Zementitsysteme nachzuweisen und damit der dem Charpyschen Diagramm zugrunde liegenden Annahme ihren hypothetischen Charakter zu nehmen (s. unter 5). Die Differenz der beiden eutektischen Temperaturen beträgt nur 7° C.

1. Das reine Eisen[2]).

Der Schmelzpunkt des reinen Eisens liegt bei 1528° C[2]). Es erleidet bei der Abkühlung drei polymorphe Umwandlungen. Die bei der höchsten Temperatur beständige δ-Form wandelt sich bei 1401° C in die γ-Form um[1]). Diese Umwandlung ist praktisch reversibel, d. h. sie findet bei der Erhitzung und bei der Abkühlung bei nahezu gleicher Temperatur statt. Dagegen findet die bei der weiteren Abkühlung vor sich gehende γβ-Umwandlung bei niedrigerer Temperatur statt, als wenn sie sich beim Erhitzen in umgekehrter Richtung vollzieht. Da die als Hysteresis bezeichnete Differenz beider Temperaturen in hohem Maße von der Stärke des Wärmeflusses abhängig ist, so konnte sie durch ein diesem Umstande angepaßtes Verfahren wesentlich, bis auf weniger als 2° C, reduziert und dadurch die Gleichgewichtstemperatur der Umwandlung mit hinreichender Genauigkeit zu 906° C bestimmt werden[2]). Bei weiterer Abkühlung wird bei 769° C wieder Wärme frei, die der Umwandlung der β-Form in die bei tieferer Temperatur beständige ferromagnetische α-Form entspricht. Diese Umwandlung ist reversibel. Da die mit ihr verknüpfte Änderung der magnetischen Permeabilität nicht diskontinuierlich verläuft und zwischen den beiden Formen keine kristallographischen Unterschiede nachgewiesen sind, so hat man die Verschiedenheit der β- und α-Modifikation wiederholt in Zweifel gezogen[3]), zumal die Wärmetönung dieser Umwandlung sehr gering ist und der ihr entsprechende Haltepunkt

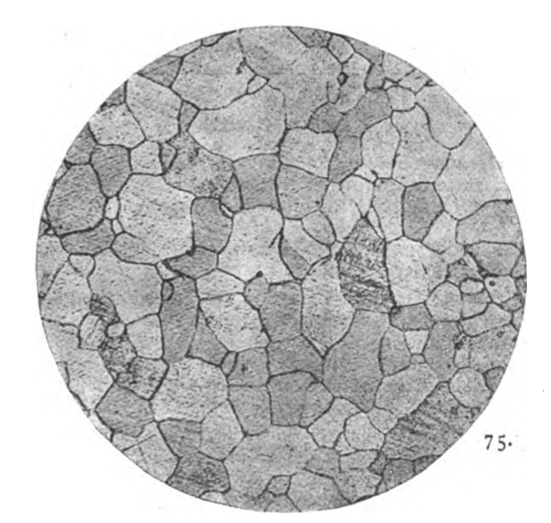


Fig. 40. Ferrit. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt.

1) Wüst, Metallurgie 3, 1, 1906; 6, 512, 1909; Zeitschrift f. Elektrochemie 15, 965, 1909.

2) Die Angaben beziehen sich auf ein elektrolytisch hergestelltes Eisen mit 0,009 Proz. C, 0,03 Proz. Cu und 0,001—0,002 Proz. S, sowie auf die Schmelzpunkte des Antimons (630,6° C), des Kupfers (1084° C) und Nickels (1451° C) als Temperaturfixpunkte.

1) Ruer und Klesper, Ferrum 11, 257, 1914.

2) Ruer und F. Goerens, Ferrum 13, 1, 1915.

3) Weiss, diese Zeitschr. 9, 358, 1908; Benedicks, Journ. Iron and Steel Institute 1912, II, 242.

daher bei zu schneller Abkühlung und nicht ganz reinem Material auf der Abkühlungs- und Erhitzungskurve nicht deutlich hervortritt. Doch zeigt die mit reinem Elektrolyteisen bei hinreichend langsamer Abkühlung und Erhitzung aufgenommene Zeittemperaturkurve bei der Temperatur der βα-Umwandlung einen, wenn auch schwachen, so doch deutlichen Haltepunkt, wodurch der verschiedene Wärmeinhalt der beiden Formen bei gleicher Temperatur und mithin ihre Verschiedenheit nachgewiesen ist[1]).

Außer den erwähnten erleidet das Eisen von seinem Erstarrungspunkte bis zu 200° C keine weiteren Umwandlungen, wenigstens keine, die mit nachweisbarer Wärmetönung verknüpft sind. Dem widersprechende Befunde sind auf einen ungenügenden Schutz des Eisens vor Oxydation zurückzuführen. Dies gilt auch für die beim Erhitzen bei 550—580° C zuweilen beobachtete Abnahme der magnetischen Permeabilität, sie tritt nicht mehr ein, wenn dem Eisen jede Gelegenheit, sich zu oxydieren, genommen wird[1]).

Das reine α-Eisen führt als Gefügebestandteil den Namen Ferrit. Fig. 40 zeigt in 75facher Vergrößerung das Bild eines mit alkoholischer Pikrinsäure geätzten Schliffes von reinem Eisen.

1) Ruer und F. Goerens, Ferrum 13, 1, 1915.

(Schluß folgt.)

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Marburg Dr. Georg Wiarda für Mathematik.

Ernannt: Der ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Göttingen Dr. Peter Debye in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Zürich, der ord. Professor für organische Chemie an der Universität Liverpool R. Robinson zum Leiter des Forschungslaboratoriums der British Dyestuffs Corp. Ltd. Haddersfield.

Ehrung: Die Königl. Schwedische Akademie Upsala wählte den ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität München Geh. Hofrat Dr. Arnold Sommerfeld zum auswärtigen Mitgliede.

Gestorben: Der frühere ord. Professor der Mathematik an der Universität Würzburg Dr. Eduard Selling, der Gründer des chemischen Laboratoriums in Wiesbaden Geheimrat Professor Heinrich Fresenius, der frühere Mitarbeiter der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt Dr. Erich Hupka (am 19. Juni 1919 bei der Rückkehr aus der australischen Kriegsgefangenschaft).

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 5. 1. März 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 7 am 15 März 1920.

INHALT:

J. R. Rydberg †.

Von Manne Siegbahn.

In den letzten Dezembertagen verschied nach einem längeren Krankenlager Professor J. R. Rydberg. Kaum einen Monat früher hatte er sich dem schwedischen Gesetze gemäß an seinem 65. Geburtstage von seinem Lehramt an der Universität Lund zurückgezogen. Wenn auch die wissenschaftliche Tätigkeit Rydbergs schon längst abgeschlossen war, so stehen doch seine wichtigsten Arbeiten eben jetzt im Brennpunkt des Interesses. Durch die geniale und glückliche Idee Bohrs ist die Physik dazu gekommen, das umfangreiche spektroskopische Material in tieferem Sinne zu verwerten. Die bahnbrechenden Arbeiten von Rydberg, besonders seine: „Recherches sur la Constitution des Spectres d'Emission des Eléments Chimiques“ in Kongl. Sv. Vetenskaps akad. Handl. Bd. 23, Nr. 11, 1889 haben den Weg zur Klärung der Geheimnisse des Atoms geebnet. Dieses Ziel und dessen große Bedeutung war stets für ihn der Ansporn bei seiner Verfolgung der spektroskopischen Gesetzmäßigkeiten.



Einen anderen Weg, dasselbe Ziel zu gewinnen, glaubte Rydberg durch Untersuchung des Zusammenhanges verschiedener physikalischer und chemischer Eigenschaften mit dem periodischen System der Elemente zu finden. Die in dieser Richtung begonnenen hoffnungsvollen Arbeiten wurden durch die Krankheit Rydbergs, noch ehe sie zum Abschluß gelangt waren, abgebrochen. Auch hat ja die theoretische Physik in ihrer gewaltigen Entwicklung während der letzten Jahre ganz andere Wege bei der Behandlung dieser Fragen eingeschlagen, welche, wie es scheint, ein weit tiefergehendes Verständnis zu erreichen gestatten. Eine Reihe von Rydberg bei seinen diesbezüglichen Untersuchungen gefundenen Gesetzmäßigkeiten werden trotzdem sicherlich von Nutzen sein. Seine letzte Arbeit auf diesem Gebiete, die noch, nachdem die Krankheit ihn schon ergriffen hatte, geschrieben ist, findet sich im Journal de Physique 1914 unter dem Titel: „Recherches sur le système des éléments“.

Ein näheres Eingehen auf die physikalischen Arbeiten Rydbergs dürfte nicht nötig sein, da sie schon Allgemeingut der Physik sind. Über den äußeren Verlauf des Lebens von Rydberg sei folgendes erwähnt: Geboren in Halmstad (Schweden) 1854, absolvierte er das dortige Gymnasium 1873 und wurde im selben Jahre an der Universität Lund immatrikuliert. Promoviert zum Dr. phil. in Mathematik im Jahre 1879, war er von 1880 bis 1882 Privatdozent in diesem Fache, bis er sich 1882 als Privatdozent für Physik habilitierte. Zum Professor für Physik in Lund wurde er 1901 ernannt. Von Auszeichnungen, die ihm zuteil wurden, sei erwähnt die Berufung zum Mitglied der „Royal Society" im Jahre 1919.

(Eingegangen 14. Januar 1920.)

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Störungstheorie des Heliumatoms.

(Auszug aus der Frankfurter Habilitationsschrift.)

Von A. Landé.

In einer vorläufigen Mitteilung[1]) in dieser Zeitschrift zeigte Verf., daß eine konsequente Anwendung der Quantentheorie auf die komplanaren und geneigten Kreis- und Ellipsenbahnen zweier Elektronen $-\varepsilon$ um einen Kern $+2\varepsilon$ Aussicht hat, das Serienspektrum des Heliums zu erklären. Im folgenden soll deshalb die exakte Störungstheorie und Quantelung des Heliumatoms ausgeführt werden. Die früheren Überschlagsrechnungen werden dabei teils bestätigt, teils berichtigt. Der Fortschritt gegen früher besteht in konsequenter Berücksichtigung der Bahnstörungen und einer neuen Quantelung der Bahnneigungen, welche nur **zwei** Seriensysteme (He_{I} und He_{II}) zuläßt, im Gegensatz zu der früher erhaltenen Vielfachheit.

§ 1. Wir wollen zunächst nur diejenigen Zustände des Atoms betrachten, bei denen beide Elektronen in einer Ebene im gleichen Drehsinn um den Kern $+2\varepsilon$ laufen[2]). Ihre Lagen sind dann bestimmt durch Polarkoordinaten r, φ (inneres) R, Φ (äußeres Elektron). Ihr gegenseitiger Abstand

$$\sqrt{r^2 + R^2 - 2rR\cos(\varphi - \Phi)} = \varrho$$

hängt nur von dem Winkelunterschied

$$\gamma = \varphi - \Phi \qquad (1)$$

ab. Die gegenseitige potentielle Energie ε^2/ϱ der beiden Elektronen ist in die nach Potenzen von r/R fortschreitende Reihe entwickelbar

$$\frac{\varepsilon^2}{\varrho} = \frac{\varepsilon^2}{R}\left(1 + \frac{r}{R}\cos\gamma + \frac{r^2}{R^2}\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} + \cdots\right) \qquad (1')$$

Daher wird die gesamte potentielle Energie des Systems mit dem Kern gleich

$$V = -\frac{2\varepsilon^2}{r} - \frac{\varepsilon^2}{R} + \frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{r}{R}\cos\gamma + \right.$$
$$\left. + \frac{r^2}{R^2}\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} + \cdots\right) \qquad (2)$$

und die gesamte kinetische Energie, bei Vernachlässigung der Elektronenmassen μ gegen die Kernmasse gleich

$$T = \frac{\mu}{2}[\dot r^2 + r^2\dot\varphi^2 + \dot R^2 + R^2\dot\Phi^2]. \qquad (2')$$

Die Lagrangeschen Gleichungen für eine Koordinate q

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q} - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial V}{\partial q}$$

auf die vier Koordinaten r, φ, R, Φ angewandt, führen zu den vier Bewegungsgleichungen:

$$\mu\ddot r - \mu r\dot\varphi^2 + \frac{2\varepsilon^2}{r^2} =$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{R^2}\left(\cos\gamma + \frac{2r}{R}\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} + \cdots\right) \qquad (3a)$$

$$2\mu\dot r\dot\varphi + \mu r\ddot\varphi =$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{R^2}\left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\varphi} + \frac{3r}{2R}\frac{\partial\cos^2\gamma}{\partial\varphi} + \cdots\right) \qquad (3b)$$

$$\mu\ddot R - \mu R\dot\Phi^2 + \frac{\varepsilon^2}{R^2} =$$
$$\frac{\varepsilon^2}{R}\cdot\frac{r}{R}\left(2\cos\gamma + \frac{3r}{R}\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} + \cdots\right) \qquad (3c)$$

$$2\mu\dot R\dot\Phi + \mu R\ddot\Phi =$$
$$-\frac{\varepsilon^2}{R}\frac{r}{R}\left(\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\Phi} + \frac{3r}{2R}\frac{\partial\cos^2\gamma}{\partial\Phi} + \cdots\right). \qquad (3d)$$

1) A. Landé, Das Serienspektrum des Heliums, diese Zeitschr. 20, 228, 1919.

2) Komplanare Gegenrotation würde das Vorzeichen der Störungen 1. Ordnung umkehren, entgegen der Beobachtung.

Wären keine gegenseitigen Bahnstörungen vorhanden, so würden die beiden Elektronen gewisse ungestörte, in der Astronomie als intermediär bezeichnete Bahnen beschreiben. Die wirklichen Bahnen sind dann als Störungen solcher intermediären Bahnen zu behandeln.

Die Verhältnisse weichen hier insofern von den astronomischen ab, als der Kern zwar wegen seiner überwiegenden Masse als ruhend betrachtet werden darf, aber seine Kraft auf die Planeten dieselbe Größenordnung wie die gegenseitigen Störungskräfte der Planeten unter sich besitzt.

Als intermediäre Bahnen nehmen wir hier reine Kreisbahnen

$$r = \mathring{r}, \quad \varphi = \mathring{\omega} t, \qquad R = \mathring{R}, \quad \Phi = \mathring{\Omega} t \tag{4}$$

an, als Lösungen der Gleichungen (3), wenn deren rechte Seiten gleich Null gesetzt werden. Man erhält dann die intermediären Beziehungen

$$\mu \mathring{r} \mathring{\omega}^2 = 2 \varepsilon^2 / \mathring{r}^2, \qquad \mu \mathring{R} \mathring{\Omega}^2 = \varepsilon^2 / \mathring{R}^2 \tag{4'}$$

und eine kleine Größe $\mathring{\varrho}$

$$\mathring{\varrho} = 2 \mathring{r} / \mathring{R} = (4 \mathring{\Omega} / \mathring{\omega})^{2/3}. \tag{4''}$$

Um durch sukzessive Näherung Lösungen $r(t)$, $\varphi(t)$, $R(t)$, $\Phi(t)$ von (3) zu finden, welche als Störungen reiner Kreisbahnen aufzufassen sind, setzen wir $r(t)$ usw. als Fouriersche Reihen nach der Winkeldifferenz $(\omega - \Omega)t$ an:

$$\begin{aligned} r &= r_0 + r_1 \cos(\omega - \Omega)t + r_2 \cos 2(\omega - \Omega)t + \cdots \\ \varphi &= \omega t + \varphi_1 \sin(\omega - \Omega)t + \varphi_2 \sin 2(\omega - \Omega)t + \cdots \\ R &= R_0 + R_1 \cos(\omega - \Omega)t + R_2 \cos 2(\omega - \Omega)t + \cdots \\ \Phi &= \Omega t + \Phi_1 \sin(\omega - \Omega)t + \Phi_2 \sin 2(\omega - \Omega)t + \cdots \end{aligned} \tag{5}$$

deren Koeffizienten $r_0 r_1 r_2$ usw. unten näher bestimmt werden. Da sich die Koeffizienten der Sinusglieder von r und R und der Cosinusglieder von ω und Φ als verschwindend herausstellen würden, sind sie in dem Ansatz (5) gleich fortgelassen. Zur Abkürzung wollen wir zuweilen statt (5) schreiben

$$\left.\begin{aligned} r &= r_0 + \bar{r} + \bar{\bar{r}} + \cdots, \\ R &= R_0 + \bar{R} + \bar{\bar{R}} + \cdots, \\ \varphi &= \varphi_0 + \bar{\varphi} + \bar{\bar{\varphi}} + \cdots, \\ \Phi &= \Phi_0 + \bar{\Phi} + \bar{\bar{\Phi}} + \cdots, \end{aligned}\right\} \tag{5'}$$

so daß die Größe

$$\gamma = \varphi - \Phi$$

aus (1) die Form

$$\left.\begin{aligned} &\gamma = \gamma_0 + \bar{\gamma} + \bar{\bar{\gamma}} + \cdots \\ \text{mit} \quad &\gamma_0 = (\omega - \Omega) t, \\ &\bar{\gamma} = (\varphi_1 - \Phi_1) \sin \gamma_0, \end{aligned}\right\} \tag{5''}$$

usw. erhält. Die auf der rechten Seite von (3) vorkommenden Größen haben daher die Entwicklungen (6) (6')

$$\begin{aligned} &\cos\gamma = \cos\gamma_0 - \bar{\gamma}\sin\gamma_0 \\ &\frac{\partial \cos\gamma}{\partial\varphi} = -\sin\gamma = -\sin\gamma_0 - \bar{\gamma}\cos\gamma_0 = -\frac{\partial\cos\gamma}{\partial\Phi} \\ &\cos^2\gamma = \frac{1 + \cos 2\gamma}{2} = \tfrac{1}{2}(1 + \cos 2\gamma_0 - 2\bar{\gamma}\sin 2\gamma_0) \\ &\frac{\partial\cos^2\gamma}{\partial\varphi} = -\sin 2\gamma = \\ &= -\sin 2\gamma_0 - 2\bar{\gamma}\cos 2\gamma_0 = -\frac{\partial\cos^2\gamma}{\partial\Phi} \end{aligned} \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2}\left(1 - \frac{2\bar{r}}{r_0} + 3\left(\frac{\bar{r}}{r_0}\right)^2 - 2\frac{\bar{\bar{r}}}{r_0}\right) \\ &\text{mit} \quad \bar{r} = r_1\cos\gamma_0, \quad \bar{\bar{r}} = r_2\cos 2\gamma_0 \\ &\frac{1}{R^2} = \text{entsprechend.} \end{aligned}\right\} \tag{6'}$$

Die Größen $r_0 R_0 \omega \Omega$ in (5) sind übrigens verschieden von den intermediären Werten $\mathring{r}\, \mathring{R}\, \mathring{\omega}\, \mathring{\Omega}$ aus (4), (4'), (4''). Bedeutet aber $[\varrho^n]$ eine Größe $n$ter Ordnung in der kleinen Größe ϱ (4''), so wird statt (4') (4'')

$$\begin{aligned} \frac{2\varepsilon^2}{r_0^2} &= \mu r_0 \omega^2 (1 + [\varrho_0^n]), \\ \frac{\varepsilon^2}{R^2} &= \mu R_0 \Omega^2 (1 + [\varrho_0^n]) \end{aligned} \tag{7}$$

$$\varrho_0 = \frac{2 r_0}{R_0} = \left(\frac{4\Omega}{\omega}\right)^{2/3} (1 + [\varrho_0^n]) = \mathring{\varrho}(1 + [\varrho_0^n]) \tag{7'}$$

worin der Exponent n sich unten (Gl. 15) zu $n = 4/3$ herausstellen wird.

Nach der klein anzunehmenden Größe

$$\varrho_0 = (2 r_0 / R_0)^{2/3}$$

sollen im folgenden die Störungen entwickelt werden.

Wir setzen nun den Ansatz (5), (5') in die Bewegungsgleichungen (3) ein und erhalten bis auf Glieder höherer Ordnung:

$$\begin{aligned} &\mu[(\ddot{r}_0 - r_0\dot{\varphi}_0^2) + (\ddot{\bar{r}} - \bar{r}\dot{\varphi}_0^2 - 2 r_0 \dot{\varphi}_0 \dot{\bar{\varphi}}) + \\ &+ (\ddot{\bar{\bar{r}}} - \bar{\bar{r}}\dot{\varphi}_0^2 - 2\dot{\varphi}_0 \bar{r}\dot{\bar{\varphi}}^2 - r_0 \dot{\bar{\varphi}}^2 - 2 r_0 \dot{\varphi}_0 \dot{\bar{\bar{\varphi}}})] + \\ &+ \frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}\left[1 - \frac{2\bar{r}}{r_0} + \frac{3\bar{r}^2}{r_0^2} - \frac{2\bar{\bar{r}}}{r_0}\right] = \\ &- \frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\left[\cos\gamma_0 - \bar{\gamma}\sin\gamma_0 - 2\frac{\bar{R}}{R_0}\cos\gamma_0 - \right. \\ &\left. - \frac{2 r_0}{R_0}\,\frac{1 + \cos 2\gamma_0}{4}\right] \end{aligned} \tag{8a}$$

$$\begin{aligned} &\mu[(2\dot{\varphi}_0\dot{\bar{r}} + r_0\ddot{\bar{\varphi}}) + (2\dot{\bar{r}}\dot{\bar{\varphi}} + 2\dot{\varphi}_0\dot{\bar{\bar{r}}} + r_0\ddot{\bar{\bar{\varphi}}} + \\ &+ \bar{r}\dot{\bar{\varphi}})] = -\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\left(1 - 2\frac{\bar{R}}{R_0}\right)(-\sin\gamma_0 - \\ &- \bar{\gamma}\cos\gamma_0 - \tfrac{3}{2}\frac{r_0}{R_0}\sin 2\gamma_0) \end{aligned} \tag{8b}$$

$$\mu[(\ddot{R}_0-R_0\dot{\Phi}_0^2)+(\ddot{\bar{R}}-\bar{R}\dot{\Phi}_0^2-2R_0\dot{\Phi}_0\dot{\bar{\Phi}})+$$
$$+(\ddot{\bar{\bar{R}}}-\bar{\bar{R}}\dot{\Phi}_0^2-2\dot{\Phi}_0\bar{R}\dot{\bar{\Phi}}-R_0\dot{\bar{\Phi}}^2-2R_0\dot{\Phi}_0\dot{\bar{\bar{\Phi}}})]+$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\left[1-2\frac{\bar{R}}{R_0}+3\frac{\overline{R^2}}{R_0^2}-2\frac{\bar{\bar{R}}}{R_0}\right]=$$
$$+\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0}2\cos\gamma_0 \qquad (8\,c)$$

$$\mu[(2\dot{\Phi}_0\dot{\bar{R}}+R_0\ddot{\bar{\Phi}})+(2\dot{\bar{R}}\dot{\bar{\Phi}}+2\dot{\Phi}_0\dot{\bar{\bar{R}}}+$$
$$+R_0\ddot{\bar{\bar{\Phi}}}+\bar{R}\ddot{\bar{\Phi}})]=-\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0}\sin\gamma_0. \qquad (8\,d)$$

Hier kann man die zeitlich konstanten Glieder zusammenfassen und für sich gleich Null setzen [s. u. Gl. (12a), (12c)], ebenso die Glieder mit dem Faktor $\cos\gamma_0$ bzw. $\sin\gamma_0$ [Gl. (9)] und die Glieder mit dem Faktor $\cos 2\gamma_0$ bzw. $\sin 2\gamma_0$ [Gl. (16)]. Dabei ist also z. B.

$$\bar{\gamma}\sin\gamma_0=(\varphi_1-\Phi_1)\sin^2\gamma_0=(\varphi_1-\Phi_1)\frac{1-\cos 2\gamma_0}{2}$$

mit dem Bestandteil $(\varphi_1-\Phi_1)\frac{1}{2}$ zu den Konstanten, mit dem Bestandteil

$$(\varphi_1-\Phi_1)\frac{\cos 2\gamma_0}{2}$$

zu den Gliedern mit $\cos 2\gamma_0$ zu schlagen. Da auf der rechten Seite von (8a), (8c) nur konstante und Cosinusglieder stehen bleiben, auf der rechten Seite von (8b), (8d) nur Sinusglieder und keine konstanten Glieder, ist die Fortlassung der Sinus- bzw. Cosinusglieder in dem Ansatz (5) gerechtfertigt; man erhält aus (8a) und (8c) je drei für sich zu erfüllende Gleichungen, aus (8b) und (8d) je zwei, im ganzen zehn simultane Gleichungen zur Bestimmung der zehn unbekannten Fourier-Koeffizienten

$$r_0\; r_1\; r_2\; \varphi_1\; \varphi_2\; R_0\; R_1\; R_2\; \Phi_1\; \Phi_2$$

als Funktionen der frei bleibenden Größen ω und Ω, die erst durch zwei Quantenbedingungen später festgelegt werden.

§ 2. Wir stellen zunächst die vier Gleichungen mit dem gleich Null gesetzten Faktor von $\cos\gamma_0$ bzw. $\sin\gamma_0$ zusammen (9a) bis (9d):

$$\frac{r_1}{r_0}\left(\mu r_0(\omega-\Omega)^2+\mu r_0\omega^2+2\cdot\frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}\right)+\varphi_1 2\mu r_0\omega(\omega-\Omega)=+\frac{\varepsilon^2}{R_0^2} \qquad (9\,a)$$

$$\frac{r_1}{r_0}\cdot 2\mu r_0\omega(\omega-\Omega) \qquad +\varphi_1\mu r_0(\omega-\Omega)^2 \quad =-\frac{\varepsilon^2}{R_0^2} \qquad (9\,b)$$

$$\frac{R_1}{R_0}\left(\mu R_0(\omega-\Omega)^2+\mu R_0\Omega^2+2\cdot\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\right)+\Phi_1 2\mu R_0\Omega(\omega-\Omega)=-2\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0} \qquad (9\,c)$$

$$\frac{R_1}{R_0}\cdot 2\mu R_0\Omega(\omega-\Omega) \qquad +\Phi_1\mu R_0(\omega-\Omega)^2 \quad =+\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0} \qquad (9\,d)$$

(9c), (9d) ergeben mit Benutzung von (7), (7′) die Lösungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{R_1}{R_0}&=-\tfrac{1}{16}\varrho_0^4+\cdots,\\ \Phi_1&=\tfrac{1}{32}\varrho_0^4\cdots\end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Der periodische Teil $R_1\cos\gamma_0$ und $\Phi_1\sin\gamma_0$ von R und Φ ist also von vierter Ordnung verschwindend klein gegen den aperiodischen Teil R_0 und $\Phi_0=\Omega t$. Die Bahn des äußeren Elektrons ist also auch im gestörten Zustand (nahezu) eine Kreisbahn, freilich mit einem geänderten Radius $R_0 \mp \mathring{R}$ und $\Omega \mp \mathring{\Omega}$. Anders liegt der Fall bei dem inneren Elektron, dessen Bahn stark verzerrt wird. Multipliziert man nämlich (9b) mit $2\omega/\omega-\Omega$ und subtrahiert von (9a), so erhält man bei Vernachlässigung von Ω^2 neben ω^2

$$\frac{r_1}{r_0}=-\tfrac{3}{2}\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\cdot\frac{1}{\mu r_0\omega\Omega-\left(\dfrac{2\varepsilon^2}{r_0}-\mu r_0\omega^2\right)}.$$

Dividiert man hier Zähler und Nenner durch $2\times 2\varepsilon^2/r_0^2$ (7), so wird bis auf einen Faktor $1+[\varrho_0^{3/2}]$

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_1}{r_0}&=-\tfrac{3}{2}\frac{\varrho_0^2}{2(\varrho_0^{3/2}-\eta)},\\ \varphi_1&=-2\frac{r_1}{r_0}(1+[\varrho_0^{3/2}]),\end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

wenn

$$\eta=4\left(1-\frac{\mu r_0\omega^2}{2\varepsilon^2/r_0^2}\right) \qquad (11')$$

gesetzt wird. Der in η auftretende Fourier-Koeffizient r_0 wird erst simultan mit den zwei Gleichungen bestimmbar, welche durch Nullsetzen des konstanten Teils von (8a) und (8c) erhalten werden[1]). Diese Gleichungen heißen

$$\mu\left\{r_0\omega^2+r_0\varphi_1^2(\omega-\Omega)^2\tfrac{1}{2}+r_1\varphi_1\omega(\omega-\Omega)\right\}=$$
$$=\frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}\left(1+\tfrac{3}{2}\frac{r_1^2}{r_0^2}\right)-\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\left\{\frac{R_1}{R_0}+\right.$$
$$\left.+\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\Phi_1)-\tfrac{1}{2}\frac{r_0}{R_0}\right\} \qquad (12\,a)$$

1) Man darf in (11) nicht für η näherungsweise den intermediären Wert $\mathring{\eta}=0$ setzen, der zu

$$r_1/r_0=-\frac{3}{4}\sqrt{\varrho_0}$$

führen würde. Denn es stellt sich der gestörte Wert η größer als sein Addend $\varrho_0^{3/2}$ heraus. Dieser Fehler wurde in der nach dem Muster der Dispersionstheorie durchgeführten Rechnung (A. Landé, l. c.) implicite gemacht, und fälscht auch die allgemeinen Dispersionsformeln von Sommerfeld (Elster-Geitel-Festschrift) für den Fall, daß der Elektronenring aus einem Elektron besteht.

$$\mu\{R_0\Omega^2+R_0\Phi_1^2(\omega-\Omega)^2\cdot\tfrac{1}{2}+R_1\Phi_1\Omega(\omega-\Omega)\}= -\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}+\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0}\Big\{3\frac{R_1}{R_0}+(\varphi_1-\Phi_1)- -\tfrac{3}{4}\frac{r_0}{R_0}-\frac{r_1}{r_0}\Big\}. \qquad (12c)$$

Wegen der Kleinheit (10) von R_1/R_0 und Φ_1 und der nach (11) angenäherten Beziehung

$$\varphi_1=-2\,r_1/r_0$$

wird daraus

$$\Big(\frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}-\mu r_0\omega^2\Big)+\frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}\frac{3}{2}\frac{r_1^2}{r_0^2}+ +\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\Big(\frac{r_1}{r_0}+\frac{1}{2}\frac{r_0}{R_0}\Big)=0 \qquad (13a)$$

$$\Big(\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}-\mu R_0\Omega^2\Big)- -\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\frac{r_0}{R_0}\Big(\frac{3}{4}\frac{r_0}{R_0}+3\frac{r_1}{r_0}\Big)=0. \qquad (13c)$$

Durch (11′) wird aus (13a)

$$\eta+6\frac{r_1^2}{r_0^2}+\tfrac{1}{2}\varrho_0^2\frac{r_1}{r_0}+\tfrac{1}{8}\varrho_0^3=0+[\varrho_0^4] \qquad (11'')$$

(11′), (11″) sind zwei Gleichungen für die beiden Unbekannten η und r_1/r_0, welche gelöst werden durch

$$\left.\begin{aligned}\eta&=-\tfrac{3}{2}\varrho_0^{4/3}+\tfrac{3}{8}\varrho_0^{8/3}-\frac{2}{27}\varrho_0^{8/3}\cdots\\ \frac{r_1}{r_0}&=-\tfrac{1}{2}\varrho_0^{8/3}+\tfrac{1}{6}\varrho_0^{8/3}+[\varrho_0^{7/3}],\\ \varphi_1&=-2\frac{r_1}{r_0}\end{aligned}\right\}\qquad (14)$$

also nach (11′) und (13c)

$$\frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}-\mu r_0\omega^2=\frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}\Big(-\tfrac{3}{8}\varrho_0^{4/3}+ +\tfrac{1}{6}\varrho_0^{8/3}-\frac{1}{54}\varrho_0^{8/3}\Big)$$

$$\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}-\mu R_0\Omega^2=\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\Big(\tfrac{3}{4}\varrho_0^{8/3}+ +\tfrac{1}{6}\varrho_0^{11/3}+\frac{3}{16}\varrho_0^2\Big), \qquad (15)$$

abweichend von den intermediären Beziehungen (4′).

Die erhaltenen Werte $r_1:r_0$ und φ_1 bedeuten eine Verzerrung der inneren Elektronenbahn, nämlich eine exzentrische Verschiebung von der jeweiligen Lage des äußeren Elektrons fortgewendet. Ihr Effekt ist eine scheinbare Verstärkung der Kernladungswirkung auf das äußere Elektron.

Nachdem durch (10), (14), (15) die Fourier-Koeffizienten $r_0\, r_1\, R_0\, R_1\, \varphi_1\, \Phi_1$ der Reihen (5) bestimmt sind, bleibt noch übrig, auch $r_2\varphi_2$ $R_2\,\Phi_2$ zu bestimmen. Es wird sich aber zeigen, daß letztere Koeffizienten in der Energie des gestörten Systems keine Rolle spielen, soweit die hier erstrebte Näherung verfolgt wird. Trotzdem wollen wir der Vollständigkeit halber die Gleichungen für $r_2\,\varphi_2\,R_2\,\Phi_2$ aufstellen. Sie werden erhalten durch Nullsetzen des Faktors von $\cos 2\gamma_0$ bzw. $\sin 2\gamma_0$ in (8) und heißen (16a) (16b):

$$\frac{r_2}{r_0}\Big[-4\mu(\omega-\Omega)^2r_0-\mu\omega^2r_0-2\frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}\Big]+\varphi_2[-4\mu\omega(\omega-\Omega)r_0]= -\mu\omega(\omega-\Omega)r_1\varphi_1+\mu(\omega-\Omega)^2r_0\varphi_1^2\cdot\tfrac{1}{2}+\frac{2\varepsilon^2}{r_0^2}\Big(-\frac{3}{2}\frac{r_1^2}{r_0^2}\Big)+\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\Big(\frac{R_1}{R_0}--\tfrac{1}{2}(\varphi_1-\Phi_1)-\frac{3}{2}\frac{r_0}{R_0}\Big) \qquad (16a)$$

$$\frac{r_2}{r_0}[-4\mu\omega(\omega-\Omega)r_0]+\varphi_2[-4\mu(\omega-\Omega)^2r_0]=\tfrac{3}{2}\mu(\omega-\Omega)^2r_1\varphi_1-\frac{\varepsilon^2}{R_0^2}\Big(\frac{R_1}{R_0}-(\varphi_1-\Phi_1)\tfrac{1}{2}-\frac{3}{2}\frac{r_0}{R_0}\Big) \qquad (16b)$$

und zwei entsprechende Gleichungen (16c) und (16d) für R_2 und Φ_2.

(16a, b) gehen in unserer Näherung über in

$$7\cdot\frac{r_2}{r_0}+4\varphi_2=\tfrac{3}{8}\varrho_0^{4/3}$$

$$4\frac{r_2}{r_0}+4\varphi_2=\tfrac{3}{4}\varrho_0^{4/3}$$

mit den angenäherten Lösungen

$$\left.\begin{aligned}\frac{r_2}{r_0}&=-\tfrac{1}{8}\varrho_0^{4/3},\\ \varphi_2&=-\frac{5}{2}\frac{r_2}{r_0}\end{aligned}\right.\qquad (17)$$

während die Werte $\frac{R_2}{R_0}$ und Φ_2 in noch höherem Grade verschwinden als $R_1 R_0$ und Φ_1 in (18).

Durch (10), (14), (17) sind jetzt die Fourier-Koeffizienten der gestörten Bahnen (5) als Funktionen von r_0, R_0 und ϱ_0 bestimmt, r_0 und R_0 selbst sind durch (15) als Funktionen von ω, Ω und ϱ_0 gegeben. Die gestörten Bahnen hängen also letzten Endes von dem Wert zweier Parameter ab, z. B. von ω und Ω oder auch r_0 und R_0.

§ 3. Die Energie des gestörten Elektronensystems teilen wir ein in

1. Energie des inneren Elektrons W_i = kinetische Energie + potentielle Energie gegen den Kern,

2. Energie des Außenelektrons W_a = kinetische Energie + potentielle Energie gegen den Kern und das im Kern gedachte innere Elektron,

3. potentielle Energie V_{ia} der Störungskräfte. Es wird also nach (2), (2')

$$\left.\begin{aligned} W_i &= \frac{\mu}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2) - \frac{2\varepsilon^2}{r} \\ W_a &= \frac{\mu}{2}(\dot{R}^2 + R^2\dot{\Phi}^2) - \frac{\varepsilon^2}{R} \\ V_{ia} &= \frac{\varepsilon^2}{R}\left(\frac{r}{R}\cos\gamma + \frac{r^2}{R^2}\,\frac{3\cos^2\gamma - 1}{2} + \cdots\right). \end{aligned}\right\} \quad (18)$$

Setzt man in W_i die Fourier-Reihen (5) ein, ohne die von uns berechneten speziellen Werte $r_0\, r_1\, r_2\, \varphi_1\, \varphi_2$ zu benutzen, so erhält man W_i in der Form

$$W_i = \text{konst.} + f_1(r_1\varphi_1)\cdot\cos\gamma_0 + \\ + f_2(r_1\varphi_1 r_2\varphi_2)\cos 2\gamma_0.$$

Setzt man in die dabei auftretenden Funktionen f_1 und f_2 die (angenäherten) Beziehungen (14), (17)

$$\varphi_1 = -2\frac{r_1}{r_0}, \quad \varphi_2 = -\frac{5}{2}\frac{r_2}{r_0} \qquad (18')$$

ein, so verschwinden f_1 und f_2, und es bleibt als konstanter Teil übrig

$$W_i = \frac{\mu}{2}r_0^2\omega^2 - \frac{2\varepsilon^2}{r_0} - \frac{\mu}{2}r_0^2\omega^2\cdot 2\frac{r_1^2}{r_0^2} = \\ -\frac{\varepsilon^2}{r_0}\left(1 + 2\eta + 2\frac{r_1^2}{r_0^2}\right)$$

oder mit Benutzung von (14) der Wert

$$W_i = -\frac{\varepsilon^2}{2r_0}\left(2 + \tfrac{1}{4}\varrho_0^{4/3} - \tfrac{1}{9}\varrho_0^{8/3} + \frac{1}{81}\varrho_0^{4/3}\right), \quad (19)$$

der auch als Zeitmittel der in Wahrheit sehr schwach periodisch schwankenden Energie des inneren Elektrons angesehen werden kann[1]).

Wegen der Kleinheit (10) von R_1 und Φ_1 wird ferner

$$W_a = \frac{\mu}{2}R_0^2\Omega^2 - \frac{\varepsilon^2}{R_0} = -\frac{\varepsilon^2}{2R_0} \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon^2}{R_0} - \mu R_0^2\Omega^2\right)$$

also nach (15)

$$W_a = -\frac{\varepsilon^2}{R_0}\left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{8}\varrho_0^{8/3} + \right. \\ \left. + \frac{1}{12}\varrho_0^{11/3} + \frac{3}{32}\varrho_0^2\right). \qquad (20)$$

1) Daß die periodischen Glieder von W_i in höherer Ordnung verschwinden, zeigt an, daß der Gesamtbetrag der Energie des Innenelektrons groß ist gegen die von ihm gewonnene Energie auf seinem Wege von der Konjunktion zur Opposition unter der störenden Kraft des Außenelektrons.

Da ferner der zeitliche Mittelwert von

$$r\cos\gamma = (r_0 + r_1\cos\gamma_0)(\cos\gamma_0 - \varphi_1\sin^2\gamma_0)$$

gleich

$$\tfrac{3}{2}r_0\frac{r_1}{r_0}$$

ist [vgl. (5''), (18')], wird der Mittelwert von V_{ia} nach (18)

$$V_{ia} = \frac{\varepsilon^2}{R_0}\left(\frac{3}{2}\frac{r_0}{R_0}\frac{r_1}{r_0} + \frac{r_0^2}{R_0^2}\cdot\frac{1}{4}\right)$$

und mit Benutzung von (14)

$$V_{ia} = \frac{\varepsilon^2}{R_0}\left(-\tfrac{3}{8}\varrho_0^{8/3} + \frac{1}{12}\varrho_0^{11/3} + \frac{1}{16}\varrho_0^2\right) \quad (21)$$

also

$$W_a + V_{ia} = -\frac{\varepsilon^2}{R_0}\left(\tfrac{1}{2} + \frac{1}{32}\varrho_0^2\right)\cdot \qquad (22)$$

§ 4. Wir sind jetzt imstande, eine an anderer Stelle[1]) erläuterte Quantelungsmethode anzuwenden, speziell mit Benutzung der dortigen Gleichung [6], da es sich beim neutralen Helium ja auch nur um zwei „Ringe" handelt. Statt der dort benutzten Variablen $r_1\, r_2$ wollen wir aber hier die Größen $2r_0$ und R_0 nehmen, an denen im folgenden der Index o fortgelassen werden soll.

Statt [6], [6'] l. c. gilt hier für die beiden adiabatischen Prozesse

$$\frac{dR}{d(2r)} = -\frac{\partial(W_i + V_{ia})/\partial(2r)}{\partial W_i/\partial R} \qquad (23\text{a})$$

bzw.

$$\frac{d(2r)}{dR} = -\frac{\partial(W_a + V_{ia})/\partial R}{\partial W_a/\partial 2r} \qquad (23\text{b})$$

ausgehend von dem Anfangszustand

$$R = \infty, \quad r = \mathring{r} \quad \text{bzw.} \quad r = 0, \quad R = \mathring{R}. \quad (24)$$

Für die totalen Änderungen dW_i und dW_a erhält man aus (23a), (23b)

$$dW_i = -dR\cdot\frac{\partial V_{ia}}{\partial(2r)} : \frac{dR}{d(2r)}$$

bzw.

$$dW_a = -d(2r)\frac{\partial V_{ia}}{\partial R} : \frac{d(2r)}{dR}. \qquad (25)$$

Um (23a) zu integrieren, braucht man

$$\frac{\partial(W_i + V_{ia})}{\partial(2r)} = \frac{\varepsilon^2}{4r^2}\left(2 - \frac{1}{12}\varrho^{4/3}\right)$$

$$\frac{\partial W_i}{\partial R} = \frac{\varepsilon^2}{4r^2}\,\tfrac{1}{3}\,\varrho^{1/3}\left(1 - \tfrac{1}{3}\varrho^{1/3}\right).$$

Daher wird aus (23a)

$$\frac{dR}{d(2r)} = -\varrho^{-1/3}\cdot 6\cdot(1 + \cdots). \qquad (26)$$

1) Vgl. A. Landé, Adiabatenmethode zur Quantelung gestörter Elektronensysteme, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 21, 578, 1919. Formeln dieser Arbeit werden hier in eckigen Klammern zitiert.

Andererseits ist

$$-\frac{\partial V_{ia}}{\partial(2r)}=\frac{\varepsilon^2}{R^2}\frac{5}{8}\varrho^{4/3}(1+\cdots).$$

Die totale Änderung dW_i wird also nach (25)

$$dW_i=-\frac{\varepsilon^2}{R^2}\frac{5}{48}(1+\cdot\cdot)\,dR.$$

Integriert man zwischen den Grenzen $R=\infty$ und R (24), so ergibt sich bis auf Glieder höherer Ordnung in ϱ

$$W_i-\mathring{W}_i=\frac{\varepsilon^2}{2R}\cdot\frac{5}{96}+\cdot\cdot \qquad (26')$$

wobei

$$\mathring{W}_i=-\frac{\varepsilon^2}{\mathring{r}},$$

falls man bei der Integration r als Konstante behandelt; daß letzteres in der hier erstrebten Näherung berechtigt ist, geht hervor aus Gleichung (26) die sich auch schreiben läßt in der Form

$$d(2r)\cdot(2r)^{-7/3}=\frac{1}{8}dR\cdot R^{-7/3}(1+\cdot\cdot).$$

Ihr Integral zwischen den Grenzen $R=\infty$, $r=\mathring{r}$ bis R, r heißt

$$\frac{r-\mathring{r}}{r}=\frac{1}{8}\varrho^{4/3}. \qquad (26'')$$

Während der Zusammenziehung von R aus dem Unendlichen erfährt also r nur eine kleine Ausdehnung von der relativen Ordnung $\varrho^{4/3}$. Um (23b) zu integrieren, braucht man aus (22)

$$\frac{\partial(W_a+V_{ia})}{\partial R}=\frac{\varepsilon^2}{R^2}\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}\varrho^2\right)$$

$$\frac{\partial W_a}{\partial(2r)}=\frac{\varepsilon^2}{R^2}\frac{5}{8}\varrho^{1/3}\left(1-\frac{11}{45}\varrho^{1/2}-\frac{3}{10}\varrho^{2/3}\right).$$

Also geht (23b) über in

$$\frac{d(2r)}{dR}=-\varrho^{-1/3}\cdot 8\cdot\frac{1-\frac{3}{16}\varrho^2}{1-\frac{11}{45}\varrho^{1/2}-\frac{3}{10}\varrho^{2/3}}$$

oder

$$\frac{d(2r)^{5/3}}{dR^{5/3}}=-\frac{1}{5}\,\frac{1-\frac{3}{16}u^{6/5}}{1-\frac{11}{45}u^{3/10}-\frac{3}{10}u^{2/5}}=f(u),$$

wenn zur Abkürzung der Quotient

$$\frac{(2r)^{5/3}}{dR^{5/3}}=u,\quad \text{also}\quad \varrho=u^{3/5}$$

gesetzt wird. Führt man nun statt $2r$ und R die neuen Variablen u und $R^{5/3}$ ein, so ergibt sich die Umformung

$$\frac{d(R^{5/3})}{R^{5/3}}=\frac{du}{f(u)-u}.$$

Integration zwischen den Grenzen $r=0$, $R=\mathring{R}$ bis r, R ergibt bis auf höhere Potenzen von u

$$\ln\left(\frac{R}{\mathring{R}}\right)=\frac{3}{5}\int_0^u du\left(-\frac{5}{4}\right)\left(1-\frac{11}{45}u^{3/10}-\frac{3}{10}u^{2/5}\right)$$

oder bei Wiedereinführung von ϱ statt u

$$\frac{\mathring{R}}{R}=1-\frac{9}{8}\varrho^{4/3}\left(1-\frac{8}{9}\varrho^{1/2}-\frac{1}{4}\varrho^{2/3}\right). \qquad (27)$$

Einsetzung in W_a+V_{ia} (22) ergibt schließlich

$$W_a+V_{ia}=-\frac{\varepsilon^2}{2\mathring{R}}\left(1+\frac{3}{4}\varrho^{4/3}-\frac{1}{24}\varrho^{11/6}-\frac{1}{8}\varrho^2\right)+\cdot\cdot \qquad (27')$$

$$W_a+V_{ia}-\mathring{W}_a=-\frac{\varepsilon}{2\mathring{R}}\left(\frac{3}{4}\varrho^{4/3}-\frac{1}{6}\varrho^{11/6}-\frac{1}{8}\varrho^2\right). \qquad (27'')$$

Ein Vergleich von (27″) mit (26′) zeigt, daß der Energiegewinn von W_i gegenüber $\mathring{W}_i$ von höherer Ordnung klein ist gegen den Verlust W_a+V_{ia} gegenüber $\mathring{W}_a=-\varepsilon^2/2\mathring{R}$. In unserer Näherung bleibt also W_i während des adiabatischen Prozesses **konstant**, in Übereinstimmung mit einem Theorem von Herrn N. Bohr[1]).

Die Gesamtenergie

$$E=W_i+W_a+V_{ia}$$

des gestörten Systems wird also nach (26′), (27′) bis auf Glieder höherer Ordnung in $\mathring{\varrho}=2\mathring{r}/\mathring{R}$ (vgl. (7′)):

$$E=-\frac{\varepsilon^2}{\mathring{r}}-\frac{\varepsilon^2}{2\mathring{R}}-\frac{\varepsilon^2}{2\mathring{R}}\frac{3}{4}(\mathring{\varrho})^{4/3}\Big[1-$$
$$-\frac{8}{9}(\mathring{\varrho})^{1/2}-\frac{1}{6}(\mathring{\varrho})^{2/3}+\cdot\cdot\Big], \qquad (28)$$

worin die beiden ersten Glieder den intermediären Energiewert angeben. Man kann diese Formel so auffassen, als sei die Energie des inneren Elektrons unverändert auf dem intermediären Wert $-\varepsilon^2/r$ geblieben, während sich der absolute Betrag der Energie des äußeren Elektrons mit dem Störungsfaktor

$$E_a:\mathring{E}_a=1+\frac{3}{4}(\mathring{\varrho})^{4/3}-\frac{1}{6}(\mathring{\varrho})^{11/6}-\frac{1}{8}(\mathring{\varrho})^2 \qquad (28')$$

multipliziert habe. Die in $\mathring{\varrho}$ vorkommenden Radien $\mathring{r}$ und $\mathring{R}$ sind die im ungestörten Zustand quantentheoretisch festgelegten Bahnradien mit den Quantenzahlen n_i und n_a und besitzen die Werte

$$\mathring{r}=a_0\cdot\frac{n_i^2}{Z_i},\quad \mathring{R}=a_0\cdot\frac{n_a^2}{Z_a},\quad a_0=\frac{h^2}{4\pi^2\mu\varepsilon^2}, \qquad (28'')$$

wobei $Z_i=2$ und $Z_a=1$ die „wirksamen Kernladungszahlen" und a_0 den Radius der einquantigen Bahn des Wasserstoffelektrons be-

---

1) N. Bohr, The Quantum Theory of Line-Spectra, Teil 2, § 2, Kopenhagen 1918. Dieses Theorem war in der vorläufigen Mitteilung des Verf. (l. c.) über das *He* nicht erfüllt, der dortige Vergleich mit quasielastischen Verhältnissen (S. 229) war also unzutreffend. Der Fehler wurde dort durch die oben S. 116 Fußnote erwähnte Annäherung aufgehoben.

deuten. Beim Helium ist überdies $n_i = 1$ anzunehmen. Schreibt man also für n_a einfach n, so wird schließlich

$$\mathring{\varrho} = \frac{2\mathring{r}}{R^0} = \frac{1}{n^2}$$

und (28′) geht über in die endgültige Formel

$$E_a : \mathring{E}_a = 1 + \tfrac{3}{4} n^{-10/3} - \tfrac{1}{6} n^{-11/3} - \tfrac{1}{8} n^{-4} + \cdots \quad (29)$$

Das letzte hier hingeschriebene Glied

$$-1 : 8 n^4 = -\mathring{r}^2 : 2\mathring{R}^2$$

erscheint bei Sommerfeld als niedrigstes Störungsglied, wenn man von der Vorstellung der gleichmäßigen Ladungsverteilung auf den Ringperipherien ausgeht. Die beiden ersten Störungsglieder von (29) sind der exzentrischen Verschiebung der inneren Bahn im Kraftfeld des äußeren Elektrons zuzuschreiben. Letztere Verschiebung gibt zu den Störungen der Ordnung n^{-4} keinen Beitrag, weil in (14) nach den Gliedern mit $\varrho_0^{5/3}$ sofort Glieder mit $\varrho_0^{7/3}$ folgen.

Es ist klar, daß die abgebrochene Reihe (28′), (29) für die Quantenzahl $n = 1$ keine zureichende Näherung zum Vergleich mit der Erfahrung darstellt.

§ 5. Die exakte Störungstheorie des Heliumatoms bei geneigten Bahnebenen und elliptischem Umlauf hat Verfasser nicht durchgeführt. Nach Analogie zu früher erhaltenen Resultaten[1]) liegt jedoch Grund vor zu der Annahme, daß ein Neigungswinkel Θ zwischen den Bahnebenen die Energieformeln (28′) und (29) in folgender Weise ändert: Die beiden ersten Störungsglieder, welche der exzentrischen Verschiebung des inneren Elektrons zuzuschreiben waren, sind mit dem Faktor $\cos\Theta$ zu versehen, das dritte Störungsglied mit dem Faktor

$$(3\cos^2\Theta - 1) : 2,$$

mit dem auch in Sommerfelds Theorie der geneigten Ringe[2]) das entsprechende Glied behaftet ist. [Diese beiden Faktoren sind bekannt als erste und zweite Kugelfunktion von $\cos\Theta$.] Bei elliptischer Bahn des äußeren Elektrons mit der radialen Quantenzahl n' und der azimutalen Quantenzahl n führt die erwähnte Analogie dazu, alle hingeschriebenen Störungsglieder mit dem Faktor

$$n : (n + n')$$

zu multiplizieren. (29) geht dann über in die Energieformel[3])

	Beobachtung		Theorie			
	ν_{He}	$\nu_{He} : \nu_H$	$n'n$	k	ϑ	$\nu_{He} : \nu_H$
S_I	—	—	01	1	120°	0,7236
	32 031	1,168	11	1		0,8618
	13 445	1,103	21	1		0,9078
	7 369	1,075	31	1		0,9308
	4 646	1,059	41	1		0,9447
P_I	27 174	0,989	02	2	104° 28′	0,9873
	12 099	0,992	12	2		0,9919
	6 817	0,994	22	2		0,9939
	4 367	0,995	32	2		0,9951
D_I	12 204	1,0011	03	3	99° 35′	0,9982
	6 863	1,0009	13	3		0,9987
	4 391	1,0007	23	3		0,9989

	Beobachtung		Theorie			
	ν_{He}	$\nu_H : \nu_H$	$n'n$	k	ϑ	$\nu_{He} : \nu_H$
S_{II}	—	—	01	2	0°	1,457
	38 453	1,402	11	2		1,229
	15 073	1,237	21	2		1,152
	8 011	1,168	31	2		1,114
	4 963	1,131	41	2		1,092
P_{II}	29 222	1,0657	02	3	0°	1,0536
	12 745	1,0458	12	3		1,0367
	7 093	1,0337	22	3		1,0268
	4 509	1,0278	32	3		1,0214
D_{II}	12 208	1,0012	03	4	0°	1,0136
	6 865	1,0010	13	4		1,0102
	4 393	1,0009	23	4		1,0081

$$E_a : \mathring{E}_a = 1 + \frac{n}{n+n'}\left[\cos\Theta\left(\tfrac{3}{4} n^{-10/3} - \tfrac{1}{6} n^{-11/3} - \right) - \frac{3\cos^2\Theta - 1}{2} \cdot \tfrac{1}{8} n^{-4} + \cdots\right] \quad (30)$$

Für Θ sind die Werte einzusetzen, welche sich aus der Quantelung der räumlichen Orientierung (bzw. der Präzessionsbewegung) von Elektronenringen ergeben und die aus Gl. (4) und (5) einer Arbeit des Verfassers[1]) abzulesen sind. Es sind das komplanare Bahnen mit gleichgerichteter Rotation beider Elektronen

$$(\vartheta + \vartheta' = \Theta = 0^0)$$

bzw. entgegengerichteter Rotation

1) A. Landé, diese Zeitschr. **20**, 228, 1919.

2) A. Sommerfeld, diese Zeitschr. **19**, 297, 1918.

3) Während als Faktor des Gliedes mit $n^{-4} = (2r/R)^2$ die zweite Kugelfunktion wohl das Richtige trifft, ist statt $\cos\Theta$ als Faktor der ersten Störungsglieder wahrscheinlich eine kompliziertere Funktion von Θ zu nehmen, deren Gestalt erst weitere Rechnung geben kann, die aber das Resultat qualitativ wohl nicht und quantitativ wohl nur wenig gegen (30) ändern wird.

1) Vgl. A. Landé, Eine Quantenregel für die räumliche Orientierung von Elektronenbahnen, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 585, 1919. Die dortigen Gl. (4) und (5) heißen

$$n\cos\vartheta + n'\cos\vartheta' = k$$
$$n\sin\vartheta - n'\sin\vartheta' = 0,$$

worin ϑ und ϑ' die Neigungswinkel der beiden Elektronenbahnen gegen die unveränderliche Ebene bedeuten, und $n\,n'\,k$ drei ganze Zahlen sind. Diese Quantenregeln gelten aber nur, wenn man die Störungskräfte vernachlässigt, ein Fall, der hier, besonders bei den Bahnen S_I, welche der Theorie Schwierigkeit bereiten, nur in roher Näherung zutrifft.

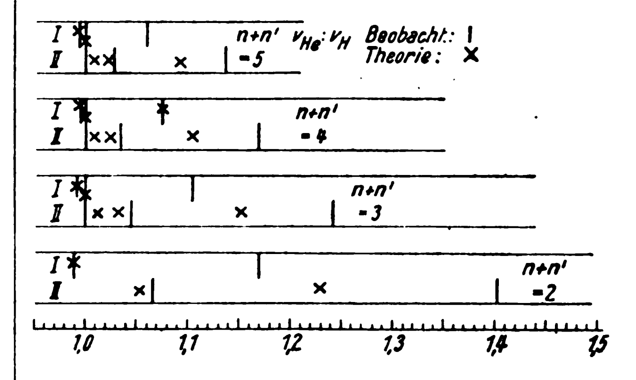
$$(\vartheta + \vartheta' = \Theta = 180^0)$$

und bei $n = 1$ überdies $\Theta = 120^0$, bei $n = 2$ $\Theta = 104^0\,28'$; bei $n = 3$ $\Theta = 99^0\,35'$ usw. Die theoretischen Werte des Verhältnisses $E_a : \mathring{E}_a$ sollen sich in der Beobachtung wiederfinden als Verhältniszahlen $\nu_{He} : \nu_H$ der Heliumterm-Schwingungszahlen zu den Normalschwingungszahlen der Wasserstoffterme. Die folgende Tabelle gibt neben den theoretischen Werten, welche zu den verschiedenen Wertetripeln n (azimutale) n' (radiale) k (Gesamtimpulsquantenzahl) mit zugehörigen Winkeln

$$\vartheta,\ \vartheta',\ \Theta = \vartheta + \vartheta'$$

gehören, auch die beobachteten Schwingungszahlen der *He*-Terme und ihre Quotienten $\nu_{He} : \nu_H$ mit den beobachteten Normalzahlen des Wasserstoffs. Die Beobachtung unterscheidet zwei gesonderte Heliumspektren, nämlich $He_{\rm I}$ aus einfachen und $He_{\rm II}$ aus Dupletttermen bestehend, ferner innerhalb jeder dieser beiden Spektren *S*-Terme, *P*-Terme und *D*-Terme, welche sich zu den Kombinationen *S*—*P* (Hauptserie), *P*—*D* (1. diffuse Nebenserie) und *P*—*S* (2. scharfe Nebenserie) zusammenfinden. Die *S*-Terme sind übrigens auch bei $He_{\rm II}$ einfach. An den experimentellen Termwerten fällt auf, daß zwar bei $He_{\rm II}$ ein Abfallen der Werte $\nu_{He} : \nu_H$ von den *S*- zu den *P*- und *D*-Termen der gleichen Quantenzahl $n + n'$ stattfindet, daß dagegen bei $He_{\rm I}$ ein solcher Gang nur zwischen den *P*- und *D*-Termen stattfindet, während die beobachteten $S_{\rm I}$-Terme vollkommen außerhalb dieses Ganges liegen. Daher ist von vornherein zu erwarten, daß die Theorie nicht ohne weiteres zur Erklärung der $S_{\rm I}$-Terme führen kann. Berechnet man nun nach (30) die theoretischen $\nu_{He} : \nu_H$-Werte zu allen möglichen Kombinationen der Quantenzahlen $n\,n'\,k$ für $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ mit Ausschluß der komplanaren Gegenrotation, so findet man Werte, die mit den daneben geschriebenen Beobachtungen der *S*-, *P*- und *D*-Terme von $He_{\rm I}$ und $He_{\rm II}$ vereinbart werden können. Und zwar ist die Übereinstimmung bei den Termen $n = 2$ und $n = 3$ gut, bei $S_{\rm II}$ ($n = 1$) wenigstens qualitativ richtig; bei letzteren Termen ($n = 1$) reicht eben die Näherung (30) nicht im entferntesten mehr aus. Dagegen fallen bei $S_{\rm I}$, wie zu erwarten, Beobachtung und Theorie auch qualitativ ganz auseinander. Bei 60^0 Neigung (Nebenwinkel von 120^0, d. h. Umkehr der Umlaufsrichtung) würden die beobachteten Werte von $S_{\rm I}$ resultieren. 60^0 Neigung ist aber quantentheoretisch nicht zulässig. Es liegt hier vielleicht ein andersartiger Bahntypus vor.

Während beim Wasserstoff zu der einen Gesamtquantenzahl $n + n'$ nur eine Schwingungszahl ν_H (abgesehen von der Feinstruktur) gehört, treten zu dem gleichen $n + n'$ beim Helium mehrere Schwingungszahlen ν_{He} auf, eine Art Grobstruktur durch verschiedene Exzentrizität und räumliche Neigung der Bahnen. In der Figur, deren horizontaler Maßstab die Werte des Quotienten $\nu_{He} : \nu_H$ angibt, ist diese Grobstruktur des Terms $n + n'$ für jede Gesamtquantenzahl $n + n'$ in einem besonderen horizontalen Band gezeichnet, wobei noch $He_{\rm I}$ (Parhelium) und $He_{\rm II}$ (Dupletlinien) untereinander getrennt aufgetragen sind und zwar die Beobachtung als senkrechte Linien, die theoretischen Werte als Kreuze. Theoretische Werte von $S_{\rm I}$ sind nicht eingezeichnet, da $S_{\rm I}$ offenbar auf einer anderen Entstehungsart als der hier behandelten beruht. Die entsprechenden Wasser-



stofflinien würden also in der Figur senkrecht über dem Teilstrich 1,0 liegen. Die Aufspaltung dieser normalen Linien durch die gegenseitigen Bahnstörungen geht also beim Helium bis zu 40 Proz. ihres ungestörten Normalwertes, was früher den Anlaß zur Einführung gebrochener Quantenzahlen für die *S*-Terme gegeben hat. Hier, wo die gebrochenen als gestörte ganze Quantenzahlen aufgefaßt werden, ist es deshalb nicht verwunderlich, daß die Störungstheorie mit den ersten Reihengliedern quantitativ nicht mehr ausreicht. Besonders befriedigend erscheint es, daß die Quantelung der Präzessionen, die Mannigfaltigkeit der räumlichen Stellungen bei jedem n auf zwei beschränkt, Komplanarität bei $He_{\rm II}$ und Neigungswinkel von nahezu 90^0 bei $He_{\rm I}$. Die dritte Bahnstellung, komplanar entgegengesetzt rotierende Elektronen ($\Theta = 180^0$), besitzt einen so kleinen negativen Energiewert E_a gegenüber den Energiewerten der beiden andern Stellungen, daß diese Gegenrotation aus Stabilitätsgründen auszuschließen ist. Eine Erklärung für das Zustande-

kommen der S_I-Terme und für die Duplizität der He_{II}-Terme fehlt[1]).

1) In einer Arbeit „Über Serienspektren nach dem Bohrschen Modell“ von F. Tank, Ann. d. Phys. 59, 293, 1919 werden die gegenseitigen Störungen der beiden He-Elektronen so berechnet, als seien die Ladungen kontinuierlich über ihre Bahnen verteilt. Dabei „wird Anschluß an die Erfahrung nur bei den Hauptserientermen erreicht“, und zwar unter der Annahme, daß beim Parhelium (He_I) beide Elektronen in derselben Ebene laufen, beim Helium (He_{II}) in nahezu senkrecht gekreuzten Ebenen (umgekehrt als bei uns), daß bei He_I das innere Elektron einen einquantigen Kreis, beim He_{II} einen zweiquantigen Kreis beschreibt. Es erscheint aber die gewählte Annäherung (kontinuierliche Ladungsverteilung) nicht zulässig zu sein, weil die Störungen 1. Ordnung dabei unberücksichtigt bleiben. Auch die Annahme eines zweiquantigen inneren Elektrons bei He_{II} kann nicht befriedigen.

(Eingegangen 17. August 1919.)

Theoretisches über den Schalldruck.

(§ 3 als Erwiderung an Herrn Budde.)

Von E. Waetzmann.

Rayleigh[1]) hat zu beweisen versucht, daß eine stehende Schallwelle auf eine vollkommen reflektierende Wand einen Druck ausübt, der gleich $\frac{1}{2}(\gamma + 1)\varepsilon$ ist, worin γ das Verhältnis der spezifischen Wärmen und ε die Energiedichte ist.

Ich[2]) habe dann gefunden, daß gleichzeitig mit dem Schalldruck neue Töne entstehen müssen, die in den primär gegebenen Schwingungen nicht enthalten sind; oder mit anderen Worten, daß die gleichen Bedingungen, welche das Auftreten von Schalldruck veranlassen, zugleich die Ursache für die Entstehung neuer Töne sind. Ich habe das für einen speziellen Fall bewiesen und habe auch besprochen, weshalb Rayleigh auf diesen Zusammenhang zwischen Schalldruck und neuen Tönen nicht aufmerksam geworden ist. Es liegt dies daran, daß Rayleigh nur den zeitlichen Mittelwert der Druckschwankungen, die beim Auftreffen einer Schallwelle an einer reflektierenden Wand stattfinden, betrachtet hat, während für die Erschließung der neuen Töne natürlich der gesamte zeitliche Verlauf des Druckes berechnet werden müßte[3]).

Diese Berechnung ist dann von F. Küstner[4]) im hiesigen Institut durchgeführt worden, und hat die allgemeine Bestätigung und quantitative Ergänzung dessen gebracht, was ich nur qualitativ und prinzipiell an Hand eines bestimmten Falles gezeigt hatte.

Im folgenden möchte ich einige ergänzende Überlegungen zu dem spärlichen bisher in dieser Frage vorliegenden Material mitteilen, zumal ich gehört habe, daß die Richtigkeit meiner ursprünglichen Ausführungen verschiedentlich von Fachgenossen angezweifelt worden ist (§ 1). Ferner möchte ich im Anschluß an die zitierte Arbeit Küstners einige Bemerkungen über die Vernachlässigung der Glieder höheren Grades in den hydrodynamischen Gleichungen machen (§ 2), und endlich zu einer Arbeit des Herrn Budde[1]) Stellung nehmen (§ 3). In dieser Arbeit wird auch behauptet, daß der Gedankengang in meiner oben zitierten Arbeit falsch sei, während die Küstnersche Ausrechnung als richtig anerkannt wird; und nun wird kurzweg von der „Küstnerschen Theorie“, statt — wenn überhaupt Namen genannt werden sollen — von der Waetzmann-Küstnerschen Theorie gesprochen[2]). Ich hätte Herrn Budde schon früher geantwortet, wenn es mir nicht durch den Krieg und daran anschließende Krankheit unmöglich gemacht worden wäre; ich bitte also, mein bisheriges Schweigen nicht etwa als Zustimmung zu der Buddeschen Arbeit aufzufassen.

§ 1. Über den Zusammenhang zwischen Schalldruck und Kombinationstönen (K. T.). Eine Schallquelle, z. B. eine schwingende starre Platte an dem einen Ende eines Kundtschen Rohres, führe Schwingungen von der Form $A \sin 2\pi m t$ aus. Nach Rayleigh wird dann auf die feste Wand am anderen Ende des Rohres ein konstanter Druck ausgeübt, der im wesentlichen gleich der Energiedichte in dem Rohre ist. Dieser Wert wird gefunden, indem der Mittelwert des Druckes an der reflektierenden Wand über eine volle Periode, also in unserem Falle über die Zeit $\frac{1}{m}$ gebildet wird. Für die Berechnung der

1) Rayleigh, Phil. Mag. (6) 10, 364, 1905.
2) E. Waetzmann, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 424, 1914 (Waetzmann I).
3) E. Waetzmann, l. c. S. 429.
4) F. Küstner, Ann. d. Phys. 50, 941, 1916.

1) E. Budde, diese Zeitschr. 19, 321, 1918.
2) In dem Referat, welches Herr E. Lübcke in Bd. 43, Heft 5, S. 164, 1919, der „Beiblätter zu den Ann. d. Phys.“ über die in Frage stehende Buddesche Arbeit gibt, wird ebenfalls nur von der „Küstnerschen Theorie“ gesprochen und ferner mit Budde davon, daß ich einen Zusammenhang zwischen Schalldruck und Kombinationstönen „vermutet“ hätte, während ich meines Erachtens diesen Zusammenhang klar bewiesen habe. Ich nehme an, daß Herr Lübcke die Buddesche Ausdrucksweise ohne Nachprüfung ihrer Berechtigung übernommen und nicht die Absicht gehabt hat, sich mit der in ihr enthaltenen Kritik zu identifizieren. Sollte jedoch das Gegenteil der Fall sein, so möchte ich Herrn Lübcke um eine Begründung seiner Stellungnahme bitten. Jedenfalls ist meines Erachtens die Darstellung in seinem Referat nicht zutreffend und irreführend.

gesamten auf die feste Wand wirkenden Kraft muß man sich nun darüber klar sein, daß die Rayleighsche Druckkraft additiv zu den Druckschwankungen von der Periodenzahl m hinzutritt. Auf die feste Wand wirkt also nicht eine Kraft von der Form $f \sin 2\pi m t$, sondern eine Kraft von der Form $f \sin 2\pi m t + D$, worin D zunächst den konstanten (Rayleighschen) Schalldruck bedeutet.

Die Richtigkeit dieses Ansatzes ist nicht nur von Budde in seiner oben zitierten Arbeit, sondern auch mündlich von anderen Fachgenossen bestritten worden. Weil der Rayleighsche Schalldruck ein Mittelwert über unendlich lange Zeit oder eine volle Periode sei, dürften in der Berechnung der auf die feste Wand wirkenden Kraft neben dem Rayleighschen Schalldruck nicht noch periodische Glieder angesetzt werden. Ich vermag die Berechtigung dieses Einwandes nicht einzusehen, sondern halte ihn für unzutreffend. Denn meine Fragestellung lautet: Welches ist die Gesamtkraft, die auf die feste Wand wirkt, während Rayleigh nur nach einem etwa vorhandenen konstanten Überdruck fragt. Durch seine Rechnung kann also niemals die Gesamtkraft gefunden werden. Deshalb müssen in dem Kraftansatz zu dem Rayleighschen Druckwert noch periodische Glieder hinzugefügt werden, und zwar, solange man nichts Näheres weiß, zunächst nur ein Glied mit der primär gegebenen Periodenzahl m.

Oder mit anderen Worten: Primär gegeben sind die Schwingungen der Schallquelle (Platte) und damit periodische Druckschwankungen an der festen Wand. Ferner wirkt nach Rayleigh auf die feste Wand ein konstanter Überdruck. Wie derselbe zustande kommt, ist eine Frage für sich und braucht uns vorläufig im einzelnen nicht zu kümmern. Sicher ist, da es sich um die Druckberechnung auf eine feste Wand handelt, daß nicht etwa die Art des reagierenden Apparates die periodischen Druckschwankungen in einen einseitigen Überdruck umwandelt. Also wirken — entsprechend meinem Ansatz — beide Größen gleichzeitig.

Es bleibt aber ferner zunächst wenigstens die Möglichkeit offen, daß die tatsächlich wirkenden Druckschwankungen auch harmonische Obertöne der primär gegebenen Schwingungen enthalten. Wenn derartige periodische Druckkomponenten mit den Periodenzahlen $\frac{1}{2m}, \frac{1}{3m}, \ldots$ auch wirklich vorhanden wären, so müßten sie bei der Rayleighschen Art der Herleitung des Schalldruckes ebenso wie der Primärton verborgen bleiben, da ja ein Mittelwert über die Zeit $\frac{1}{m}$ gebildet wird. Ihr Nichterscheinen bei Rayleigh spricht also nicht gegen ihre Existenz. Jedem, der sich mit der Entstehung von Einseitigkeiten, Obertönen (O. T.) und K. T. bei Schwingungen und Wellen beschäftigt hat, wird die besprochene Möglichkeit, daß die gleichen Bedingungen, die zur Entstehung des Rayleighschen Schalldruckes führen, auch O. T. der Primärschwingungen ergeben, von vornherein zur Wahrscheinlichkeit. Demgemäß habe ich auch in meiner ersten Mitteilung[1]) für den Fall, daß primär eine Sinusschwingung gegeben ist, gesagt: „Es werden freilich die periodischen Druckschwankungen derartige sein, daß sie neben dem einseitigen Überdruck und dem ursprünglichen Ton noch dessen Obertöne geben. Ein experimenteller Anhaltspunkt für diese Annahme liegt aber bisher nicht vor".

Ohne exakte Berechnung des zeitlichen Druckverlaufes dürfte es nicht möglich sein, die besprochene Wahrscheinlichkeit der Entstehung von O. T. zur Sicherheit zu erheben. Dagegen ist es möglich, ohne ausführliche Rechnung die Entstehung eines K. T. bei Vorhandensein des Rayleighschen Schalldruckes zu beweisen, und zwar die Entstehung eines Differenztones (D. T.) erster Ordnung, und das war der Hauptinhalt meiner ersten Arbeit. Sind nämlich primär statt des bisherigen einfachen Tones m zwei Töne m und n gegeben, welche gleiche Amplituden haben und deren Schwingungszahlen sich nur sehr wenig voneinander unterscheiden, so entstehen typische Schwebungen. Ist der größte gemeinsame Teiler von m und n noch gleich der Schwebungsanzahl, so ist die strenge Periode der Resultierenden gleich $\frac{1}{m-n}$. Bei genügend kleinem $m-n$ kann aber für unsere Zwecke praktisch als die Dauer einer Periode der Resultierenden schon die viel kürzere Zeit $\frac{2}{m+n}$ angesetzt werden. Nur an der Stelle des Minimums tritt eine einzige Schwingung auf, deren Periode halb so groß ist wie die aller übrigen Schwingungen, was für unsere Betrachtung aber nicht stört[2]).

Der Kunstgriff, den ich anwende, um die gleichzeitige Entstehung von K. T. bei Vorhandensein des Rayleighschen Schalldruckes in,

1) Waetzmann I, l. c.

2) Wer sich über diese Fragen näher zu unterrichten wünscht, sei auf meine Arbeiten: „Über den Zusammenklang zweier einfachen Töne" und „Über Schwebungen" verwiesen, diese Zeitschr. 12, 231, 1911; 18, 560, 1917.

wie mir scheint, sehr einfacher und physikalisch durchsichtiger Weise zu zeigen, ist also folgender: Ich gehe von Primärschwingungen aus, die eine derartige Form haben, daß statt der theoretisch strengen Periode $\frac{1}{m-n}$ praktisch die viel kürzere Zeit $\frac{2}{m+n}$ als Periode angenommen werden darf. Es wird dann mit Schwingungen von der Schwingungszahl $\frac{m+n}{2}$ und von variabler Amplitude operiert¹). Denke ich mir nun den Schalldruck für eine solche Periode nach Rayleigh berechnet, so ändert sich der gefundene Wert von Periode zu Periode, und zwar ist er periodisch nach $m-n$, da die Amplitude der Resultierenden

$$A \cos 2\pi \frac{m-n}{2} t$$

ist. Die gesamte auf die Wand am Ende des Kundtschen Rohres wirkende Kraft kann ich jetzt also in der Form

$$f \sin 2\pi mt + g \sin 2\pi nt + D$$

schreiben, wo D aber nicht mehr konstant, sondern periodisch nach $m-n$ ist, also allgemein in einer Fourierschen Reihe darstellbar ist, deren konstantes Glied der Rayleighsche Schalldruck, deren erstes periodisches Glied der D. T. erster Ordnung ist, und deren Glieder mit den Periodenzahlen m und n schon herausgenommen sind. Da ich hierbei für die zunächst notwendige Berechnung des „Schalldruckes" über die Zeit $\frac{2}{m+n}$ gemittelt habe, müssen natürlich sämtliche Töne verborgen bleiben, deren Schwingungszahlen gleich $\frac{m+n}{2}$ oder Vielfache davon sind. Dagegen scheint mir die Tatsache, daß, wenn Rayleighscher Schalldruck vorhanden ist, auch K. T. entstehen müssen (woraus auch wieder rückwärts auf die Entstehung von O. T. geschlossen werden kann), bei meiner Art der Herleitung besonders klar ins Auge zu springen. Man könnte in dem skizzierten Gedankengange auch noch weiter gehen, worauf ich jedoch absichtlich verzichtet habe.

Man könnte ferner daran denken, den Schalldruck etwas anders zu definieren als es der Rayleighschen Arbeit entspricht und bisher üblich ist; etwa als den mittleren Druck über Zeiten, die klein sind gegen die Beobachtungszeiten. Dann können in dem Schalldruck neben einem konstanten Anteil — dem Rayleighschen Wert — auch noch zeitlich veränderliche Komponenten auftreten. Beispielsweise würde in dem von uns besprochenen Falle, wie ich auch schon in meiner ersten Mitteilung auseinandergesetzt habe, der so definierte Schalldruck periodisch nach $m-n$ sein. Für die klare Erkenntnis der physikalischen Vorgänge hat diese Definition zweifellos ihre Vorzüge; im wesentlichen ist die ganze Frage aber eine Frage der Darstellungsweise und des Geschmacks. Nur möchte ich davor warnen, auf Widersprüche gegen Rayleigh zu schließen, wo ich in Wirklichkeit die herrschenden — übrigens recht unklaren — Vorstellungen ergänzt und weitergebildet habe.

§ 2. Über die Glieder höheren Grades in den hydrodynamischen Gleichungen. Den Ausgangspunkt der Küstnerschen Überlegungen bilden seine Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{2\,\partial \Phi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial x} + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \quad (10)$$

und

$$P - a^2 \log\left(\frac{p}{p_0}\right) = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2. \quad (8)$$

Hierin bedeutet P die Potentialfunktion der äußeren Kräfte, p den hydrodynamischen Druck, a die Schallgeschwindigkeit und Φ das Geschwindigkeitspotential, so daß $u = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$ ist, wobei u die Geschwindigkeit parallel der x-Achse bedeutet. Der Einfachheit halber wird der isotherme Fall behandelt, so daß $p = a^2 h$ angenommen ist, worin h die Dichte bedeutet. Unter der in der Akustik üblichen Annahme, daß die Größen P und Φ nebst ihren Ableitungen unendlich kleine Größen höherer Ordnung sind, deren Produkte, Quadrate und noch höhere Potenzen vernachlässigt werden können, und unter der weiteren Annahme, daß keine äußeren Kräfte wirken, reduzieren sich (10) und (8) auf die Gleichungen

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = 0 \quad (13)$$

und

$$\log\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{1}{a^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (14)$$

bzw.

$$p = p_0 e^{-\frac{1}{a^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}}. \quad (20)$$

1) Ich möchte betonen, daß die hier benutzten Überlegungen meinen Vorstellungen über die exakte Ableitung von Schwebungstönen, wie ich sie in den zitierten Arbeiten entwickelt habe, nicht widersprechen.

Unter Hinzunahme von gewissen Randbedingungen lassen sich nun Φ und damit aus Gleichung (20) p berechnen. Wird hierbei in der Reihenentwicklung, entsprechend der Voraussetzung, daß $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$ unendlich klein ist, mit dem ersten Gliede abgebrochen, so resultieren nur der Normaldruck p_0 und Druckkomponenten von den primär gegebenen Perioden. Wird dagegen in der Reihenentwicklung das quadratische Glied noch mitgenommen, so resultieren neben den eben genannten Größen noch Schalldruck, O. T. und, falls mehrere Primärtöne gegeben sind, auch K. T.

Im letzten Paragraphen seiner Arbeit macht Küstner darauf aufmerksam, daß es inkorrekt erscheint, die quadratischen und höheren Glieder in Gleichung (10) zu streichen, in (14) bzw. (20) dagegen beizubehalten. Es wird dann aber gezeigt, daß die Berücksichtigung der quadratischen Glieder in der Differentialgleichung für Φ den vorher gefundenen Wert für den Schalldruck nicht ändert, womit das erwähnte Bedenken erledigt sei.

Die allgemeine Frage nach der Berechtigung oder Nichtberechtigung der Vernachlässigung der höheren Glieder ist mit der Küstnerschen Argumentation aber nicht genügend geklärt. Zunächst sieht man leicht, daß seine Argumentation nur für die von ihm gestellte Spezialfrage richtig ist, also für die Frage, ob sich der Wert des konstanten Anteiles des „Schalldruckes", also des Rayleighschen Schalldruckes, und zwar an der Stelle $x = 1$ ändert, oder nicht ändert, wenn die höheren Glieder in (10) vernachlässigt werden, oder nicht vernachlässigt werden. Betrachtet man dagegen den Rayleighschen Schalldruck an einer anderen Stelle des Rohres, oder fragt man nach den neu entstehenden Tönen, den O. T. und K. T., so kommt man zu einem anderen Resultat als Küstner. Gerade diese letztere Frage nach den O. T. und K. T. scheint mir besonders wichtig, da sie ja darauf hinausläuft, ob in der Druckkraft der Schallwellen, die auf die Wand wirkt, Komponenten enthalten sein können, welche in dem Ausdruck für das Geschwindigkeitspotential und damit für die Geschwindigkeit und die Elongationen noch nicht enthalten sind.

Bevor ich hierauf näher eingehe, möchte ich eine kleine Inkorrektheit beseitigen, die sich in der Küstnerschen Behandlung der Druckgleichung für sich genommen findet. Wir schreiben dazu Gleichung (8) noch unter Fortlassung der äußeren Kräfte in der Küstnerschen Form

$$-\frac{a^2}{p}\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2. \qquad (6)$$

Die Herleitung des Schalldruckes geschieht nun bei Küstner in der Weise, daß in der Reihenentwicklung von (20) das Glied mit $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2$ noch mitgenommen wird, während das Glied mit $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2$ in (6) bzw. (14) von vornherein vernachlässigt ist. Das ist bestimmt eine Inkorrektheit, da beide Glieder in der Druckgleichung auftreten und von gleicher Größenordnung sind. Will man jedoch, wie es üblich ist, in Gleichung (6) das Glied mit $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2$ wirklich vernachlässigen, so müssen in (6) korrekterweise noch andere Glieder vernachlässigt werden. Dazu bringen wir (6) auf eine etwas andere Form, indem wir

$$p = p_0 + p_0 \psi$$

setzen, wo ψ in den Paragraphen 2 und 3 bei Küstner gleich

$$c_1 \cos\frac{n}{a}(x-1)\sin nt$$

wäre. Dabei ist ψ von der gleichen Größenordnung wie $\frac{1}{a^2}\frac{\partial \Phi}{\partial t}$. Setzen wir den angenommenen Wert von p in (6) ein, so ergibt sich nach kurzer Zwischenrechnung

$$-a^2\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} + \psi\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x\, \partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \\ + \psi\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2. \qquad (6')$$

Wenn nun die üblichen Vernachlässigungen gemacht werden sollen, so muß neben den Ausdrücken mit $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2$ auch der Ausdruck $\psi\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t}$ vernachlässigt werden. Dann folgt aus (6') der Wert

$$\psi = \frac{nA}{a \sin\frac{n}{a}}\cos\frac{n}{a}(x-1)\sin nt,$$

also

$$p = p_0 + p_0\frac{nA}{a\sin\frac{n}{a}}\cos\frac{n}{a}(x-1)\sin nt.$$

Das ist aber genau derselbe Wert, wie ihn Küstner — Gleichung (22) — findet, indem er zunächst in der Druckgleichung (6) bzw. (8) das Glied mit $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2$ vernachlässigt, und dann zum Schluß in dem expliziten Ausdruck für p (20) nochmals Vernachlässigungen einführt. Wenn aber in dem Endresultat Vernachlässi-

gungen gemacht werden, so ist das natürlich physikalisch ganz anders zu bewerten, als wenn sie in der Ausgangsgleichung gemacht werden.

Das Bedenken, welches Küstner ausspricht, wäre also gar nicht berechtigt, wenn seine Herleitung der Gleichung (20) physikalisch einwandfrei wäre. Da sie das nicht ist, bleibt seine Fragestellung richtig, und wir wollen nun prüfen, wie die Beibehaltung der quadratischen Glieder in der Differentialgleichung für p zu bewerten ist, wenn sie in der Differentialgleichung für Φ fortgelassen werden.

Die Entscheidung muß meines Erachtens auf experimentellem Wege getroffen werden. Kann ich noch entsprechend kleinere Bruchteile des Druckes messen als der Geschwindigkeit und der Elongation, so ist es von vornherein berechtigt, in der Berechnung des Druckes die Genauigkeit weiter zu treiben als in der Berechnung des Geschwindigkeitspotentials, in (8) also die quadratischen Glieder beizubehalten, auch wenn sie in (10) gestrichen werden. Natürlich ist dann aber das hieraus folgende Resultat, daß die Druckkraft Komponenten von solchen Perioden enthält, die in dem Geschwindigkeitspotential noch nicht enthalten sind, nur ein angenähertes; und ebenso würde sich der Gesamtwert für die Druckkraft etwas ändern, wenn die quadratischen Glieder für Φ auch berücksichtigt werden. Das ist kein Widerspruch zu dem auf den ersten Blick gegenteilig erscheinenden Küstnerschen Resultat, denn dieses bezieht sich ja, wie oben auseinandergesetzt worden ist, nur auf eine eng begrenzte Spezialfrage.

Wird dagegen auf die experimentellen Möglichkeiten keine Rücksicht genommen, so sind selbstverständlich etwaige Vernachlässigungen in allen Gleichungen gleichmäßig anzubringen, und man erhält im allgemeinen auch verschiedene Resultate, je nachdem, ob das geschieht oder nicht.

§ 3. Zur Kritik Buddes. In § 2 seiner zitierten Arbeit erklärt Budde, daß ihm mein Gedankengang, wie er in den Arbeiten Waetzmann I und Waetzmann-Moser[1]) dargestellt ist, „prinzipiell unrichtig" zu sein scheine. Ich gebe zu, daß meine Darstellung — wie es aber in dem Charakter einer „ersten Mitteilung" liegt — sehr knapp gehalten ist, und daß deshalb einige Stellen, auf die ich nachher zu sprechen komme, Anlaß zu Mißverständnissen geben können. Andererseits kann ich aber Buddes Kritik nicht beipflichten. In einigen Punkten beruht sie sogar auf groben Irrtümern. Wenn ich also im folgenden die Kritik Buddes zurückweisen muß, so möchte ich gleich vor dem Mißverständnis warnen, als ob ich das Problem des Schalldruckes und der damit im Zusammenhang stehenden Fragen etwa für endgültig geklärt halte. Im Gegenteil bin ich der Ansicht, daß mit meiner Arbeit und der daran anschließenden von Küstner überhaupt erst der Anstoß für die notwendige gründliche Untersuchung der Frage gegeben, und bisher nicht mehr als der erste Schritt hierfür getan ist. Das hat aber mit der Kritik Buddes nichts zu tun.

I. Budde knüpft an die Sätze[1]) an: „Wirkt zunächst eine sinusförmig veränderliche Kraft auf die Platte, so hat man anzusetzen:

$$m x'' + k x' + a^2 x = f \sin 2 \pi p t, \qquad (1)$$

und man pflegt diese Gleichung als die mathematische Formulierung des Vorganges anzusehen, der sich abspielt, wenn eine einfache Tonwelle auf m auffällt. Da aber, wie bekannt, eine Tonwelle, die auf eine reflektierende Wand auftrifft, neben den periodischen Druckschwankungen noch einen einseitigen Überdruck auf die Wand ausübt, so stellt dieser Ansatz den physikalischen Vorgang nicht vollständig dar. Es ist vielmehr auf der rechten Seite von (1) additiv ein Glied D hinzuzufügen, welches den — in der Berechnung von Rayleigh konstanten — Schalldruck repräsentiert". Hierzu sagt Budde[2]): „Dieser Gedankengang scheint mir prinzipiell unrichtig; denn der Rayleighsche Schalldruck geht — soweit er überhaupt vorhanden ist — erst aus der Schwingungsgleichung (1) (bei Budde Nr. 4) bzw. aus modifizierten Formen derselben hervor. Er besteht also nicht neben der Gleichung (1), sondern Gleichung (1) stellt den ganzen Vorgang einschließlich des Schalldruckes dar, solange man dem schwingenden Punkt eine lineare Differentialgleichung zuschreibt".

Es ist mir nicht gelungen, mit Sicherheit herauszubekommen, was Budde mit diesen Sätzen eigentlich meint. Zum mindesten der erste Satz läßt aber keine andere Deutung zu, als daß Budde meine Gleichung (1) nicht auf die schwingende Wand (m), sondern irrtümlicher Weise auf Teile des die Schallwellen leitenden Mediums (Luft) bezieht. Damit scheint mir dann die Grundlage für alle weiteren Mißverständnisse gegeben. Die auf die obigen Sätze folgenden Ausführungen Buddes sind Wahrheiten, gegen die ich nicht verstoßen habe. Sie enthalten im wesentlichen die

1) E. Waetzmann u. W. Moser, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 13, 1917.

1) Waetzmann I, S. 425.

2) E. Budde, l. c. S. 323.



ausführliche Feststellung, daß der zeitliche Mittelwert einer vollen Periode einer aus zwei Sinusfunktionen additiv zusammengesetzten Funktion gleich Null ist, und Budde scheint anzunehmen, daß ich das nicht gewußt habe. Zu dieser eigenartigen Annahme ist er offenbar durch die Vorstellung verleitet worden, daß ich in meiner Arbeit hätte zeigen wollen, wie der Rayleighsche Schalldruck zustande kommt. Wenigstens vermag ich sonst den Sinn seiner Ausführungen, daß ohne quadratisches Glied in der Druckgleichung der Schallwellen kein Schalldruck entsteht, nicht einzusehen. Es lag aber im Rahmen meiner ersten Mitteilung keine Veranlassung vor, auf die Art der Entstehung des Schalldruckes im einzelnen einzugehen; denn Zweck und Inhalt dieser Arbeit war ja nur der, zu zeigen, daß, wenn Schalldruck vorhanden ist — gleichgültig wie er zustande kommt, — daß dann bei zwei Primärtönen auch K. T. entstehen. Die Feststellung Buddes, mit welcher er seine ablehnende Kritik meiner Arbeit abschließt[1]): Das Gesagte bestätigt den allgemein angenommenen Helmholtz-Cl. Schaeferschen Satz: „Ohne quadratisches Glied liefert die Theorie weder O. T. noch K. T.", ist also von mir garnicht diskutiert, geschweige denn bestritten worden, und ist somit völlig gegenstandslos.

Es würde natürlich zu weit führen, auf alle Einzelheiten der Buddeschen Arbeit einzugehen, deshalb habe ich versucht, das herauszuschälen, was mir der Kernpunkt seiner Kritik zu sein scheint und diesen zu widerlegen; im übrigen verweise ich auf § 1 der vorliegenden Arbeit und auf meine erste Mitteilung.

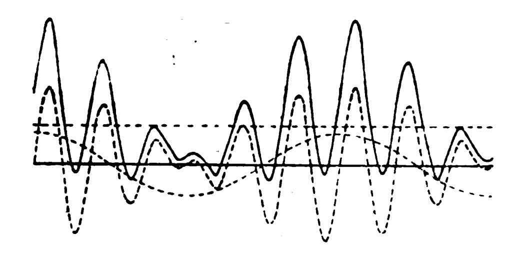
II. Wir kommen jetzt auf einen Punkt, den Budde zwar nicht erwähnt, der aber vielleicht indirekt seine Bedenken mit veranlaßt hat. In § 1 der vorliegenden Arbeit ist durchweg nicht von der „auf die Wand auftreffenden Tonwelle", sondern von der „primär gegebenen Tonschwingung" die Rede. Entsprechend steht an der Spitze meiner ersten Mitteilung der Satz[2]): „Vielleicht können Verzerrungen auch in der Richtung auftreten, daß sinusförmige Komponenten von solchen Perioden entstehen, die „in den Schwingungen der Schallquelle überhaupt noch nicht enthalten sind"[3]). Dagegen wird an anderen Stellen meiner Arbeit, speziell in dem von Budde zitierten Satz, immer kurzweg von der auftreffenden Tonwelle gesprochen. Hierdurch entsteht nun zunächst folgende Möglichkeit zu Mißverständnissen: Unter dem Ausdruck „Tonwelle" kann ja sowohl die Form der Druckschwankungen als auch die Form der Elongationen oder Geschwindigkeiten gemeint sein. Es bedarf wohl keiner näheren Auseinandersetzung, daß in meiner Arbeit nicht die Form der Druckschwankungen gemeint ist, sondern die Form der Verschiebungen. Herr Budde hat aber anscheinend ersteres angenommen. Allerdings möchte ich betonen, daß meines Erachtens für den aufmerksamen Leser die Möglichkeit dieses Mißverständnisses durch den Hinweis darauf ausgeschlossen wird, daß die „Druckschwankungen" in der auftreffenden Tonwelle derartige sein werden, daß sie „neben dem einseitigen Überdruck und dem ursprünglichen Ton noch dessen O. T. geben"[1]).

Dagegen kann gegen die obige Ausdrucksweise mit Recht eingewendet werden, daß die strenge Theorie auch schon für Φ O. T. gibt und nicht erst für p (vgl. § 2). Zur Beurteilung und Erledigung dieses Einwandes, der übrigens von Budde nicht erhoben worden ist, brauche ich nur auf § 2 der vorliegenden Arbeit zurückzuverweisen, wo diese Frage ausführlich behandelt ist.

III. Die Art, wie Budde auf die Arbeit Waetzmann-Moser[2]) eingeht, muß auf das entschiedenste zurückgewiesen werden. Herr Budde hat die Arbeit allem Anschein nach nicht einmal vollständig gelesen. Dementsprechend schweben seine Bemerkungen nicht nur in der Luft, sondern müssen den nicht genau informierten Leser auch völlig irreführen. Zur Begründung der Schärfe in der Zurückweisung der Buddeschen Kritik folgendes: Zunächst nimmt Budde offenbar an, daß unsere Kurven die Wirkung des Schalldruckes darstellen sollen, obwohl sie hiermit gar nichts zu tun haben, sondern — wie klipp und klar in unserer Arbeit zu lesen ist — ihre Form einem unsymmetrischen Kraftgesetz der Gummihaut oder dgl. verdanken. Neben diesem Grundirrtum findet sich die Bemerkung[3]): „Ob die Kurven der Fig. 3 K. T. enthalten, ist fraglich". Und diese Bemerkung macht Budde, trotzdem wir das Amplitudenverhältnis der K. T. und der Primärtöne für die Kurven *b*, *c* und *d* der Fig. 3 quantitativ angeben, und trotzdem wir als Kurve *a* absichtlich eine Schwingungskurve abgebildet haben, die jedem, der im Lesen von Kurven auch nur etwas Erfahrung besitzt, auch ohne Analyse auf den ersten Blick das Vorhandensein eines D. T. zeigt.

1) E. Budde, l. c. S. 324.
2) Waetzmann I, S. 425.
3) Auch im Original gesperrt gedruckt.

1) Waetzmann I, S. 430.
2) E. Waetzmann u. W. Moser, l. c.
3) E. Budde, l. c., S. 323.



Man kann sich das leicht mit Hilfe von Fig. 1 der vorliegenden Arbeit klar machen. Die ausgezogene Kurve ist die Resultierende aus den beiden Tönen mit den relativen Schwingungszahlen 5 und 6, ihrem D. T. erster Ordnung und einer einseitigen Verschiebung. Die Amplituden stehen im Verhältnis 15 : 15 : 12 : 15. Nähere Auseinandersetzungen dürften überflüssig sein.

Jedenfalls hätte Herr Budde, ehe er die Resultate unserer Analyse anzweifelt, die Pflicht gehabt, dieselben nachzuprüfen. Statt dessen wird durch eine völlig aus der Luft gegriffene Behauptung unsere Arbeit für jeden nicht genau informierten Leser diskreditiert.

Zusammenfassung. In meiner ersten Mitteilung stand ebenso wie in der vorliegenden weder die Art der Entstehung des Rayleighschen Schalldruckes zur Erörterung, noch die Art der Entstehung von K. T. für sich genommen. Vielmehr ist der Hauptinhalt dieser Arbeiten die neue und wie mir scheint wichtige Erkenntnis des innigen Zusammenhanges zwischen Rayleighschem Schalldruck einerseits und der Entstehung von O. T. und K. T. andererseits. Auch in der Arbeit Waetzmann-Moser ist als der wesentliche Inhalt meiner ersten Mitteilung die Erkenntnis dieses Zusammenhanges angegeben worden, mit den Worten[1]): „Zunächst zeigte der eine von uns, daß auch bei symmetrischem Kraft- und Dämpfungsgesetz für einen frei schwingenden Körper die erzwungenen Schwingungen desselben unsymmetrisch werden und K. T. in ihm entstehen können, wenn die Bedingungen dafür gegeben sind, daß der Schalldruck merklichen Einfluß erhält". Über weitere Folgerungen aus dieser Erkenntnis sowie über ihre experimentelle Bestätigung hoffe ich in absehbarer Zeit berichten zu können. Ebenso über einige auf der kinetischen Gastheorie beruhende Überlegungen über den Schalldruck für sich genommen. Untersuchungen auf diesem Wege erscheinen mir besonders erwünscht, nachdem mich Herr Prof. Cl. Schaefer auf schwerwiegende Bedenken gegen die Rayleighsche Art der Herleitung des Schalldruckes aufmerksam gemacht hat. Den Inhalt der vorliegenden Arbeit möchte ich folgendermaßen zusammenfassen:

1. Die Ausführungen meiner ersten Mitteilung über den Zusammenhang zwischen Schalldruck und K. T. werden ergänzt.

2. Im Anschluß an die Küstnersche Untersuchung über den Schalldruck werden einige Bemerkungen über die Vernachlässigung der Glieder höheren Grades in den hydrodynamischen Gleichungen gemacht.

3. Die Kritik Buddes an meiner ersten Mitteilung wird zurückgewiesen, dabei aber betont, daß das Problem des Schalldruckes sowie die mit ihm im Zusammenhang stehenden Fragen längst noch nicht geklärt sind.

Breslau, Physikalisches Institut, September 1919.

(Eingegangen 20. September 1919.)

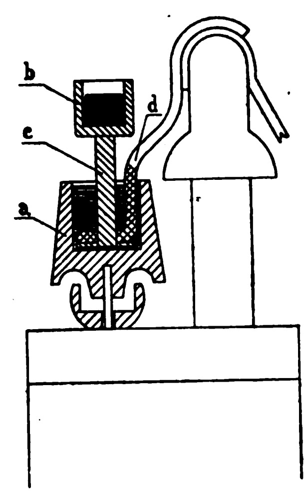
1) E. Waetzmann u. W. Moser, l. c. S. 14.

Eine Verbesserung der Zehnderschen Hochspannungsakkumulatoren.

Von H. Haga.

Mancher Untersucher hat schon üble Erfahrungen gemacht mit den von Klingelfuß gelieferten Zehnderschen Hochspannungsakkumulatoren; man sehe z. B. E. Wagner, Ann. d. Phys. 57, 410, 1918.

Auch bei der im hiesigen Institut sich befindenden Batterie kroch schon nach kurzer Zeit das Quecksilber an den Endplatten empor, wodurch diese ganz brüchig wurden, wiewohl die Gebrauchsanweisungen genau befolgt wurden. Dies veranlaßte mich zu folgender Änderung, wodurch der genannte Übelstand ganz beseitigt wurde.



Die Figur zeigt die Anordnung in halber Größe.

Ein starker Eisendraht, *c*, trägt oben ein eisernes Quecksilbernäpfchen, *b*, und hat unten als Fuß ein Metallscheibchen, womit er leitend verbunden ist. Auf diesem Scheibchen und um den Eisendraht ist der an die Endplatte gelötete Bleidraht, *d*, gelötet.

Die untere Hälfte des Eisendrahtes ist im Porzellannäpfchen *a* mit Wachskolophoniumkitt befestigt.

Die bei der Batterie mitgelieferten Bügel zum Laden können ohne weiteres benutzt werden.

Physikalisches Institut Universität Groningen.

(Eingegangen 26. September 1919.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Metallographie.

Von Rudolf Ruer.

(Schluß.)

2. Das metastabile System Eisen-Kohlenstoff.

Das Charakteristische des durch Fig. 41a dargestellten Schmelzdiagramms des metastabilen Systems Eisen-Kohlenstoff besteht darin, daß Eisen und Kohlenstoff eine (nicht vollkommen stabile) Verbindung von der Formel Fe_3C (= 6,7 Proz. Kohlenstoff) miteinander bilden. Dieses Eisenkarbid, von den Metallurgen Zementit genannt, besitzt im kristallisierten Zustande kein Lösungsvermögen für Eisen. Es zeigt große Härte und Widerstandsfähigkeit gegen Ätzmittel, so daß es durch Behandeln mit verdünnten Säuren in der Kälte von leicht angreifbaren Beimengungen getrennt werden kann. Beim Erwärmen löst es sich in Säuren unter Entwicklung von Wasserstoff und Kohlenwasserstoffen auf. An seiner Existenz ist seit den Untersuchungen von Mylius, Förster und Schöne[1]) nicht mehr zu zweifeln.

Zur näheren Erläuterung des Schmelzdiagramms Fig. 41a diene folgendes. Der Schmelzpunkt des reinen Eisens ist mit *A*, der δγ-Umwandlungspunkt mit *G* bezeichnet. Die primäre Ausscheidung des Eisens findet längs des Kurvenastes *AB* in Form von δ-Mischkristallen, längs des Kurvenastes *BC* in Form von γ-Mischkristallen statt, deren Zusammensetzung durch die entsprechenden Stücke *AH* und *JE* der

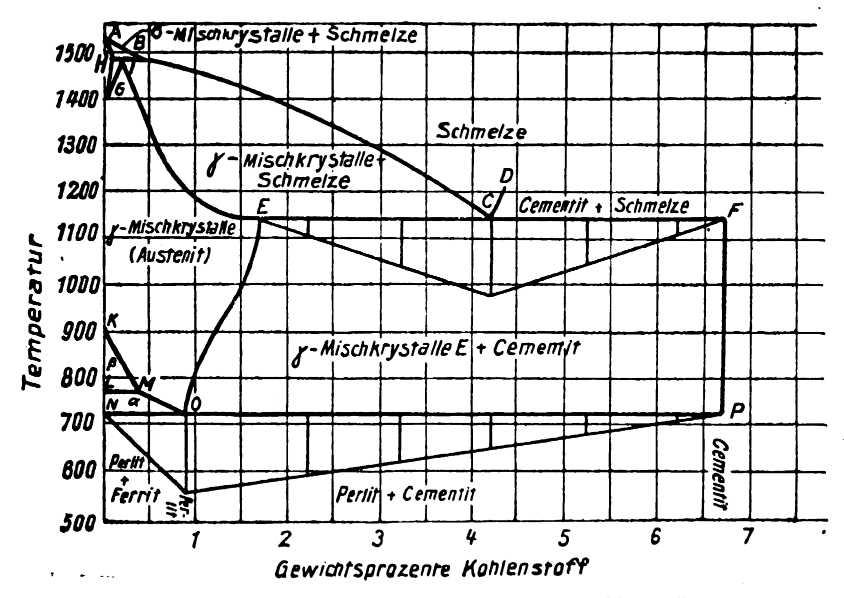


Fig. 41a. Das metastabile System Eisen-Kohlenstoff.

1) Mylius, Förster und Schöne, Zeitschr. f. anorg. Chem. 13, 38, 1896.

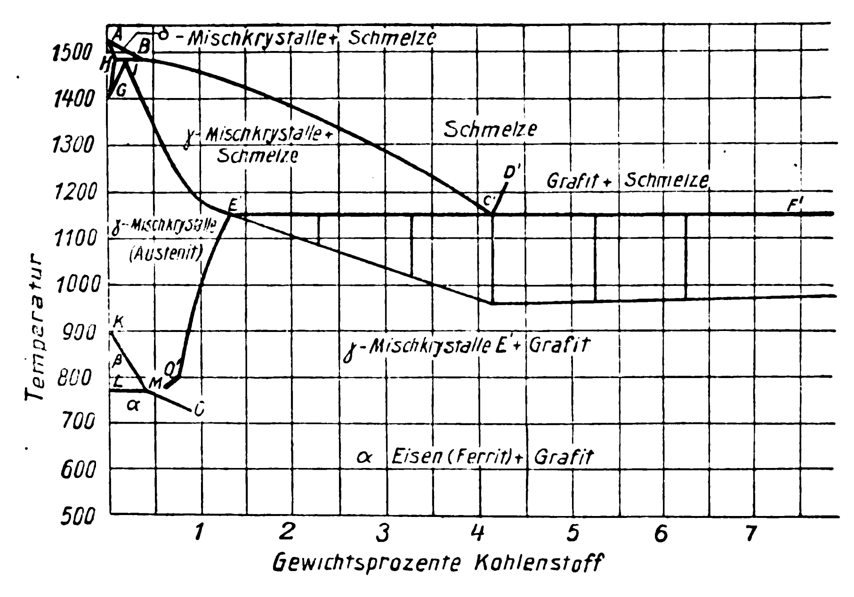


Fig. 41 b. Das stabile System Eisen-Kohlenstoff.

s-Kurve angezeigt wird. Der merkwürdig flache Verlauf des unteren Teiles der Kurve *JE* ist von Gutowsky[1]) durch die Untersuchung der Struktur von Legierungen verschiedener Kon-

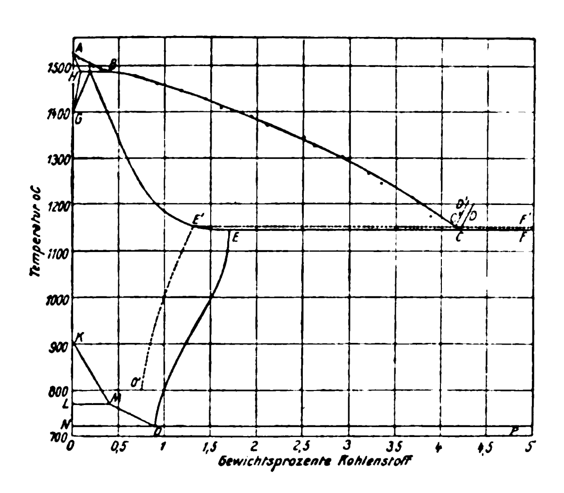


Fig. 41 c. Das vollständige System Eisen-Kohlenstoff.

zentration, die in der Nähe der Temperatur der beginnenden Schmelzung abgeschreckt wurden, ermittelt. Das Kurvenstück *GH* stellt den Beginn der δγ-Umwandlung beim Erkalten dar, deren Temperatur durch geringen Kohlezusatz sehr stark erhöht wird. Es mündet im Punkte *H* bei etwa 0,1 Proz. Kohlenstoff und 1487° C[2]) in die *s*-Kurve *AH* ein. Die bei 1487° C verlaufende Horizontale vollständigen Gleichgewichts *HJB* zwischen δ-Mischkristallen *H*, γ-Mischkristallen *J* und Schmelze *B* erstreckt sich von etwa 0,1—0,4 Proz. Kohlenstoff[1]). Das Kurvenstück *GJ* der beendeten δγ-Umwandlung beim Erkalten hat für diese Umwandlung dieselbe Bedeutung, wie die *s*-Kurve für den Übergang aus dem geschmolzenen in den kristallisierten Zustand. Aus Schmelzen mit weniger als *H* = ca. 0,1 Proz. Kohlenstoff scheiden sich zunächst δ-Mischkristalle aus, welche sich nach erfolgter Erstarrung längs *GH* in γ-Mischkristalle umwandeln. In Legierungen mit *H* (= ca. 0,1) Proz. Kohlenstoff bis *B* (= ca. 0,4) Proz. Kohlenstoff wandeln sich die aus der erstarrenden Schmelze zuerst ausgeschiedenen δ-Mischkristalle, welche unter der Voraussetzung vollständigen Konzentrationsausgleichs bei 1487° C sämtlich die Zusammensetzung *H* haben, durch Umsatz mit der Schmelze *B* zu γ-Mischkristallen von der Zusammensetzung *J* um.

Die primäre Ausscheidung des Zementits wird durch den Kurvenast *CD* angedeutet und erfolgt, wie erwähnt, in reiner Form. Die Konzentration des Punktes *C* liegt bei 4,2 Proz. C[2]), seine Temperatur bei 1145° C[3]). Als Gefügebestandteil der erstarrten Legierungen werden die γ-Mischkristalle, deren Konzentration zwischen Null und *E* = 1,7 Proz. C[4]) variieren kann, Austenit genannt.

1) Gutowsky, Metallurgie **6**, 731, 1909.
2) Ruer und Klesper, loc. cit.

1) Ruer und Klesper, loc. cit.
2) Benedicks, Metallurgie **3**, 393, 1906.
3) Ruer u. F. Goerens, Ferrum **14**, 161, 1917.
4) Gutowsky, Metallurgie **6**, 731, 1909.

Ist die Kristallisation auf der Horizontalen *ECF* beendet, so ist die Legierung vollkommen erstarrt und besteht aus einem Gemenge von gesättigten Mischkristallen von der Kon-

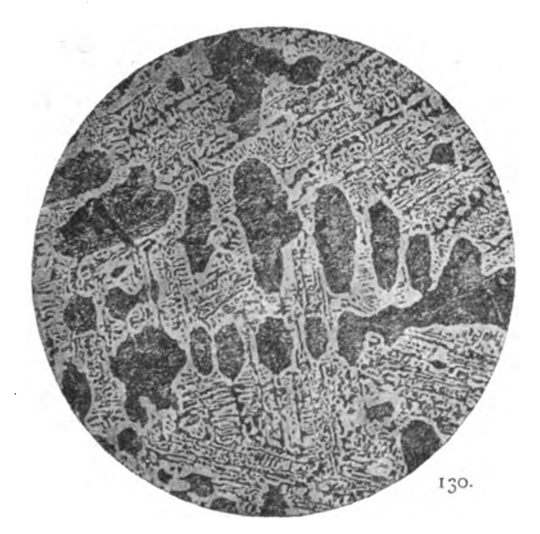


Fig. 42. Weißes Roheisen mit 3,5 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Tannenbaumkristalle (dunkel), Zementiteutektikum (Ledeburit).

zentration *E*, also den kohlenstoffreichsten Austenitkristallen einerseits, und aus Kristallen von der Konzentration *F*, den reinen Zementit-



Fig. 43. Weißes Roheisen mit 5,25 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Zementit (hell), Zementiteutektikum (Ledeburit).

kristallen andererseits. Welcher der beiden Bestandteile zuerst ausgeschieden ist, ergibt sich aus dem Diagramm. Die relative Menge des Zementiteutektikums *C* ist durch Senkrechte auf der Horizontalen *ECF* angegeben. Fig. 42 gibt die Struktur einer untereutektischen, d. h. weniger als 4,2 Proz. Kohlenstoff enthaltenden, Fig. 43 die einer übereutektischen Eisen-Kohlenstofflegierung, deren Erstarrung nach dem metastabilen Systeme stattgefunden hat. Die Ätzung ist in beiden Fällen durch Pikrinsäure erfolgt. Man erkennt in Fig. 42 die primär ausgeschiedenen, durch das Ätzmittel angegriffenen Eisenmischkristalle, die ihrer Anordnung wegen häufig als Tannenbaumkristalle bezeichnet werden, in Fig. 43 die primär ausgeschiedenen Zementitnadeln, in beiden Fällen umgeben von Zementiteutektikum *C*, für das Wüst[1]) den Namen Ledeburit vorgeschlagen hat.

Bei sinkender Temperatur nimmt das Lösungsvermögen des Eisens für Zementit ab. Es findet demnach längs des Kurvenastes *EO* Ausscheidung von Zementit statt. Der ausgeschiedene Zementit ändert seine Zusammensetzung nicht, was durch die Vertikale *FP* angedeutet ist. Der $\gamma\beta$-Umwandlungspunkt des reinen Eisens ist mit *K*, der $\beta\alpha$-Umwandlungspunkt mit *L* bezeichnet. Nun besitzen α- und β-Eisen im Gegensatz zu γ- und δ-Eisen kein merkliches Lösungsvermögen für Kohlenstoff. Da sich also die β-Kristalle aus der hier allerdings festen Lösung von Kohlenstoff in Eisen rein ausscheiden, so muß ihre Ausscheidungstemperatur, mit anderen Worten die Umwandlungstemperatur des γ-Eisens in β-Eisen, mit steigendem Kohlenstoffgehalt längs *KM* sinken, und zwar bis zur Temperatur $L = 769^0$ C, bei der die reinen β-Kristalle in die α-Kristalle übergehen. Es findet demgemäß bei Konzentrationen zwischen *L* und *M* ein Stabilitätswechsel statt, indem die bis dahin ausgeschiedenen reinen β-Kristalle bei der Temperatur der Horizontalen *LM* in die nunmehr stabile α-Form übergehen. Der Umstand, daß sich von jetzt an aus der festen Lösung von Kohlenstoff in γ-Eisen sofort α-Eisen ausscheiden muß, gibt sich durch eine plötzliche Richtungsänderung der Kurve in *M* zu erkennen. Die Konzentration des Punktes *M* beträgt nach Bardenheuer[2]) 0,41 Proz. C. Im Schnittpunkte *O* der Kurven *KMO* und *EO* treffen wir auf Verhältnisse, die der eutektischen Kristallisation ganz analog sind. Die hier feste Lösung von Kohlenstoff in γ-Eisen (= Austenit) ist bei dieser Temperatur sowohl mit Zementit, wie mit α-Eisen gesättigt. Es findet daher bei Wärmeentziehung gleichzeitig Ausscheidung beider Kristallarten in einem solchen Verhältnisse statt,

1) Wüst, Metallurgie **6**, 512, 1909.
2) Bardenheuer, Ferrum **14**, 129, 1917.

daß dadurch die Konzentration der festen Lösung nicht geändert wird. Die Temperatur bleibt solange konstant, bis der Austenit von der Konzentration *O* vollkommen in ein eutektisches Gemisch aus α-Eisen und Zementit um-



Fig. 44. Eisen mit 0,64 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Ferrit (hell), Perlit (lamellar).

gewandelt ist. Das Eutektikum, welches eine schön lamellare Struktur aufweist, führt den Namen Perlit. Die Konzentration des Punk-



Fig. 45. Eisen mit 1,40 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Zementit (hell), Perlit (lamellar).

tes *O* ist zu 0,9 Proz. C bestimmt worden. Wie schon Osmond[1]) fand, zeigt die Perlitumwandlung eine besonders starke Hysteresis, deren Betrag von verschiedenen Umständen abhängig ist. Durch Berücksichtigung dieser Umstände gelang es, sie auf 6° C zu ermäßigen und die Gleichgewichtstemperatur der Umwandlung mit einem Fehler von $\pm 3°$ C zu 721° C zu bestimmen[1]). Die relative Menge des Perlits ist durch Senkrechte auf der Horizontalen *NOP* angegeben. Falls die Kristallisation in der beschriebenen Weise stattfindet, so besteht die erkaltete Legierung bei Konzentrationen von 0—0,9 Proz. C aus Ferrit (α-Eisen) und Perlit (Fig. 44), von 0,9 Proz. *C* aus Perlit, von 0,9—6,7 Proz. *C* aus Zementit und Perlit (Fig. 45, vgl. auch Fig. 42, die bei der Ausscheidung homogenen Tannenbaumkristalle sind bei der Abkühlung in Zementit und Perlit zerfallen.)

Nun ist es durch genügend schnelle Abkühlung möglich, die auf *KMOE* stattfindenden Reaktionen zu verhindern. Dadurch hat man es in der Hand, noch instabilere Zustände zu realisieren, als unser Diagramm wiedergibt.

3. Das stabile System Eisen-Kohlenstoff.

Auch in dem durch das Diagramm Fig. 41b dargestellten stabilen System scheidet sich das Eisen bei Konzentrationen zwischen 0 und *C'* längs der Schmelzkurve *ABC'* primär in Form von Mischkristallen aus, deren Zusammensetzung durch die Stücke *AH* und *JE'* der *s*-Kurve angegeben ist. Der Verlauf dieser, sowie der die γδ-Umwandlung betreffenden Kurven ist der gleiche, wie der der entsprechenden Kurven im metastabilen System (Fig. 41a). Dagegen findet die primäre Ausscheidung des Kohlenstoffs aus der Schmelze im stabilen System nicht in Form von Zementit, sondern in Form von Graphit statt. Dies wird durch den Kurvenast *C'D'* wiedergegeben, der oberhalb des Kurvenastes *CD* verlaufen muß. Die Konzentration des Graphiteutektikums *C'* liegt bei 4,15 Proz. Kohlenstoff, seine Temperatur bei 1152° C[1]). Die Konzentration des mit Graphit gesättigten stabilen Mischkristalls *E'* entspricht 1,3 Proz. Kohlenstoff[2]). Ist die Temperatur bis zu der Horizontalen *E'C'F'* (= 1152° C) gefallen, so kristallisiert alles, und die Legierung besteht nach vollendeter Kristallisation bei Konzentrationen von 0 bis *E'* Proz. C nur aus Mischkristallen, die bei idealem Kristallisationsverlauf alle die durch die Zusam-

1) Osmond, Transformations du fer et du carbone dans les fers, les aciers et les fontes blanches, Paris 1888.

1) Ruer und F. Goerens, Ferrum 14, 161, 1917.
2) Ruer und F. Goerens, Ferrum 14, 161, 1917.

mensetzung der ursprünglichen Legierung gegebene Zusammensetzung haben. Bei höheren Konzentrationen besteht die Legierung aus zwei Bestandteilen, nämlich den gesättigten Mischkristallen *E'* einerseits und Graphit andererseits, von denen je nach der Konzentration der eine oder andere Bestandteil sowohl primär, als auch im Eutektikum auftritt. Die relativen Mengen des Eutektikums „Mischkristalle *E'*-Graphit" sind in bekannter Weise durch Senkrechte auf der Horizontalen *E'C'F'* angedeutet. Der gesättigte Mischkristall *E'* scheidet bei weiterer Abkühlung Kohlenstoff, und zwar im stabilen System nicht als Zementit, sondern in reiner Form als sog. Temperkohle aus. Die Temperkohle steht dem Graphit in ihren Eigenschaften sehr nahe und ist wahrscheinlich damit identisch. Die Ausscheidung der Temperkohle wird durch die Kurve *E'O'* angegeben. Die der βγ- und αβ-Umwandlung entsprechenden Linien *KM*, *LM* und *MO* sind im stabilen System die gleichen wie im metastabilen System. Die Kurve *E'O'* würde bei kontinuierlicher Verlängerung *MO* bei etwa 740° C und 0,7 Proz. Kohlenstoff treffen. Das hierdurch entstehende, dem Perlit entsprechende eutektische Gemisch aus Eisen und elementarem Kohlenstoff ist noch nicht nachgewiesen.

Die vollkommen stabilen Eisen-Kohlenstofflegierungen können also unterhalb 740° nur reines Eisen und reinen Kohlenstoff (Graphit und Temperkohle) enthalten. Der vollständige Eintritt des stabilen Zustandes wird jedoch, wie schon erwähnt, durch die Neigung zu Unterkühlungen stets verhindert.

4. Das vollständige System Eisen-Kohlenstoff.

Die so sehr verschiedenen Eigenschaften, die man zwei Eisen-Kohlenstofflegierungen von gleicher Zusammensetzung erteilen kann, finden ihre Erklärung in der verschiedenen Stabilität der Systeme. Diese Mannigfaltigkeit kommt durch die Vereinigung beider Diagramme zum Ausdruck. Fig. 41c gibt (bis zur Konzentration 5 Proz. C und unter Weglassung einiger störender Einzelheiten, wie der Senkrechten auf den eutektischen Geraden) die Vereinigung der beiden Diagramme Fig. 41a u. b zu einem einzigen. Die ausschließlich dem stabilen Sysystem angehörenden Linien sind gestrichelt gezeichnet, die dem metastabilen oder beiden Systemen angehörenden voll ausgezogen. Die beiden Diagramme stimmen in bezug auf die Umwandlungspunkte des reinen Eisens *A*, *G*, *K*, *L* und die Gleichgewichtslinien *ABC'*, *AH*, *JE'*, *GH*, *GJ*, *HJB*, *KM*, *MO*, *LM* überein. Soweit keine Übereinstimmung stattfindet, müssen die voll ausgezogenen Linien metastabile Zustände darstellen und daher unterhalb der gestrichelten liegen.

Hiernach können in erstarrten Eisen-Kohlenstofflegierungen bei gewöhnlicher Temperatur folgende Bestandteile angetroffen werden:

1. Im vollkommen stabilen Zustande (Fig. 41b): reines α-Eisen (= Ferrit) zusammen mit Graphit (bzw. Temperkohle).
2. Im metastabilen Zustande (Fig. 41a):
   a) Ferrit mit Perlit,
   b) Perlit allein,
   c) Perlit und Zementit.
3. Im wenig stabilen Zustande, d. h. wenn auch die Kurve *KMOE* übersprungen wird Austenit, d. h. eine feste Lösung von Kohlenstoff in γ-Eisen, ev. zusammen mit Zementit.
4. Es treten noch Gefügebestandteile auf, die als Zwischenstufen der unter 2 und 3 angeführten Gefügebestandteile anzusehen sind. Ordnet man sie nach zunehmender Stabilität, so ergibt sich folgende Reihenfolge:

(Austenit) — Martensit — Trostit — Sorbit — (Ferrit + Zementit).

Da diese Zwischenzustände keinem definierbaren Gleichgewichtszustande entsprechen, so ist in dem durch Fig. 41c dargestellten Zustandsdiagramm für sie kein Platz.

Durch die Möglichkeit, daß der Stabilitätszustand an verschiedenen Stellen in derselben Legierung ein verschiedener sein kann, daß also die den verschiedenen Stabilitätsgraden entsprechenden Gefügebestandteile nebeneinander und in wechselnder Menge auftreten können, hat man es in der Hand, die Eigenschaften der Eisen-Kohlenstofflegierungen innerhalb weiter Grenzen beliebig zu variieren, ohne ihre Zusammensetzung zu verändern. So besteht der Unterschied zwischen grauem und weißem Roheisen (= Eisen mit mehr als 1,7 Proz. Kohlenstoff) darin, daß ersteres (Fig. 46) Graphit in größerer oder geringerer Menge, letzteres (Fig. 42 u. 43) nur chemisch gebundenen Kohlenstoff enthält. Da der chemisch gebundene Kohlenstoff beim Behandeln mit Säuren stets in Form von Kohlenwasserstoffen frei wird, so darf nur ersteres beim Behandeln mit Säuren einen Rückstand von Kohle hinterlassen.

Enthält das Roheisen kein Silizium, so erstarrt es bis zu einem Kohlenstoffgehalte von

etwa 3 Proz. bei normaler Abkühlung im wesentlichen als weißes Roheisen. Silizium vermindert die Neigung zu Unterkühlungen je nach seiner Menge in größerem oder geringerem Maße. Mangan hat im Gegensatz hierzu die Eigenschaft, die Unterkühlungen zu fördern. Manganhaltige Roheisensorten erstarren

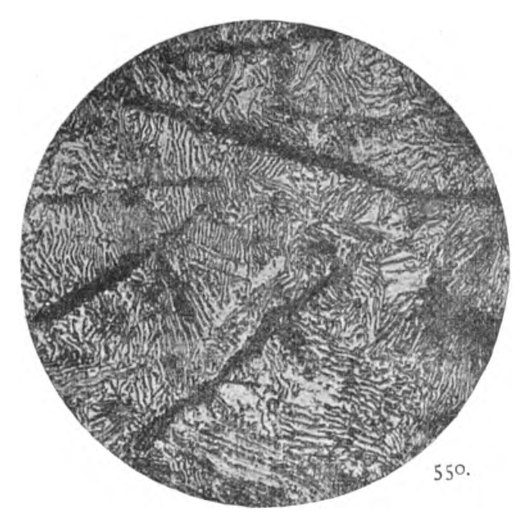


Fig. 46. Graues Roheisen mit 3,5 Proz. C. Mit alkoholischer Pikrinsäure geätzt. Graphit, Perlit.

daher auch noch bei Kohlenstoffgehalten von über 4 Proz. im allgemeinen in Form des weißen Roheisens.

Eisen-Kohlenstofflegierungen mit 1,7 Proz. Kohlenstoff und darunter werden als Stahl, Schmiedeeisen usw. bezeichnet. Die in ihnen stattfindenden Umwandlungen erfolgen auch bei langsamer Abkühlung nach dem metastabilen System. Trotzdem ist, wie das Diagramm zeigt, in diesem Gebiete die Möglichkeit der verschiedenen Zustände wegen des Auftretens der Kurve *KMOE* eine recht große. Will man ein Eisen von bestimmten Eigenschaften herstellen, so ist hierzu die Kenntnis des Diagramms in Verbindung mit der Kenntnis der Eigenschaften der einzelnen Gefügebestandteile von großem Werte.

Gefügebestandteil	Härte
Ferrit	Weichster Gefügebestandteil.
Zementit	Härtester „ „
Perlit	Mittel.
Austenit	Wechselnde Härte je nach dem Kohlenstoffgehalt, stets weicher als Zementit.

Will man beispielsweise einem Eisen von bestimmtem Kohlenstoffgehalt, etwa 1 Proz., eine möglichst große Härte erteilen, so ist (s. vorstehende Tabelle) die Entstehung des mittelweichen Perlits zu verhindern und die Legierung demgemäß aus dem Gebiete des Austenits möglichst schnell in das Gebiet geringer Reaktionsgeschwindigkeit überzuführen, in dem eine Umwandlung des Austenits in Perlit und Zementit nicht mehr stattfindet („Härten des Stahls"). Die Temperatur, bei der die schnelle Abkühlung einzusetzen hat, muß oberhalb *KMOE* liegen und ergibt sich bei Kenntnis des Kohlenstoffgehalts ohne weiteres aus dem Diagramm. Setzt man den gehärteten Stahl einer Temperatur von über 200° C aus, so befindet er sich in einem Gebiet, in dem der Zerfall des Austenits in Ferrit und Zementit schon mit merkbarer Geschwindigkeit vor sich geht. Man kann in dieser Weise einem Stahl, dessen Härte das gewünschte Maß übersteigt, eine geringere Härte erteilen („Anlassen des Stahls").

5. Experimenteller Nachweis der Existenz zweier verschiedener Eisen-Kohlenstoffsysteme.

Die Gründe, welche zur Annahme zweier verschiedener Systeme, eines stabilen Graphitsystems und eines metastabilen Zementitsystems geführt haben, waren, wie oben erwähnt, einmal die Beobachtung, daß schnelle Erstarrung die Graphitausscheidung verhindert, langsame sie begünstigt, ferner die Möglichkeit, den in erstarrten Eisen-Kohlenstofflegierungen vorhandenen Zementit durch längeres Erhitzen auf ca. 900° C mit nachfolgender langsamer Abkühlung unter Ausscheidung von elementarem Kohlenstoff zum Teil zu zerlegen. Die durch diese Tatsachen gegebene Begründung konnte, weil indirekter Natur, als zwingend nicht angesehen werden. Ein zwingender Beweis kann nur durch den direkten Nachweis der Existenz der in dem Diagramm (Fig. 41c) angenommenen Doppellinien erbracht werden. Bis vor kurzem war nur die Lage eines Kurvenpaares, nämlich der Verlauf der Kurve *EO* der Löslichkeit des Zementits im festen Eisen[1]) und der Kurve *E'O'* der Löslichkeit des elementaren Kohlenstoffs im festen Eisen[2]) experimentell ermittelt. Da jedoch die Punkte der Kurve *E'O'* nur von einer Seite, und zwar von niederer Temperatur aus bestimmt werden konnten, so ließ sich der Einwand erheben, daß das Gleichgewicht nicht erreicht worden sei und die Werte für die Löslichkeit des elementaren Kohlen-

1) Wark, Metallurgie 8, 704, 1911.
2) Ruer und Iljin, Metallurgie 8, 97, 1911.

stoffes im festen Eisen zu niedrig gefunden seien.

Durch Beobachtung des Verhaltens des Zementiteutektikums bei wiederholter Schmelzung und Erstarrung hat sich der Nachweis der Existenz zweier verschiedener eutektischer Horizontalen *ECF* und *E'C'F'* (Fig. 41c) erbringen lassen[1]). Am besten eignet sich dazu eine Legierung mit etwa $2^1/_2$ Proz. Kohlenstoff, welche auch bei verhältnismäßig langsamer Abkühlung aus dem Schmelzflusse zunächst weiß erstarrt. Die mit einer Legierung dieser Zusammensetzung angestellten Abkühlungs- und Erhitzungsversuche sind in Fig. 47 graphisch dargestellt. Der Erobere, bei etwa 1153° C liegende Haltepunkt auf der Erhitzungskurve 3a auf Kosten des unteren so weit verstärkt, daß die Dauer der beiden etwa die gleiche ist. Nach der vierten Erstarrung ist der untere Haltepunkt auf der Erhitzungskurve verschwunden, die Erhitzungskurve 4a läßt nur den oberen bei etwa 1153° C liegenden Haltepunkt erkennen. Von da ab bringt weitere Erstarrung und Wiedererhitzung keine Veränderung der Erhitzungskurven mehr hervor. Während die Erhitzungskurven die oben beschriebene Änderung erleiden, bleiben die Abkühlungskurven von der zweiten Erstarrung an ziemlich unverändert und weisen einen

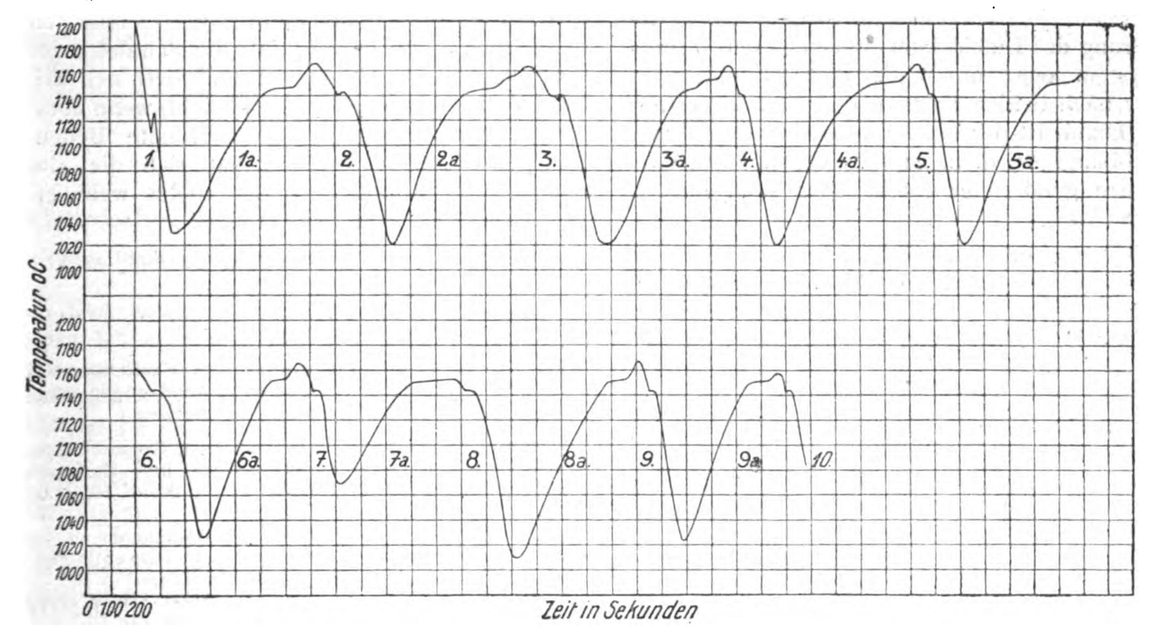


Fig. 47.

starrungsbeginn der geschmolzenen Legierung lag bei 1342° C; der Regulus kühlte darauf ziemlich schnell bis 1110° C ab, bei welcher Temperatur die eutektische Kristallisation unter freiwilliger Temperaturerhöhung bis 1127° C einsetzte (Kurve 1). Nachdem der Regulus bis 1029° C abgekühlt war, erfolgte seine Wiedererhitzung bis 1166° C. Auf Kurve 1a, welche diesen Vorgang darstellt, ist der bei 1146° C auftretende Haltepunkt sehr deutlich ausgeprägt. Die hierauf folgende Abkühlung und Wiedererhitzung sind durch die Kurven 2 und 2a dargestellt. Man sieht auf der Erhitzungskurve, daß nach dem ersten wiederum bei 1146° C liegenden Haltepunkt ein schwach ausgeprägter zweiter Haltepunkt auftritt. Bei der dritten Abkühlung und Wiedererhitzung hat sich der innerhalb weniger Grade schwankenden Haltepunkt bei etwa 1144° C auf.

Die Untersuchung der Struktur der erstarrten Reguli ergab, daß der auf den ersten Erhitzungskurven auftretende, bei 1146° C liegende Haltepunkt der Schmelzung des Zementiteutektikums entspricht. Bei der wiederholten Erhitzung und Abkühlung geht das Zementiteutektikum allmählich vollständig in das Graphiteutektikum über; in dem Maße, in dem dieses geschieht, vermindert sich die Dauer des der Schmelzung des Zementiteutektikums entsprechenden Haltepunkts bis zum völligen Verschwinden; dafür erscheint und verstärkt sich in gleichem Maße der bei 1153° C liegende Haltepunkt, welcher der Schmelzung des Graphiteutektikums entspricht.

Die beobachtete Lage der beiden Haltepunkte auf der Erhitzungskurve — 1146° C

1) Ruer u. F. Goerens, Ferrum 14, 161, 1917.

für den unteren und 1153° C für den oberen — liefern eine obere Grenze für die wahren, d. h. dem Gleichgewicht entsprechenden Schmelzpunkte des Zementit- und Graphiteutektikums. Eine untere Grenze ließ sich mit Hilfe geeigneter Abkühlungskurven ermitteln, sie lag in beiden Fällen 2° C unter der oberen Grenze. In Anbetracht der Geringfügigkeit dieses Unterschiedes ergeben sich als Gleichgewichtstemperaturen für die Schmelzung und Erstarrung die Mittelwerte der entsprechenden Grenztemperaturen: 1145° C für das Zementiteutektikum und 1152° C für das Graphiteutektikum.

Diese beiden eutektischen Schmelztemperaturen können jede einzeln und auch zusammen auftreten, je nachdem die vorhergehende Erstarrung des Eutektikums nur nach dem Zementitsystem oder nur nach dem Graphitsystem oder nach beiden Systemen gleichzeitig erfolgt ist. Damit ist der Nachweis zweier voneinander unabhängiger, d. h. zu zwei verschiedenen Systemen gehörender eutektischer Temperaturen erbracht.

Ein weiteres Resultat dieser Untersuchung besteht in der Ermittlung der Konzentration des Punktes E' (Fig. 41 c) als Endpunkt der Horizontalen $E'C'F'$ von höherer Temperatur aus. Dieser Punkt war bisher nur als Punkt der Kurve $E'O'$ von niederer Temperatur aus bestimmt worden[1]). Da beide Resultate hinreichende Übereinstimmung zeigen, so liegt darin eine Gewähr, daß auch die übrigen Punkte der Kurve $E'O'$ der Löslichkeit des elementaren Kohlenstoffs im festen Eisen, welche nur durch Erhitzungsversuche bestimmt werden konnten, Gleichgewichtswerte darstellen.

In den Punkt C' des Graphiteutektikums mündet die Kurve $C'D'$ der Ausscheidung des Graphits aus geschmolzenen Eisen-Kohlenstofflegierungen, in den Punkt C des Zementiteutektikums die Kurve CD der Ausscheidung des Zementits aus geschmolzenen Eisen-Kohlenstofflegierungen. Da C' bei höherer Temperatur als C liegt, so muß $C'D'$ wenigstens zum Teil oberhalb von CD verlaufen. Bezüglich des Verlaufes der beiden Kurvenäste nach höherer Temperatur hin gehen die Ansichten noch weit auseinander.

Schließlich sei noch erwähnt, daß die Kenntnis der wahren Schmelzpunkte des Graphit- und Zementiteutektikums die Beantwortung der viel diskutierten Frage der Bildung des Graphits oder genauer des Erstarrungsgraphits ermöglicht. Die meisten Metallurgen waren der Ansicht, daß bei der Erstarrung die Ausscheidung des Graphits nicht direkt aus der Schmelze, sondern durch nachträgliche Zersetzung schon ausgeschiedener Kristallarten erfolge. Eine genaue Bestimmung der eutektischen Erstarrungstemperatur grau erstarrten Roheisens ergab jedoch, daß die Schmelze der Ort der Graphitbildung ist und daß der kristallisierten Phase in dieser Hinsicht, wenn überhaupt, nur eine ganz untergeordnete Bedeutung zukommt. Hiernach hat sich die alte Regel, daß Roheisen immer zuerst weiß erstarrt, als nicht haltbar erwiesen.

(Eingegangen 3. April 1918.)

1) Ruer und Iljin, loc. cit.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der Abteilungsvorsteher am Chemisch-technischen Institut der Technischen Hochschule Karlsruhe Geh. Regierungsrat Dr. Adolf Lehne zum ord. Honorarprofessor daselbst.

Berufen: Der ord. Professor der Astronomie an der Universität Straßburg Dr. Julius Bauschinger in gleicher Eigenschaft an die Universität Leipzig.

Neuer Lehrauftrag: Oberrealschuldirektor Dr. Walter Lietzmann an der Universität Göttingen für Didaktik der exakten Wissenschaften.

Vom Lehramt zurück: Der Direktor des Physikalischen Laboratoriums der Universität Toronto Professor Dr. John C. Mc Lennan.

Gestorben: Der Hauptobservator am Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam Geh. Regierungsrat Professor Dr. Paul Kämpf, der ord. Professor der physiologischen Chemie an der Universität Leipzig Dr. Max Siegfried, der Begründer der Deutschen Chemischen Gesellschaft und des Vereins zur Wahrung der Interessen der chemischen Industrie Deutschlands Geheimrat Dr. Karl Alexander v. Martius (Aktiengesellschaft für Anilinfabrikation) in Berlin.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 6. | 15. März 1920. Redaktionsschluß für No. 8 am 1. April 1920. | 21. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Elektrische Doppelbrechung in Kolloiden.

Von C. Bergholm und Y. Björnståhl.

Daß gewisse Kolloide unter der Einwirkung eines Magnetfeldes doppelbrechend werden, ist seit den Untersuchungen von Majorana[1]) über kolloidales Eisenoxyd bekannt. Ähnliche Wahrnehmungen haben Dießelhorst und Freundlich[2]) betreffend Vanadinpentoxydsol gemacht. Dieselben haben auch die Doppelbrechung in der strömenden Flüssigkeit untersucht[3]). Infolge der Geschwindigkeitsdifferenz zwischen benachbarten Stromschichten ordnen sich die Partikel so, daß ihre Längsachsen in Richtung der Strömungslinien liegen. Eine Flüssigkeitsschicht wirkt somit wie eine einachsige Kristallplatte, deren Achse in Richtung der Partikelachsen liegt. Dießelhorst und Freundlich konstatierten auch, daß V_2O_5-Sol in einem elektrischen Felde doppelbrechend wurde. Zwei Platinbleche wurden parallel zueinander in ein Gefäß mit V_2O_5-Sol eingesetzt. Das Gefäß befand sich zwischen zwei gekreuzten Nicols. Wenn die Spannung angelegt wurde, leuchtete das Gesichtsfeld auf. Bei den Gold- und Silbersolen, welche sie untersuchten, fanden sie keinen Effekt.

Dießelhorst und Freundlich haben sich darauf beschränkt, die Doppelbrechung in V_2O_5-Solen qualitativ zu konstatieren. Im folgenden wollen wir über einige Messungen bezüglich der Abhängigkeit der Phasendifferenz und des Amplitudeneffekts vom elektrischen Felde in V_2O_5- und Au-Solen berichten. Es hat sich nämlich gezeigt, daß auch Goldsole, welche nach Dießelhorst und Freundlich Partikel mit sphärischer Symmetrie haben sollen, in einem elektrischen Felde doppelbrechend werden. Betreffend Silbersolen haben wir nur konstatiert, daß sie ebenfalls diese transversale elektrische Doppelbrechung zeigen.

Versuchsanordnung.

Um die Phasenverschiebung in V_2O_5-Solen zu messen, wurde zuerst ein Babinetscher Kompensator verwendet, welcher jedoch zum Messen der in Frage kommenden kleinen Effekte nicht genügend empfindlich war und deshalb durch eine von Stokes[1]) angegebene Anordnung ersetzt wurde. Diese Methode konnte wohl eine Vorstellung von der Größe der Phasendifferenz geben; zum Messen war sie jedoch nicht geeignet. Die schließliche Versuchsanordnung, nach Brace[2]), geht aus Fig. 1 hervor. Die

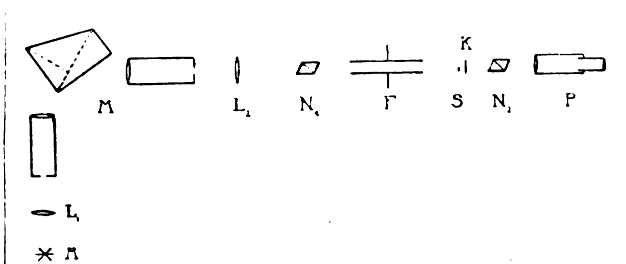


Fig. 1.

1) M. Majorana, C. R. 135, 159, 1902.
2) H. Dießelhorst u. H. Freundlich, Elster-Geitel-Festschrift 1915.
3) H. Dießelhorst u. H. Freundlich, diese Zeitschr. 16, 419, 1915; 17, 117, 1916.

1) C. G. Stokes, Phil. Mag. 4, 422, 1851.
2) D. B. Brace, Phil. Mag. 7, 317, 1904.

Linse L_1 wirft ein Bild des Lichtbogens A auf den einen Spalt des Monochromators. Die durch den anderen Spalt austretenden Strahlen — Spektralgebiet 20 $\mu\mu$ — gehen durch die Linse L_2, den Polarisator N_1, die Kerrzelle F, den empfindlichen Streifen S, den Kompensator K, den Analysator N_2 und das Fernrohr P. Die beiden Nicols sind gekreuzt, und ihre Hauptschnitte bilden mit den Kondensatorplatten der Kerrzelle einen Winkel von 45^0. Der empfindliche Streifen ist in 45^0 Azimut im Verhältnis zum Hauptschnitt der Nicols eingeführt. Man stellt so ein, daß der empfindliche Streifen verschwindet und liest das Azimut des Kompensators vor und nach der Einschaltung des Feldes ab. Die Phasendifferenz $\varDelta$ ist abhängig von dem Drehungswinkel Θ gemäß der Formel

$$\operatorname{tg} \varDelta = 2 \cos (2\varphi_0 - \Theta) \sin \Theta \sin \delta,$$

wo δ die Phasendifferenz des Kompensators und φ_0 eine Konstante ist.

Zur Bestimmung des Amplitudeneffekts wurde die Kerrzelle drehbar für sich und drehbar zusammen mit dem Polarisator angeordnet. Eine Glimmerplatte, welche eine Phasendifferenz von $^1/_4$ Wellenlänge des benutzten Lichtes verursachte, wurde im 0^0 Azimut zwischen die Kerrzelle und den empfindlichen Streifen eingeführt. Durch gleichzeitige Drehung des Polarisators und der Kerrzelle bis zum Verschwinden des empfindlichen Streifens kann man das Amplitudenverhältnis bestimmen. Betreffend der Ableitung der Formeln und der Konstruktion und Justierung der Apparate wird auf C. Bergholm, Doppelbrechung in kathodenzerstäubten Metallschichten, Uppsala Universitets Årsskrift 1, 1915, verwiesen.

Das Aussehen der Kerrzelle geht aus Fig. 2 hervor. Dieselbe wurde aus einer vergoldeten

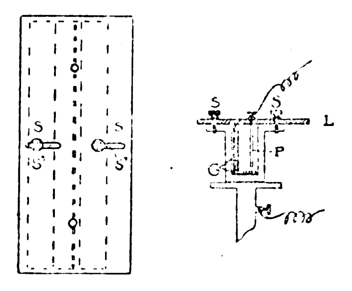


Fig. 2.

Messingrinne, auf deren kurze Seiten Deckgläser mit einer Mischung von Guttapercha und Pech festgekittet wurden, hergestellt. Die vergoldete Messingplatte P ist mittels zweier Schrauben mit dem Glasdeckel L fest verbunden. Dieser ist mit länglichen Nuten versehen, so daß er in seitlicher Richtung verschoben werden kann. Auf dem Boden und an einer Seite der Zelle wurden die Glasplatten G festgekittet. Die Länge der Zelle, welche zum Messen des Goldsols angewendet wurde, war 10,04 cm und die Länge der inneren Platte 9,92 cm. Für die Messungen an V_2O_5 Sol wurde eine Zelle von gleicher Konstruktion, jedoch mit den entsprechenden Dimensionen von 1,52 und 1,39 cm verwendet.

Als Stromquellen wurden ein Wechselstromgenerator von 50 Perioden und eine Hochfrequenzsirene von Siemens & Halske verwendet.

Die Potentialdifferenz zwischen den Elektroden der Kerrzelle wurde mit einem Elektrometer nach Bjerknes[1]) bestimmt. Ein rechteckiges Aluminiumblättchen ist mittels eines Quarzfadens zwischen zwei vertikalen Metallplatten im 45^0 Azimut aufgehängt. Das Aluminiumblättchen trägt unten einen kleinen Spiegel und zwecks Erhöhung der Dämpfung ein Glimmerblättchen. Das Instrument wurde durch Vergleich mit einem Multizellularquadrantelektrometer gradiert.

Das V_2O_5-Sol wurde nach den Angaben von Biltz[2]) hergestellt. Ammoniumvanadat wird mittels verdünnter Salzsäure zersetzt, V_2O_5 bleibt als ein rotbraunes Pulver zurück. Dieses wird durch wiederholte Zentrifugierung mit kaltem Wasser ausgewaschen. Wenn das Waschwasser farbig zu werden beginnt, wird das übrigbleibende Pulver mit Wasser zugesetzt. Nach Ausfällung mit Kochsalz und Peptisation wurde das Sol ungefähr 3 Monate aufbewahrt, ehe es für Messungen angewendet wurde.

Das Goldsol wurde nach Zsigmondys Methode[3]) durch Reduktion von Goldchlorid ($HAuCl_4$) mit Wasserstoffsuperoxyd unter Zusatz von Keimen gewonnen. Das Sol wurde dann mit besonders reinem Wasser verdünnt. Die Mehrzahl der Bestimmungen ist mit einem Sol, dessen Teilchendurchmesser ungefähr 100 $\mu\mu$ war, gemacht worden. Das Sol war nicht ganz gleichförmig.

Messungen.

Messungen wurden zuerst mit V_2O_5-Sol vorgenommen. Es zeigte sich, daß die Doppelbrechung bei jedem Stromdurchgang vermindert wurde, auch wenn dieser nur einige Sekunden währte. Dies beruht wahrscheinlich darauf, daß das Kolloid koaguliert, denn wir bemerkten dieselbe Erscheinung, wenn dem Sole einige Tropfen verdünnter Elektrolyt zugefügt wurden.

1) W. F. K. Bjerknes, Wied. Ann. 48, 594, 1893.
2) W. Biltz, Ber. d. D. chem. Ges. 37, 1098, 1906.
3) R. Zsigmondy, Zeitschr. f. phys. Chem. 56, 65, 1906.

Um sichere Werte zu erhalten, erneuten wir für jede Messung das Sol. Auch das *Au*-Sol zeigte den genannten Effekt, wenn auch nicht in so hohem Grade.

Daß die Kolloide im elektrischen Felde doppelbrechend werden, beruht wahrscheinlich darauf, daß sich die unsymmetrisch gebauten Partikel orientieren. Als Stütze für diese Auffassung kann angeführt werden, daß sowohl *Au*- und V_2O_5-Sol, als auch *Ag*-Sol eine remanente Doppelbrechung zeigen. Die Doppelbrechung verschwindet nicht unmittelbar mit dem elektrischen Felde und sie erreicht ihren Maximalwert nicht im Moment des Stromschlusses.

Es ist möglich, daß auch die folgende Erscheinung für die Orientierungshypothese spricht. Die Doppelbrechung in einem *Au*-Sol ändert sich nämlich mit der Frequenz. Bei ungefähr 400 Volt/cm war die Phasendifferenz bei 3000 Perioden um 35 Proz. größer als bei 50 Perioden. Nimmt man an, daß sich die Partikel orientieren, so muß die Orientierung somit auf mindestens zwei Faktoren beruhen. Sind die Partikel unsymmetrisch, so wird jedes von diesen im elektrischen Felde ein Polpaar. Das Drehmoment, welches auf dieses wirkt, ist unabhängig von der Richtung des Feldes. Die Partikel streben danach, sich in der Richtung der elektrischen Kraftlinien einzustellen. Die andere Ursache der Orientierung kann darauf beruhen, daß die Partikel elektrisch geladen sind und deshalb im Wechselfelde hin und her schwingen. Das Bestreben der Partikel, sich durch diese Bewegung zu orientieren, ist bei niedriger Frequenz größer als bei höherer.

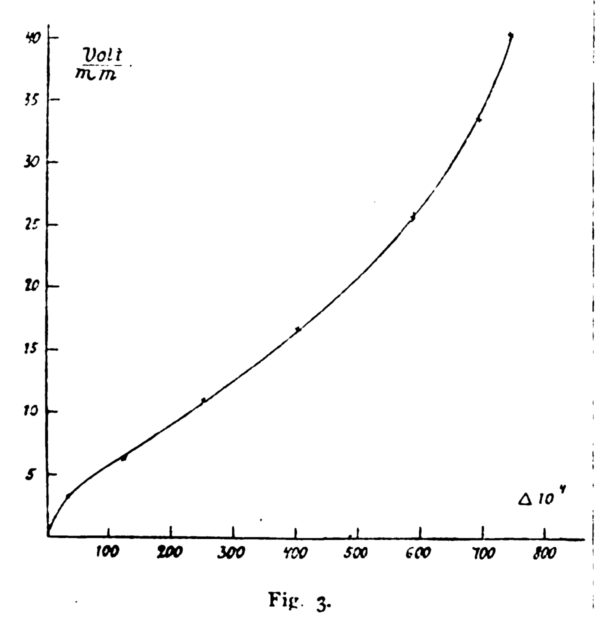


Fig. 3.

Bei elektrischer Doppelbrechung in Flüssigkeiten wächst, wie bekannt, die Phasendifferenz mit dem Quadrat der Feldstärke. Die Abhängigkeit der Phasendifferenz von der Feldstärke in einem *Au*-Sol geht aus Fig. 3 hervor. Die Feldstärke ist als Ordinate und die Phasendifferenz als Abszisse eingetragen. Die Figur zeigt, daß die Doppelbrechung bei der kleinen Feldstärke von 400 Volt/cm sich bereits einem Grenzwerte nähert. Dies kann nur bedeuten, daß die unsymmetrisch gebauten Goldpartikelchen parallelgerichtet sind, und daß diese Parallelrichtung bereits in einem sehr schwachen Felde geschieht.

Die Abhängigkeit der Phasendifferenz von der Feldstärke in einem V_2O_2-Sol geht aus der ausgezogenen Kurve in Fig. 4 hervor. Würde die Doppelbrechung proportional dem Quadrat

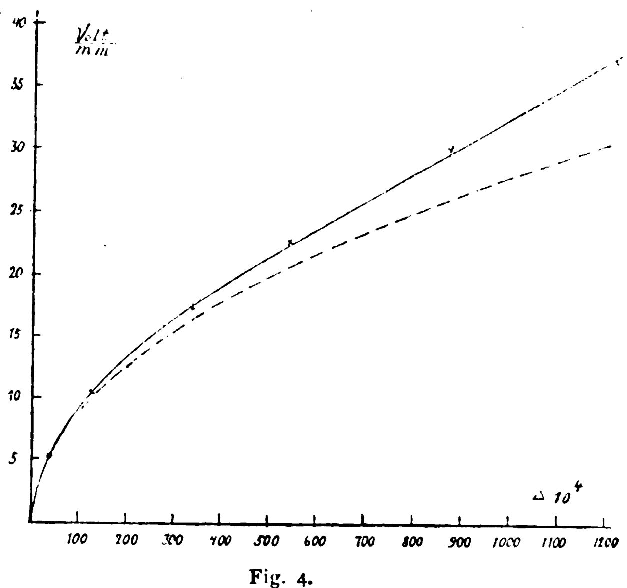


Fig. 4.

der Feldstärke wachsen, so würde man die punktierte Kurve (eine Parabel) erhalten. Da die experimentell gefundene Kurve über der punktierten liegt, so bedeutet das, daß die Doppelbrechung in V_2O_5-Sole langsamer wächst als mit dem Quadrate der Feldstärke. Es ist wahrscheinlich, daß sich die Doppelbrechung bei genügend hoher Spannung auch in diesem Falle einem Grenzwerte nähert.

Betreffend der elektrischen Doppelbrechung in Flüssigkeiten weiß man, daß das Zeichen der Phasendifferenz mit der Absorption verknüpft ist. Dasselbe scheint für die Doppelbrechung in Kolloiden zu gelten. Das feste Vanadinpentoxyd hat sein Absorptionsgebiet im Ultraviolett. Die Doppelbrechung in einem V_2O_5-Sole ist positiv, d. h. sie erscheint wie die Doppelbrechung in

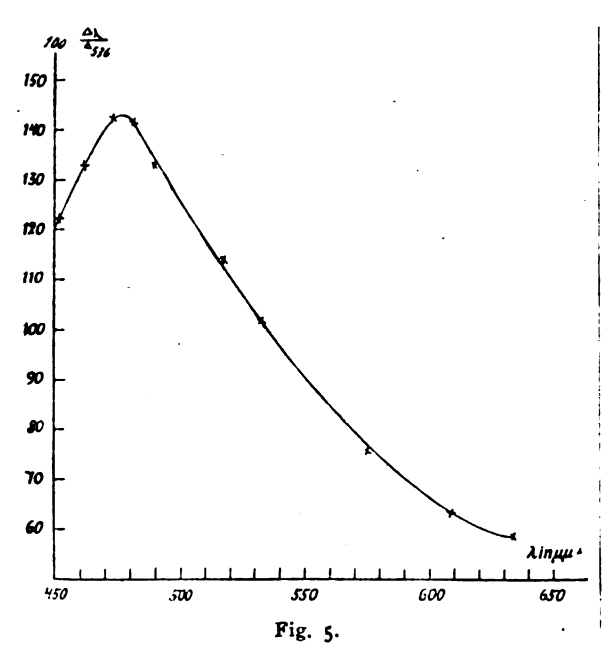


Fig. 5.

einer sich in der Richtung der Kraftlinien erstreckenden Glasplatte. Gold absorbiert die roten Strahlen sehr stark. Das *Au*-Sol ist negativ doppelbrechend.

Die Dispersion der Doppelbrechung in *Au*- und V_2O_5-Solen ist sehr groß. Da es vorher niemals möglich gewesen war, die Phasendifferenz für elektrische Doppelbrechung innerhalb oder in unmittelbarer Nähe eines Absorptionsgebietes zu bestimmen, ist die Abhängigkeit der Phasendifferenz von der Wellenlänge in *Au*- und V_2O_5-Solen besonders interessant. Die Abhängigkeit der Phasendifferenz von der Wellenlänge für V_2O_5-Sol geht aus Fig. 5 hervor. Die Wellenlänge ist als Abszisse und das Verhältnis $100 \frac{\Delta_\lambda}{\Delta_{536}}$ als Ordinate eingetragen. Δ_λ bedeutet die Phasendifferenz für die Wellenlänge λ. Aus der Figur sieht man, daß die Phasendifferenz zuerst mit abnehmender Wellenlänge wächst, bei ungefähr 475 $\mu\mu$ ein Maximum erreicht, um dann sehr schnell wieder abzunehmen. Die Absorptionskurve für V_2O_5 ist nicht bekannt. Messungen, ausgeführt an V_2O_5-Sol zeigten, daß das Absorptionsgebiet für dieses bei ungefähr 490 $\mu\mu$ begann. Innerhalb des Absorptionsgebietes scheint sich die Doppelbrechung also Null zu nähern.

Fig. 6.

Die Dispersion der Doppelbrechung im *Au*-Sol geht aus Fig. 6 hervor. Die Phasendifferenz ist am größten für $\lambda = 590\ \mu\mu$ und am kleinsten für $\lambda = 480\ \mu\mu$.

Au- und V_2O_5-Sole sind dichroitisch, d. h. die Amplitude für das durch das Sol gegangene Licht hat parallel und rechtwinklig zu den Kraftlinien verschiedene Werte. Nennen wir die Amplitude der rechtwinklig zu den Kraftlinien liegenden Komponente $a_{\perp}$, und die der parallel liegenden $a_{\parallel}$, so wird der Dichroismus durch den Bruch

$$\frac{a_{\parallel}}{a_{\perp}} = \varrho$$

bestimmt. Für V_2O_5-Sol ist $\varrho < 1$. Die den Kraftlinien parallele Komponente wird am stärksten absorbiert. Der Dichroismus wächst gegen das Absorptionsgebiet sehr schnell. Die Abhängigkeit desselben von der Wellenlänge geht aus Fig. 7 hervor.

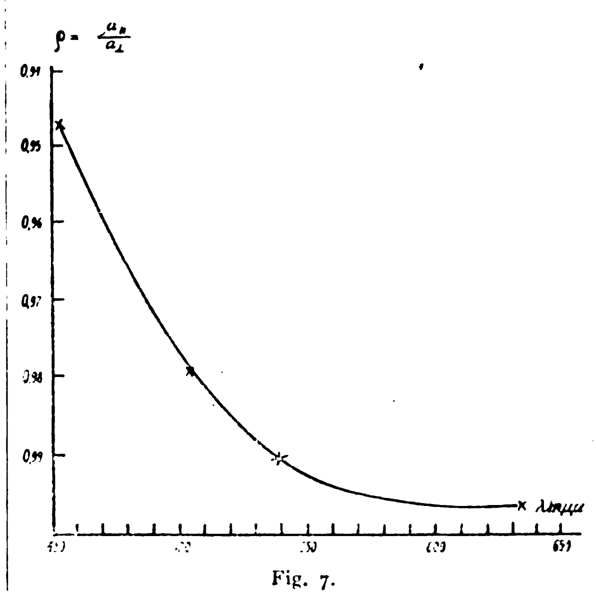


Fig. 7.

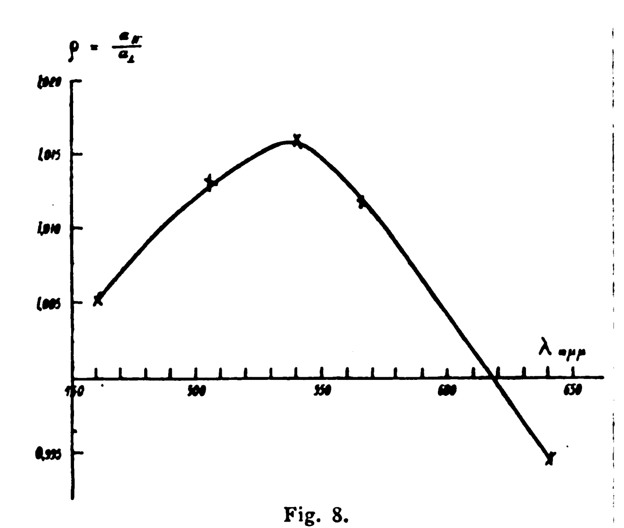


Fig. 8.

Für das *Au*-Sol ist $\varrho > 1$ bei $\lambda < 618\ \mu\mu$. Die Komponente rechtwinklig zu den Kraftlinien wird am meisten absorbiert. Für $\lambda > 618\ \mu\mu$ wird die zu den Kraftlinien parallele Komponente am meisten absorbiert. Die Abhängigkeit des Dichroismus von der Wellenlänge geht aus Fig. 8 hervor.

Das wichtigste Resultat der vorliegenden Untersuchung ist, daß *Au*- und *Ag*-Sole im elektrischen Felde doppelbrechend werden. Daraus geht hervor, daß deren Partikel keine sphärische Symmetrie haben. Da dies für Gold gilt, ist es wahrscheinlich, daß es auch für andere Kolloide gilt. Weitere Messungen werden eine größere Anzahl Kolloide umfassen.

Upsala, den 1. Oktober 1919.

(Eingegangen 25. Oktober 1919.)

Radioaktive Zerfallsprodukte in der freien Atmosphäre und die Wahrscheinlichkeit ihrer Herkunft von der Sonne[1]).

(Vorläufige Mitteilung.)

Von Hermann Bongards.

Über den Gehalt der freien Atmosphäre an radioaktiven Substanzen liegen bisher nur wenig Messungen vor, während durch Beobachtungen am Boden meist in erfreulicher Übereinstimmung der *Ra*-Emanationsgehalt im Mittel als $0{,}9 \times 10^{-16}$ Curie pro cm^3 betragend angegeben wird. Die einzige, mit quantitativ exakten Methoden ausgeführte Messung von Wright und Smith auf Mt. Pauai (2640 m) hat scheinbar eine Abnahme des Emanationsgehalts mit der Höhe ergeben. Dagegen muß aber eingewendet werden, daß die Beobachtungen auf dem Gipfel und an der Basisstation Manila zu verschiedenen Jahreszeiten ausgeführt sind, so daß ein Schluß auf die Verteilung in der Höhe nicht zulässig ist, zumal qualitative Beobachtungen auf anderen Berggipfeln zu völlig entgegengesetzten Ergebnissen geführt haben.

Für die Frage, ob die radioaktiven Substanzen der Erde entstammen, wie bisher allgemein angenommen wurde, sowie für die Fragen des Elektrizitätshaushalts der Atmosphäre ist die Kenntnis des Emanationsgehalts in der Höhe von grundlegender Bedeutung. Es wurde daher am Aeronautischen Observatorium bei Lindenberg im Jahre 1913 mit Versuchen begonnen, mit Hilfe von Drachen der Lösung dieser Frage näher zu kommen. Lediglich als Vorversuche wurden in der Zeit vom 29. Juli bis 2. Dezember 1913 im ganzen 98 Beobachtungen der Aktivität eines am Drachen befestigten 10—15 m langen Stahldrahtes von 0,8 mm Durchmesser gemacht. Über die Methode und das Instrumentarium habe ich an anderer Stelle[1]) eingehend berichtet. Da die Ausarbeitung einer quantitativ einwandfreien Methode durch den Kriegsausbruch unterbrochen wurde und eine Fortsetzung jetzt zunächst nicht möglich ist, habe ich die Resultate der Vorversuche so bearbeitet, daß eine Vergleichung untereinander möglich ist und einen Schluß auf die zeitlichen Schwankungen als zulässig erscheinen läßt.

I. Die Bearbeitung der Beobachtungsresultate.

Da von der Zeit der Drachenlandung, die als das Ende der Expositionszeit angenommen wurde, bis zum Einbringen des Drahtes in die Ionisierungskammer zur Messung des Spannungsabfalls eine gewisse Zeit verstreichen mußte, so wurde als charakteristischer Wert jedesmal der Betrag des Spannungsabfalls 15 Minuten nach der Landung festgestellt. Dieser Zeitpunkt erwies sich auch dadurch als besonders günstig, weil er bei den verwendeten Expositionszeiten in dem Teil der Abklingungskurve liegt, wo die Änderung des Abfalls am langsamsten vor sich geht, so daß ein geringer Zeitunterschied keine erheblichen Fehler verursachen kann. Aus diesem Wert wurde nach der Formel

$$i = \frac{C}{300} \times \frac{V_1 - V_2}{t}$$

1) Die Arbeit mußte aus technischen Gründen stark gekürzt werden.

1) H. Bongards, Die Arbeiten des Kgl. Preuß. Observatoriums Lindenberg im Jahre 1913, 9, 411, 1914.

(wo C = Kapazität in cm, $V_1 - V_2$ = Spannungsabfall in Volt in t sec) der erzeugte Sättigungsstrom in statischen Einheiten berechnet. Der so gefundene Wert wurde auf die Flächeneinheit der Drahtoberfläche reduziert.

Die Reduktion auf die Expositionszeit $\Theta = \infty$ wurde für die Zeit $t = 15$ Min. nach einer von H. W. Schmidt[1]) auf Grund von direkten Beobachtungen errechneten Tabelle vorgenommen.

Da nun aber die Menge des aktiven Niederschlags unter sonst gleichen Verhältnissen von der Potentialdifferenz des Drahtes gegen die umgebende Luft abhängt, diese aber bei einem im Erdfeld exponierten Draht einerseits vom Spannungsgefälle, andererseits von der Höhe über dem Boden abhängt, so ist es bei der Schwierigkeit, das erstere jedesmal zu bestimmen, nicht möglich, diese Reduktion einwandfrei vorzunehmen. Um nun wenigstens den Einfluß der Höhenunterschiede der einzelnen Aufstiege möglichst auszuschalten, wurde in folgender Weise verfahren:

Zunächst wurde für jeden Aufstieg eine mittlere Höhe durch graphische Integration nach der Zeit innerhalb der Grenzen der Aufstiegsdauer bestimmt. Unter Zugrundelegung der mittleren Änderung des Spannungsgefälles mit der Höhe, wie sie E. v. Schweidler und Kohlrausch[2]) auf Grund der vorliegenden Ballonbeobachtungen annehmen, wurde dann die Spannungsdifferenz V in Volt des geerdeten Drahtes gegen die umgebende Luft in der Höhe h km über dem Boden errechnet als

$$V = 1{,}46 \sqrt{20h - h^2} \times 10^4. \qquad (1)$$

Es wurde dann die von Kurz[3]) empirisch festgestellte Abhängigkeit der niedergeschlagenen Menge von dem Potential des Drahtes auch auf höhere Potentialwerte extrapoliert unter der Annahme, daß die Kurve weiterhin geradlinig verläuft. Alle diese Annahmen für die Reduktion, die ja für die einzelnen Fälle recht unsicher sind, wurden innerhalb der Grenzen der Wahrscheinlichkeit so gewählt, daß sich möglichst die untere Grenze des Betrages der radioaktiven Stoffe ergeben mußte. (Die mutmaßliche obere Grenze ergibt sich, wie weiter unten ausgeführt wird, aus den luftelektrischen Beobachtungen am Boden.) Es wurde also dann aus der obigen Formel (1) die Potentialdifferenz Luft gegen Draht für die dem Aufstieg zukommende Höhe ermittelt und mit Hilfe der Formel

$$i = \frac{V - 2500}{0{,}0275} \quad (V > 2500)$$

auf den Wert des Sättigungsstroms pro cm² Drahtoberfläche reduziert, der erreicht wäre, wenn der Draht auf — 2500 Volt aufgeladen worden wäre. Der Wert 2500 Volt wurde deswegen als zweckmäßig erachtet, weil die Bestimmung der Aktivierungszahl am Boden vorzugsweise unter Verwendung dieser Spannung ausgeführt worden ist.

Unter Berücksichtigung der Unterschiede der Kapazität des von Elster und Geitel und von mir verwendeten Elektrometers berechnet sich aus den reduzierten Werten für i der Vergleichswert mit der Aktivierungszahl A mit Hilfe der Beziehung

$$A \gtreqless 16{,}35 \times i \times 10^6.$$

Zur Vergleichung der Werte untereinander sind die vorgenommenen Reduktionen zweifellos genügend, da die Bedingungen, unter denen die einzelnen Beobachtungen angestellt wurden, nur innerhalb verhältnismäßig enger Grenzen verschieden waren. Jedoch scheint das Mittel aus den 98, über 4 Monate verteilten Beobachtungen auch mit den andersartigen Beobachtungen am Erdboden vergleichbar zu sein, da anzunehmen ist, daß das Potentialgefälle im Mittel dieses Zeitraums am Boden sowohl wie in der Höhe den angenommenen Mittelwerten sehr nahe kommt.

Das Mittel aus sämtlichen Beobachtungen beträgt $5{,}1 \times 10^{-6}$, daraus ergibt sich $A \gtreqless 83{,}5$. Dieser Wert entspricht in seiner Größenordnung den am Boden beobachteten Werten, die von Kähler[1]) für Mitteldeutschland zwischen 15 und 20 angegeben werden. Danach ist zu erwarten, daß exakte Messungen in der Höhe im Mittel wenigstens einen etwa 4 mal so hohen Wert als den am Boden festgestellten Mittelwert von $0{,}9 \times 10^{-16}$ Curie Emanation pro cm³ ergeben werden.

Es ist nicht anzunehmen, daß der Emanationsgehalt einen Betrag von der Größenordnung 10^{-15} Curie pro cm³ überschreiten wird. Betrüge die Menge im Mittel 10^{-15} Curie pro cm³ in der Schicht von 0—2500 m, so würde dieser Betrag gerade ausreichen, um die zur Erhaltung des beobachteten Potentialgefälles erforderliche Raumladung allein durch die sich bildenden positiv geladenen *Ra-A*-Teilchen und den Vertikalstrom Luft—Erde von der Größe 6×10^{-7} st. E. zu erzeugen. Es würden damit die Hauptfragen des Elektrizitätshaushalts der Atmosphäre geklärt werden.

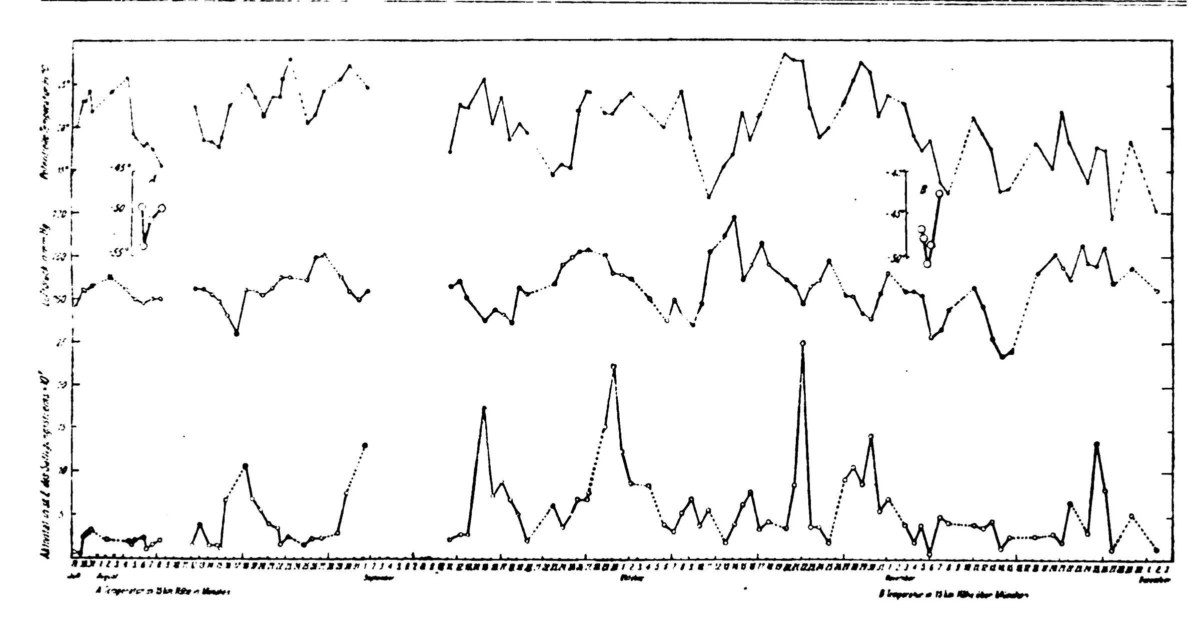
1) H. W. Schmidt, Ann. d Physik (4) **21**, 662, 1906.

2) E. v. Schweidler u. K. W. F. Kohlrausch in Graetz, Handbuch der Elektrizität und des Magnetismus **3**, 250, 1915.

3) E. Kurz, Habilitationsschrift München, Techn. Hochsch. 1909; München. Ber. **25**, 1, 1909.

1) K. Kähler, Luftelektrizität, Samml. Göschen 640, 127, 1913.





Es scheint also nach alledem begründet, wenn man annimmt, daß der Emanationsgehalt der Luft in der Schicht zwischen 1000 und 2000 m Höhe im Mittel den Betrag von 4 bis 10×10^{-16} Curie pro cm^3 erreicht.

In ihrer Beziehung zu Witterungseinflüssen sind aber vor allem die Schwankungen des Emanationsgehalts von Bedeutung. In Fig. 1 sind als Abszisse die Zeit, als Ordinate die an den einzelnen Tagen beobachteten und nach dem oben geschilderten Verfahren reduzierten Werte für den Sättigungsstrom pro cm^2 Drahtoberfläche als relatives Maß für den Emanationsgehalt eingetragen. Das Bild zeigt, daß die Schwankungen außerordentlich stark sind und sich von etwa einem Zehntel des Mittelwertes bis zu dessen fünffachem Betrage erstrecken. Es zeigt sich, daß mehrere besondere hohe Werte der Aktivität nach Zeiträumen von 12—15 und 24—28 Tagen widerkehren. So entspricht dem Maximum am 18. August ein solches am 1. September, also nach 14 Tagen, dann folgt nach weiteren 14 Tagen am 15. September wieder ein noch stärkeres Maximum. Der starken Zunahme am 30. September entspricht eine schwächere am 17., also 13 Tage vorher. Die starken Anstiege am 30. Oktober und 25. November folgen in einem Zeitraum von 26 Tagen aufeinander. In diesem Falle wiederholen sich sogar die charakteristischen Maxima vor und nach dem Hauptmaximum. Dem höchsten Maximum am 22. November entspricht ein weniger starkes am 9. Oktober, also 13 Tage vorher. Auch bei vielen kleineren Hebungen läßt sich diese periodische Wiederkehr feststellen. Die Minima folgen scheinbar in kürzeren 12- und 24tägigen Perioden. Da die Beobachtungen meist nur einmal am Tage gemacht wurden, so ist der Fehler des Eintritts der Extreme auf wenigstens ± 1 Tag anzusetzen.

II. Beziehung zu Witterungserscheinungen.

In der zweiten Kurve der Figur sind die Luftdruckwerte am Boden, die zur Zeit der Höhenbeobachtungen herrschen, eingetragen. Hier ist sogleich eine Beziehung zu erkennen, indem jedem starken Anstieg der Aktivität ein tiefer Fall des Barometers entspricht. Aber einem starken Fall des Barometers entspricht durchaus nicht immer ein Anwachsen der Aktivität. Im Gegenteil fallen z. B. die starken Minima des Barometerstandes am 6. und 14. November mit ausgeprägten Tiefstwerten der Aktivität zusammen. Man hat dieses Zusammentreffen starken Barometerfalls mit dem Anwachsen der Aktivität auch durch Beobachtungen am Boden festgestellt und daraus den Schluß gezogen, daß bei fallendem Barometer eine reichlichere Emanationsmenge aus dem Boden herausgetrieben würde. Wäre diese Annahme richtig, so müßte bei jedem starken Barometerfall der Emanationsgehalt zunehmen, was aber auch am Boden durchaus nicht der Fall ist. In einer Höhe von mehr als 1000 m über dem Boden kann sich aber unter keinen Umständen eine solche Abhängigkeit der Aktivität vom Luftdruck und erst recht nicht das umgekehrte Verhältnis zeigen. Wir müssen also bei dem außer Zweifel stehenden Zusammenhang zwischen beiden Erscheinungen annehmen, daß gewisse Arten der Luftdruckschwankungen und die Änderung des Emanationsgehalts eine gemeinsame Ursache haben. Es liegt nahe, zur Fest-

stellung dieser Ursache die Temperaturverhältnisse in Betracht zu ziehen. Es sind in der obersten Kurve der Tafel die mittleren potentiellen Temperaturen zwischen 1000 und 2500 m Höhe eingetragen. Als potentielle Temperatur wird hier die Temperatur der Luft bezeichnet, die ein Luftquantum erreichen würde, wenn man es adiabatisch auf den Normaldruck brächte. In dem Gang der potentiellen Temperatur kommt, da die adiabatischen Temperaturschwankungen eliminiert sind, am ehesten eine Energiezufuhr oder -abfuhr zum Ausdruck. Die extrapolierten Punkte sind in der Kurve durch eckige Umrahmung besonders hervorgehoben. Auch hier ergibt sich ein deutlicher Zusammenhang. In der der Zeit vom 15. bis 20. August, 13. bis 18. September, 27. Oktober bis 1. November und 24. November bis 2. Dezember ist der parallele Verlauf besonders ausgeprägt. Wenn bei den hohen Maximalwerten am 30. Oktober und am 22. November die Höchstwerte der Temperatur schon vor den Höchstwerten der Aktivität erreicht werden, so ist zu bedenken, daß infolge der starken Erwärmung der unteren Schichten Anlaß zu einer Durchmischung verschieden temperierter Luft gegeben ist, die ebenfalls eine Änderung der potentiellen Temperatur bewirkt. Zunächst ist man geneigt anzunehmen, den radioaktiven Stoffen einen Einfluß auf die Temperatur zuzuschreiben, da bekannt ist, daß bei ihrem Zerfall Wärme frei wird. Verfolgt man aber den möglichen Einfluß rechnerisch, so ergibt sich, daß selbst bei dem als obere Grenze bezeichneten Gehalt von 10^{-15} Curie pro cm^3 die Luft während eines Jahres nur um etwa 10^0 erwärmt werden könnte. Da auch eine Erhöhung der Temperatur als Ursache einer Vermehrung der radioaktiven Stoffe nicht denkbar ist, so kann man nicht umhin, auch für die Änderungen der Temperatur und der Aktivität eine gemeinsame Ursache zu suchen. Die einzig mögliche Erklärung scheint mir die Annahme einer Massestrahlung zu sein, durch die aus dem Weltenraum elektrisch neutrale Emanationsatome oder -moleküle in die Atmosphäre geschleudert werden. Es bliebe nun die Herkunft einer solchen Massestrahlung zu erklären.

Es ist schon vielfach vermutet worden[1]), daß bei gewissen Vorgängen auf der Sonne, z. B. bei Protuberanzenbildung, Massestrahlen von Teilen der Sonne in den Weltenraum hinausgesandt werden. Noch wahrscheinlicher wird dieser Vorgang, wenn man bedenkt, „daß die Spektren dieser Protuberanzen meist Linien von Wasserstoff, Helium und Kalzium" enthalten, d. h. von Stoffen, „die bei genügendem Verdünnungsgrad und ausreichendem Potentialgefälle Massestrahlen" erzeugen können. Ferner „besteht das Wasserstoffspektrum der Protuberanzen aus denselben Spektrallinien wie das der Massestrahlen, nämlich der Serie H_α, H_β, H_γ ..... Die Kalziumlinien H und K der Protuberanzen treten besonders stark in Kalziumanodenstrahlen[1]) auf, während andererseits eine große Anzahl von Ca-Linien, die auf andere Weise, z. B. im elektrischen Lichtbogen erzeugbar sind, sowohl im Spektrum der Protuberanzen, wie in dem der Massestrahlen fehlen. Die Geschwindigkeiten der Protuberanzen, gemessen durch den Dopplereffekt, sind von derselben Größenordnung wie die in Geißlerschen Röhren erzeugten Massestrahlen".

Auch die schon vorher erwähnte 12—15 und 24—30 tägige Periode des Eintretens der Maxima und Minima der Aktivität gibt eine wesentliche Stütze für die Hypothese von der Sonne ausgehender Massestrahlen. Diese Zeiten entsprechen ungefähr einer halben bzw. ganzen Umdrehung der Sonne um ihre Achse. Es ist nun bekannt, daß viele Vorgänge auf der Sonne auch zugleich auf dem diametral gegenüberliegenden Punkt der Oberfläche auftreten, und die Tatsache, daß solche Vorgänge zuweilen länger an der gleichen Stelle beobachtet werden, gehört nicht zu den Seltenheiten. Leider war es mir bisher nicht möglich, photographische Aufnahmen der Sonnenoberfläche aus der in Betracht kommenden Zeit zu erhalten, und so muß die Frage, welche Stellen der Sonne eine solche Massestrahlung aussenden, zunächst noch offen bleiben. Es scheint eine gewisse Wahrscheinlichkeit vorzuliegen, daß die Protuberanzen mit diesen Erscheinungen identisch sind, es können aber auch Fackeln, Flecken und Flocken in Betracht kommen.

Bei dem Vorhandensein einer solchen Massestrahlung wird sich in den obersten Schichten der Atmosphäre die Wärmewirkung stärker bemerkbar machen, als in den unteren Schichten. Die Beobachtungen aus der Stratosphäre über Lindenberg sind leider so wenig zahlreich über längere Zeiträume verteilt, daß der Temperaturverlauf in diesen Höhen nicht zum Vergleich mit der Aktivität herangezogen werden konnte.

Zum Vergleich sind die Temperaturen in 15 km Höhe nach den Münchener Registrierballonfahrten[2]) aufgetragen. Wir sehen, daß

1) E. Gehrcke in Graetz, Handb. d. Elektr. u. d. Magn. 3, 350, 1915.

1) O. Reichenheim, Ann. d. Phys. 33, 747, 1910.

2) A. Schmauß, Meteorolog. Zeitschr. 31, 67, 1914; Derselbe, Die Münchener Registrierballonfahrten im Jahre 1913, Beobachtungen der meteorologischen Stationen im Königr. Bayern 35, 1913, München 1914.

dem tiefen Minimum der Aktivität ein stark ausgeprägtes Minimum der Temperatur in der Stratosphäre entspricht. Ebenso verläuft in der Zeit vom 6. bis 8. August die Temperaturkurve in 15 km Höhe der Kurve der Aktivität völlig parallel. Der Unterschied des Emanationsgehalts über dem Festland und über dem Meer scheint auf einer Verschiedenartigkeit der Absorption und der Durchlässigkeit der Luft über Land und Meer in der Nähe der Erdoberfläche zu beruhen.

Für die Annahme, daß die Strahlung bis zum Boden dringt, spricht der Umstand, daß in den wenigen über einen längeren Zeitraum sich erstreckenden Beobachtungen am Boden zuweilen auch die Wiederkehr eines Maximums der Aktivität nach einem Zeitraum erfolgt, der nahezu einer halben oder ganzen Umdrehung der Sonne um ihre Achse entspricht. Mir liegen die Beobachtungen von Satterly[1]) aus dem Jahre 1909 vor, in denen ein Maximum am 4. März einem anderen am 17. März, ein Minimum am 13. Mai einem solchen am 27. Mai, ferner ein Maximum am 11. August, einem solchen am 24. August entspricht. Auch in den Potsdamer Registrierungen des Emanationsgehalts, die Kähler[2]) veröffentlicht hat (leider nur 2 Monate!), entspricht ein Maximum am 1. Juli 1911 einem solchen am 29. Juli, und ein Maximum am 1. Januar 1911 einem solchen zwischen dem 25. und 27. Januar. Die Feststellung einer solchen Periodizität allein kann aber nicht beweiskräftig sein, zumal ihr bei dem Auftreten zahlreicher Schwankungen eine gewisse Willkür nicht abzusprechen ist. Dagegen dürfte eine Registrierung auch nur am Boden mit gleichzeitiger Beobachtung oder Spektrographie der Sonne imstande sein, die Frage der Ursache zu klären. Daß der Temperaturgang am Boden mit seinen starken periodischen Änderungen und Schwankungen infolge lokaler Einflüsse keine Wirkung der angenommenen Massestrahlung erkennen läßt, liegt auf der Hand. Daß die Teilchen einer solchen von der Sonne ausgehenden Massestrahlung nur aus Emanation bestehen, ist nicht anzunehmen, vielmehr wird auch anderen Gasen, insbesondere Helium und Wasserstoff ein vielleicht noch größerer Anteil zugeschrieben werden können.

Zusammenfassung.

Bei der Bestimmung der Aktivität eines unter dem Einfluß des Erdfeldes in der mittleren Höhe von 1500 m exponierten Drahtes hat sich gezeigt, daß ein Zusammenhang zwischen der Aktivität, dem Luftdruck am Boden und der potentiellen Temperatur in der Schicht zwischen 1000 und 2500 m besteht.

In dem Temperaturverlauf der Stratosphäre zeigt sich eine ausgesprochene Parallelität mit der Aktivität.

Die Temperaturschwankung wird als die Ursache der Druckschwankung angesehen.

Da ein Einfluß der radioaktiven Substanzen auf die Temperatur in dem Maße nicht zu erklären ist, ein Einfluß der Temperatur auf die Aktivität aber ausgeschlossen erscheint, wird als gemeinsame Ursache eine Massestrahlung, ausgehend von begrenzten Teilen der Sonne, angenommen, durch welche Emanationsteilchen in die Atmosphäre getragen werden. Die Wärmewirkung dieser Massestrahlen bildet eine Hauptwärmequelle der höheren Schichten der Atmosphäre.

Kiel, den 7. Dezember 1919.

(Eingegangen 31. Dezember 1919.)

1) J. Satterly, Phil. Mag. (6) 20, 1, 1910.

2) K. Kähler, Ergebnisse der Meteorolog. Beobachtungen in Potsdam im Jahre 1912, Bd. 16, 1913.

Beiträge zur geometrischen Verzeichnung von Niveauflächen.

Von Otto Grotrian.

Auf die Wichtigkeit, Kraftfelder durch geometrische Verzeichnung darzustellen, ist vielfach, u. a. auch von Maxwell[1]), hingewiesen worden. Für zwei häufig vorkommende Fälle, die bereits anderweitig eingehend behandelt sind, mögen hier zwei Methoden beschrieben werden, die meines Wissens für die betreffenden Fälle noch nicht bekannt gegeben wurden.

Es handelt sich dabei um die Niveauflächen, in der Zeichnung deren Spuren, also Niveaulinien

1. für den Fall zweier punktförmiger Agensteilchen (elektrische oder magnetische Teilchen) bei gleichen Mengen derselben und entgegengesetztem Vorzeichen,
2. für denselben Fall bei gleichem Vorzeichen.

Zwei gleiche Agensmengen bei entgegengesetzem Vorzeichen. Die beiden Mengen $-q_l = -q$ und $q_r = q$ mögen in den Punkten A_l und A_r konzentriert gedacht sein und sich im Abstande $2L = A_l A_r$ befinden. Letzterer werde durch den Punkt O halbiert, siehe Fig. 1. Setzt man für einen beliebigen Punkt p der Zeichenebene, dessen Abstände

1) J. Cl. Maxwell, Treatise on Electricity and Magnetism. Art. 117—123.

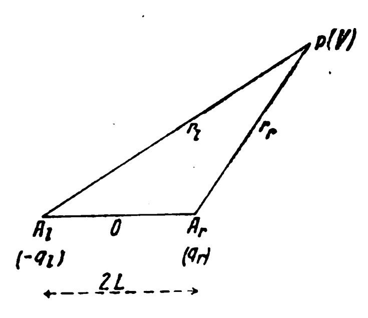


Fig. 1.

$A_l p = r_l$ und $A_r p = r_r$, dann ist das Potential in p dargestellt durch

$$V = q\left(\frac{1}{r_r} - \frac{1}{r_l}\right).$$

Die Gleichung einer Niveaulinie kann daher in der Form

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{r_r} - \frac{1}{r_l} = \frac{1}{\varrho} = \text{konst.}$$

mit den veränderlichen Koordinaten r_r und r_l geschrieben und

$$\varrho = \frac{q}{V}$$

als Parameter für die einzelnen Niveaulinien der Schar angesehen werden.

Offenbar ist ϱ mit der Dimension einer Länge gleich dem Abstande einer Agensmenge q vom Punkte p, welche in diesem das Potential V hervorruft.

In der Niveaugleichung

$$\frac{1}{r_r} - \frac{1}{r_l} = \frac{1}{\varrho}$$

stehen r_r, r_l und ϱ in einer geometrischen Beziehung zueinander, aus der bei gegebenem ϱ und frei gewähltem r_l (oder r_r) sich r_r (oder r_l) entnehmen läßt.

Auf der horizontalen Geraden HH (siehe Fig. 2) errichte man in zwei beliebig gewählten

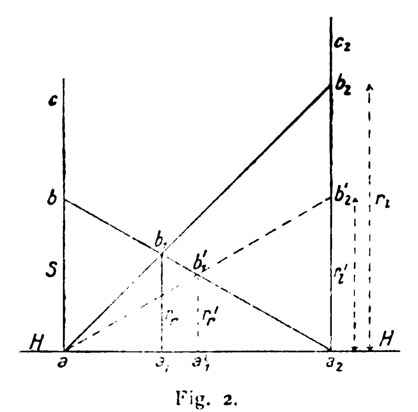


Fig. 2.

Punkten a und a_2 die Senkrechten ac und $a_2 c_2$ und mache $ab = \varrho$, $a_2 b_2 = r_l$. Zieht man dann die Geraden ba_2 und $b_2 a$ und fällt von ihrem Schnittpunkte b_1 das Lot $b_1 a_1$ auf HH, dann ist

$$a_1 b_1 = r_r.$$

Denn der Figur zufolge gelten die Beziehungen

$$\frac{aa_1 + a_1 a_2}{a_1 a_2} = \frac{\varrho}{a_1 b_1} = 1 + \frac{aa_1}{a_1 a_2},$$

$$\frac{aa_1 + a_1 a_2}{aa_1} = \frac{r_l}{a_1 b_1} = 1 + \frac{a_1 a_2}{aa_1}.$$

Aus beiden Gleichungen folgt aber

$$\frac{aa_1}{a_1 a_2} = \frac{\varrho - a_1 b_1}{a_1 b_1} = \frac{a_1 b_1}{r_l - a_1 b_1},$$

oder bei Berücksichtigung der Niveaugleichung

$$\frac{1}{a_1 b_1} = \frac{1}{\varrho} + \frac{1}{r_l} = \frac{1}{r_r},$$

also

$$a_1 b_1 = r_r.$$

Durch das gleiche Verfahren können für ein bestimmtes ϱ beliebig viele zusammengehörige Werte von r_r und r_l ermittelt werden. In der Figur ist z. B. neben der Verzeichnung des Wertepaares r_l, r_r diejenige von r_l', r_r' angegeben.

Fig. 3 zeigt die Anwendung der Methode für den Fall, daß die Niveaulinien zweier gleicher entgegengesetzter Agensmengen festgelegt wer-

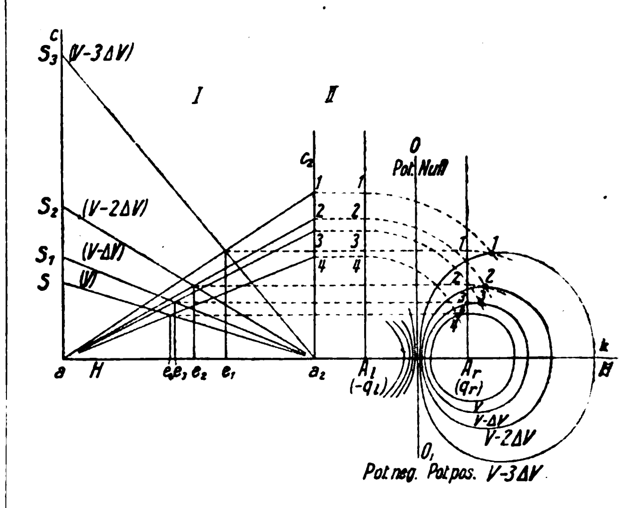


Fig. 3.

den sollen und das Potential auf denselben sich in arithmetischer Reihe ändert.

Senkrecht zu HH sind auf ac Längen ϱ, ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 abgetragen, denen V, $V - \triangle V$, $V - 2\triangle V$, $V - 3\triangle V$ umgekehrt proportional sind. Die oberen Enden der ersteren sind mit a_2 bei beliebig gewähltem Abstande aa_2 durch

Gerade verbunden. Auf a_2c_2 sind Längen $a_2 4$, $a_2 3$, $a_2 2$, $a_2 1$ abgetragen, welche beliebig angenommene Werte r_l darstellen. Verbindet man deren Gipfelpunkte mit a, und schneiden die Verbindungslinien die nach a_2 konvergierenden Geraden in 4, 3, 2, 1, dann liefern die zu aa_2 senkrechten Geraden $4e_4$, $3e_3$, $2e_2$, $1e_1$ die zu $4a_2$, $3a_2$, $2a_2$, $1a_2$ gehörenden Koordinaten r_r. Für je eine Niveaulinie ist, um das Bild einfach zu gestalten, nur je ein Wertepaar r_l, r_r eingetragen, das durch gleiche Ziffern kenntlich gemacht ist.

Zur Verzeichnung einer Kurve, beispielsweise derjenigen für ϱ_3, also das Potential $V - 3\triangle V$, wird man daher mit $a_2 1$ von A_l, mit $e_1 1$ von A_r aus einen Kreisbogen beschreiben, deren Schnitt 1 (II der Figur) einen Punkt der betreffenden Niveaulinie darstellt. Ebenso ist mit sonstigen nicht eingetragenen Koordinaten für ϱ_3 zu verfahren. Gleiche Bemerkungen gelten für die durch 2, 3, 4 ziehenden Niveaulinien. Da der Verlauf derselben bekannt ist, bedürfen sie keiner besonderen Erläuterung.

Rechts von der Mittellinie OO_1 entsprechen die Kurven positiven, links (hier in der Zeichnung nur angedeutet) negativen Potentialwerten, während auf der Mittellinie selbst das Potential Null ist.

Zur Veranschaulichung der Konstruktion sind die punktierten Hilfs-Geraden und -Kreise eingezeichnet, die bei Ausführung der Zeichnung fortgelassen werden können.

Erhält man für zwei als zusammengehörig gefundene Koordinaten r keinen Schnittpunkt zwischen den entsprechenden Kreisen, dann ist, wenn die Agensmengen, ihr Abstand und ihr Potential gegeben sind, für den angenommenen Wert von r_l (r_r) kein Punkt auf der zu zeichnenden Niveaulinie vorhanden.

Der Parameter ϱ für eine Niveaulinie kann statt auf die als gegeben angesehenen Größen q und V auch auf andere zurückgeführt und entsprechend konstruiert werden.

Führt man die Koordinaten des Schnittpunktes k (siehe Fig. 3) ein, den die betreffende Kurve, z. B. 1, mit HH bildet und setzt dabei

$$A_r k = r_{r_0}$$
$$A_l k = r_{l_0},$$

wobei

$$r_{l_0} - r_{r_0} = A_l A_r = 2L$$
$$r_{r_0} = r_{l_0} - 2L$$

ist, dann gilt die Beziehung

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{r_{r_0}} - \frac{1}{r_{l_0}},$$

und ϱ läßt sich daher aus r_{r_0} und $2L$, wie folgt, geometrisch ableiten.

Durch die beliebig gewählten Punkte a und a_2 der Geraden HH (siehe Fig. 4) legt man

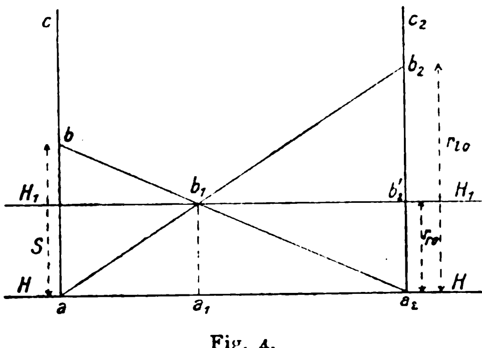


Fig. 4.

die Senkrechten ac und a_2c_2. Auf a_2c_2 wird abgetragen

$$a_2b_2 = r_{l_0} \text{ und } a_2b_2' = r_{r_0} = r_{l_0} - 2L.$$

Ferner wird durch b_2' eine Parallele H_1H_1 zu HH gezogen. Verbindet man dann b_2 mit a, legt durch deren Schnittpunkt b_1 mit H_1H_1 die Gerade a_2b_1, deren Verlängerung ac in b schneidet, dann ist

$$\frac{1}{ab} = \frac{1}{a_1b_1} - \frac{1}{a_2b_2} = \frac{1}{r_{r_0}} - \frac{1}{r_{l_0}} = \frac{1}{\varrho},$$

also $ab = \varrho$.

Für den Fall **zweier gleicher und gleichnamiger Mengen** q (siehe Fig. 5) kann nach

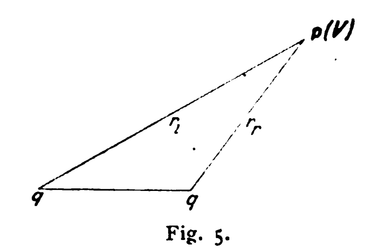


Fig. 5.

denselben Grundsätzen verfahren werden. Hier ist das Potential

$$V = q\left(\frac{1}{r_r} + \frac{1}{r_l}\right)$$

und für eine Niveaulinie gilt daher die Beziehung

$$\frac{V}{q} = \frac{1}{r_r} + \frac{1}{r_l} = \frac{1}{\varrho} = \text{konst.},$$

wenn

$$\varrho = \frac{q}{V}$$

gesetzt wird. Die geometrische Konstruktion gestaltet sich hier, wie folgt (siehe Fig. 6).

Auf der horizontalen Geraden HH errichte man in den beliebig gewählten Punkten a und a_2

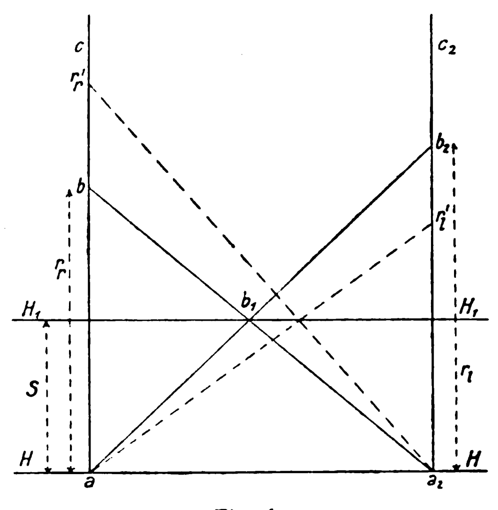


Fig. 6.

die Senkrechten ac, a_2c_2 und ziehe parallel HH im Abstande ϱ die Gerade H_1H_1. Auf a_2c_2 werde die beliebig gewählte Länge $r_l = a_2b_2$ abgetragen. Zieht man dann die Gerade b_2a_1, welche H_1H_1 in b_1 schneide, verbindet a_2 und b_1 miteinander und verlängert die Verbindungslinie bis zum Schnitt b mit ac, dann stellt ab die zu r_l gehörige Koordinate r_r dar. In gleicher Weise lassen sich andere Wertepaare ermitteln. Die Figur zeigt z. B. die Konstruktion des Paares r_l', r_r'. Bei einem anderen Werte des Parameters $\frac{q}{V}$ ist der Abstand der zu HH parallelen in entsprechender Weise zu ändern.

Die Konstruktion der bekannten Niveaulinien kann nach gleichem Verfahren wie in Fig. 3 vorgenommen werden.

Das geometrische Grundprinzip für die beschriebenen Verzeichnungsmethoden ist bereits früher von Dihlmann[1]) angewendet, um aus den Widerständen einer verzweigten Stromleitung den Widerstand des verzweigten Weges graphisch abzuleiten.

1) C. Dihlmann, Elektrotechn. Zeitschr. **10**, 148, 1889.

Aachen, September 1919.

(Eingegangen 2. Oktober 1919.)

Über den Einfluß normaler Kathodenstrahlen auf das lebende Gewebe.

Von W. E. Pauli und J. Grober.

Die Wirkung irgendeiner Strahlenart auf das lebende Gewebe wird sich zusammensetzen aus 1. der spezifischen Wirksamkeit der betreffenden Strahlung, 2. aus dem Betrag an absoluter Energie, die im Gewebe absorbiert worden ist; also Gesamtwirkung

$$W = s \cdot I.$$

Unterzieht man die heute in der Strahlentherapie verwandten Strahlenarten, z. B. Röntgenstrahlen, die Strahlen des Radiums usw. einer kritischen Untersuchung, so fällt sofort auf, daß die von der Flächeneinheit und pro 1 cm Eindringungstiefe absorbierte Energie (I) einen recht geringen Bruchteil derjenigen Energie darstellt, die überhaupt aufgewandt wurde (Energie am Induktor, gesamte ausgestrahlte Energie der aktiven Präparate). In bezug auf normale Röntgenstrahlen ist das eben Gesagte weiter unten ausführlich dargelegt. — Da anzunehmen ist, daß die im absorbierenden Medium hervorgebrachte Wirkung umso größer ist, je größer der dort absorbierte absolute Energiebetrag ist, so ist vorauszusehen, daß im Falle der Absorption von Kathodenstrahlen die hervorgebrachte Wirkung sehr beträchtlich sein wird; denn in diesem Falle ist die Ausnutzung der gesamten aufgewandten Energie besonders günstig. Als Vergleich seien Röntgenstrahlen herangezogen, die in der Strahlentherapie eine besonders große Rolle spielen. — Es soll im folgenden eine Näherungsrechnung darüber angestellt werden, welche Bruchteile derjenigen Energie, die bei einer Entladung eines Induktorkreises aufgewandt wird, im absorbierenden Medium verschluckt werden, wenn diese Energie dazu verwandt wird, einmal Röntgenstrahlen, das andere Mal Kathodenstrahlen zu erzeugen.

Es werde also dieselbe Energie (8 Volt primär) in zwei Entladungen geschickt: einmal in eine Röntgenröhre, das andere Mal in eine Kathodenröhre. (Von etwaigen Verschiedenheiten in den zu den Röhren geschickten Energien, hervorgerufen durch die Verschiedenheit der Konstanten im Sekundärkreis soll abgesehen werden.)

Es werde dann dasselbe Präparat beiden Arten von Strahlen in günstigster Lage ausgesetzt; alsdann ist die Frage: wievielmal mehr Energie an Kathodenstrahlen absorbiert dann das Präparat als an Röntgenstrahlen?

Die von den Kathoden in beiden Röhren ausgehende Energie soll gleich I_a sein. Das Präparat soll diejenige Dicke haben, so daß normale Kathodenstrahlen gerade völlig absorbiert werden. Nennt man noch die Beträge an Energie, die tatsächlich im Präparat absorbiert werden, E_R und E_K, so ist

$$E_R = \frac{1}{1000} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2 r \pi} \cdot \frac{1}{70} \cdot I_a.$$

Denn ca. $\frac{1}{1000}$ der Energie I_a wird in

Röntgenstrahlen umgesetzt (nach Dorn, W. Wien u. a.); die Hälfte der Gesamtröntgenstrahlung wird in der Glaswand absorbiert[1]). Ferner verteilt sich die gesamte Röntgenstrahlung auf einer halben Kugeloberfläche, und schließlich ist — bei derselben Härte der Röhre — der Absorptionskoeffizient derselben Substanz ungefähr $\frac{1}{70}$ derjenigen für Kathodenstrahlen.

Ist $r = 10$ cm, so wird

$$E_R = 1{,}1 \cdot 10^{-8}\, I_a.$$

Für Kathodenstrahlen ist

$$E_K = \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot I_a = 4{,}4 \cdot 10^{-7}\, I_a.$$

Denn die Stirnfläche der verwandten Kathodenröhre (siehe weiter oben) läßt ca. $\frac{1}{10}$ der Gesamtmenge durch; es ist weiter angenommen, daß das Drahtnetz und das *Al*-Blättchen je $\frac{1}{3}$ der austretenden Strahlen absorbieren. Demnach wird

$$\frac{E_K}{E_R} = \frac{4{,}4 \cdot 10^{-2}}{1{,}1 \cdot 10^{-8}} = 4 \cdot 10^6.$$

Es wird also $4 \cdot 10^6$ und mehr Energie in dem Medium absorbiert, wenn es unter den gewählten Bedingungen der Kathodenstrahlung anstatt Röntgenstrahlung ausgesetzt wird, wobei in beiden Fällen der Energieaufwand im Primärkreis des Induktors derselbe ist.

Der zu erwartende Effekt bei der Absorption der Kathodenstrahlen im Gewebe ist mit Sicherheit nicht vorauszusagen, da er nicht nur von I, sondern auch von s abhängt. Für Röntgenstrahlen ist der Gesamteffekt im Gewebe heute einigermaßen bekannt; im Vergleich zu den Röntgenstrahlen wird man daher sagen können: selbst wenn die spezifische Wirkung der Kathodenstrahlen ungleich viel geringer ist als diejenige der Röntgenstrahlen, so wird $\left(\text{unter Berücksichtigung des sehr großen Wertes für } \frac{E_K}{E_R}\right)$ doch der Effekt der Kathodenstrahlen wahrscheinlich denjenigen der Röntgenstrahlen erheblich übertreffen.

Um diese Frage experimentell zu entscheiden, wurde dasselbe absorbierende Präparat Kathoden- und Röntgenstrahlen ausgesetzt. Als Kathodenröhre wurde eine verbesserte Lenardsche benutzt, die der eine von uns[2]) angegeben hat. Die dem Induktor parallel geschaltete Funkenstrecke diente zur Einstellung des Vakuums und hatte eine Länge von 33 mm. Das Präparat kam unmittelbar vor das „Fenster", meist in einer Entfernung von 3—4 mm.

Es wurden für die Bestrahlung zwei in der Reihe der Lebewesen weit auseinanderliegende Arten ausgewählt: das Bacterium coli und Larven des Axolotl. Die Bakterien wurden der Kathodenstrahlung in dünner Schicht ($^1/_4$ mm) ausgesetzt, für sterile Handhabung der ganzen Apparatur war gesorgt. Aus der großen Reihe von Versuchen seien hier nur 3 angeführt.

Versuch 31.

4 angetrocknete Tropfen von Coli-Peptonwasserkulturen auf sterilen Deckgläsern.

1. Tropfen	erhält	50	Entladungen	d. Kath.-Röhre
2. „	„	100	„	„ „
3. „	„	150	„	„ „
4. „	„	keine	„	„ „

Nach 3 Tagen 1—3 kein Wachstum, 4 deutliches Wachstum; nach 4 Tagen 2 und 3 kein Wachstum, 1 und 4 deutliches Wachstum.

Versuch 28 (mit Röntgenstrahlen).

1. Tropfen	erhält	200	Entladungen	d. R-Röhre
2. „	„	300	„	„ „
3. „	„	900	„	„ „
4. „	„	4500	„	„ „
5. „	„	13500	„	„ „
6. „	„	keine	„	„ „

Nach 4—6 Tagen deutliches Wachstum.
Versuch mit Axolotl-Larven.

1. Larve	erhält	25	Entlad.	d. Kath.-Röhre
2. „	„	50	„	„ „
3. „	„	100	„	„ „
4. „	„	keine	„	„ „
5. „	„	450	„	„ Röntgen-Röhre.
6. „	„	900	„	„ „
7. „	„	4500	„	„ „

Nach 4 Tagen: 1 zeigt geringe Beweglichkeit, 2 und 3 tot, 4—7 normal.

Es zeigt sich also sowohl bei den Versuchen mit Bacterium coli als mit Axolotl-Larven die große Überlegenheit der Kathodenstrahlen gegenüber den Röntgenstrahlen bezüglich der biologischen Wirkung.

Daß es sich bei dieser großen Wirksamkeit der Kathodenstrahlen nicht um eine einfache Wärmewirkung handelt, ist durch besondere Versuche nachgewiesen worden[1]). Wahrscheinlich ist, daß sich zu einer spezifischen Wirkung der Kathodenstrahlen in den oberflächlichen

1) Vgl. R. Pohl, Die Physik der Röntgenstrahlen, S. 105.
2) W. E. Pauli, Zeitschr. f. Instrumentenkunde 1910.

1) Vgl. die ausführlichere Darstellung in: Deutsche Med. Wochenschr. 45, 841, 1919.

Schichten eine in die Tiefe reichende Wirkung der durch ihre Absorption entstandenen Röntgenstrahlen addiert.

Als Ergebnis der Untersuchung ergibt sich:

1. Bei gleichem Energieaufwand im Induktor ist die Energieausnutzung an demselben absorbierenden Medium ca. $4 \cdot 10^6$ mal größer im Falle der Kathodenstrahlen als im Falle der Röntgenstrahlen.
2. Die Resultate der experimentellen Untersuchung ergeben im Einklang mit den theoretischen Überlegungen eine ungleich größere Wirkung der Kathodenstrahlen auf das lebende Gewebe als die Röntgenstrahlen.

(Eingegangen 19. Oktober 1919.)

Über Abkühlung von Gasen durch Leistung innerer und äußerer Arbeit.

Von R. Plank.

A. Der elementare Kühleffekt.

Die Wirkungsweise der Gasverflüssigungsmaschinen beruht auf der Tatsache, daß sich komprimierte Gase bei ihrer Entspannung unter die Temperatur der Umgebung abkühlen. Die Entspannung kann auf verschiedene Weise vorgenommen werden, wobei eine Wärmeeinwirkung von außen ausgeschlossen sein möge, also der Prozeß adiabatisch geführt werde. Die Entspannung kann nun entweder unter Leistung äußerer Arbeit, und zwar im Grenzfalle nach einer umkehrbaren Adiabate, also isentropisch erfolgen, oder im anderen Grenzfalle durch Drosselung unter Verzicht auf die Nutzarbeit, jedoch unter Leistung innerer Arbeit irreversibel durchgeführt werden[1]). Während im ersten Fall die Entropie s konstant bleibt, wird der zweite Fall durch die Konstanz eines anderen thermodynamischen Potentials, und zwar des Wärmeinhalts $i = u + APv$ charakterisiert. Hierbei bedeutet u die innere Energie, P den Druck, und v das Volumen.

Nach der ersten Methode arbeiten die Gasverflüssigungsmaschinen von G. Claude, nach der zweiten diejenigen von C. Linde.

Man ist von vornherein geneigt, der umkehrbaren adiabatischen Expansion den Vorzug zu geben, weil hierbei nicht nur ein stärkerer Kühleffekt auftritt, sondern auch die Verwertung der geleisteten äußeren Arbeit möglich ist.

Wird z. B. Luft von 2 kg/qcm und Zimmertemperatur auf 1 kg/qcm entspannt, so erhält man bei umkehrbarer adiabatischer Expansion eine Abkühlung um 54^0 und gewinnt eine Arbeit von 3950 mkg pro Kilogramm Luft. Im Falle der Drosselung dagegen beträgt die Abkühlung nur rund $^1/_4{}^0$ und ein Arbeitsgewinn ist überhaupt nicht vorhanden.

Daß die Lindeschen Gasverflüssigungsmaschinen trotz dieser ungünstigen Vergleichszahlen hinter denjenigen von Claude in keiner Weise zurückstehen, liegt daran, daß sich die Verhältnisse bei höheren Drucken und tieferen Temperaturen vollkommen ändern.

Wir wollen die Veränderungen an Hand des sog. elementaren Kühleffekts

$$\alpha = \frac{\partial T}{\partial P}$$

verfolgen und dabei unterscheiden:

$\alpha_s = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s$ den elementaren Kühleffekt bei umkehrbarer adiabatischer Expansion,

$\alpha_i = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_i$ den elementaren Kühleffekt bei Drosselung.

Den Druck messen wir entweder in kg/qm (P) oder in kg/qcm (p). Das mechanische Wärmeäquivalent ist $A = \frac{1}{427}$.

Die beiden Hauptsätze der Thermodynamik liefern für reale Gase folgende Beziehungen

$$\alpha_s = \frac{A}{c_p} T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P \tag{1}$$

und

$$\alpha_i = \frac{A}{c_p}\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P - v\right] = \frac{AT^2}{c_p}\left(\frac{\partial \frac{v}{T}}{\partial T}\right)_P \cdot \tag{2}$$

Für ein ideales Gas mit der Zustandsgleichung $Pv = RT$ und dem Grenzwert c_{p_0} wird

$$(\alpha_s)_{id} = \frac{Av}{c_{p_0}} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{T}{P} \tag{1a}$$

und

$$(\alpha_i)_{id} = 0. \tag{2a}$$

Für niedrige Drucke in der Gegend von 1 Atmosphäre kann man Luft angenähert als ideales Gas betrachten und α_s nach Gleichung (1a) berechnen. Man erkennt dann sofort, daß der elementare Kühleffekt α_s mit wachsendem Druck und sinkender Temperatur sehr schnell abnehmen wird. Die Lindeschen Luftverflüssigungsmaschinen arbeiten aber im Beharrungszustand bei einem mittleren Druck von 100 kg/qcm und mehr und bei einer mittleren Temperatur von etwa 150^0 abs. Für die Berechnung des elementaren Kühleffekts α_i bei niedrigen Drucken ist die

1) Diejenigen Fälle, in denen die Drosselung eine Erwärmung der Gase nach sich zieht, schließen wir hier aus; sie liegen mit Ausnahme des Wasserstoffs außerhalb des Bereichs technischer Anwendungen.

angenäherte Gültigkeit der idealen Gasgesetze nicht mehr anwendbar. Die Näherungsrechnung verbietet sich hier deswegen, weil sich für α_i nach Gleichung (2) ein kleiner Wert als Differenz zweier großer Zahlen ergibt. Man muß also hier entweder die Abweichungen vom Gasgesetz in der Zustandsgleichung genau berücksichtigen oder mit gemessenen Werten rechnen. Nach Versuchen von Vogel[1]) und Noell[2]) nimmt α_i für Drucke bis 150 Atmosphären und für Temperaturen bis 218° abs. mit wachsendem Druck nach einem Gesetz

$$\alpha_i = a - bp$$

linear ab, wobei a und b Temperaturfunktionen sind. In engen Grenzen ändert sich α_i umgekehrt proportional mit dem Quadrat der absoluten Temperatur (Joule und Thomson), für weitere Grenzen ist aber das Gesetz viel komplizierter.

Für höhere Drucke müssen auch für die Berechnungen von α_s die Abweichungen vom Gasgesetz berücksichtigt werden. Direkte Messungen für α_s gibt es im Gegensatz zu α_i nicht, sie wären auch äußerst schwer durchführbar, da die Expansion infolge der thermischen Wandungswirkungen des Arbeitszylinders niemals wirklich adiabatisch verläuft[3]). Hat man aber α_i aus Versuchen bestimmt, so kann man α_s berechnen, wenn zugleich genügend Versuchswerte für v und c_p vorliegen. Aus den Gleichungen (1) und (2) erhält man

$$\alpha_s = \alpha_i + \frac{Av}{c_p}. \qquad (3)$$

Aus dieser Beziehung erkennt man, daß der Unterschied zwischen α_s und α_i für hohe Drucke und tiefe Temperaturen immer kleiner wird, weil dabei einerseits v sinkt und andererseits c_p wegen der Annäherung an die Grenzkurve des trocken gesättigten Dampfes rasch zunimmt. Der Wert von α_i in Prozenten von α_s, also der Ausdruck $100\frac{\alpha_i}{\alpha_s}$ besitzt daher, wie gezeigt werden soll, bei jeder Temperatur einen Maximalwert, und zwar bei einem um so höheren Druck, je höher die Temperatur ist (Fig. 1). Dieser Ausdruck nimmt ferner mit sinkender Temperatur außerordentlich rasch zu. Ein angenähertes Bild erhält man bei nicht zu hohem Druck auf folgende Weise: Nach Joule und Thomson ist $\alpha_i = \frac{k_1}{T^2}$, während nach Gleichung (1a) $\alpha_s = k_2 T$ wird, wenn wir bei mäßigem Druck die Luft als ideales Gas ansehen. Dabei sind k_1 und k_2 bei gegebenem Druck Konstanten, im allgemeinen aber Druckfunktionen. Es wird also

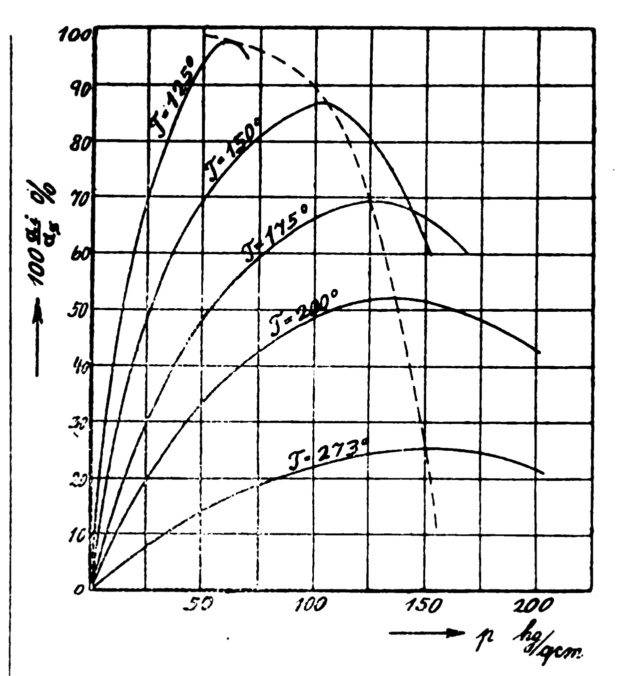


Fig. 1.

$$\frac{\alpha_i}{\alpha_s} = \frac{k_1}{k_2} \cdot \frac{1}{T^3}.$$

Daraus erkennt man, wie rasch $\frac{\alpha_i}{\alpha_s}$ mit sinkender Temperatur ansteigt. Dieses Gesetz ist, wie sich aus den Werten der folgenden Zahlentafel nachrechnen läßt, sogar noch beim Druck von 50 kg/qcm für nicht zu tiefe Temperaturen angenähert erfüllt. Für tiefere Temperaturen wird aber besonders bei höherem Druck die Zunahme von $\frac{\alpha_i}{\alpha_s}$ immer kleiner, so daß man auch hier (Fig. 2) schließlich zu Maximalwerten gelangt, die bei um so höherer Temperatur liegen, je höher der Druck ist.

Die zahlenmäßige Berechnung der zugehörigen Werte von α_s und α_i für verschiedene Werte von Druck und Temperatur kann für Luft am bequemsten an Hand der von M. Jakob[1]) mitgeteilten Drosselgleichung und Zustandsgleichung erfolgen, welche auf den von Linde[2])

1) Vogel, Diss. München 1900 und Mitteilungen über Forschungsarbeiten des Ver. D. Ing., Heft 108/109, 1911.
2) Noell, Sitzungsber. d. bayer. Akad. math.-phys. Klasse 1913 und Mitteilungen über Forschungsarbeiten d. Ver. D. Ing., Heft 184, 1916.
3) Vgl. Lummer und Pringsheim, Wied. Ann. 64, 582, 1898 und Makower, Phil. Mag. 5. 233, 1903.

1) M. Jakob, Ann d. Phys., (4). Folge 55, Heft 7, S 527 u. Mitteilungen üb. Forschungsarbeiten d. Ver. D. Ing., Heft 202, 1917.
2) C. Linde, Sitzungsber. d. bayer. Akad., math.-phys. Klasse 27, Heft 3, 1897.

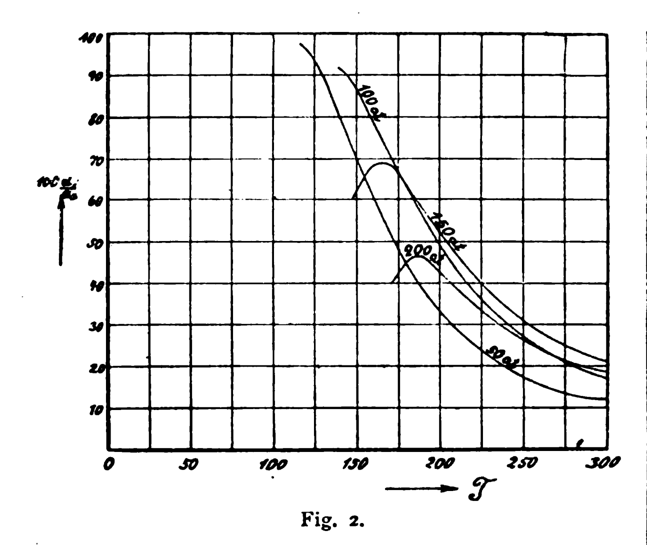


Fig. 2.

und mir[1]) angegebenen theoretischen Beziehungen zwischen der endlichen Abkühlung beim Joule-Thomson-Effekt einerseits und dem spezifischen Volumen v, der spezifischen Wärme c_p sowie dem elementaren Kühleffekt α_i andererseits aufgebaut sind.

Die Gleichungen Jakobs enthalten sehr viele empirische Koeffizienten (die Zustandsgleichung hat deren z. B. 15), wodurch die Berechnung etwas zeitraubend aber keinesfalls schwierig wird, weil die Beziehungen systematisch und sehr übersichtlich zusammengestellt sind und möglichste Vereinfachung der Zahlenrechnungen angestrebt ist.

Die Form der Gleichungen ist folgende:

$$v = \frac{RT}{10^4 p} + A' \frac{p^3}{10^6} + B' \frac{p^2}{10^4} + C' \frac{p}{10^2} + D' + E' \frac{T}{10^2} \qquad (4a)$$

$$c_p = (c_p)_1 \left\{ 1 - 100 \left[\frac{1}{4} \frac{dA}{dT} \frac{p^4 - 1}{10^8} + \frac{1}{3} \frac{dB}{dT} \frac{p^3 - 1}{10^6} + \frac{1}{2} \frac{dC}{dT} \frac{p^2 - 1}{10^4} + \frac{dD}{dT} \frac{p - 1}{10^2} \right] \right\} \qquad (4b)$$

$$10^4 \alpha_i = \frac{(c_p)_1}{c_p} \left(A \frac{p^3}{10^6} + B \frac{p^2}{10^4} + C \frac{p}{10^2} + D \right), \qquad (4c)$$

wobei $(c_p)_1$ die spezifische Wärme beim Druck von 1 Atmosphäre darstellt, für die wir den konstanten Mittelwert 0,241 einsetzen, A, B, C, D sowie A', B', C', D' Temperaturfunktionen mit nur ganzen negativen Exponenten von T sind, E' eine Druckfunktion mit nur ganzen positiven Exponenten von p und $R = 29{,}26$ die individuelle Gaskonstante der Luft bedeutet. Auf die Wiedergabe der Form dieser Funktionen sei unter Hinweis auf die Originalarbeit[2]) verzichtet.

Die mit Hilfe der Gleichungen (4a) bis (4c) ermittelten Werte von α_i, v und c_p gestatten nun auch α_s nach Gleichung (3) zu berechnen. Das Ergebnis der Rechnung ist in folgender Zahlentafel wiedergegeben.

Die Zahlen dieser Tabelle sind für die höchsten Drucke und tiefsten Temperaturen mit einiger Unsicherheit behaftet, weil Versuchswerte zur Prüfung der Gültigkeit der Jakobschen Gleichungen (4a) bis (4c) hier nicht mehr vorliegen. Jedenfalls dürfte aber Fig. 1, in welcher die Isothermen der Werte $\frac{\alpha_i}{\alpha_s}$ über dem Druck aufgetragen sind, ein annähernd richtiges Bild ergeben. Wir erkennen zunächst, daß die Werte $\frac{\alpha_i}{\alpha_s}$ für jede Temperatur einen Maximal-

T	p $\frac{kg}{qcm}$	v cbm/kg nach Gl. (4a)	c_p nach Gl. (4b)	$10^4 \cdot \frac{Av}{c_p}$	$10^4 \alpha_i$ nach Gl. (4c)	$10^4 \alpha_s$ nach Gl. (3)	$100 \frac{\alpha_i}{\alpha_s}$ Proz.	$10^4 (\alpha_s)_{id}$ nach Gl. (1a)
273	50	0,015580	0,2625	1,390	0,223	1,613	13,8	1,570
	100	0,007722	0,2742	0,659	0,183	0,842	21,7	0,785
	150	0,005188	0,2737	0,444	0,149	0,593	25,1	0,525
	200	0,003980	0,2733	0,341	0,0965	0,4375	22,0	0,3925
200	50	0,010430	0,3095	0,789	0,390	1,179	33,1	1,152
	100	0,004811	0,3933	0,286	0,269	0,555	48,4	0,576
	150	0,003148	0,4604	0,160	0,169	0,329	51,4	0,384
	200	0,002486	0,4920	0,118	0,080	0,207	43,0	0,288
175	50	0,008342	0,3675	0,532	0,490	1,022	47,9	1,008
	100	0,003518	0,5388	0,153	0,301	0,454	66,3	0,504
	150	0,002275	0,6512	0,082	0,165	0,247	66,8	0,336
	200	(0,001971)	(0,6415)	(0,072)	(0,053)	(0,125)	(42,4)	0,252
150	50	0,005689	0,5110	0,261	0,604	0,865	69,8	0,864
	100	0,001734	0,8218	0,049	0,308	0,357	86,3	0,432
	150	0,001293	0,7590	0,040	0,0675	0,1075	62,8	0,288
125	50	0,001647	0,8493	0,045	0,671	0,716	93,7	0,720

1) R. Plank, diese Zeitschr. **17**, 521, 1916.

2) M. Jakob, a. a. O.

wert besitzen, der bei um so tieferem Druck auftritt, je tiefer die Temperatur ist. Der geometrische Ort aller Maximalwerte stellt eine parabelförmige Kurve dar, die in Fig. 1 gestrichelt eingezeichnet ist. Aus der Figur erkennen wir, daß, während bei 273° abs. der elementare Kühleffekt durch Drosselung im besten Falle, und zwar bei etwa 150 kg/qcm den vierten Teil desjenigen bei adiabatischer Expansion erreicht, man bei tieferen Temperaturen den Prozentsatz wesentlich steigern kann. Der elementare Kühleffekt erreicht bei 200° abs. im günstigsten Fall über die Hälfte, bei 175° abs. über zwei Drittel und bei 150° rund 87 Proz. des entsprechenden Wertes bei adiabatischer Expansion. Da man bei Anwendung eines Expansionszylinders infolge der schädlichen Wandungswirkungen niemals wirklich adiabatisch expandieren kann und die thermischen Verluste bei einer Kolbenmaschine bedeutend größer als in einem einfachen Drosselventil sind, so kann man sagen, daß bei den Temperatur- und Druckverhältnissen, welche dem Beharrungszustand der Lindeschen Luftverflüssigungsmaschinen entsprechen, die elementaren Kühleffekte durch Drosselung nicht geringer sind als bei Expansion unter Leistung äußerer Arbeit. In den Lindeschen Maschinen wird die Luft von einem Höchstdruck von 150 bis 200 Atmosphären auf einen Druck von 40 bis 50 Atmosphären abgedrosselt. Der mittlere Druck beträgt also 100 bis 125 Atmosphären, so daß bei mittleren Betriebstemperaturen von 150 bis 175° abs. gerade die günstigsten Werte von $\frac{\alpha_i}{\alpha_s}$ erreicht werden.

In Fig. 2 sind noch die Isobaren der Werte $\frac{\alpha_i}{\alpha_s}$ über der Temperatur aufgetragen.

Interessant ist noch der Vergleich der Werte von α_s für ein reales und ein ideales Gas. Wie die Zahlen der Tabelle erkennen lassen, ist α_s für ein reales Gas bald größer, bald kleiner als für ein ideales Gas. Bei 273° ist für alle Drucke bis 200 Atmosphären stets $\alpha_s > (\alpha_s)_{id}$, bei tieferen Temperaturen trifft das aber nur noch bis etwa $p = 50$ Atmosphären zu. Für höhere Drucke wird umgekehrt $\alpha_s < (\alpha_s)_{id}$. Bei höheren Temperaturen und mäßigen Drucken, für die man die Veränderlichkeit von c_p annähernd vernachlässigen kann, lassen sich die Verhältnisse qualitativ an Hand einer Zustandsgleichung, z. B. derjenigen von van der Waals

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = RT \qquad (5)$$

bequem übersehen. Setzen wir zur Abkürzung

$$T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \beta,$$

so wird aus Gleichung (5)

$$\beta = \frac{RT}{P - \frac{a}{v^2} + \frac{2ab}{v^3}},$$

dagegen

$$\beta_{id} = \frac{RT}{P}.$$

Daraus folgt unmittelbar, daß $\beta \gtrless \beta_{id}$ ist, je nachdem ob $v \gtrless 2b$ oder $v \gtrless 0{,}0024$, weil mit $R = 29{,}26$ und den kritischen Werten $T_k = 132{,}5$ und $P_k = 10^4 \cdot 40{,}6$ $b = \frac{1}{8} \cdot \frac{R \cdot T_k}{P_k} = 0{,}0012$ wird.

Solange nun die Veränderlichkeit von c_p vernachlässigt werden kann, verhalten sich die α_s-Werte wie die β-Werte, so daß auch $\alpha_s \gtrless (\alpha_s)_{id}$, je nachdem ob $v \gtrless 0{,}0024$. Mit veränderlichem c_p wird dagegen

$$\frac{\alpha_s}{(\alpha_s)_{id}} = \frac{c_{p_0}}{c_p} \frac{\beta}{\beta_{id}}.$$

Da $c_p > c_{p0}$, so folgt aus der letzten Beziehung, daß auch für $v > 0{,}0024$ $\alpha_s < (\alpha_s)_{id}$ werden kann, wie unsere Tabelle bei Temperaturen von 200° abs. abwärts und oberhalb 50 Atmosphären erkennen läßt. Eine einfache Abgrenzung läßt sich aber hier nicht mehr angeben.

2. Die endliche Abkühlung.

Neben dem elementaren Kühleffekt α spielt die endliche Abkühlung $\Delta = T - T_0$ eine wichtige Rolle. Dabei nehmen wir an, daß von verschiedenen Anfangsdrucken P und Anfangstemperaturen T stets auf den gleichen genügend kleinen Enddruck P_0 expandiert wird, für welchen die Gesetze idealer Gase nahezu erfüllt sind und daß $\Delta = f(P, T)$ durch Versuche gegeben ist. In einer früheren Abhandlung haben wir gezeigt[1]), daß $\Delta_i = T - T_{0i}$ in besonders einfacher Beziehung zu fast allen anderen thermischen und kalorischen Größen steht und zu den wichtigsten thermodynamischen Potentialen gezählt werden kann. Es wurden dabei die Beziehungen

$$\alpha_i = \frac{\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial P}\right)_T}{1 - \left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial T}\right)_P} \qquad (6)$$

und

1) R. Plank, a. a. O.

$$\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial P}\right)_T = \frac{A}{c_{p_0}}\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P - v\right] = \alpha_i \frac{c_p}{c_{p_0}} \qquad (7)$$

abgeleitet, aus denen die zuerst von Linde[1]) angegebene Gleichung

$$\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial T}\right)_P = 1 - \frac{c_p}{c_{p_0}} \qquad (8)$$

folgt. Ähnliche Beziehungen können auch für die endliche Abkühlung $\Delta_s = T - T_{0s}$ bei adiabatischer Expansion auf den konstanten Gegendruck P_0 mit Leistung äußerer Arbeit abgeleitet werden, wenn man von Gleichung (1) ausgeht. Man erhält zunächst:

$$\left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s - \left(\frac{\partial T_{0s}}{\partial P}\right)_s = \alpha_s - \left(\frac{\partial T_{0s}}{\partial P}\right)_s$$

und da wir den Enddruck P_0 konstant halten, so wird auch die Endtemperatur auf ein und derselben Adiabate für alle Anfangsdrücke P die gleiche bleiben, also

$$\left(\frac{\partial T_{0s}}{\partial P}\right)_s = 0$$

werden.

Da ferner

$$\left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial P}\right)_s = \alpha_s = \left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s,$$

so erhält man, analog Gleichung (6),

$$\alpha_s = \frac{\left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial P}\right)_T}{1 - \left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial T}\right)_P}. \qquad (6a)$$

Die partielle Differentiation der Gleichung (1) nach T ergibt

$$\left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial T}\right)_P = \frac{A}{c_p}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P + \frac{AT}{c_p}\frac{\partial^2 v}{\partial T^2} - \frac{AT}{c_p^2}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P\left(\frac{\partial c_p}{\partial T}\right)_P$$

oder mit

$$\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_T = -AT\frac{\partial^2 v}{\partial T^2}$$

$$\left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s - \frac{1}{c_p}\left[\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_T + \left(\frac{\partial c_p}{\partial T}\right)_P \cdot \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s\right] = \frac{1}{T}\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_s - \frac{1}{c_p}\left(\frac{\partial c_p}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial \ln T}{\partial P}\right)_s - \left(\frac{\partial \ln c_p}{\partial P}\right)_s = \left(\frac{\partial \ln\left(\frac{T}{c_p}\right)}{\partial P}\right)_s.$$

Andererseits läßt sich aus Gleichung (6a) die Beziehung

$$\left(\frac{\partial \alpha_s}{\partial T}\right)_P = -\frac{\partial}{\partial P_s}\left\{\ln\left[1 - \left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial T}\right)_P\right]\right\}$$

ableiten, so daß man aus dem Vergleich der beiden letzten Gleichungen erhält

$$\ln\left[1 - \left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial T}\right)_P\right] = -\left[\ln\left(\frac{T}{c_p}\right)\right]_{P_0}^{P}$$

oder
$$\left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial T}\right)_P = 1 - \frac{c_p}{c_{p_0}} \cdot \frac{T_{0s}}{T}, \qquad (8a)$$

als Gegenstück zur Gleichung (8). Mit

$$\left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial T}\right)_P = 1 - \left(\frac{\partial T_{0s}}{\partial T}\right)_P$$

kann man für Gleichung (8a) auch schreiben

$$\left(\frac{\partial \ln T_{0s}}{\partial T}\right)_P = \frac{1}{T}\frac{c_p}{c_{p_0}}. \qquad (8b)$$

Setzt man die Gleichungen (1) und (8a) in die Gleichung (6a) ein, so folgt schließlich, analog Gleichung (7),

$$\left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial P}\right)_T = \frac{A}{c_{p_0}} T_{0s}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P = \alpha_s \frac{c_p}{c_{p_0}} \frac{T_{0s}}{T}. \qquad (7a)$$

Mit

$$\left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial T_{0s}}{\partial P}\right)_T$$

kann man dafür auch schreiben

$$\left(\frac{\partial \ln T_{0s}}{\partial P}\right)_T = -\frac{A}{c_{p_0}}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P. \qquad (7b)$$

Ist das System $\Delta = f(P, T)$ experimentell nicht gegeben, sondern an dessen Stelle die Zustandsgleichung $v = \varphi(P, T)$, so bleibt noch übrig aus den partiellen Differentialquotienten, der Funktionen Δ_i und Δ_s nach den Gleichungen (7) und (8) bzw. (7a) und (8a) diese Funktionen selbst zu bestimmen.

Das allgemeine Integral der partiellen Differentialgleichungen (7) und (8) lautet

$$\Delta_i = T - T_{0i} = T - \frac{i}{c_{p_0}}. \qquad (9)$$

Aus den partiellen Diffentialgleichungen (7a) und (8a) erhält man das Integral

$$\Delta_s = T - T_{0s} = T - K e^{\frac{s}{c_{p_0}}}, \qquad (9a)$$

worin K eine noch zu bestimmende Konstante darstellt [siehe Gleichung 13)]. Aus Gleichung (9a) folgt ferner

$$\ln T_{0s} = \ln K + \frac{s}{c_{p_0}}, \qquad (9b)$$

womit zugleich das Integral der Gleichungen (7b) und (8b) gefunden ist.

Von der Richtigkeit der Lösungen (9) und (9a) kann man sich leicht an Hand der bekannten thermodynamischen Beziehungen

$$\left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_P = c_p;\ \left(\frac{\partial i}{\partial P}\right)_T = -A\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P - v\right];$$

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = \frac{c_p}{T};\ \left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T = -A\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$$

überzeugen.

1) C. Linde, a. a. O.

Die Ausdrücke (9) und (9a) für Δ_i und Δ_s dürfen naturgemäß keine willkürlichen Konstanten enthalten, da die Größen der Abkühlung bei Drosselung oder adiabatischer Expansion eindeutig definiert sind. Dagegen enthalten die allgemeinen Ausdrücke für den Wärmeinhalt

$$i = c_{p_0} T - A \int \left[T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P - v \right] dP + K_i \quad (10)$$

und für die Entropie

$$s = c_{p_0} \ln T - A \int \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P dP + K_s \quad (11)$$

die von der willkürlichen Wahl des Nullpunktes abhängigen Konstanten K_i und K_s. Man muß dementsprechend in den Gleichungen (9) und (9a) entweder für i und s die Ausdrücke (10) und (11) unter Fortlassung der willkürlichen Konstanten einsetzen, oder die allgemeinen Integrale in der Form

$$\Delta_i = T - \frac{i - K_i}{c_{p_0}} \quad (12)$$

$$\Delta_s = T - K e^{\frac{s - K_s}{c_{p_0}}} \quad (12a)$$

schreiben, die ebenfalls den Differentialausdrücken (7), (8), (7a) und (8a) genügt.

Es bleibt nun noch die Konstante K in den Gleichungen (9a) bzw. (12a) zu bestimmen. Man erhält die Größe K, indem man Δ_s für ein ideales Gas, welches der Zustandsgleichung $Pv = RT$ genügt, bestimmt. Es wird dann aus Gleichung (11)

$$s - K_s = c_{p_0} \ln T - AR \ln P,$$

also mit

$$\frac{AR}{c_{p_0}} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa}$$

$$T_{0s} = K e^{\ln T - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \ln P}$$

oder

$$\ln T_{0s} = \ln K + \ln T - \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \ln P.$$

Für ein ideales Gas gilt aber für die Adiabate die Beziehung

$$\frac{T}{T_{0s}} = \left(\frac{P}{P_0} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}$$

und daraus ergibt sich die gesuchte Konstante

$$K = P_0^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}}. \quad (13)$$

Die Thermodynamik macht seit Gibbs von gewissen Funktionen, durch welche alle anderen Zustandsgrößen dargestellt werden können, häufig Gebrauch. Die Wahl dieser Funktionen hängt davon ab, welche einfache Zustandsgrößen man als unabhängige Veränderliche einführen will. Zu solchen Funktionen, die man als thermodynamische Potentiale oder charakteristische Funktionen bezeichnet, gehören:[1])

$$i = u + APv; \quad F = Ts - u; \quad \Phi = Ts - i.$$

Man kann dazu auch die Funktion (9)

$$\Delta_i = T - \frac{i}{c_{p_0}}$$

rechnen, weil auch durch sie die weiteren thermischen Größen bequem darzustellen sind, wenn man den Druck und die Temperatur als unabhängige Veränderliche wählt. Das Gleiche gilt für die Funktionen Δ_s bzw. $\ln T_{0s}$ nach den Gleichungen (9a) und (9b), doch reicht deren Bedeutung praktisch an diejenige von Δ_i nicht heran.

Für ein ideales Gas vereinfachen sich die oben entwickelten Ausdrücke wesentlich. Man findet die entsprechenden Beziehungen, indem man in den Gleichungen (7a), (8a) und (9a) $c_p = c_{p_0}$ setzt und die Gasgleichung $Pv = RT$ einführt. Man kann aber auch einfach von der Gleichung

$$\left. \begin{aligned} (\Delta_s)_{id} &= T - (T_{0s})_{id} = T \left[1 - \frac{(T_{0s})_{id}}{T} \right] = \\ &= T \left[1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} \right] \end{aligned} \right\} \quad (9c)$$

ausgehen und erhält dann durch partielle Differentiation

$$\left(\frac{\partial (\Delta_s)_{id}}{\partial T} \right)_P = 1 - \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = 1 - \frac{(T_{0s})_{id}}{T} \quad (8c)$$

und

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial (\Delta_s)_{id}}{\partial P} \right)_T &= \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \frac{T}{P} \left(\frac{p_0}{p} \right)^{\frac{\varkappa - 1}{\varkappa}} = \\ &= \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{(T_{0s})_{id}}{P} = (a_s)_{id} \frac{(T_{0s})_{id}}{T}. \end{aligned} \right\} \quad (7c)$$

Die entwickelten Formeln sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt.

Der Vergleich der partiellen Differentialquotienten von Δ in den 3 betrachteten Fällen ergibt sowohl für $\left(\frac{\partial \Delta}{\partial T} \right)_P$ wie auch für $\left(\frac{\partial \Delta}{\partial P} \right)_T$ eine gewisse äußere Ähnlichkeit im Aufbau der Formeln. Bei der adiabatischen Expansion idealer Gase begegnen wir dem Verhältnis $\frac{T_0}{T}$, welches im Falle realer Gase noch mit dem Verhältnis $\frac{c_p}{c_{p_0}}$ zu multiplizieren ist, wogegen bei

1) Vgl. z. B. Bryan, Enzyklopädie d. Math. Wiss. V, 3, 1903; Helmholtz benutzte an Stelle von F die Funktion $F' = u - Ts = -F$ und M. Planck an Stelle von Φ die Funktion $\Phi' = s - \frac{i}{T} = \frac{\Phi}{T}$.

	Adiabatische Expansion idealer Gase	Adiabatische Expansion realer Gase	Drosselung realer Gase
α	$(\alpha_s)_{id} = \frac{A v_{id}}{c_{p_0}} = \frac{\varkappa - 1}{\varkappa} \cdot \frac{T}{P}$	$\alpha_s = \frac{A}{c_p} T \left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P$	$\alpha_i = \frac{A}{c_p}\left[T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_P - v\right]$
$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial T}\right)_P$	$\left(\frac{\partial (\Delta_s)_{id}}{\partial T}\right)_P = 1 - \frac{(T_{0s})_{id}}{T}$	$\left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial T}\right)_P = 1 - \frac{c_p}{c_{p_0}} \frac{T_{0s}}{T}$	$\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial T}\right)_P = 1 - \frac{c_p}{c_{p_0}}$
$\left(\frac{\partial \Delta}{\partial P}\right)_T$	$\left(\frac{\partial (\Delta_s)_{id}}{\partial P}\right)_T = (\alpha_s)_{id} \cdot \frac{(T_{0s})_{id}}{T}$	$\left(\frac{\partial \Delta_s}{\partial P}\right)_T = \alpha_s \frac{c_p}{c_{p_0}} \frac{T_{0s}}{T}$	$\left(\frac{\partial \Delta_i}{\partial P}\right)_T = \alpha_i \frac{c_p}{c_{p_0}}$
Δ	$(\Delta_s)_{id} = T\left[1 - \left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right]$	$\Delta_s = T - K e^{\frac{s - K_s}{c_{p_0}}}$ $\left(K = P_0^{\frac{\varkappa-1}{\varkappa}}\right)$	$\Delta_i = T - \frac{i - K_i}{c_{p_0}}$

der Drosselung realer Gase das Temperaturverhältnis nicht mehr erscheint und nur noch das Verhältnis der spezifischen Wärmen $\frac{c_p}{c_{p_0}}$ auftritt.

(Eingegangen 14. November 1919.)

Elektronenring-Modell und elektrisches Moment einiger Dipolmoleküle.

Von Léon Schames.

§ 1. In einer früheren Mitteilung[1]) wurde gezeigt, daß das aus der chemischen Konstanten berechnete Trägheitsmoment mit dem aus dem ultraroten Absorptionsspektrum berechneten vollkommen übereinstimmt[2]), und ebenso — wenigstens für N_2 — mit dem von Laski[3]) aus dem Anstieg der spezifischen Wärme der inneren Freiheitsgrade abgeleiteten Elektronenring-Modell. In Analogie zu diesem liegt es nahe, ein ähnliches für das Dipolmolekül zu betrachten, was andeutungsweise auch schon von Kossel[4]) geschah. Ausgehend vom Trägheitsmoment kennt man den Abstand der Kerne voneinander und kann dann aus der elektrostatischen Gleichgewichtsbedingung den Abstand der Kerne von der Ebene des Elektronenrings, sowie dessen Radius und aus dem Quantenansatz dann die Winkelgeschwindigkeit berechnen. Aus der so gefundenen Molekülkonstitution ergibt sich ohne weiteres das elektrische Moment. Dieses ist aber von anderen Erscheinungen her bekannt, vor allem aus der Debyeschen[5]) Theorie der Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten. Der Vergleich zeigt, daß das hier berechnete Moment einigemal zu groß wird. Die Ursache dieser Abweichung dürfte vielleicht darin liegen, daß die Elektronen der Moleküle (und Atome) im allgemeinen in Wirklichkeit nicht in ebenen Ringen, sondern in räumlicher Anordnung verteilt sein werden, ähnlich wie dies kürzlich Born[6]) für die Elektronen der Ionen einfacher Kristalle aus deren Kompressibilität geschlossen hat. Für diese räumliche Verteilung der Elektronen im Molekül und Atom sprechen noch einige nicht unwesentliche Punkte aus dem Zustandsproblem, die wir in einem späteren Artikel zusammenstellen wollen.

§ 2. Es bezeichne in einem zweiatomigen Dipolmolekül h den Abstand der Kerne mit der „effektiven“ Ladungszahl n_1 bzw. n_2 und der Masse m_1 bzw. m_2 voneinander, r_1, r_2 ihren Abstand vom mechanischen Schwerpunkt, d_1, d_2 ihren Abstand von der Elektronenringebene, a den Radius des Rings von n-Elektronen, ist also

$$n_1 + n_2 = n,$$

$$r_1 + r_2 = d_1 + d_2 = h = \sqrt{\frac{P(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}, \quad (1)$$

so ergibt die elektrostatische Gleichgewichtsbedingung

$$\frac{n_1 n_2 \varepsilon^2}{h^2} = \frac{n n_1 \varepsilon^2 d_1}{(a_2 + d_1^2)^{3/2}} = \frac{n n_2 \varepsilon^2 d_2}{(a^2 + d_2^2)^{3/2}}, \quad (2)$$

woraus

$$\left(\frac{a}{h}\right)^2 = \left(\frac{n}{n_2} \cdot \frac{d_1}{h}\right)^{2/3} - \left(\frac{d_1}{h}\right)^2 = \left(\frac{n}{n_1} \frac{d_2}{h}\right)^{2/3} - \left(\frac{d_2}{h}\right)^2.$$

Setzt man

$$\frac{d_1}{h} = x, \text{ also } \frac{d_2}{h} = 1 - x,$$

so folgt:

1) L. Schames, diese Zeitschr. 21, 39, 1920.
2) Vgl. jedoch die folgende Bemerkung S. 158.
3) G. Laski, diese Zeitschr. 20, 269, 1919.
4) W. Kossel, Ann. d. Phys. 49, 229, 1915.
5) P. Debye, diese Zeitschr. 13, 97, 1912.

1) M. Born, Verh. d. D. phys. Ges. 20, 230, 1918.

$$\left(\frac{n}{n_2}x\right)^{2/3} - \left\{\frac{n}{n_1}(1-x)\right\}^{2/3} + 1 - 2x = 0. \quad (4)$$

Hieraus ist x zu berechnen. x gibt also den Bruchteil von h an, wo der Ringmittelpunkt oder „der elektrische Schwerpunkt des Rings" liegt. „Der elektrische Schwerpunkt der Kerne" liege im Abstand $y \cdot h$ vom Kern n_1, wobei also

$$y = \frac{n_2}{n}. \quad (5)$$

Wir haben es also hier mit einem Dipol zu tun, dessen Länge l

$$l = \pm(x - y)\,h \quad (6)$$

und dessen Moment M

$$M = n\varepsilon l. \quad (7)$$

Die Winkelgeschwindigkeit ω der Elektronen im Ring berechnet sich aus dem bekannten Quantenansatz

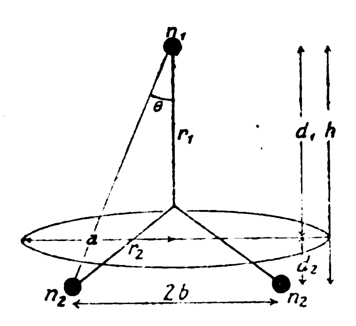
$$n a^2 \omega = \frac{kh}{2\pi}, \quad (8)$$

wobei die Quantenzahl k für den zweiten und dritten Ring $= 2$ ist.

§ 3. Bei einem dreiatomigen Molekül mit einem Kern der effektiven Ladungszahl n_1 und zwei gleichen Kernen n_2,

also $n_1 + 2n_2 = n$,

bezeichne h die Dreieckshöhe auf der Grundlinie 2b (vgl. die Figur); dann findet man die



Dimensionen h, b, r_1 und r_2 aus den drei Gleichungen für die Hauptträgheitsmomente

$$\left.\begin{aligned} P &= m_1 r_1^2 + 2m_2 r_2^2 \\ Q &= m_1 r_1^2 + 2m_2 (h - r_1)^2 \\ R &= 2m_2 b^2 \end{aligned}\right| \quad (1\text{a})$$

und aus

$$r_2^2 = (h - r_1)^2 + b^2. \quad (3)$$

Die Gleichgewichtsbedingung wird hier

$$\frac{2n_1 n_2 \varepsilon^2 h}{(h^2 + b^2)^{3/2}} = \frac{n n_1 \varepsilon^2 d_1}{(d_1^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{2n n_2 \varepsilon^2 d^2}{(d_2^2 + a^2 + b^2)^{3/2}}, \quad (2\text{a})$$

woraus

$$\left.\begin{aligned} \left(\frac{a}{h}\right)^2 &= \left(\frac{n}{2n_2}x\right)^{2/3}\left\{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2\right\} - x^2 = \\ &= \left(\frac{n}{n_1}x\right)^{2/3}\left\{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2\right\} - \left(\frac{h}{b}\right)^2 - (1-x)^2 \end{aligned}\right|, \quad (3\text{a})$$

wobei wieder $\frac{d_1}{h} = x$, also $\frac{d_2}{h} = 1 - x$. Als Bestimmungsgleichung für x folgt dann

$$\left(\frac{n}{2n_2}x\right)^{2/3} - \left\{\frac{n}{n_1}(1-x)\right\}^{2/3} + 1 - \frac{2x}{1 + \left(\frac{b}{h}\right)^2} = 0. \quad (4\text{a})$$

Weiter wird analog wie oben

$$y = \frac{2n_2}{n}, \quad (5\text{a})$$

während die Gleichungen (6), (7) und (8) unverändert bleiben.

§ 4. Die hier abgeleiteten Beziehungen wollen wir nun anwenden zur Bestimmung der Dimensionen und der elektrischen Momente von CO, HCl, H_2O und CO_2. Für CO haben wir l. c. das Trägheitsmoment bestimmt; für HCl läßt sich aus Mangel an thermischen Daten die chemische Konstante noch nicht mit der gewünschten Genauigkeit angeben, wir nehmen deshalb hierfür den Bjerrumschen[1]) Wert für P, der entsprechend Gleichung (7) l. c. zu halbieren ist. Für H_2O und CO_2 gibt die chemische Konstante nur den algebraischen Mittelwert aus den drei Hauptträgheitsmomenten. Während jedoch für H_2O diese einzeln aus dem ultraroten Absorptionsspektrum bekannt sind, bedarf es für CO_2 dafür einer besonderen Betrachtung, die sich folgendermaßen gestaltet.

Außer dem Produkt PQR hat man für dreiatomige Moleküle, wegen der ebenen Anordnung der Kerne, als weitere Bestimmungsgleichung: $Q + R = P$, so daß nur noch die dritte Beziehung fehlt. Diese entnehmen wir einer Betrachtung Bjerrums[2]). Dort werden die Möglichkeiten für den $\measuredangle\,\Theta$ (vgl. die Figur) für CO_2 diskutiert, und zwar werden zwei unter Annahme von Zentralkräften $\Theta_1 = 72^0{,}5$, $\Theta_2 = 20^0{,}3$ und zwei weitere unter Annahme von Valenzkräften gefunden $\Theta_3 = 67^0{,}5$ und $\Theta_4 = 20^0{,}4$. Zu einer Entscheidung, welcher Winkel bei CO_2 verwirklicht ist, gelangte Bjerrum nicht. Von dem hier vertretenen Standpunkt scheiden für CO_2 stumpfe Winkel an der Spitze (also für 2Θ) aus. Es bleibt demnach Fall 2 oder 4. Da hierbei die Winkel praktisch gleich sind, erübrigt sich die Diskussion, welche Annahme berechtigter sei. Wir

1) N. Bjerrum, Verh. d. D. phys. Ges. **16**, 640, 1914.
2) N. Bjerrum, l. c. S. 737.

können vielmehr als 3. Bestimmungsgleichung hinzufügen

$$\operatorname{tang} \Theta = \frac{b}{h} = 0{,}37\,,$$

so daß wir auch für CO_2 die drei Hauptträgheitsmomente und mithin die übrigen Größen berechnen können. Die betreffenden Resultate sind in folgender Tabelle mit enthalten.

	CO	HCl	H_2O	CO_2
$P \cdot 10^{40}$	10,07	2,7	2,21	9,40
$Q \cdot 10^{40}$	10,07	2,7	1,25	5,83
$R \cdot 10^{40}$	0	0	0,96	3,57
n_1	6	7	6	4
n_2	4	1	1	6
$h \cdot 10^8$	0,951	1,31	0,657	0,708
$b \cdot 10^8$	—	—	0,542	0,262
$r_1 \cdot 10^8$	0,4075	0,036	0,0734	0,515
$r_2 \cdot 10^8$	0,5435	1,274	0,796	0,325
x	0,184	0,0034	0,027	0,90
y	0,400	0,125	0,250	0,75
$d_1 \cdot 10^8$	0,175	0,0045	0,0177	0,637
$d_2 \cdot 10^8$	0,776	1,3055	0,639	0,071
$a \cdot 10^8$	0,713	0,786	0,402	0,485
$\omega \cdot 10^{-16}$	4,60	3,78	14,4	9,92
$l \cdot 10^8$	0,205	0,159	0,146	0,106
$M \cdot 10^{18}$	9,70	6,02	5,52	8,01
$M \cdot 10^{18}$ [Jona[1]])	—	—	1,87	$0{,}303 \pm 0{,}145$

Ebensowenig wie für H_2O gilt demnach für CO_2 die vereinfachende Annahme Sackurs[2]): $Q = R$; hingegen verhält sich mit einer Genauigkeit von 2 Proz. $Q : R$ ganzzahlig, und zwar für H_2O wie $4:3$, für CO_2 wie $5:3$. Dem mittleren Trägheitsmoment (Q) für CO_2 entspricht eine Wellenlänge $\lambda_R = 1055$, während v. Bahr[3]) aus den Maxima der Doppelbanden 1265 und 1100 fand, was in Anbetracht der schwierig ganz genauen Festlegung der Maxima wohl als befriedigende Übereinstimmung gelten darf.

Die hier durchgerechneten Modelle enthalten also für CO, HCl, H_2O und CO_2 10, 8, 8 und 16 Elektronen im Ring. An Stelle letzterer Zahl wäre es wohl richtiger, 2 Ringe mit je 8 Elektronen einzuführen; dementsprechend hätte hier die Größe a für CO_2 nur den Charakter eines mittleren Radius. Analoges gilt für die Winkelgeschwindigkeit ω. Auf das elektrische Moment hätte dies aber keinen Einfluß.

§ 5. Wie schon eingangs erwähnt, ergibt sich das elektrische Moment hier wesentlich zu groß, wie der Vergleich mit den in der letzten Reihe der Tabelle angeführten Zahlen Jonas für H_2O und CO_2 zeigt; wahrscheinlich gilt dasselbe auch für die zweiatomigen Gase, jedoch ist bei diesen M anderweitig leider noch nicht ermittelt, was gerade bei der verhältnismäßigen Einfachheit dieser Gase von besonderer Wichtigkeit wäre. Das zu große Moment M ist augenscheinlich durch eine zu große Länge l des Dipols bedingt; letztere würde sich verkleinern, wenn die Elektronen nicht in einem ebenen Ring, sondern räumlich verteilt wären. Das hier erhaltene Resultat scheint daher zugunsten einer räumlichen Anordnung der Elektronen im Dipolmolekül zu sprechen, was man dann aber wohl sinngemäß auch auf andere Moleküle und Atome wird übertragen dürfen. Von ganz andrer Seite, nämlich vom Studium des Zustandsproblems aus, bin ich früher[1]) schon zu einer ähnlichen Auffassung gelangt; die einzelnen Gründe sollen später zusammengestellt werden.

Anm. bei der Korrektur: Nachträglich finde ich bei Bohr (Phil. Mag. **26**, 860, 1913) eine Stabilitätsbedingung, aus der hervorgeht, daß ein dem H_2 analoges Molekülmodell nur für H_2 selbst stabil, für Elementarmoleküle mit größerer Elektronenzahl aber instabil ist. Ist die Bohrsche Stabilitätsbedingung richtig, so läßt sie sich leicht auf Verbindungsmoleküle erweitern und es folgt dann sowohl für die Laskischen Modelle für N_2 und O_2, als auch für das Kosselsche Modell für HCl usw., sowie für die hier behandelten, daß sie nicht stabil sind. Auch diese Überlegung dürfte zugunsten einer räumlichen Anordnung der Elektronen im Molekül sprechen.

1) M. Jona, diese Zeitschr. **20**, 14, 1919.
2) O. Sackur, Ann. d. Phys. **40**, 87, 1913.
3) E. v. Bahr, Verh. d. D. phys. Ges. **15**, 1158, 1913.

1) Vgl. den Hinweis im Schlußsatz von L. Schames. Ann. d. Phys. **57**, 346, 1918.

Frankfurt a. M., 4. September 1919.

(Eingegangen 14. September 1919.)

Bemerkung zur Ableitung der chemischen Konstanten mehratomiger Gase aus dem Planckschen Wahrscheinlichkeitsbegriff[1]).

Von Léon Schames.

Herr Stern war so freundlich, mich darauf aufmerksam zu machen, daß die strenge Durchführung der Berechnung des Elementargebiets der Wahrscheinlichkeit nach Planck für die chemische Konstante mehratomiger Gase zum gleichen Resultat führt, wie die Sackur-Tetrodeschen Rechnungen. Wenn es mir selbst auch schon von vornherein aufgefallen war, daß sich in diesen — jetzt also auch auf diesem Wege bestätigten — Rechnungen kein Fehler

1) L. Schames, diese Zeitschr. **21**, 38, 1920.

finden ließ, so war ich in dem Schluß[1]), daß der dritte Rotationsfreiheitsgrad zum Wert der chemischen Konstanten den gleichen Beitrag liefern müsse, wie die beiden ersten aus dem Grunde bestärkt worden, weil sich dann erstens das Trägheitsmoment des H_2O in guter Übereinstimmung mit dem aus dem Rotationsspektrum berechneten (Tabelle I, S. 40) und zweitens die zu (4) vollkommen analoge Gleichung (5) ergab (Anm. 3, S. 41). Mit dem Sackur-Tetrodeschen Wert der chemischen Konstanten findet man für H_2O

$$\sqrt[3]{PQR} = 0{,}94 \cdot 10^{-40},$$

während aus dem Rotationsspektrum nach Plancks I. Theorie 1,38 „
„ II. „ 2,48 „

folgt. Der Grund dieses Widerspruchs bleibt noch aufzuklären.

1) Dieser Schluß ist aus dem Grunde nicht richtig, weil beim zweiatomigen Molekül die Größe des Gebiets für die Variabeln 4π, beim drei- und mehratomigen Molekül hingegen $4\pi \cdot 2\pi$ ist.

Frankfurt a. M. 15. Februar 1920.

(Eingegangen 17. Februar 1920.)

Kolorimetrische Untersuchungen. V.

Von Otto Meißner.

I. Filterprüfungen.

Um die mir von Herrn Geheimrat W. Ostwald freundlichst übersandten Filter betreffs ihres Anwendungsgebietes noch etwas genauer zu prüfen als durch die summarische Prüfung mittels des Farbenkreises, bestimmte ich die Helligkeit zweier Papierstücke „b“ und „c“, für die ich früher mit den „Hauchblattfiltern“ die Kennzahlen $b = 14 \cdot 10 \cdot 35$, $c = 07 \cdot 19 \cdot 06$ gefunden hatte, je 12 mal mit allen 7 Filtern 1, 2, 3, 4, 4b, 5, 6.

Das Ergebnis steht in Tabelle I. Hierin bedeutet: M den Mittelwert der mittleren Fehler, die sich auf eine Einzelmessung beziehen; in Klammern ( ) sind sie in Prozenten der jedesmaligen mittleren Helligkeit ausgedrückt; q ist der nach dem Abbe-Helmert-Kriterium berechnete Quotient aus doppelter Fehlerquadrat- und Fehlerdifferenzquadratsumme, der bei Zufallsreihen $= 1$ ist; k_1 bedeutet den Korrelationsfaktor zwischen Helligkeit und in Prozenten derselben ausgedrückten mittleren Fehler, k_2 zwischen Helligkeit und absolutem Betrag des mittleren Fehlers selbst.

In der 2. Hälfte der Tabelle bedeutet der

Tabelle I.

	„b“	„c“
Filter-Nummer 1	56,0 ± 4,9 (9)	78,5 ± 5,3 (7)
2	73,5 4,9 (7)	87,3 6,4 (7)
3	64,6 5,6 (9)	80,3 5,0 (6)
4	15,7 4,2 (26)	12,5 3,4 (26)
4b	15,1 3,6 (24)	12,5 4,2 (37)
5	20,2 4,8 (24)	24,8 6,7 (27)
6	28,5 5,3 (19)	52,2 4,4 (8)
M	4,8 ± 0,25	5,1 ± 0,45
q	1,20 ± 0,17	0,85 ± 0,17
k_1	+ 0,623 ± 0,295	+ 0,458 ± 0,335
k_2	− 0,983 ± 0,068	− 0,954 ± 0,108
c	14	7
w_0	15,1 ± 3,6	12,5 ± 3,4
w_μ	10,5 2,8	18,5 4,1
Δw	+ 4,6 4,5	− 6,0 5,3
s_o	26,5 4,9	12,7 6,4
s_μ	34,8 6,6	6,2 3,0
Δs	− 8,3 8,2	+ 6,5 7,1
r_0	58,4 6,1	74,8 7,2
r_μ	54,7 7,1	75,3 5,1
Δr	+ 3,7 9,4	− 0,5 8,8

Index o die Messungen mit Ostwalds, μ die mit meinen (Meißners) Filtern, w, s, r Weiß-Schwarzgehalt und Reinheit, Δ die Differenzen, die wie man sieht, innerhalb der Messungsunsicherheit liegen.

Folgendes sind die aus der Tabelle mit Sicherheit abzuleitenden Ergebnisse. Das Minimum der Helligkeit ergibt sich bei der Betrachtung durch das am besten passende Sperrfilter, das Maximum durch das geeignetste Durchlaßfilter. Im Grenzfall, bei den „unbunten“ grauen Farben muß die Helligkeit sich überall gleich und gleich der Beobachtung mit bloßem Auge ohne Filter ergeben. Wie steht es nun hier? 4 und 4b sind nahezu gleich gute Sperrfilter für diese Farbtöne (14c und 7c), aber nur 2 ist das richtige Durchlaßfilter; Filter Nr. 3, das eigentlich auch hierfür geeignet sein sollte, gibt schon ca. 8 ± 5 Proz. zu kleine Werte, also zu großen Schwarzgehalt und entsprechend zu kleine Reinheit. Die primitiven „Hauchblattfilter“ haben sich als gar nicht so schlecht erwiesen!

Das zweite, vielleicht noch interessantere Ergebnis ist nicht physikalischer, sondern psychologischer Natur.

Die Grauskala ist von W. Ostwald, dem Weber-Fechnerschen Gesetz entsprechend, logarithmisch gewählt, wie das ja z. B. auch „unbewußt“ bei der Klassifizierung der Sterne nach Sterngrößen der Fall gewesen ist. Dem Weber-Fechnerschen Gesetz entsprechend sollte man nun annehmen, daß die mittleren Fehler den Helligkeiten proportional wären. Etwas Derartiges ist nun zwar auch angedeutet: k_1 ist positiv und $>$ als sein mittlerer Fehler, aber der von -1 kaum verschiedene Wert von

k_2 lehrt, daß in diesem Falle die **absolute Fehlergröße nahezu konstant** ist, also von der Helligkeit so gut wie unabhängig, im Gegensatze zum Weber-Fechnerschen Gesetz, wonach diese Konstanz eintreten müßte, wenn man die mittleren Fehler in Prozenten oder Bruchteilen der betreffenden Helligkeit angäbe!

Eine weitere Untersuchung belehrte mich, daß eine Verallgemeinerung dieser immerhin überraschenden Ergebnisse voreilig gewesen wäre wegen der impliziten Voraussetzung der „Idealität“ der Ostwaldfilter, die sich als nicht streng vorhanden erwies. So ist auch dies wieder ein Beweis für die zwar theoretisch allgemein be- und anerkannte, aber in der Praxis meist in Vergessenheit geratende Lehre, daß die stillschweigend gemachten Voraussetzungen die gefährlichsten sind.

Zur weiteren Prüfung der Filter zwecks genauerer Untersuchung benutzte ich 3 der 100 mir von Herrn Geheimrat Ostwald selbst übersandten Farbaufstriche, und zwar die Nummern 30, 55 und 85, deren erste ich als „rot mit einem kleinen Stich ins Bläuliche, deren zweite ich als reinblau und die dritte als reingrün bezeichnen würde. (Schon Ostwald selbst hebt wiederholt hervor, daß die Gegenfarben von reingelb 50 und reinrot 25 nicht rein-blau und -grün, sondern rötlichblau bzw. bläulichgrün sind.) Bei diesen offenbar mit großer Sorgfalt („Liebe“) hergestellten Farbaufstrichen war infolge der gleichmäßigen und spiegelungsfreien Oberfläche die Messungsgenauigkeit erheblich größer. Tabelle II gibt die Resultate.

Mitteilung auf Grund summarischer Betrachtung des Farbkreises der „Farbenfibel“ annahm.

Nun ist aber noch bezeichnenderweise der mittlere Fehler, d. h. also die Messungsgenauigkeit des Graus im Mittel der 3 Farben von der Filterfarbe abhängig, und zwar am kleinsten für die „hellen“ roten Filter Nummer 2 und 3: $1{,}0 \pm 0{,}4$, am größten für die „dunklen“ blauen Filter 4, 4b und 5: $2{,}7 \pm 0{,}2$, etwas kleiner, aber immer noch doppelt so groß wie bei den roten, bei den „trüben“ grünen Filtern 5, 6 und 1: $2{,}0 \pm 0{,}5$. Gibt man nach einigermaßen sicherer Schätzung den Filtern 1 bis 6 in dieser Reihenfolge die Farbnummern 95, 20, 25, 45, 50, 70, 85, so ergibt sich der mittlere Filter in seiner Abhängigkeit von der Filterfarbe zu

$$1{,}9 - \underset{\pm 1{,}5}{7{,}4} \sin 3{,}6c - \underset{\pm 2{,}6}{8{,}6} \cos 3{,}6c.$$

Da die mittleren Fehler der Koeffizienten nicht gerade klein sind, aber immerhin die Realität der Koeffizienten selbst verbürgen, ist hierin wohl der Grund zu suchen, weshalb der mittlere Fehler sich dem Weber-Fechnerschen Gesetz nicht so recht fügen will[1]).

2. Die Reinheit der Farben im 24teiligen Farbenkreise der „Farbenfibel“.

Die im Augusthefte dieser Zeitschr. in der Königschen Rezension der Ostwaldschen Veröffentlichungen über seine Farbenlehre ausgesprochene Behauptung, es fehle im Farbenkreise der „Farbenfibel“ das reine Rot, brachte mich auf den Gedanken, mit Hilfe meiner Ostwald-Filter den Graugehalt dieser Farben zu bestimmen. Wenn meine Annahme richtig ist, daß in allen Exemplaren der Farbenfibel die Farben die gleichen sind, so würde einer Wiederholung dieser Prüfung von anderer Seite gleich einen wertvollen Aufschluß über die hier auftretenden „persönlichen“ Fehler geben. Ich

Tabelle II.

Farbe	30	55	85	Mittel des μ	Filterfarbe
Filter 1	40,2 $\pm$ 2,8 (7)	13,2* $\pm$ 1,2 (9)	40,8 $\pm$ 1,8 (4)	1,9	gelbgrün
„ 2	100* $\pm$ 0 —	13,8 $\pm$ 1,1 (8)	20,8* $\pm$ 0,8 (4)	0,6	rot
„ 3	92,0 $\pm$ 2,0 (2)	19,4 $\pm$ 1,0 (5)	24,6 $\pm$ 1,2 (5)	1,4	rot
„ 4	39,6 $\pm$ 4,2 (11)	57,6* $\pm$ 2,9 (5)	33,8 $\pm$ 1,6 (5)	2,9	blau
„ 4b	35,6 $\pm$ 2,9 (8)	53,8 $\pm$ 1,7 (3)	34,6 $\pm$ 3,3 (10)	2,6	blau
„ 5	17,6 $\pm$ 1,8 (10)	37,2 $\pm$ 2,9 (8)	68,0* $\pm$ 2,8 (4)	2,5	blaugrün
„ 6	16,2* $\pm$ 1,9 (12)	23,4 $\pm$ 1,1 (5)	58,8 $\pm$ 1,6 (3)	1,5	grün
Mittel	2,2 $\pm$ 0,5 (6)	1,7 $\pm$ 0,3 (6)	1,9 $\pm$ 0,3 (5)	1,9 (6)	—
k_1	+ 0,917 $\pm$ 0,151	+ 0,750 $\pm$ 0,248	+ 0,367 $\pm$ 0,354	+ 0,67 $\pm$ 0,28	—
k_2	(— 0,153 $\pm$ 0,375)	— 0,179 $\pm$ 0,374	— 0,317 $\pm$ 0,360	— 0,22 $\pm$ 0,09	—

Die Bezeichnungen sind dieselben wie in Tabelle I. — Der mittlere Fehler einer Einzelbeobachtung ist hier nur 2 Proz., dort 5 Proz. der Skala, hier 6 Proz., dort 17 Proz. der gemessenen Helligkeit. Er ist also auf beinahe ein Drittel gesunken. Sehr interessant ist, daß hier normalerweise k_1 groß, k_2 stets $<$ als sein mittlerer Fehler ist. Wieder aber zeigt sich, daß das Anwendungsgebiet der einzelnen Filter doch beschränkter ist, als ich in meiner vorigen

1) Analoge Fälle dürften nicht selten sein, wo sich gleichfalls eine scheinbare Ungültigkeit dieses psychophysischen Grundgesetzes herausstellt!

habe die Untersuchung nur einmal ausgeführt, da ich zu diesen Arbeiten nur meine freie Zeit benutzen kann, und weil meine Augen durch die jeder Beschreibung spottende Gasbeleuchtung in Potsdam während der letzten Kriegswinter stark gelitten haben. Die mittlere („innere") Unsicherheit beträgt nach den Resultaten des 1. Abschnittes aber nur etwa 2 Proz., die Genauigkeit ist also für vorliegende Zwecke immerhin ausreichend.

Tabelle III.

Farb-ton-Filter	1	2	3	4 2)	4b 2)	5	6	*w*	*s*	*r*
00	80	68	72	25	27	78	85	25	15	60
04	72	72	72	9	7	35	80	7	20	73
08	68	72	66	9	7	37	52	7	28	65
13	65	72	66	9	8	25	27	8	28	64
17	62	70	63	12	10	15	15	10	30	60
21	38	70	61	20	17	12	13	12	30	58
25	35	70	61	32	23	10	10	10	30	60
29	25	65	61	35	27	10	10	10	35	55
33	10	52	56	40	32	12	10	10	44	46
38	9	48	50	44	38	14	9	9	50	41
42	9	44	44	44	42	18	8	8	56	36
46	9	35	38	46	44	22	9	9	54	37
50	9	20	27	48	44	25	17	9	52	39
54	9	8	17	55	52	38	20	8	45	47
58	10	7	12	52	56	45	23	7	44	49
63	17	7	9	50	56	52	27	7	44	49
67	20	9	9	44	52	61	30	9	39	52
71	23	9	6	42	48	61	42	6	39	55
75	23	10	6	40	44	61	44	6	39	55
79	27	10	9	38	36	64	46	9	36	55
83	38	10	17	25	28	68	52	10	32	58
88	60	27	27	20 3)	23 3)	72	72	20	28	52
92	72	58	52	20 3)	23 3)	72	80	20	20	60
96	75	70	61	25	27	80	85	25	15	60
00 1)	79	70	70	25	27	80	85	25	15	60

Tabelle III enthält die Ergebnisse der Untersuchung. Als Weiß- bzw. Schwarzgehalt *w* und *s* ist jeweils das Minimum bzw. die Ergänzung des Maximums zu 100 angenommen, was offenbar im Falle „idealer" Filter streng richtig, sonst aber, und also zweifellos auch hier, nur eine mehr oder weniger gute Annäherung ist.

Zunächst sieht man, daß der Gültigkeitsbereich der einzelnen Filter gegen meine früheren Angaben stark eingeschränkt werden muß, wenn man auch nur eine Genauigkeit von 5 Proz. der beobachteten Helligkeit haben will. Wie groß dürfen unter dieser Annahme die Differenzen der Helligkeit einer Farbe für 2 Filter sein? Die persönlichen Fehler geben als Beitrag zum Fehlerquadrat 2×6^2 (nach Tab. II), dazu $5^2 = 25$ gibt $\varepsilon^2 = 97$, $\varepsilon = \pm 10$.

1) Von der obersten unabhängige Messung.
2) Farbenkreis zeigt mit Ausnahme der Nummern 04 bis 17 noch deutliche Färbungsspuren, zumal im Grün.
3) 88 und 92 erscheinen merklich dunkler als die angrenzenden Farben.

(Für die kleinen Helligkeiten habe ich 20 Proz. als zulässigen Maximalfehler angenommen.)

Demnach wäre brauchbar:

das Filter Nummer	als Durchlaßfilter für die Nummern	als Sperrfilter des Farbenkreises
1	92—17	33—58
2	04—42	54—83
3	04—42	63—79
4	38—63	88—17
4b	42—63	88—17
5	63—00	21—33
6	88—04	21—46

Hieraus läßt sich eine interessante Folgerung über den Farbton der Filter ziehen, der in der Untersuchung des vorigen Abschnittes nur geschätzt war. Bezeichnet man den mittleren Farbton, für den das Filter als Durchlaßfilter gilt, mit D_m, für das „Sperrgebiet" entsprechend mit S_m, so müßte sein

$$D_m - S_m \pm 50,$$
$$S_m = D_m \pm 50.$$

Dieser Bedingung entsprechen nur die gelbgrünen („trüben") Filter 1 und 6 schlecht; es ist für

Filter	D_m	$S_m \pm 50$	Mittel	Schätzung
1	$4^1/_2$	$95^1/_2$	**0 ± 4½**	95
2	23	$18^1/_2$	**21 ± 2**	20
3	23	21	**22 ± 1**	25
4	$50^1/_2$	$52^1/_2$	**51 ± 1**	45
4b	$52^1/_2$	$52^1/_2$	**52.**	50
5	$81^1/_2$	77	**79 ± 2**	70
6	96	$83^1/_2$	**90 ± 6**	85

Die fetten Zahlen sind also angenähert als Farbtöne anzusehen. Es ist leicht begreiflich, daß man auf diese Weise die — von Ostwald bisher nicht behandelten — Farbtöne transparenter Farben ermitteln kann, während die Bestimmung ihres Graugehaltes auf diesem Wege einstweilen wegen der Relativität der Messungen noch auf zurzeit unaufgelöste Schwierigkeiten stößt.

Zur Betrachtung der Tabelle III zurückkehrend bemerkt man, daß Weiß- und Schwarzgehalt, und folglich auch die Reinheit, sich systematisch mit dem Farbton ändern. Wegen der Geschlossenheit des Farbenkreises handelt es sich also um eine Periodizität, und zwar beim Weißgehalt eine doppelte, beim Schwarzgehalt und der Reinheit eine einfache. Das Abbe-Helmertsche Kriterium ergibt als Werte für den Quotienten 2Σ der Fehlerquadrate: Σ der Quadrate der Fehlerdifferenzen für

den Weißgehalt *w*: $3{,}05 \pm 0{,}5$
den Schwarzgehalt *s*: $13{,}2 \pm 0{,}5$
die Reinheit *r*: $7{,}0 \pm 0{,}5$
} statt 1 bei zufälliger Fehlerverteilung.

Es wird, wenn c den Farbton bezeichnet:

$$w = 12{,}0 + (4{,}4 \pm 1{,}4)\cos(3{,}6c - 6)^0 + \\ + (4{,}0 \pm 1{,}2)\cos(7{,}2c - 314)^0$$
$$s = 36{,}2 + (16{,}2 \pm 1{,}2)\cos(3{,}6c - 180)^0$$
$$r = 51{,}8 + (11{,}2 \pm 1{,}8)\cos(3{,}6c - 1)^0.$$

Das heißt: der Weißgehalt der Farben im Farbenkreise der Farbenfibel schwankt relativ wenig; von 88—00 ist er etwa 20 Proz., sonst etwas unter 10 Proz. Der Schwarzgehalt ist bei gelb am geringsten, bei blau (violett) am größten; die Reinheit richtet sich naturgemäß wesentlich nach dem Schwarzgehalt. Da sie bei den roten Farben nur etwa 60 Proz. beträgt (bei den blauen nur 40), ist es erklärlich, daß W. König in seinem Referat ein „reines", d. h. wenigstens 75—80 proz. Rot in der Farbenfibel vermißt, obwohl der zugehörige Farbton 25 natürlich da ist. Ebenso erklärlich ist, daß dem Referenten die blauen Farben dunkel oder „trüb", d. h. mit einem großen Gehalt an „mittlerem Grau" behaftet erscheinen: der Graugehalt beträgt für die Nummern 38—63 $^1/_2$ bis $^2/_3$ und der Weißgehalt dieses Grau etwa 18 Proz.; das ist aber genau das „mittlere Grau", entsprechend dem geometrischen Mittel aus 100 und dem noch 2—4 Proz. Weiß enthaltenden „tiefsten" Schwarz (vom absolut schwarzen Körper abgesehen). Beifügung eines mittleren Grau macht aber die Farben trübe oder „schmutzig". Die hellgrünen Farben des Farbenkreises der Farbenfibel enthalten ein 50—60 proz., also schon sehr helles Grau, aber auch bei den orange bis roten Farbtönen ist der Weißgehalt des Graus noch ungefähr $^1/_3$, was psychologisch gleichfalls noch ein ziemlich helles Grau ergibt (in Ostwalds „ABC-Skala" $= H$[1]), in der hundertteiligen Skala Nr. 28; Nr. 16 bereits enthält nur noch 50 Proz. Weiß!).

Um schließlich noch auf die Differenz zwischen Schätzung und Messung des Farbtons der Farbenfibel zurückzukommen, so entsprechen die Differenzen, z. B. daß Filter 1 und 6 „zu grün" geschätzt sind, durchaus dem von Ostwald auf S. 26 der Farbenfibel Gesagten. Es kommt dies wieder auf die von Ostwald selbst bemerkte und von mir erläuterte[2]) Tatsache hinaus, daß man verdunkeltes Gelb als Olivgrün, Braun oder ähnlich bezeichnet. Übrigens liegen auch gerade für die Filter 1 und 6 Durchlaß- und Sperrgebiet auffällig unsymmetrisch, wie schon oben hervorgehoben wurde. Das kann neben andern auch wohl physiologische Gründe haben, auch an dem Schwarzgehalt der blauen Farben des Farbenkreises liegen.

1) Beiträge zur Farbenlehre I—V, S. 60 [422] und an anderen Stellen.

2) Diese Zeitschrift 20, 345, 1919.

3. Beispiele dunkelklarer Farben.

Wie Ostwald mehrfach hervorhebt, machen die „dunkelklaren" Farben (mit $w \sim 0$) einen besonders „schönen", gesättigten Eindruck. Ich bekam nun von einem meiner Privatschüler[1]) eine Anzahl Proben von Offiziersachselstücken des früheren Kaiserlichen Deutschen Heeres. Diese machen sämtlich obigen Eindruck. Die Messung ergab:

Nr.	c	w	s	r	Bemerkungen
1	07	03	92	05	tiefrotbraun!
2	15	04	40	56	} grellziegelrot
3	17	03	35	62	
4	23	04	65	31	bräunlichrot
5	29	03	35	62	—
6	21	04	50	46	—
7	33	03	85	12	rotbraun
8	34	04	80	16	merklich heller als 7
9	78	03	85	12	
10	88	03	75	22	noch ziemlich hell!

Tatsächlich gehören also alle Farben der dunkelklaren Reihe an, denn die 3—4 Proz. Weiß liegen an der Grenze der Erkennbarkeit. Bemerkenswert ist, daß 2 und 3 mit 35 bis 40 Proz. schwarz noch grell, die grüne Farbe 10 aber sogar bei $^3/_4$ schwarz noch hell aussieht! Was man als „reines Grün" anspricht, hat eben stets bereits einen hohen Schwarzgehalt (vgl. meine Untersuchungen über die Blattfärbungen!). Hier dürften noch manche Fragen zu lösen sein[2]).

Zusatz zu meinem Aufsatz Phys. Zeitschr. 1919, S. 344 betr. Albedo:

Nach W. Ostwald, Physikalische Farbenlehre, S. 144, ist die Albedo anzusetzen:

$$h = rh_0 + w,$$

mit w als Weißgehalt, r als Reinheit; h_0, die „Helligkeit der Vollfarbe" ist S. 145 a. a. O. tabuliert. Mit der Lambertschen Albedo stimmt diese aber nicht überein.

1) W. Hulverscheidt, dem Sohne eines verstorbenen Tuchfabrikbesitzers in Aachen.

2) Vgl. hierzu W. Ostwald, Physikal. Farbenlehre, S. 232ff.

Potsdam, 8. August 1919.

(Eingegangen 10. August 1919.)

Über eine neue periodische Beziehung zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente.

Von Karl Fehrle.

Den nachfolgenden Ausführungen zugrunde gelegt ist das Atommodell meiner früheren Arbeit[1]). Ich nehme an, daß die Molekeln

1) Diese Zeitschr. 19, 281, 1918.

der Elemente aus Kugelschalen zusammengesetzt sind, auf deren Oberfläche die „Atome" — „Atom" im Sinne meiner früheren Arbeit — sich bewegen, und daß sie sich dadurch voneinander unterscheiden, daß jede eine Kugelfläche mehr enthält, als die des im periodischen System zunächst vorhergehenden Elementes. Die Verteilungsdichte der „Atome" auf den einzelnen Flächen sei die gleiche, ihre Zahl also gegeben durch

$$N_n = 4\pi r_n^2 k, \qquad (1)$$

wo k die auf den Quadratzentimeter entfallende Zahl von „Atomen", also von der Dimension $[l^{-2}]$ ist. r_n bedeutet den Radius der n-ten Kugelfläche. Radius und Winkelgeschwindigkeit sollen jedoch, indem als „Atom" das Elektron betrachtet wird, nach der bekannten, von Bohr verwendeten, Beziehung voneinander abhängen:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{r_n^3}}\sqrt{\frac{N_n e^2}{m}}\,[t^{-1}], \qquad (2)$$

wo ω_n die Winkelgeschwindigkeit auf der n-ten Kugelfläche, e die Ladung, m die Masse des Elektrons bedeutet und N_n durch (1) gegeben ist. Die Energie habe ich in meiner früheren Arbeit dargestellt durch

$$U = C N_n \omega_n^2 r_n^2 \; [l^2 m t^{-2}].$$

C ist daher die Rotationsenergie des mit der Winkelgeschwindigkeit 1 und dem Radius 1 rotierenden Elektrons, hat also die Dimension einer Masse. Infolge dieser Festsetzung über C liefert die Gleichung die Energie in absoluten Einheiten. Das Impulsmoment der n-ten Kugelschale ist daher

$$I = C N_n \omega_n r_n^2 \; [l^2 m t^{-1}].$$

Die Differenz der Impulsmomente zweier aufeinanderfolgender Schalen setze ich dem Wirkungsquantum gleich, in Abweichung von Bohr, welcher hierfür die Differenz, gebildet für ein einzelnes Elektron, verwendet. Damit wird

$$C(N_n \omega_n r_n^2 - N_{n-1}\omega_{n-1} r_{n-1}^2) = h \text{ erg. sec}$$

oder wegen (1) und (2)

$$2C\sqrt{\frac{e^2 k^3}{m}}\left(\sqrt{r_n^7} - \sqrt{r_{n-1}^7}\right) = \frac{h}{4\pi^2}\; [l^2 m t^{-1}].$$

Mithin

$$r_n = \sqrt[7]{\left(\sqrt{r_{n-1}^7} + \frac{h}{8\pi^2 C}\sqrt{\frac{m}{e^2 k^3}}\right)^2} \text{ cm.}$$

Für

$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}\; [l^2 m t^{-1}]$$
$$C = 0{,}451 \cdot 10^{-27}\; [m]$$
$$m = 0{,}902 \cdot 10^{-27}\; [m]$$
$$e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}\; [l^{\frac{3}{2}} m^{\frac{1}{2}} t^{-1}]$$
$$k = 1{,}7 \cdot 10^{15}\; [l^{-2}],$$

ergibt sich

$$r_n = \sqrt[7]{(\sqrt{r_{n-1}^7} + 0{,}1659 \cdot 10^{-27})^2}\; [l] \quad (3)$$

oder

$$r_n = \sqrt[7]{[\sqrt{r_1^7} + (n-1)0{,}1659 \cdot 10^{-27}]^2}. \quad (4)$$

Die Masse habe ich in meiner früheren Arbeit zu

$$m = K N \omega$$

angesetzt. Dabei war jedoch im Gegensatz zu (2) ω als unabhängig von der Zahl der auf einer Kugelfläche rotierenden „Atome" angenommen. Konsequenterweise muß daher jetzt

$$m = K\sqrt{N}\omega$$

gesetzt werden. Dies folgt aus Gleichung (2). Denn hat von N-„Atomen", deren jedes, für sich allein bestehend, mit derselben Winkelgeschwindigkeit und folglich mit demselben Radius rotiert, jedes dieselbe Masse, so haben die N-„Atome", zu einer Molekel mit dem gleichen Radius vereinigt, wegen (2) im Vergleich mit einem einzigen „Atom" die $N\sqrt{N}$-fache Masse, was der Erfahrung widerspricht. Damit die Masse, wie die Erfahrung es verlangt, die N-fache wird, muß

$$m = K\sqrt{N}\omega \qquad \left[\frac{mt}{t}\right] = [m]$$

gesetzt werden. K ist also die Masse des mit der Winkelgeschwindigkeit 1 rotierenden „Atoms", hat also die Dimension $[mt]$. Wegen (2) ist die Masse der n-ten Kugelschale

$$m_n = K\sqrt{(4\pi k)^2\frac{e^2}{m}}\cdot\sqrt{r_n} \qquad (6)$$

oder wegen (4)

$$m_n = K\sqrt{(4\pi k)^2\frac{e^2}{m}} \times$$
$$\sqrt[7]{\sqrt{r_1^7} + (n-1)0{,}1659 \cdot 10^{-27}} \text{ g.}$$

Nimmt man als erstes Element den Wasserstoff, dessen Molekel nach der Formel

$$r = \sqrt[8]{\frac{A}{5 \cdot 61 \cdot 10^{22} \cdot 4\sqrt{2}}}$$

den Radius $r_1 = 1{,}727 \cdot 10^{-8}$ cm besitzt, so wird

$$m_n = K\sqrt{(4\pi k)^2\frac{e^2}{m}} \times$$
$$\sqrt[7]{\sqrt{1{,}727^7 + (n-1) \cdot 1{,}659]\,10^{-28}}}$$
$$m_n = K\sqrt{(4\pi k)^2\frac{e^2}{m}} \cdot 7{,}196 \cdot 10^{-5} \times$$
$$\sqrt[7]{67{,}7 + (n-1)\,16{,}59}.$$

Die Masse der Molekel aus n-Schalen ist

$$M_n = \sum_1^n m_n = K \sqrt{(4\pi k)^2 \frac{e^2}{m}} \cdot 7{,}196 \cdot 10^{-5} \times \sum_1^n \sqrt[7]{67{,}7 + (n-1)\, 16{,}59}.$$

Für

$$n = 1 \qquad m_1 = \frac{1}{61 \cdot 10^{22}}\,\mathrm{g}$$

ergibt sich

$$K = 3{,}7 \cdot 10^{-41}\ \mathrm{g \cdot sec.}$$

Damit wird

$$M_n = \sum_1^n m_n = 0{,}8979 \cdot 10^{-24} \times \sum_1^n \sqrt[7]{67{,}7 + (n-1)\, 16{,}59}\ \mathrm{g}.$$

In der folgenden Tabelle enthält Spalte 1 die Ordnungszahlen der Elemente, Spalte 2 die

$$\sum_1^n \sqrt[7]{67{,}7 + (n-1)\, 16{,}59},$$

also bis auf den Faktor $0{,}8979 \cdot 10^{-24}$ die Atomgewichte, Spalte 4 die herkömmlichen, experimentell gefundenen Atomgewichte.

Ord.-Zahl	$\sum_1^n \sqrt[7]{67{,}7 + (n-1)\, 16{,}59}$	Differenz	Exp. Atomgewicht	Element
1	1,826	−0,818	1,008	H
2	3,710	+0,28	3,99	He
3	5,643	+1,30	6,94	Li
4	7,619	+1,48	9,1	Be
5	9,632	+1,37	11,0	B
6	11,68	+0,32	12,00	C
7	13,76	+0,25	14,01	N
8	15,86	+0,14	16,00	O
9	18,00	+1,00	19,0	F
10	20,15	+0,05	20,2	Ne
11	22,33	+0,67	23,00	Na
12	24,53	−0,21	24,32	Mg
13	26,76	+0,34	27,1	Al
14	29,00	−0,70	28,3	Si
15	31,26	−0,22	31,04	P
16	33,53	−1,46	32,07	S
17	35,83	−0,37	35,46	Cl
18	38,13	+1,75	39,88	Ar
19	40,46	−1,36	39,10	K
20	42,80	−2,72	40,07	Ca
21	45,15	−1,05	44,1	Sc
22	47,52	+0,58	48,1	Ti
23	49,90	+1,16	51,06	V
24	52,29	−0,29	52,0	Cr
25	54,70	+0,23	54,93	Mn
26	57,12	−1,28	55,84	Fe
27	59,54	−0,57	58,97	Co
28	61,99	−3,31	58,68	Ni
29	64,44	−0,87	63,57	Cu
30	66,90	−1,53	65,37	Zn
31	69,37	+0,53	69,9	Ga
32	71,86	+0,64	72,5	Ge
33	74,35	+0,61	74,96	As
34	76,85	+2,35	79,2	Se
35	79,36	+0,56	79,92	Br
36	81,89	+1,03	82,92	Kr
37	84,42	+1,03	85,45	Rb
38	86,96	+0,67	87,63	Sr
39	89,51	−0,51	89,0	Y
40	92,06	−1,46	90,6	Zr
41	94,63	−1,13	93,5	Nb
42	97,20	−1,2	96,0	Mo
43	99,79	—	—	—
44	102,38	−0,68	101,7	Ru
45	104,97	−2,07	102,9	Rh
46	107,58	−0,88	106,7	Pd
47	110,19	−2,31	107,88	Ag
48	112,81	−0,41	112,40	Cd
49	115,44	−0,64	114,8	In
50	118,07	+0,93	119,0	Sn
51	120,71	−0,51	120,2	Sb
52	123,36	+4,14	127,5	Te
53	126,02	+0,90	126,92	I
54	128,68	+1,52	130,2	X
55	131,35	+1,46	132,81	Cs
56	134,02	+3,35	137,37	Ba
57	136,71	+2,29	139,0	La
58	139,39	+0,86	140,25	Ce
59	142,09	−1,49	140,6	Pr
60	144,79	−0,49	144,3	Nd
61	147,49	—	—	—
62	150,21	+0,2	150,4	Sm
63	152,93	−0,93	152,0	Eu
64	155,65	+1,65	157,3	Gd
65	158,38	+0,82	159,2	Tb
66	161,11	+1,39	162,5	Dy
67	163,86	−0,36	163,5	Ho
68	166,60	+1,10	167,7	Er
69	169,36	−0,86	168,5	Tu
70	172,11	−0,11	172,0	Yb
71	174,88	−0,88	174,0	Lu
72	177,64	—	—	—
73	180,42	+1,08	181,5	Ta
74	183,20	+0,80	184,0	W
75	185,98	—	—	—
76	188,77	+2,13	190,9	Os
77	191,56	+1,54	193,1	Ir
78	194,36	+0,84	195,2	Pt
79	197,17	+0,03	197,2	Au
80	199,98	+0,62	200,6	Hg
81	202,79	+1,21	204,0	Tl
82	205,61	+1,49	207,10	Pb
83	208,43	−0,43	208,8	Bi
84	211,26	−0,76	210,5	Po
85	214,09	—	—	—
86	216,93	—	—	—
87	219,17	—	—	—
88	222,61	—	—	—
89	225,47	—	—	—
90	228,32	—	—	—
91	231,18	—	—	—
92	234,05	—	—	—

Die Reihe der Zahlen in Spalte 2 stellt im ganzen Intervall der bekannten Atomgewichte den Gang richtig dar. Sie steht aber auch in einem inneren Zusammenhang mit dem Bau der Elemente. Wie Spalte 3 zeigt, welche die Differenzen dieser — der idealen — Atomgewichte gegenüber den wirklichen enthält, sind diese Differenzen nicht nach dem Zufall über die Reihe zerstreut, sondern es wechseln Reihen positiver mit Reihen negativer Differenzen ab. Diese Abteilungen sind durch Querstriche voneinander getrennt. Sie halten den Gang des periodischen Systems ein, indem sie durchschnittlich von der 3. Gruppe einer Horizontalreihe bis zur 3. Gruppe der nächsten Horizontalreihe reichen.

Den Grund dieser Erscheinung sehe ich in folgendem: Der Tabellenwert entspricht dem Zustande, in dem die Molekel für sich allein bestehen könnte; der wirkliche Wert entspricht dem Zustande, in dem die Molekel im Verbande mit andern besteht. Beide sind voneinander verschieden, weil im allgemeinen die Schwingungen der „Atome" einer Molekel, jeden Umgang als eine Schwingung betrachtet, nicht in Resonanz mit der Eigenschwingung der Molekel stehen werden. Da die Eigenschwingungen der Molekeln mit steigendem Atomgewicht schneller erfolgen, so können die beiden Schwingungen nicht miteinander übereinstimmen, sondern es entsteht eine Spannung, welche die Rotationsgeschwindigkeit zu vergrößern sucht, und die in dem Maße wächst, als die Schwingungen der „Atome" hinter der Eigenschwingung der Molekel zurückbleiben. Statt die auf eine Eigenschwingung entfallende Zahl von „Atom"schwingungen um $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{8}$, $\frac{3}{8}$ usf. eines Umlaufes zu vergrößern, könnten die „Atome" jedoch auch durch Zurückbleiben um $\frac{7}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{5}{8}$ usf. zur Resonanz gelangen. Die in diesem Hinblick gültige Spannung, welche die Rotationsgeschwindigkeit zu verlangsamen suchen würde, muß daher, wenn wir die zuerst besprochene positiv rechnen, negativ gerechnet werden. Die Folge der Spannung ist eine Änderung der Dichte innerhalb der Molekel, indem diese bei Vergrößerung der Spannung zusammengedrückt wird, bei Nachlassen der Spannung — wenn die Eigenschwingung der Molekel die Rotationsgeschwindigkeit wieder zu vermindern sucht — sich wieder ausdehnt. Demnach wäre die Spannung normal oder konträr zu rechnen, je nachdem die Dichte der Molekel ihr entspricht oder nicht. Unter diesem Gesichtspunkt betrachtet, ist die Valenzreihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 normal für die Reihen des periodischen Systems III, V und die erste Hälfte von VII, fortgesetzt durch die zweite Hälfte von VIII, also die durch die Elemente der seltenen Erden unterbrochene Reihe. Die dazu gehörigen Kontravalenzen sind —7, —6, —5, —4, —3, —2, —1. Die Valenzreihe 1, 2, 3, 4, —3, —2, —1 ist normal für die Reihen des periodischen Systems I und II. Die dazu gehörigen Kontravalenzen sind —7, —6, —5, —4, +5, +6, +7. Die Valenzreihe —7, —6, —5, —4, —3, —2, —1 ist normal für die Reihen des periodischen Systems IV, VI und IX. Die dazu gehörigen Kontravalenzen sind 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7. Der Vorgang der Verbindung zweier Elemente würde darin bestehen, daß die Spannung sich ausgleicht. Sucht die Spannung die Rotationsgeschwindigkeit beider Elemente im selben Sinne zu ändern, so ist die Spannung gleich der Differenz der absoluten Beträge der Valenzen, im gegenteiligen Fall ist sie gleich der Differenz der algebraischen Werte der Valenzen zu setzen. Diese Ansicht findet ihre Bestätigung in der Anwendbarkeit auf die von mir abgeleitete Formel[1]), welche die Wärmetönung bei der Verbindung zweier Elemente richtig ergibt, wenn die Spannung auf die angegebene Weise berechnet wird.

Damit ist derselbe Zusammenhang auf Resonanzerscheinungen zurückgeführt, den kürzlich Sommerfeld[2]) mit der wachsenden Kernladung und der unter ihrem Einfluß stattfindenden Zusammenziehung des äußersten Elektronenringes erklärt hat.

Gleichviel jedoch, ob die Schwingungen der „Atome" und die Eigenschwingungen der Molekeln in Resonanz stehen oder nicht, so muß das Verhältnis p der Schwingungszahlen der Eigenschwingungen der Molekeln und der Schwingungen der „Atome" in der Zahl der während einer Periode der Atomschwingungen einen bestimmten Punkt passierenden „Atome" ganzzahlig enthalten sein. Dieses Verhältnis ist für jede einzelne Kugelschale und zwar in bezug auf die Eigenschwingung der ganzen Molekel, zu bilden. Von vornherein wird die Ganzzahligkeit nie zutreffen und gerade hierin erblicke ich die Ursache davon, daß die idealen Atomgewichte mit den wirklichen nicht genau übereinstimmen. Ist die letztgenannte Zahl nahezu ganz, ist die Zahl der Atomdurchgänge aber etwas zu klein, so muß die Winkelgeschwindigkeit und damit die Masse der Molekel in entsprechendem Verhältnis zunehmen. Für die entsprechende Schale des im periodischen System folgenden Elementes

1) Diese Zeitschr. 20, 330, 1919.

2) A. Sommerfeld, Über die Entdeckung der Quanten. Zu M. Plancks 60. Geburtstag. S. 26. 1918. Karlsruhe i/B., C. F. Müller.

ist dies um so mehr der Fall, da die Zahl der „Atom“durchgänge langsamer wächst als p. Dies wird solange fortgesetzt, bis durch eine geringere Verlangsamung der Rotationsgeschwindigkeit die nächst untere Zahl erreicht wird, in welcher p ganzzahlig enthalten ist, als dies durch Beschleunigung bezüglich der nächst oberen Zahl möglich wäre. Hier wechselt also die Differenz, falls die Rotation sämtlicher Kugelschalen sich im selben Sinn ändert, das Vorzeichen. Da die gleichzeitige Änderung im selben Sinn jedoch im allgemeinen nicht stattfinden wird, so werden kleinere Änderungen der durchschnittlichen Winkelgeschwindigkeit mit größeren abwechseln. Es wird daher auf 2 nahe beieinander liegende Atomgewichte ein weiteres in größerem Abstand folgen. Dies ist gerade das Bild, das die Atomgewichtsreihe auf weite Strecken darbietet. Demgegenüber scheint die Meinung, welche die Ursache der Unregelmäßigkeiten im Gang der Atomgewichte — also die Abweichungen von irgendeiner idealen Reihe — im Vorhandensein von Isotopen erblickt, nicht standhalten zu können. Denn dann wären die Abweichungen zufällig, nämlich von Alter und Herkunft der Elemente abhängig. Sie sind aber eine periodische Funktion der Atomgewichte. Damit ist der Zufall ausgeschlossen.

Zusammenfassung.

Auf Grund quantentheoretischer Überlegungen und des von mir in einer früheren Arbeit aufgestellten Ansatzes über die Masse wird eine ideale Reihe der Atomgewichte abgeleitet, deren Gang mit dem der Reihe der wirklichen Atomgewichte bis ans Ende übereinstimmt. Die Differenzen der idealen und der wirklichen Atomgewichte sind eine periodische Funktion des Atomgewichtes. Die Ursache hiervon wird in den Verhältnissen der Eigenschwingung der Molekeln und der Schwingungen ihrer „Atome“ gesehen.

Freiburg i. B., Juli 1919.

(Eingegangen 28. Juli 1919.)

BESPRECHUNGEN.

O. Lehmann, Die Lehre von den flüssigen Kristallen und ihre Beziehung zu den Problemen der Biologie. gr. 8°. 254 S., m. 572 Abbildungen. (Sonderabdruck aus den „Ergebnissen der Physiologie“ von L. Asher u. K. Spiro, Bd. 16, S. 255—509, 1917). Wiesbaden, J. F. Bergmann. 1918. M. 15.—

Wer eine kurz gefaßte, klar und reich gegliederte (50 Kapitel) Übersicht über das Verhalten und die Eigentümlichkeiten der sogenannten flüssigen Kristalle und über O. Lehmanns diesbezügliche Auffassungen zu besitzen wünscht, der schaffe sich diesen Separatabdruck an, der mit vorzüglichen Abbildungen, besonders Mikrophotographien, ausgestattet ist.

Der spezifisch physikalische Inhalt braucht hier nicht näher referiert zu werden, da der Autor selbst ein Autoreferat mit 77 Abbildungen in dieser Zeitschrift (19. Jahrg., S. 73—80 u. 88—100) veröffentlicht hat. Die Ähnlichkeitsbeziehungen zu biologischen Objekten und Problemen werden in der Einleitung (8 Seiten) und im Schlußkapitel (7 Seiten) zusammengestellt; das übrige (239 Seiten) ist rein physikalisch, herrscht also stark vor.

Wenn O. Lehmann unter dem Eindruck der von ihm seit Jahren mit rastloser Energie studierten flüssigen Kristalle auch die lebendige Substanz als eine flüssig kristallinische angesehen wissen will und wenn er die, von den Biologen vertretene, Kolloidnatur der organismischen Substanz[1]) abstreiten zu dürfen glaubt, weil in kolloidalen Stoffen alle Richtungen gleichwertig sind, während die Lebensvorgänge in strengster Abhängigkeit von bestimmten Richtungen verlaufen, und hierdurch eine Anisotropie voraussetzen, wie sie angeblich nur bei Kristallen zu finden sei, so kann dem allerdings keinesfalls beigepflichtet werden. Einer intimeren Analogisierung mit Kristallen widersetzt sich die organismische Substanz allein schon dadurch, daß ein Kristall — auch ein Mischkristall oder ein flüssiger Kristall — aus lauter gleichwertigen, homomorphen Elementareinheiten besteht, daß aber die organische Substanz im höchsten Grade „heteromorph“, auch schon in ihrem kleinsten Elementarteilchen, aufgebaut sein kann und daß all ihre Teile in stetem Stoffwechselflusse begriffen sind. Die von Lehmann für das Organismische verlangte Anisotropie ist allein schon in der nach verschiedenen Richtungen hin fraglos verschiedenen chemischen (und dadurch auch meist chemisch-physikalischen) „Ungleichheit“ der organismischen Kleinbestandteile zwanglos gegeben. Die organismische Substanz ist zwar ganz ohne Frage kein „homomorphes“ Kolloid, das Lehmann bei seinem Einwand im Auge hatte, sondern sie muß als ein „heteromorphes“ Kolloid angesehen werden, und sie hat als solches heteronome Pole. In dieser Beziehung wird die Schrift nur durch Widerspruch von seiten der Biologen klärend wirken können, dagegen ist sie auch für den Biologen in all denjenigen zahlreichen Beziehungen von direkt aufklärendem Werte, in denen der Organismus unmittelbar oder auf Umwegen, optisch in ähnlicher Weise wie bei den flüssigen Kristallen orientierte, kristallinische Bildungen — z. B. Schwammnadeln, Kalkschalen usw. usw. — abzuscheiden vermag. Also auch der Biologe wird mit diesem Buche auf seine Rechnung kommen. Rhumbler.

1) Die „lebende“ organische Substanz wird neuerdings als „organismische“ bezeichnet. (Ref.)



K. Fajans, Radioaktivität und die neueste Entwickelung der Lehre von den chemischen Elementen. (Sammlung Vieweg, Heft 45.) gr. 8⁰. VIII, 112 S. Mit 7 Abbildungen, 10 Tabellen und einem Nachtrage. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. M. 4.—

Heft 45 der Sammlung Vieweg schneidet ein Gebiet an, das zu den interessantesten, wichtigsten und noch im lebhaftesten Flusse befindlichen Fragen gehört, die die Physik und Chemie beschäftigen. — Der Verlag hat zur Bearbeitung derselben einen Mann gewonnen, der als der Berufenste hierzu angesehen werden muß. — Die Bedeutung des Buches von H. Fajans ist durch den zweiten Teil des Titels gekennzeichnet; es ist die Darstellung der Wandlungen, die der Elementbegriff durch die Erforschung der Radioaktivität erfahren hat.

Nach einer sehr gedrängten Übersicht über die Haupttatsachen der Radioaktivität wird die Stellung der Radioelemente im periodischen System unter Bezugnahme auf die drei Reihen des Urans, Thoriums und Actiniums festgelegt. Es folgt die Aufstellung der beiden vom Verfasser und Soddy gefundenen Verschiebungssätze, nach denen der Ort eines Radioelements im System aus dem gegebenen Orte seines unmittelbaren Verfahrens und der Natur der Umwandlung, ob α- oder β-Strahler, eindeutig bestimmt wird. Die Häufung mehrerer Elemente verschiedenen Atomgewichts an derselben Stelle des Systems führt zu dem Begriffe der Isotopen und ihrer Gesamtheit, der Plejade, deren Glieder hinsichtlich der chemischen Eigenschaften und des Spektrums sich wie ein einheitliches Element verhalten. Es gibt demnach Elemente von gleichem chemischen Typus, z. B. dem des Bleies, aber verschiedenen Arteigenschaften, welch letztere von der Verschiedenheit der Atommasse abhängen, z. B. die Dichte im festen Zustande, bei Radioelementen auch in Unterschieden der Zerfallsgeschwindigkeit bestehen können. — Als Beispiel von Isotopen außerhalb der radioaktiven Reihen wird der Fall des Neons und Metanneons ausgeführt, die sich durch ihr Verhalten im Kanalstrahlenrohr bei kombinierter magnetischer und elektrischer Ablenkung nach J. J. Thomsons Methoden unterscheiden lassen. — Da somit durch Einreihung der Radioelemente in das periodische System sich herausstellt, daß es Elemente von chemisch identischem Charakter gibt, deren Atomgewichte erheblich verschieden sind, so kann das Atomgewicht nicht als Hilfsmittel der Systematik der Elemente beibehalten werden. An seine Stelle tritt die Ordnungszahl, die nach dem Verfahren von Moseley und Siegbahn vermittelst der Wellenlängen entsprechender Linien ihrer charakteristischen Röntgenstrahlung bestimmt wird. Das Verständnis dieser Zusammenhänge gibt uns das Bohrsche Atommodell; es führt zu der Vorstellung von A. van dem Brock, daß die Ordnungszahl eines Elementes übereinstimmt mit seiner Kernladung (ausgedrückt in elektrischen Elementarquanten), und ermöglicht die Erklärung des Moseleyschen Zusammenhanges zwischen Kernladung und charakteristischer Röntgenstrahlung. Um dem durch die Entdeckung der Isotopie gemachten Tatbestande Rechnung zu tragen, ist eine neue Definition des Elementbegriffs erforderlich. Nach Vorschlag des Verfassers, dem man zustimmen kann, ist eine zweckmäßige Fassung die: Ein chemisches Element ist ein Stoff, der durch kein Mittel in einfachere Bestandteile zerlegt und nicht als Gemisch anderer Stoffe erkannt werden kann. (Hiernach sind die Isotopen als „Elemente" im eigentlichen Sinne zu betrachten.)

Die Umwandlung der Radioelemente hat sich somit als von grundlegender Bedeutung auch für die Lehre von den stabilen Elementen erwiesen. Nur wenige Fälle gibt es noch, in denen die neuen Vorstellungen nicht ausreichen. Auf einen dieser Mängel sei noch besonders hingewiesen. Die Radioaktivität der Alkalimetalle Kalium und Rubidium steht noch außer Zusammenhang mit den übrigen Erscheinungen dieser Art.

In einem Anhange wird die neueste Entdeckung Rutherfords besprochen, nach der aus Stickstoffmolekülen durch α-Strahlenbombardement Teilchen abgespalten werden, die mit H-Atomen identisch zu sein scheinen. Es ist noch nicht abzusehen, zu welchen weiteren Ergebnissen die durch diese Entdeckung eingeleitete neueste Phase der Radiochemie führen wird.

Da sich das Buch bei seinem tiefen Inhalt leicht lesen läßt, so kann es nur auf das wärmste empfohlen werden. Karl Bergwitz.

J. Peters, Siebenstellige Werte der trigonometrischen Funktionen von Tausendstel zu Tausendstel des Grades. Bearb. im Auftr. der optischen Anstalt C. P. Goerz A.-G. 8⁰. 376 S. Berlin-Friedenau, C. P. Goerz. — Gustav Engelmann. 1918. M. 48.—

Die Peterssche Tafel wird all denen sehr willkommen sein, die die Vorteile der Rechenmaschine kennen und sie wird dazu beitragen den Gebrauch der Rechenmaschine zu verbreiten, die noch lange nicht die Stellung errungen hat, die ihr gebührt. Die Feldmesser bedienen sich für die Ausführung ihrer Polygonzüge mit der Rechenmaschine der von W. Jordan 1897 herausgegebenen siebenstelligen Tafel der Sinus und Kosinus von 10″ zu 10″, die auch für neue Teilung mit dem in 100 Teile geteilten rechten Winkel eingerichtet ist. Ferner hat der verdiente Fr. Sossna das Manuskript einer sechsstelligen Tafel der trigonometrischen Funktionen hinterlassen, die hoffentlich bald im Druck erscheinen wird. Sossnas Werk wird durch die Peterssche Tafel keineswegs überflüssig, weil es durch die Beschränkung auf sechs Stellen einen kleineren Umfang hat und weil es zu den vier trigonometrischen Funktionen der Petersschen Tafeln noch Secans und Cosecans hinzufügt. Für die Rechenmaschine sind diese beiden Funktionen nicht gut entbehrlich, weil die Multiplikation mit Secans und Cosecans rascher ausgeführt werden kann als die Division mit Cosinus und Sinus. Die Peterssche Tafel hat die Einteilung des rechten Winkels in neunzig Teile beibehalten, teilt aber jeden Grad dezimal. Die Dezimalteilung des Grades ist beim Gebrauch der Rechenmaschine unerläßlich, um auch Winkel mit der Rechenmaschine zu addieren und zu subtrahieren, ohne Grade, Minuten und Sekunden ineinander umrechnen zu müssen. Für jedes Tausendstel eines Grades werden im ersten Teil des Werkes die Sinus, im zweiten Teil die Tangenten gegeben. Die Anordnung ist dabei eine ähnliche wie die in den Tafeln der Zahlenlogarithmen gebräuchliche. Jede aufgeschlagene Doppelseite gibt die Werte für die tausend Tausendstel eines Grades. Jedem Hundertstel eines Grades entspricht eine Zeile und die Zahlen ordnen sich nach den Tausendsteln in Kolonnen. Die Hundertstel sind am linken Rande verzeichnet, während am rechten Rande deren Komplemente abgelesen werden, durch die man also die Kosinus und Kotangenten ermittelt. Ein Nachteil dieser An-

ordnung ist, daß die beiden komplementären Funktionen Sinus und Kosinus oder Tangens und Kotangens desselben Winkels voneinander getrennt sind und also nicht gleichzeitig aufgeschlagen werden. Bei sehr vielen Rechnungen aber (z. B. bei Polygonzügen) braucht man gleichzeitig beide Funktionen desselben Winkels und wird daher durch diese Anordnung der Tafel Zeit verlieren. Man hätte ohne weitere Änderung die Tafel auch so anordnen können, daß jede aufgeschlagene Seite die beiden komplementären Funktionen für einen halben Grad enthalten hätte.

Die siebente Dezimale ist in der Tafel nicht mit der in Logarithmentafeln üblichen Genauigkeit ermittelt derart, daß der Tabellenwert nirgends mehr als eine halbe Einheit der siebenten Dezimale von dem wahren Werte abwiche. Die Abweichung geht vielmehr in der vorliegenden Tafel bei den Sinuswerten bis zu $\pm$ 0,65, bei den Tangentenwerten bis $\pm$ 0,85 Einheiten der siebenten Dezimale. Für die Berechnung wird dadurch viel Mühe gespart, während der Nachteil für die Benutzung unwesentlich ist. Die Ausstattung des Buches läßt nichts zu wünschen übrig. Das Papier ist vorzüglich, die Typen lesbar, der Druck klar und kontrastreich. C. Runge.

Briefkasten.

Wie groß ist der Mond?

Zu dieser vieldiskutierten Frage, die meist beantwortet wird „so groß wie ein Teller", sowie einigen damit zusammenhängenden Problemen sind in letzter Zeit wiederum eine Reihe von Äußerungen erfolgt[1]). Ich möchte mir gestatten hierzu auf eine einfache Beobachtung hinzuweisen, deren Beschreibung ich bisher nirgends gefunden habe, die mir aber in Hinsicht der gestellten Fragen wesentlich erscheint. Betrachtet man den Mond oder irgendeinen anderen nicht zu nahen Gegenstand durch ein Loch von etwa 1/2 bis 1 cm Durchmesser, beispielsweise durch die vor das Auge gebrachte hohle Faust, so erscheint der Gegenstand wesentlich — schätzungsweise um ein Drittel — verkleinert, was besonders auffallend wirkt, wenn man das Loch oder den Kanal, durch den man blickte, rasch entfernt. Das Loch ist dabei so groß, daß der geometrische Strahlengang nicht beeinflußt wird. Um Irradiationserscheinung handelt es sich dabei nicht, wie man dies beispielsweise auch bei Anstellung des Experimentes an einem am Tageshimmel erscheinenden Mond, oder überhaupt an dunklen Gegenständen zeigen kann. Um eine durch die zwischen dem beobachteten Gegenstand und dem Beschauer gelegenen Objekte beeinflußte Größeneinschätzung handelt es sich auch nicht, denn wenn man beispielsweise den Mond oder Türme oder Rauchfänge wählt, einmal so, daß der Vordergrund mitgesehen wird, das andre Mal, daß er abgeblendet ist, so bleibt dies ohne Einfluß. Ich habe den Eindruck der Gegenstandsverkleinerung, wenngleich in geringerem Ausmaße, auch schon bei Schließen des einen Auges, bzw. der Vergrößerung beim Öffnen des zweiten, doch bringt das zweiäugige Sehen gegenüber dem einäugigen eine Reihe von Komplikationen, so daß ich der Realität dieser Erscheinung nicht ganz sicher bin; beim teilweisen Zukneifen eines Auges, während das andere geschlossen ist, erfolgt die Verkleinerung deutlich. Es scheint mir zweifelhaft, ob es sich hierbei überhaupt um eine physikalische oder eine psychophysiologische Frage handelt, und ich erbitte eventuelle Aufklärung.

Wien, den 6. Februar 1920. Stefan Meyer.

(Eingegangen 10. Februar 1920.)

1) Zum Beispiel H. Witte, diese Zeitschr. 19, 142, 1918; 20, 61, 114, 126, 368, 389, 439, 470, 1919; O. Baschin, Die Naturw. 7, 510, 1919; F. Zweifel, Die Naturw. 7, 937, 1919.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Jena Dr. W. Eller für Chemie.

Ernannt: Lektor M. Metzner an der Universität Dijon zum Professor der angewandten Chemie an derselben Hochschule, der Privatdozent für physikalische Grundlagen der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Charlottenburg Dr. Salomon Kalischer zum ord. Honorarprofessor ebendaselbst, Professor Dr. Samuel Smiles in New Castle zum Professor am Kings College in London (an Stelle von Prof. A. W. Crossley), Dr. Maximilian Tuch zum Professor für angewandte Chemie, speziell Harze, Öle und Malerfarben am Cooper Institute in New York, der Begründer der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt in Berlin-Adlershof Professor Dr.-Ing. Friedrich Bendemann zum Geh. Regierungsrat und Vortragenden Rat im Verkehrsministerium in Berlin, der ord. Professor der Astronomie an der Universität Straßburg Dr. Julius Bauschinger in gleicher Eigenschaft an der Universität Leipzig.

Berufen: Der Privatdozent für Physik an der Universität Göttingen Dr. Paul Scherrer an die Technische Hochschule Zürich, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Leipzig Dr. Gustav Herglotz in gleicher Eigenschaft an die Universität Berlin.

Gestorben: Der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule Dresden Geheimer Rat Dr. Martin Krause, der a. o. Professor der technischen Chemie an der Universität Königsberg Dr. Reinhart Blochmann, der Privatdozent für Pharmakochemie an der Tierärztlichen Hochschule Dresden und Direktor der chemischen Fabrik Helfenberg Professor Dr. Karl Dieterich, Lucien Poincaré, Mitglied der Hochschule für Elektrizität und Generalinspekteur der öffentlichen Erziehung in Paris.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 7. 1. April 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 9 am 15. April 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Transformation des wirklichen Raumes in den Sehraum.

Von H. Geipel.

I.

Witte hat in seiner letzten Abhandlung über den Sehraum[1]) Gesetze aufgestellt, nach denen die Sehgröße eines Gegenstandes, wenn dieser sich vom Auge entfernt, in ganz bestimmter Weise von der Entfernung abhängen soll. Witte geht dabei davon aus, daß weder der Satz: „Die scheinbare Größe eines Gegenstandes entspricht dem Sehwinkel oder auch dem Netzhautbild und nimmt umgekehrt proportional mit der Entfernung ab"[2]) noch der „Sehwinkelaufhebungssatz", nach dem ein Gegenstand, z. B. der Mensch in jeder Entfernung in seiner wirklichen Größe erscheint, gilt, sondern, daß diese mit der Entfernung eine Verkleinerung erfährt, wie es durch die Berechnung nach dem Ausdruck

$$B = \frac{\varrho}{\varrho + R}$$

geschieht, die v. Sterneck zugrunde legt. Danach soll ein Mensch z. B. in 100 m Entfernung um 1 Proz. kleiner als in seiner wahren Größe gesehen werden, in 1 km Entfernung ca. 9 Proz. usw. Dieser Ausdruck erscheint wieder in den von Witte aufgestellten Gesetzen[3]) in der Form des Verkleinerungsverhältnisses

$$V = \frac{E}{E + X}.$$

Die aus diesem Verkleinerungsverhältnis sich ergebende Hyperbel für die Abhängigkeit der Verkleinerung von der Entfernung ist also errechnet auf Grund der Annahme, daß für die Sehgröße der korrigierte Sehwinkelaufhebungssatz der psychologischen Wissenschaft gilt, d. h. also, daß der wirkliche Raum dem Auge als v. Sterneckscher — oder wie ihn Witte nennt: Laqueurscher Sehraum erscheint.

1) Diese Zeitschr. **20**, 389, 1919.
2) Diese Zeitschr. **19**, 142, 1918.
3) Witte, l. c. **20**, 389, 1919.

II.

Es erhebt sich die Frage, ob diese psychologische Erfahrung die Grundlage für eine Transformation des wirklichen Raumes XYZ auf den Sehraum $X'Y'Z'$ sein kann.

In alle diese Beobachtungen, wie sie an Dingen in der Natur, auch an geraden Landstraßen, Kanälen, Eisenbahngleisen usw. gemacht werden, geht ohne weiteres ein die Objektivität der Beobachtung vollkommen zerstörendes Moment ein, das meines Erachtens nicht zu umgehen ist, nämlich das Wissen von den Dingen, wie es durch eine lebenslange Erfahrung uns eigen geworden ist. Wir wissen, wie groß ein Mensch ist und wissen, daß die Abstände zwischen parallelen Eisenbahnschienen an allen Stellen gleich groß sind.

Es seien einige Beispiele angeführt. Wer aus der Ebene oder dem Hügellande kommt, weiß, wie ungeheuer man sich beim Schätzen von Entfernungen im Hochgebirge, z. B. den Alpen, vor allem über der Baumgrenze irrt und wie es nur einer vieljährigen Übung gelingen kann, einigermaßen das Richtige zu treffen. Warum? Es fehlen bekannte Größen, an denen man ein Maß für Entfernungen hat. Ein Messen ohne Maßstab ist ein Unding und so ist auch das Entfernungsmessen ohne Anhaltsgröße in der Umgebung eine Unmöglichkeit. Als ich zum erstenmal Gemsen sah, mußte mir ein Freund die Stelle genau mit dem Finger zeigen, wo sie sich in dem Kar auf der Schutthalde befanden. Sie waren für mich unsichtbar gewesen, weil ich nicht erwartet hatte, daß sie so klein wie Flöhe aussehen würden und wüßte ich nicht aus Büchern, wie groß eine Gemse ist, ich hätte es niemals aus dem Ge-

sichtseindruck heraus auch nur annähernd richtig ermessen können.

Wie steht es nun mit den Zahlen, die Witte für die Verkleinerung angibt[1])? Danach würde innerhalb von 1 km ein Ding noch nicht 10 Proz. kleiner gesehen werden als seine wirkliche Größe. Die Gemsen waren in Luftlinie $^1/_2$—$^3/_4$ km nach der Karte entfernt und erschienen fast punktförmig!

Blickt man durch ein kleines Fenster in eine große Hohlkugel von mehreren Metern Durchmesser, die innen vollkommen ohne einen Anhaltspunkt ist und erleuchtet wird, wie es bei der Messung der durch eine Bogenlampe erzeugten Beleuchtungsstärke in der Ulbrichschen Kugel geschieht, so glaubt man ins Unendliche zu sehen, in idealerer Weise als beim Sternenhimmel, bei dem dieser Eindruck durch Anhaltspunkte, die Sterne, gestört wird. Man verliert also in vollkommenster Weise jeden Maßstab für eine Entfernung, wenn ein uns in seiner Größe bekanntes Ding in der Umgebung der Blicklinie fehlt.

Es sei drittens die Frage aufgeworfen, ob dann, wenn der korrigierte Sehwinkelaufhebungssatz des v. Sterneckschen Sehraumes gelten würde, ein Bild einen natürlichen Eindruck machen könnte, das nach den Gesetzen der Perspektive gezeichnet ist. Das gleiche gilt von der Photographie.

III.

Die scheinbare Größe des Mondes.

Witte glaubt den Grund für die populäre Angabe, der Mond sehe aus wie ein Teller (20—30 cm Durchmesser), in der besonderen Konstruktion des Sehraumes zu finden, mit andern Worten: in den Gesetzen zu sehen, nach denen der wirkliche Raum in den Sehraum transformiert wird. Ich behaupte, daß ein solches Gesetz, wie es Witte ableitet[1]), höchstens relative Bedeutung besitzen kann, sich höchstens auf eine Reihe gleichartiger Dinge beziehen und in einem Raume gelten kann, in dem Dinge vorhanden sind, von deren Größe wir wissen. Es könnte also vielleicht gelten für die Breite eines Weges in verschiedenen Entfernungen, die Abstände paralleler Eisenbahnschienen, die Latten eines Zaunes usw. Diese Gesetze verlieren aber ihre Gültigkeit, sobald es sich um ein Einzelding handelt, das in verschiedenen Entfernungen gesehen wird und dessen Größe man nicht kennt, oder dessen Dimension nicht in die Größenordnung uns vorstellbarer Maße hineinfällt, wie z. B. beim Monde.

Wenn danach überhaupt die Frage: „Wie groß sieht man den Mond" ihren Sinn verliert, sobald man die Umgebung wegdenkt, so hat doch die Frage Sinn, warum sieht man den Mond am Horizont größer als hoch am Himmel. Sehen wir den Mond am Horizont hinter einer fernen Baumgruppe aufgehen, so erscheint er groß, da seine Fläche die Baumgröße, die uns als etwas Großes bekannt ist, umschließt, geht er über dem Dach eines nahen Hauses auf, so erscheint er klein. Man kann dieselbe Beobachtung an dem einfachen Versuch machen. Man halte einen Maßstab gegen den Horizont und dann gegen den hohen wolkenlosen Himmel. Der Maßstab wird im zweiten Falle wesentlich kleiner erscheinen.

Woher kommt nun doch die unbestreitbar historisch gewordene Tellergröße des Mondes? Unser Auge, das nach dem Mond blickt und ihn in der Nähe fernerer Gegenstände sieht, erhält auf der Netzhaut ein kleines Bild des Mondes in der Umgebung andrer kleiner Bilder (Häuser, Bäume usw.). Derjenige nun, der durch Abgreifen angeben soll, wie groß ihm der Mond erscheint, in der Regel natürlich so, daß er auf seine Hände oder die nächste Umgebung und nicht auf den Mond blickt, oder das Auge auf unendlich akkommodiert, hat in seiner Umgebung Dinge, die große Netzhautbilder im Auge besitzen (Tisch, Stuhl, Bäume usw.), deshalb wird er eine Größe abgreifen, die ein Netzhautbild von einer ähnlichen Größenordnung erzeugt. Das kleine Netzhautbild eines Mondscheibchens von $^1/_2{}^0$ Öffnung in der Entfernung der Hände bei ausgestreckten Armen würde in einem zu großen Mißverhältnis zu den Netzhautbildern der umgebenden Gegenstände stehen. Würde man die Mondgröße nicht mit auf die Größe umfassenden Händen, sondern die Gegenstände am Horizont (Häuser, Stadt, Bäume) mit akkommodiertem Auge abgreifen lassen, so würde man wahrscheinlich andere Zahlen erhalten.

IV.

Wir wollen die beiden nachfolgenden Gedankenexperimente machen.

1. Versuch. Es werde im Raume, und zwar im absolut leer gedachten Weltraume ein Maßstab AB aufgestellt. Zwischen ihm und dem Beobachter sei aber keinerlei verbindende Gerade oder Ebene vorhanden, beide hängen also sozusagen in der Luft. Wir wissen, der Maßstab hat die Länge $AB = 1$ m. Bei geschlossenen Augen werde plötzlich der Maßstab in die 1000fache Entfernung gerückt und 1000fach ähnlich vergrößert, ohne daß der Beobachter etwas davon weiß. Er würde dann

1) Diese Zeitschr. 19, 144, 1918.

1) l. c. 20, 389, 1919.



unfehlbar angeben, der Stab ist an derselben Stelle geblieben und seine Größe ist 1 m.

2. Versuch. Man stelle 10 gleiche Maßstäbe im absolut leeren Raum auf, und zwar nebeneinander alle in gleicher Entfernung etwa 100 m vom Auge. Sie erscheinen dem Auge gleich groß. Man stelle sie nun hintereinander und zwar so, daß erstens die Entfernung des n ten Stabes vom Auge das n fache der Entfernung des ersten ist unter gleichzeitiger ähnlicher n facher Vergrößerung, zweitens jeder Stab soviel seitlich steht, daß kein vorangehender einen nachfolgenden verdeckt.

Nach der Tabelle, die Herr Witte für den v. Sterneckschen Sehraum angibt[1]), und wie aus der Kurve folgt, die Witte berechnet[2]), können die Stäbe nicht mehr gleich groß gesehen werden, sondern die ferneren müssen verkleinert erscheinen. Nimmt man zum Beispiel an, die Entfernung des ersten Stabes vom Auge ist 100 m, seine Größe 10 m, die des zehnten 1000 m bzw. seine Größe 100 m, so müßte letzterer nur 91 m groß erscheinen, um 9 Proz. kleiner als der 1. Stab.

Dafür liegt aber für das Auge kein irgendwie stichhaltiger Grund vor, denn das Auge kann nicht unterscheiden, ob die Stäbe nebeneinander oder hintereinander stehen, da eine gemeinsame Fußebene oder sonstige Bezugsebene für den Beobachter und die Stäbe fehlt, an der der Blick entlang gleiten kann. Für das Auge bleibt also nur der Eindruck auf der Netzhaut. Alle Stäbe aber erzeugen das gleiche Netzhautbild im Auge, denn nennt man a_1, a_2, $a_3 \ldots a_n$ die Entfernung der Stäbe vom Auge, A_1, A_2, $A_3 \ldots A_n$ ihre zu a_n proportionale Größe, B_1, $B_2 \ldots B_n$ die Bildgröße, b die Entfernung der Netzhaut von der Linsenmitte des Auges, so ist in erster Annäherung

$$B_1 = b \cdot \frac{A_1}{a_1}$$

$$B_2 = b \cdot \frac{A_2}{a_2}$$

$$\vdots$$

$$B_1 = B_2 = B_3 \ldots B_n.$$

Es fehlt jede Bezugsgröße in der Nähe der Stäbe, wodurch die ferneren größer und ferner erscheinen würden. Denn von dem „Erleben einer Sehgröße", die bedingen sollte, daß ein ferner stehender Stab verkleinert gesehen wird und daher ferner, kann hier nicht gesprochen werden.

1) l. c. **19**, 144, 1918.
2) l. c. **20**, 389, 1919.

V.

Es bleibt also wohl gegenüber der Unsicherheit des psychologischen Erlebnisses einer Größe nichts Sicheres als die physikalische Grundlage des Sehens im „Raume". Diese wird gegeben durch die Abhängigkeit der Größe des Netzhautbildes von der Entfernung des Gegenstandes vom Auge. Da die Entfernung b der Netzhaut von der Mitte der Augenlinse in erster Annäherung bei Akkommodation des Auges auf verschiedene Entfernungen als konstant angesehen werden kann, so muß bei gleichbleibender Gegenstandsgröße A, das Produkt aus Gegenstandsentfernung a und Bildgröße B, konstant sein, also

$$aB = \text{const} \quad \text{(Fig. 1)},$$

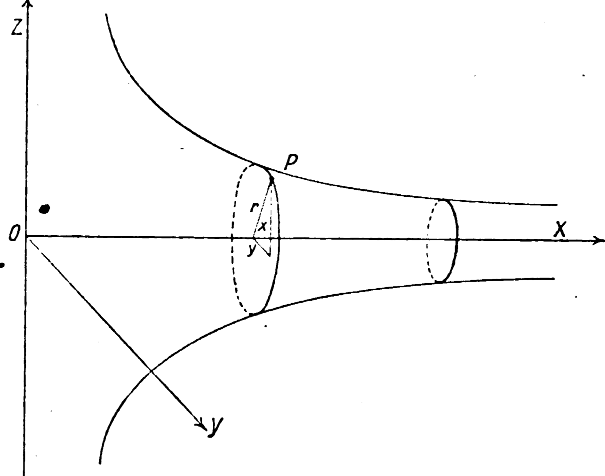


Fig. 1.

d. h. man erhält eine gleichseitige Hyperbel für die Abhängigkeit der Bildgröße B von der Entfernung a. Der Sehraum einer Schar paralleler Linien, die einen Kreiszylindermantel bilden, in dessen Achsenrichtung der Beobachter blickt, ist demnach ein mit hyperbolischer Krümmung mit wachsender Entfernung sich verengernder Raum.

Der Satz: „Die scheinbare Größe eines Gegenstandes entspricht dem Sehwinkel oder auch dem Netzhautbild und nimmt umgekehrt proportional mit der Entfernung ab"[1]), hat also nicht Gültigkeit. Betrachtet man den scheinbaren Abstand zweier paralleler Eisenbahnschienen in unmittelbarer Nähe, so sieht man deutlich ein hyperbolisches Auseinandergehen in nächster Nähe des eigenen Standpunktes. Noch eindringlicher ist die Beobachtung des Anwachsens der scheinbaren Größe einer herannahenden Lokomotive, wenn man dicht neben

1) l. c. **19**, 142, 1918.

dem Gleise oder vor dem Ende einer Kopfstation steht. Man erkennt auch dann deutlich ein rascheres Anwachsen als ein der Entfernung proportionales bei großer Annäherung.

Die Gleichung für den Sehraum gleicher Abstände von der Blickrichtung OX ist durch die nachfolgende Gleichung gegeben. Der Sehraum ist eine Rotationsfläche, die durch Drehung eines Astes der gleichseitigen Hyperbel um die Blickrichtung OX entsteht (Fig. 1).

Es ist dann

$$r^2 = x^2 + z^3$$
$$x \cdot r = c,$$

wobei c die Konstante der gleichseitigen Hyperbel ist. Daraus folgt als Gleichung des Sehraumes

$$\frac{c^2}{x^2} = y^2 + z^2$$

eine Fläche 4. Grades.

Ändert sich der Parameter c, so erhält man den Sehraum für andre Orte gleichen Abstands von der Blickrichtung.

Zur Prüfung der hyperbolischen Gestalt des Sehraumes im obigen Sinne wurden einfache Messungen durchgeführt. Auf einem horizontalen Maßstab M_1 wurde ein kleiner Vertikalmaßstab A von ungefähr 3 cm Länge in verschiedener Entfernung vom Auge aufgesetzt und seine scheinbare Größe auf einem am Ende des Horizontalmaßstabes aufgestellten Vertikalmaßstab M_2 gemessen (Fig. 2). Eine der gemessenen Zahlenreihen ist in der Tabelle mitgeteilt und in Fig. 3 dargestellt. Sie zeigt deutlich die hyperbolische Abhängigkeit der scheinbaren Größe eines Gegenstandes von der Entfernung vom Auge. Die Ungenauigkeit, die sich in den Produkten $a \cdot B$ zeigt, die in der dritten Spalte beigesetzt sind, erklärt sich ohne weiteres aus der durch die Schwierigkeit der vom Auge aus erfolgten Projektion des Gegenstandes auf den Vertikalmaßstab. Sie wird besonders groß in den innerhalb der deutlichen Sehweite liegenden Entfernungen, da innerhalb dieser ein scharfes Bild nicht mehr zu erhalten ist.

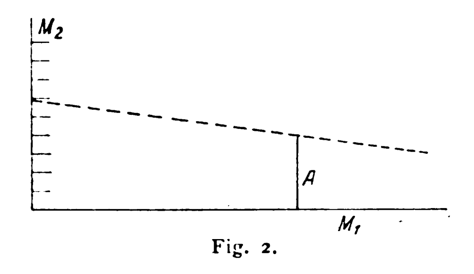


Fig. 2.

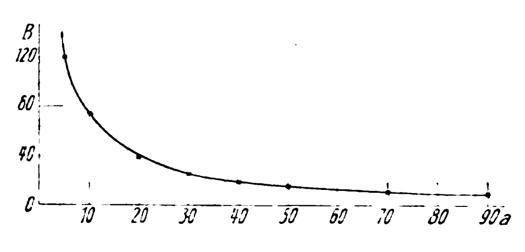


Fig. 3.

Gegenstandsweite a in cm	Bildgröße B	$a \cdot B$
230	3,5	805
210	3,7	777
190	4,0	760
170	4,6	782
150	5,2	780
130	6,0	780
110	7,0	770
90	8,6	774
70	11	770
50	15	750
40	19	760
30	25	750
20	38	760
10	73	730
5	120	600

Ich glaube damit erwiesen zu haben, daß eine solche Gesetzmäßigkeit, wie sie im korrigierten Sehwinkelaufhebungssatz v. Sternecks und in den Kurven, die Witte dafür berechnet, günstigenfalls nur für besondere Fälle gültig ist, keineswegs aber ein dem Sehen an sich immanentes Gesetz einer eindeutigen Transformation des wirklichen Raumes auf den Sehraum.

(Eingegangen 17. Oktober 1919.)

Über ein Modell zur Erklärung der Lichtemission. V[1]).

Von E. Gehrcke.

§ 14[1]). Den früheren Versuch zur Erklärung der Spektren, der durch die Umstände der letzten Jahre unterbrochen werden mußte, setze ich hier fort. Ich frage, wie auch früher, nach den physikalischen Gründen, die die Spektralerscheinungen bedingen, und nicht nach einem formalen Prinzip zur Ableitung der Gesetze. Ich erstrebe also eine, wenn auch tastende und vorläufige, Beschreibung dessen, was wirklich vorgeht, wenn Spektrallinien erzeugt werden, und konstruiere zu diesem Zweck ein anschauliches Modell, das zeigt, wie es vielleicht von der Natur gemacht wird, wenn ein Linienspektrum entsteht. Ich erreiche auf die-

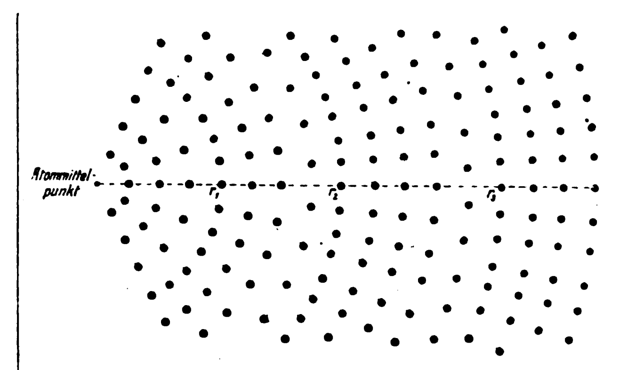
1) Vgl. diese Zeitschr. **15**, 123—127, 198—201, 344 bis 348, 838—839, 1914.



sem Wege eine systematische, zu weiteren Fragestellungen anregende Zusammenstellung der mannigfachen Beobachtungstatsachen, und habe ferner den Vorteil, logische Härten zu vermeiden, wie sie z. B. dem sonst so bedeutungsvollen, aber anschaulich nicht vollendeten Modell von Bohr eigen sind.

Es möge hier versucht werden, für die Existenz der Ringe, auf denen sich die Elektronen an einem Atom befinden, eine Vorstellung zu bekommen. Wir setzen voraus, daß der Äther atomistisch aufgebaut ist, lassen also die übliche Auffassung des kontinuierlichen Äthers nur als näherungsweise gültig für die gröberen Erscheinungen zu und nehmen ausdrücklich an, daß bei höherer Feinheit der Unterteilung eines Raumes, in dem sich Äther befindet, ein atomistischer Aufbau besteht; ein Analogon hierfür bieten uns die gewöhnlichen Flüssigkeiten und festen Körper, die hinsichtlich ihres hydrodynamischen und elastischen Verhaltens, also für die gröberen Erscheinungen, als kontinuierlich hingenommen werden können und vermittelst Differentialgleichungen beschrieben werden, die aber bei feinerer Beobachtung z. B. in chemischer und elektrischer Hinsicht, als aus diskreten Elementen aufgebaut angesehen werden.

Der atomistische Äther wird dann weiter als kristallinisch und als nicht ganz inkompressibel vorausgesetzt, also sein Aufbau ist nicht vergleichbar dem Zustand der Atome in einem Gase, sondern demjenigen der Atome in einem Kristall. Ein im Äther befindliches, materielles Atom, z. B. ein Wasserstoffatom, ist ein Kraftzentrum, das die Ätheratome in seiner Umgebung beeinflußt und sie nach Art eines flüssigen Kristalls ordnet. Diese Wirkung des Atoms wird in große Entfernungen hin gehen, um nicht zu sagen ∞ weit, so wie schon Faraday sich vorstellte, daß sich jedes Atom durch das ganze Sonnensystem erstreckt[1]). Einem solchen atomistischen Aufbau des Äthers werden dann gewisse Sprungstellen im Atomgefüge eigen sein, d. h. ringförmige Bezirke, deren Mittelpunkt der Mittelpunkt des Atoms ist; denn da die Ätheratome an gewisse Grenzen ihrer Entfernung voneinander gebunden sein werden, so müssen sie bei zentrischer Anordnung in konzentrischen Ringsphären gleich dicht und in aufeinanderfolgenden Ringsphären in gleicher Zahl vorhanden sein, bis von einer gewissen Sphäre ab der Abstand der Ätheratome so groß geworden ist, daß ihre Anzahl sprunghaft größer wird. Die Figur soll dies für einen speziellen Fall verdeutlichen. An den Sphären



der Radien r_1, r_2, r_3, wo die Ätheratome sprunghaft ihre Dichte ändern, befinden sich also „Sprünge" im Äther, hier erleidet der Ätherkristall eine Unstetigkeit; diese Unstetigkeitsstelle oder Sprungstelle ist dasselbe, was in § 1 und § 8 ein „Äthervakuum" genannt war.

Fragen wir nun, welche Radien mögen die Äthersprungstellen, oder die „Ringe aus Äthervakuum", haben? Es werde mit r_0 der Radius des ersten, mit r_1 der Radius des zweiten Ringes bezeichnet; für die folgenden Ringe sind die entsprechenden Indizes zu nehmen. Die Höhe des ersten Ringes sei h_0, die des zweiten h_1 usw. Die Zahl der Ätheratome, die den ersten Ring auf seiner äußeren Oberfläche begrenzt, sei N_0, die des zweiten Ringes sei N_1 usw. Dann ist, falls die Ätheratome sich immer so ordnen, daß der Äther sehr nahezu[1]) die gleiche Dichte hat:

$$\frac{2\pi r_0 h_0}{N_0} = \frac{2\pi r_1 h_1}{N_1} = \frac{2\pi r_2 h_2}{N_2} = \dots = \frac{2\pi r_p h_p}{N_p},$$

also:

$$r_p = \frac{N_p}{N_0} \cdot \frac{h_0}{h_p} \cdot r_0 .$$

Sobald nun die Größe[2]):

$$\frac{N_p}{N_0} \cdot \frac{h_0}{h_p} = p^2 ,$$

was z. B. der Fall ist, wenn $N_p = p \cdot N_0$ und $h_0 = p \cdot h_p$, so folgt:

$$r_p = p^2 \cdot r_0 .$$

Dies ist das in § 1 vorausgesetzte Abstandsgesetz der Ringe, das hier als Folge des kristallinischen Gefüges des Äthers erscheint. Die ganze Zahl p aber, also die ganzzahlige Ordnungszahl der Serienspektren, erscheint hier

1) Faradays Experimentaluntersuchungen. Dtsche. Übersetzung Bd. 2, S. 263.

1) Ganz genau wird dies nicht gelten, da der Äther nicht ganz inkompressibel sein wird. Daraus entspringen dann geringfügige Abweichungen der Serienformeln von ganzen Zahlen.

2) Die theoretische Begründung dieser Größe muß auf das Kristallsystem des Äthers führen.

bedingt durch den diskontinuierlichen Aufbau des Äthers[1]).

Wenn wir dieses Bild weiter ausführen, so kommen wir zu äquatorialen und polaren Ringen, gerade so wie sie früher angenommen waren (vgl. § 11 und 12). — Es sei hier nur noch bemerkt, daß die Annahme eines Ätherkristalls, der statt ringförmiger Äthersprungstellen kugelschalenförmige Äthersprungstellen besitzt, bereits aus den in § 11 erwogenen Gründen auf Schwierigkeiten stößt und deshalb nicht in Betracht kommt.

§ 15. Von diesen Vorstellungen aus bedarf die Frage der Bewegung eines materiellen Körpers, also eines Atoms oder eines Atomhaufens, einer besonderen Erörterung. Man wird nicht annehmen wollen, daß ein im Äther bewegtes Atom den ganzen Schwarm von kristallinisch zu Ringen angeordneten Ätheratomen mit sich nimmt; abgesehen von den inneren Unwahrscheinlichkeiten einer solchen Annahme spricht auch die bekannte Erfahrungstatsache dagegen, daß in dem Versuch von Fizeau mit dem strömenden Wasser, das von Licht durchsetzt wird, keine Mitführung des Äthers mit dem strömenden Wasser erfolgt, und daß auch der sogenannte „Mitführungskoeffizient" nach Lorentz seine Erklärung dadurch findet, daß der Äther „vollständig ruht". Sonach scheint keine andere Annahme übrig zu bleiben, als die, daß bei der Bewegung eines Atoms im Äther nur das Zentrum des materiellen Atoms, nicht aber die es umgebenden Ringsysteme der Ätheratome an der fortschreitenden Bewegung teilnehmen, daß lediglich der Zustand des Äthers, also der Zwangszustand der das bewegte, materielle Atom umgebenden Ätheratome, mit der Geschwindigkeit des Atommittelpunktes fortschreitet. Ferner wird man nicht annehmen wollen, daß die Übertragung dieses Zwangszustandes des Äthers momentan erfolgt, vielmehr wird sie als Nahwirkung Zeit gebrauchen und sich mit einer Geschwindigkeit ausbreiten, die als die Lichtgeschwindigkeit zu erraten ist. Die durcheinanderwirbelnde Bewegung eines Haufens solcher Atome wird hiernach durcheinanderwirbelnde Zustandsänderungen des Äthers im Gefolge haben, und wir kommen so zur Annahme von Pulsationen der Ätheratome; wir treten so in den Gedankenkreis von Bjerknes[2]) und Korn[3]) ein, die zur Erklärung der Gravitation Pulsationszustände des Äthers vorausgesetzt haben. Weiter werden wir durch unsere obigen Vorstellungen veranlaßt zu folgern, daß die Gravitationswirkungen zweier gravitierender Körper von der Temperatur derselben abhängig sein sollten; denn es sollte z. B. bei Steigerung der Wirbelbewegung der Atommittelpunkte, also der Temperatur der Körper, auch eine Verstärkung der Schwingungen der Ätheratome eintreten, und entsprechend sollten die Gravitationswirkungen zunehmen. Eine experimentelle Bestätigung hierfür ist allerdings wohl noch nicht erbracht worden. Für eine andere Folgerung ist aber dafür die experimentelle Stütze vorhanden. Es sollte nach obigen Darlegungen das Ringsystem der Atome und damit die Gelegenheit für die Entstehung von Spektrallinien auch noch gegeben sein, wenn die Atome sich soweit einander nähern, daß die einzelnen Ringe gleich oder größer werden als der gegenseitige Abstand zweier Atommittelpunkte, nur sollte dann infolge des Ineinandergreifens der elektrostatischen Kraftfelder benachbarter Atome die Schärfe der Spektrallinien mit steigender Seriennummer abnehmen und es sollte in einem Gase wegen der Seltenheit von solchen Atomabständen, die größer sind als die mittlere Weglänge, das Auftreten der höheren Serienlinien seltener werden; mithin sollten die höheren Spektrallinien lichtschwächer sein als die Linien der geringeren Seriennummer. Diesen Folgerungen entspricht durchaus das Verhalten der Balmerschen Wasserstoffserie, wie auch die Versuche von Merton und Nicholson[1]) zeigen, und es besteht wohl keine Notwendigkeit, den Schluß dieser Forscher in betreff der Schwierigkeiten für die Erklärung ihrer Beobachtungen durch ein Atommodell anzunehmen.

Überblicken wir die gesamte, hier in § 1 bis § 15 erörterte, bunte Folge von Tatsachen, so können wir sagen, daß eine große Menge von Erscheinungen der Lichtemission, der elektrooptischen Erscheinungen, von Einzelheiten der Spektren und Spektralserien miteinander in Beziehung gesetzt werden konnte, und daß auch zu entlegeneren Gebieten, wie z. B. zur Gravitation, Brücken erkennbar werden und neue Gesichtspunkte und Fragen sich ergeben: für noch andere Gebiete, wie die Radioaktivität und den Magnetismus, läßt das Modell Möglichkeiten der Einordnung offen. Innere Widersprüche besitzt das Modell nicht; Widersprüche zu irgendwelchen, experimentell sichergestellten Tatsachen dürften, soweit die quantitativen

1) Der ganzzahlige Faktor, der in der Quantentheorie das Vielfache einer Energiemenge bezeichnet, erscheint hier als durch den atomistischen Aufbau des kristallinischen Äthers gegeben.

2) C. A. Bjerknes, z. B. Ostwalds Klassiker der exakten Wiss. Nr. 145.

3) A. Korn, z. B. Sitzungsber. d. Bayr. Akadem. d. Wiss. 1903, S. 353 u. 563 ff.

1) Merton und Nicholson, Proc. Roy. Soc. **A 96**, 112, 1919.



Tatsachen durch das Modell nur näherungsweise wiederzugeben waren, durch bessere Anpassung der speziellen Voraussetzungen an die Erfordernisse der Wirklichkeit ausgleichbar sein. Die Grundannahme des Ganzen ist ein Äther von atomistischem Aufbau, dessen Gefüge mehr einem Kristall als einem Gas ähnelt. Von der Wahrheit dieser Grundannahme dürfte die Anwendbarkeit und sicherlich auch die weitere Fruchtbarkeit des gesamten Gebäudes abhängen, das aus einem Modell der Lichtemission zu einer Theorie der Materie und des Äthers wurde.

(Eingegangen 12. November 1919.)

Betrachtungen über den radioaktiven Zerfall des Atomkernes.

Von Hans Th. Wolff.

Wie aus einer Arbeit von F. A. Lindemann[1]) zu ersehen ist, gestatten Überlegungen, welche das exponentielle Gesetz des radioaktiven Atomzerfalles mit der Geiger-Nuttallschen Gleichung

$$\log \lambda = A + B \log R \tag{1}$$

(λ = radioaktive Zerfallskonstante, R = Reichweite der α-Strahlen, A und B Konstante) in Verbindung bringen, Schlüsse auf die Vorgänge im Atomkern zu ziehen. Auch in der vorliegenden Notiz werden ähnliche Betrachtungen angestellt, doch finden sich hier wesentliche Verschiedenheiten gegenüber der Abhandlung von Lindemann.

Bekanntlich besteht zwischen der Reichweite R der α-Strahlen und ihrer Geschwindigkeit v die Beziehung

$$v = k \sqrt[3]{R}.$$

Dies in (1) eingesetzt, ergibt

$$\log \lambda = A - 3B \log k + 3B \log v, \tag{2}$$

also es ist

$$\lambda = v^{3B} \cdot \text{const.} \tag{3}$$

Dieser einfache Zusammenhang zwischen der Zerfallskonstanten λ und der Geschwindigkeit v, mit welcher die α-Strahlpartikeln zur Beobachtung gelangen, ist am leichtesten zu verstehen, wenn letztere im Atomkern eine Umlaufsgeschwindigkeit besitzen, welche ebenfalls gleich v ist. Daß eine derartige Annahme denkbar ist, kann man aus einer früheren Veröffentlichung des Verfassers[2]) ersehen. Die Größe B beträgt für die U-Ra-Reihe 54, also ist λ proportional zu v^{162}. Es ist nun λdt gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Atom während der Zeit dt instabil wird. Daß eine so hohe Potenz von v für die Wahrscheinlichkeit des Zerfalls maßgebend ist, kann man kaum anders erklären als dadurch, daß eine größere Zahl von Partikeln, deren Bewegungen voneinander unabhängig sind, zugleich gewisse Bedingungen erfüllen muß, wenn der Kern instabil werden soll. Bei der Berechnung jener Wahrscheinlichkeit sollen nicht die Geschwindigkeiten, sondern die Umlaufszahlen der auf kreisförmigen Bahnen befindlich gedachten Teilchen in Betracht gezogen werden. Wir nehmen an, die Wahrscheinlichkeit dafür, daß die $r$te Partikel die für das Zustandekommen des Zerfalls erforderliche Bedingung erfüllt, sei gleich $a'_r \nu_r$, wobei ν_r die Umlaufszahl pro Sekunde bedeute. Die Größe von a_r hängt von den Eigenschaften des Kerns ab, welche dessen Zerfall ermöglichen. Ist das Zusammenwirken von N voneinander unabhängigen Teilchen für das Zustandekommen des Zerfalls notwendig, so hat jene Wahrscheinlichkeit die Größe

$$\prod_1^N a'_r \nu_r.$$

Von 1 g zerfallen also

$$\prod_1^N (a'_r \nu_r)\,\text{g}.$$

Solcher Zerfallsmöglichkeiten mögen im Laufe einer Sekunde n eintreten[1]). Somit zerfallen während der Zeit dt

$$n\,dt \cdot \prod_1^N (a'_r \nu_r)\,\text{g}.$$

Benutzt man nun die Bezeichnung

$$a_r = a'_r \sqrt[N]{n},$$

so ist

$$\lambda = \prod_1^N a_r \nu_r. \tag{4}$$

Es soll nun angenommen werden, daß der Bohrsche Ansatz über die Größe des Impulsmomentes auch im Kern gilt. Das $r$te Teilchen muß also die Bedingung erfüllen:

$$\mu_r v_r \varrho_r = \frac{h q_r}{2\pi}, \tag{5}$$

wobei μ_r seine Masse, ϱ_r sein Bahnradius und q_r eine ganze Zahl, die Quantenzahl, bedeutet. Wenn mehrere Partikeln sich auf demselben Kreise bewegen, so liegt die Annahme nahe, daß q_r auch keine ganze Zahl sein kann. Für

1) F. A. Lindemann, Phil. Mag. **30**, 560, 1915, Beibl. **40**, 119, 1916.

2) H. Th. Wolff, Ann. d. Phys. **60**, 685, 1919.

1) Bei F. A. Lindemann würde n angeben, wie oft pro Sekunde eine gewisse Spannung den Kern durchquert. Der genannte Autor setzt $n = 1$.

den Fall, daß p Elektronen auf derselben Bahn umlaufen, setzt Sommerfeld[1]) vermutungsweise das Impulsmoment gleich

$$\frac{h}{2\pi}\sqrt{p},$$

und S. Ratnowsky[2]) begründet den Ansatz, daß dieses gleich

$$\frac{h}{2\pi}\sqrt[p]{p!}$$

ist. Es ist denkbar, daß auch für die Teilchen des Kernes eine solche Beziehung statthat.

Auf Grund der Beziehung

$$v_r = 2\pi \varrho_r \nu_r$$

ist nach (5)

$$\nu_r = \frac{h q_r}{4\pi^2 \mu_r \varrho_r^2} \tag{6}$$

und

$$v_r^2 = \frac{h q_r \nu_r}{\mu_r}. \tag{7}$$

Gleichung (2) nimmt jetzt die Form an:

$$\left.\begin{aligned}\log\lambda = A - 3B\log k + \tfrac{3}{2}B\log\frac{h q_1}{\mu_1} \\ + \tfrac{3}{2}B\log\nu_1,\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

wobei sich der Index $r = 1$ auf diejenige Partikel, welche als α-Strahl zur Aussendung gelangt, bezieht. Aus (6) folgt

$$\frac{\nu_r}{\nu_1} = \frac{q_r \mu_1 \varrho_1^2}{\mu_r \varrho_r^2 q_1},$$

so daß man an Stelle von Gleichung (4) schreiben kann:

$$\lambda = \nu_1^N \prod_1^N \frac{a_r q_r \varrho_1^2 \mu_1}{q_1 \varrho_r^2 \mu_r} = a_1 \nu_1^N \prod_2^N \frac{a_r q_r \varrho_1^2 \mu_1}{q_1 \varrho_r^2 \mu_r}. \tag{9}$$

Diese Gleichung stimmt mit (8) überein, vorausgesetzt, daß die beiden Bedingungen erfüllt sind:

$$N = \tfrac{3}{2}B, \tag{10}$$

$$a_1 \prod_2^N \frac{a_r q_r \varrho_1^2 \mu_1}{q_1 \varrho_r^2 \mu_r} = b\left(\frac{h q_1}{\mu_1 k^2}\right)^N, \tag{11}$$

wobei die Bezeichnung gebraucht ist

$$b = 10^A. \tag{12}$$

Wenn N, die Zahl der Teilchen, von denen das Instabilwerden des Kerns abhängt, unverändert bleiben soll, so hat man sich vorzustellen, daß nach jeder Aussendung eines α-Strahles eine Partikel in Wirksamkeit tritt, die zuvor nicht in Rücksicht zu ziehen war. Eine andere naheliegende Anschauung wäre die, daß während der einzelnen Stufen des Atomzerfalls kein neues Teilchen für den Stabilitätszustand des Kerns wesentlich wird. N müßte dann bei jeder α-Strahlumwandlung um 1 abnehmen, wofern zu den N Partikeln immer das ausgesandte Teilchen gehört. Wir wollen feststellen, ob die experimentellen Ergebnisse eine Entscheidung dieser Frage ermöglichen. Zu diesem Zwecke berechnen wir aus (1) die Werte von B, welche sich aus den Beträgen von λ und R ergeben, die je 2 aufeinanderfolgenden α-Strahlern einer Reihe zugehören. Auf diese Weise eliminieren wir A, so daß die gefundenen Werte von B nicht von der Größe von A abhängen. In Tabelle I sind die gefundenen Ergebnisse zusammengestellt[1]). Die Werte von λ und R wurden dem Lehrbuch der Radioaktivität von St. Meyer und E. R. v. Schweidler (Berlin 1916) entnommen. Die für die *U-Ra*-Reihe sich ergebenden Werte von B zeigen zwar gewisse Unregelmäßigkeiten, sprechen aber entschieden mehr für die Konstanz von B als für dessen Abnahme bei fortschreitendem Zerfall. Die Werte für die beiden anderen Zerfallsreihen sind noch unregelmäßiger. Auf eine Abnahme von B weisen auch sie nicht hin. Wir nehmen daher Unveränderlichkeit von N an[2]).

Tabelle I.

U-Ra-Reihe	B	*Th*-Reihe	B	*Ac*-Reihe	B	B[3])
U I	ca. 53	*Th*	64	*Ra Ac*	ca. 53	ca. 53
U II	„ 51	*Ra Th*	50	*Ac X*	46	49
Jo	58	*Th X*	58	*Ac Em*	64	57
Ra	53	*Th Em*	47	*Ac A*	56	56
Ra Em	58	*Th A*	72			
Ra A	54					
Ra C'	53					
Mittel	54		58		55	54
$\overline{N} =$	81	$\overline{N} =$	87	$\overline{N} =$	83	81

Unter Benutzung von Gleichung (5) kann man bei Zugrundelegung einer bestimmten Quantenzahl den Radius ϱ_1 der Bahn derjenigen Partikel berechnen, welche als α-Strahl von der Geschwindigkeit v_1 (gleichzeitig Geschwindigkeit im Kern) zur Ausstrahlung gelangt. Die für die Quantenzahl 1. sich ergebenden Werte von

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **53**, 497, 1917. Siehe speziell S. 546 ff.

2) S. Ratnowsky, Ann. d. Phys. **56**, 529, 1918. Siehe speziell § 16.

1) Der hier einem Zerfallsprodukt zugeschriebene Wert von B ist aus den Konstanten dieses und des folgenden α-Strahlers berechnet worden.

2) St. Meyer, Wien. Ber. (IIa) **125**, 201, 1916 bestimmt für die 3 Zerfallsreihen die Werte 81, 77 und ca. 71 für N.

3) Bei Benutzung der Halbwertszeit 3,92 sec für *Ac Em*. Nach R. Schmid, Wien. Ber. (IIa) **126**, 1065, 1917; Mitt. a. d. Inst. f. Radiumforsch. Nr. 103. — Verwendet man die von St. Meyer u. Fr. Paneth, Wiener Ber. (IIa) **127**, 147, 1918; Mitteil. a. d. Inst. f. Radiumforsch. Nr. 104 angegebenen Halbwertszeiten (für *Rd Ac* 18,9 Tage, *Ac X* 11,2 Tage, *Ac C* 2,16 Min.), so erhält man bei gleichzeitiger Benutzung der Halbwertszeit 3,92 sec für *Ac Em* die folgenden Werte von B für die *Ac*-Reihe: ca. 58, 46, 57 und 52, im Mittel gleich 53.

ϱ_1 sind in Tab. II zusammengestellt. Die Werte von v_1 wurden wiederum dem genannten Lehrbuch entnommen. Es liegt die Annahme nahe,

Tabelle II.

U-Ra-Reihe	$\varrho_1 \cdot 10^{13}$ $q_1 = 1$	Th-Reihe	$\varrho_1 \cdot 10^{13}$ $q_1 = 1$	Ac-Reihe	$\varrho_1 \cdot 10^{13}$ $q_1 = 1$
U I	1,15	*Th*	1,13	*Ac*	1,03
U II	1,10	*RdTh*	1,00	*RdAc*	0,940
Jo	1,08	*ThX*	0,963		0,969
Ra	1,05	*ThEm*	0,919	*AcX*	0,963
RaEm	0,975	*ThA*	0,878	*AcEm*	0,883
RaA	0,935	*ThC*	0,924	*AcA*	0,849
RaC	0,823	*ThC'*	0,767	*AcC*	0,908
RaF	1,000				

daß die Beträge von ϱ_1 von der Größenordnung der Kernradien sind. Da letztere nach Rutherford 10^{-12} cm nicht überschreiten dürften, so erscheinen die vorliegenden Werte von ϱ_1 nicht undenkbar. Man hat vielleicht Quantenzahlen, die größer als 1 sind, einzuführen. Es fällt auf, daß bei *RaF*, *ThC* und *AcC* eine Zunahme von ϱ_1 stattfindet. Es ist möglich, daß hier kleinere Werte der Quantenzahl eintreten, so daß ϱ_1 nunmehr auch jetzt abnimmt. Vielleicht besteht ein Zusammenhang mit den bei *RaC*, *ThC* und *AcC* stattfindenden Verzweigungen der Zerfallsreihen.

Es soll nun die Formel (11) näher betrachtet werden. Die rechte Seite dieser Gleichung dürfte für eine Zerfallsreihe konstant sein, abgesehen vielleicht von den soeben erwähnten Körpern *RaF*, *ThC* und *AcC*. Der auf der linken Seite auftretende Quotient $\frac{q_r}{q_1}$ ist wohl auch im allgemeinen konstant. Eine für unsere Betrachtungen vermutlich bei den meisten Zerfallsprodukten nur geringfügige Änderung könnte $\prod \frac{q_r}{q_1}$ dadurch erleiden, daß bei jeder α-Strahlung eine Partikel in Wegfall kommt und, wie oben angenommen, eine neue in Wirksamkeit tritt. Hierdurch könnte auch $\prod \frac{\mu_1}{\mu_r}$ sich etwas ändern[1]). Mit gewissen Einschränkungen können wir also die Bedingungsgleichung aufstellen

$$a_1 \prod_2^N \frac{a_r \varrho_1^2}{\varrho_r^2} = \text{const} \qquad (13)$$

und statt (9) schreiben

$$\lambda = \nu_1^N \cdot \text{const.} \qquad (14)$$

Wir wollen nun den Fall betrachten, daß bei Aussendung eines α-Strahles die Bewegung der übrigen Partikeln und das in (13) auftretende Produkt der Größen a_r keine Änderung erleidet. Die Atomumwandlung kommt unter Mitwirkung von N-Teilchen mit den Bahnradien $\varrho_1, \varrho_2, \ldots \varrho_N$ zustande. Das Eintreten der nächsten α-Strahlung hängt von N Partikeln ab, deren Bahnradien nunmehr $\varrho_2, \varrho_3, \ldots \varrho_{N+1}$ sind. Bei der Aufstellung der Bedingung (13) ist das Produkt auszurechnen:

$$\prod_3^{N+1} \frac{\varrho_2}{\varrho_r} = \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^{N-1} \cdot \prod_3^{N+1} \frac{\varrho_1}{\varrho_r}$$

$$= \frac{\varrho_1}{\varrho_{N+1}} \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^N \cdot \prod_2^N \frac{\varrho_1}{\varrho_r}.$$

Damit Gleichung (13) erfüllt ist, muß sein:

$$\varrho_{N+1} = \varrho_1 \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^N. \qquad (15)$$

Diese Beziehung muß auch dann gelten, wenn die einzelnen Radien ϱ_r zwar bei einer α-Strahlumwandlung nicht unverändert bleiben, aber ihre gegenseitigen Verhältnisse beibehalten werden, denn Formel (13) enthält nur die Quotienten der Radien.

Bei der dargestellten Anschauung ändert sich die Zerfallskonstante nach (14) in der Nten Potenz der Umlaufszahl ν_1, obwohl bei der Aussendung eines α-Strahles keine sonstige Änderung im Kern eintritt und nicht etwa N-Partikeln eine andere Umlaufszahl annehmen[1]). Das Auftreten der Nten Potenz liegt daran, daß an Stelle des ausgestrahlten Teilchens ein neues (Index $N + 1$) in Wirksamkeit tritt, von welchem die Stabilität des Kernes abhängt. Gleichung (15) macht in Zusammenhang mit (4) und (6) das Vorhandensein des Exponenten N verständlich.

Schließlich sei noch auf eine andere Anschauungsweise hingewiesen. Gleichung (15) legt die Vorstellung nahe, daß für $r = 0, 1, 2$ usw. die Beziehung

$$\varrho_{r+1} = \varrho_1 \left(\frac{\varrho_2}{\varrho_1}\right)^r$$

gilt, also die Bahnradien von je 2 bei unserer Numerierung aufeinanderfolgenden Partikeln in demselben Verhältnis zueinander stehen. Der Atomkern wäre etwa scheibenförmig auf-

1) Denkt man sich den Kern aus *He*- und *H*-Atomen aufgebaut, so bedeutet μ_r die Masse des Atoms eines dieser Elemente. — Die letzten Betrachtungen erfahren eine Änderung, wenn die α-Strahlen von einem Kreis ausgehen, der mehrere Teilchen enthält und hierbei für das Impulsmoment ein Ansatz von der auf S. 176 erwähnten besondern Art gültig ist.

1) F. A. Lindemann bezeichnet es (l. c. S. 563) als Hauptschwierigkeit seiner Hypothese, daß sich die Energie der wirksamen Partikeln von Zerfallsstufe zu Zerfallsstufe ändert.

gebaut zu denken. Das jeweils zu äußerst umlaufende Teilchen würde als α-Strahl ausgesandt. Nimmt man an, daß im Laufe des Zerfalls die Bahnradien unverändert bleiben, so gibt Tabelle II die Werte von ϱ_1, ϱ_2 usw. für U I, Th und Ac an. Diese Größen ϱ_r erfüllen nicht die zuletzt angeführte Gleichung. Daher hätte man wohl vorauszusetzen, daß die Bahnradien jetzt nicht unverändert bleiben, wofern man den aufgeführten Zahlen eine hinreichende Genauigkeit zuschreiben kann.

Zusammenfassung.

Entsprechend wie in einer Arbeit von F. A. Lindemann[1]) wird angenommen, daß das Instabilwerden des Atomkerns von einer größeren Anzahl Teilchen abhängt, welche sich in ihm voneinander unabhängig bewegen. Es wird vorausgesetzt, daß diese Partikeln bei ihrem kreisförmigen Umlauf das Bohrsche Gesetz betreffend die Größe des Impulsmomentes befolgen und daß ein α-Strahlenteilchen die beobachtbare Geschwindigkeit auch im Kern besitzt.

Aus der Geiger-Nuttallschen Beziehung zwischen der Zerfallskonstante und Reichweite der α-Strahlen und der bekannten Relation zwischen deren Geschwindigkeit und Reichweite läßt sich eine Formel ableiten, welche die Zerfallskonstante als Funktion der Umlaufszahl des Teilchens ausdrückt, das als α-Strahl zur Aussendung gelangt. Eine entsprechende Formel ergibt sich auf rein theoretischem Wege. Es wird eine Bedingungsgleichung aufgestellt, welche erfüllt sein muß, damit beide Formeln identisch werden. Sie wird auf den Fall angewandt, daß die Bewegung der betrachteten Partikeln im Kern während der einzelnen Stufen des Atomzerfalls keine Änderung erleidet. Zum Schluß wird auf die Möglichkeit hingewiesen, daß je zwei ihrer Größe nach aufeinanderfolgende Bahnradien der genannten Teilchen in demselben Verhältnis zueinander stehen.

1) F. A. Lindemann, l. c.

Dresden, im Oktober 1919.

(Eingegangen 23. Oktober 1919.)

Die van der Waalsschen Kohäsionskräfte.

Von P. Debye.

Der große Erfolg der van der Waalsschen Zustandsgleichung beruht bekanntlich wesentlich auf der Einführung von anziehenden Kräften zwischen den Molekülen. Sie bedingen den zum äußeren zusätzlichen inneren, dem Quadrate der Dichte proportionalen Druck. Diese anziehenden Kräfte sind nach van der Waals zwischen Molekülen beliebiger Art vorhanden, sie sind eine allgemeine Eigenschaft der Materie und es scheint mir daher von besonderem Interesse, über die Ursache dieser universellen Anziehung nachzudenken.

Heutzutage wissen wir mit vollständiger Sicherheit, daß das Molekül ein System elektrischer Ladungen ist. Man wird daher versuchen, einen elektrischen Ursprung für die van der Waalsschen Kräfte zu finden. Dabei wird es sicher unnötig sein, auf Besonderheiten des Molekülbaues einzugehen: Eine so allgemeine Eigenschaft der Materie, wie die van der Waalssche Anziehung kann zu ihrer Begründung nur die Kenntnis ganz äußerlicher und für alle Moleküle gleichartiger Eigenschaften ihres Aufbaues benötigen.

Im Folgenden soll gezeigt werden, daß es tatsächlich zum Verständnis genügt, wenn man weiß, daß die Moleküle elektrische Systeme sind, in denen überdies die Ladungen nicht vollständig starr an Ruhelagen gebunden sind. So wird ein Zusammenhang entstehen zwischen der van der Waalsschen Anziehungskonstante einerseits, Brechungsexponent und Verbreiterung von Spektrallinien andererseits.

§ 1. Die van der Waalssche Gleichung.

Wir fangen damit an, daß wir für das Folgende einige bekannte Beziehungen zusammenstellen.

Hat man ein Gas vom wirklichen Volumen V und vom Druck p bei der absoluten Temperatur T; ist dessen Masse G, das Molekulargewicht M und bedeutet R die universelle Gaskonstante ($R = 8{,}31 \cdot 10^7$ erg) dann gilt nach van der Waals die Zustandgsgleichung

$$\left(p + \frac{A}{V^2}\right)(V - B) = G\frac{R}{M}T. \tag{1}$$

Darin bedeutet B das Vierfache des wirklichen Volumens der in V enthaltenen Moleküle, während A die gegenseitige Anziehung der Moleküle mißt.

In bekannter Weise schließt man aus dieser Gleichung für den kritischen Punkt die Beziehungen

$$p_k = \frac{1}{27}\frac{A}{B^2}, \quad V_k = 3B, \quad \frac{GR}{M}T_k = \frac{8}{27}\frac{A}{B}. \tag{2}$$

Die Gesamtenergie des Gases ist teils kinetisch und teils potentiell. Über die Abhängigkeit derselben vom Volumen gibt am einfachsten die thermodynamische Beziehung

$$\frac{\partial U}{\partial V} = T^2 \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{p}{T}\right) \qquad (3)$$

Aufschluß. Einsetzen der Zustandsgleichung in das rechte Glied jener Beziehung liefert nämlich

$$\frac{\partial U}{\partial V} = \frac{A}{V^2} \qquad (4)$$

oder integriert

$$U = \Psi(T) - \frac{A}{V} \cdot \qquad (4')$$

Um die van der Waalssche Konstante A zu berechnen, wird es also nur nötig sein, die potentielle Energie des Gases, in der Formel durch $-\frac{A}{V}$ gemessen, zu bestimmen.

Neben der eben angegebenen auf eine beliebige Menge G des Gases bezogenen Form der Gleichungen werden wir noch eine auf das Mol bezogene benutzen. Nennt man

$$\mathfrak{v} = \frac{MV}{G}$$

das Molekularvolum und führt statt A und B die Konstanten a und b ein durch die Beziehungen

$$a = \frac{M^2}{G^2} A, \; b = \frac{M}{G} . B, \qquad (5)$$

so lautet die van der Waalssche Gleichung

$$\left(p + \frac{a}{\mathfrak{v}^2}\right)(\mathfrak{v} - b) = RT, \qquad (6)$$

während sich für die kritischen Größen ergibt

$$p_k = \frac{1}{27}\frac{a}{b^2}, \; \mathfrak{v}_k = 3b, \; RT_k = \frac{8}{27}\frac{a}{b} \cdot \qquad (7)$$

Schließlich ergibt sich für die pro Mol gerechnete Energie $\mathfrak{u} = MU/G$ der Wert:

$$\mathfrak{u} = \psi(T) - \frac{a}{\mathfrak{v}} \cdot \qquad (8)$$

§ 2. Die Ursache der Kohäsion.

Denkt man sich die Moleküle zunächst als starre elektrische Systeme, so wird natürlich zwischen zwei solchen Gebilden stets eine Kraft vorhanden sein, welche aber je nach der gegenseitigen Orientierung nach Größe und Vorzeichen wechseln kann. Nun kommen im Gase alle möglichen Orientierungen vor, so daß man zur Berechnung der für die Zustandsgleichung in Frage kommenden Anziehungen eine Mittelung über jene Orientierungen wird vornehmen müssen.

Im allgemeinen hätte man bei der Ausführung dieses Verfahrens die Wahrscheinlichkeit einer beliebigen Orientierung zu bestimmen auf Grund des Boltzmann-Maxwellschen Prinzips. Je höher aber die Temperatur ist, um so weniger tritt in diesem Gesetz die Abhängigkeit von der gegenseitigen Energie in den Vordergrund. In der Grenze für hohe Temperaturen wird man demnach alle Orientierungen im Raum als gleichberechtigt anzusehen haben. Offenbar verlangt der van der Waalssche Ansatz, daß gerade in diesem Grenzfalle die charakteristische in die Gleichung eingeführte Kohäsion übrig bleibt.

Nun kann man sich aber leicht überzeugen, daß zwei starre elektrische Systeme im Mittel gar keine Kraft aufeinander ausüben. Tatsächlich kann das Potential, welches in einem entfernten Punkt von einem Molekül herrührt, im Mittel angesehen werden als hervorgebracht von einer Reihe zentrierter Kugeln, welche mit konstanter elektrischer Oberflächendichte belegt sind. Hat nämlich das Molekül alle möglichen Orientierungen im Raum, so kommt jede Ladung bei der Mittelung in jeden Punkt einer Kugel gleich oft. Da man nun weiß, daß eine mit konstanter Oberflächendichte geladene Kugel nach außen so wirkt als ob die Gesamtladung in ihrem Mittelpunkt konzentriert wäre und das Molekül im ganzen umgeladen ist, so ist das Potential im Aufpunkt im Mittel Null. Es besteht also auch im Mittel zwischen zwei starr gedachten Molekülen keine Kraftwirkung.

Die ganze Sachlage wird aber sofort wesentlich anders, wenn man bedenkt, daß die Moleküle nicht vollkommen starr sind. Der Umstand, daß jedes Gas einen von 1 verschiedenen Brechungsexponenten zeigt, bedeutet ja nichts anderes, als eine Beweglichkeit der Einzelladungen im Molekül. Berücksichtigt man nun diesen Umstand, so erhellt, daß ein Molekül im elektrischen Felde $\mathfrak{E}$ eines anderen ein elektrisches Moment bekommt, welches proportional mit $\mathfrak{E}$ ist. Dadurch entsteht zwischen den beiden Molekülen eine gegenseitige Energie, welche proportional Feldstärke mal Moment, d. h. proportional dem Quadrate von $\mathfrak{E}$ ist. Die entsprechende Kraftwirkung kann also im Mittel nicht verschwinden. Überdies überzeugt man sich leicht, daß die Kraft stets eine anziehende ist, so daß man schon hier vermuten kann in ihr die gesuchte universelle van der Waalssche Anziehung gefunden zu haben[1]).

---

1) Der Tatbestand möge an Hand des folgenden Beispiels beleuchtet werden. Zwei Dipole stehen einander gegenüber:

a) in einer Stellung I. Dann ist die Hauptwirkung eine abstoßende. Infolge der Wirkungen der Feldstärken $\mathfrak{E}$ auf die nicht starr verbundenen Ladungen werden dieselben so verschoben, daß die elektrischen Momente verkleinert werden. Dadurch nimmt die abstoßende Kraft ab, oder anders ausgedrückt: zu der Hauptwirkung ist noch als Nebenwirkung eine anziehende Kraft hinzugetreten;

b) in einer Stellung II. Dann ist die Hauptwirkung eine anziehende. Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ aber verschiebt jetzt



Nachdem dieses erkannt, handelt es sich nur darum, die potentielle Energie des Gases zu berechnen. Dazu genügt es offenbar, wenn man weiß, wieviel Arbeit man zu leisten hat, uuı ein Molekül aus dem Inneren des Gases durch dessen Oberfläche hindurch an einen genügend weit entfernten Punkt zu bringen. Die Berechnung dieser Arbeit geschieht am besten in zwei Schritten.

Zunächst beantworte man die Frage: Wie groß ist die Arbeit, welche zu leisten ist, um ein polarisierbares Molekül, dessen elektrisches Moment

$$\mathfrak{m} = \alpha \mathfrak{E} \tag{9}$$

gesetzt werden kann, aus einem feldfreien Punkt an eine Stelle zu bringen, wo die Feldstärke $\mathfrak{E}$ herrscht?

Eine einfache Überlegung liefert für diesen Arbeitsbetrag den Wert

$$-\frac{\alpha}{2}\mathfrak{E}^2 \tag{10}$$

unabhängig vom Wege, auf dem das Molekül bewegt wurde[1]).

Dann beantworte man die Frage: Wie groß ist das mittlere Quadrat der elektrischen Feldstärke in einem Punkte im Innern des Gases? Durch Kombination der beiden Antworten findet sich dann leicht die gesuchte Arbeitsleistung.

die Ladungen so, daß die Momente zunehmen. Dadurch wird nunmehr die Hauptwirkung verstärkt oder in anderer Ausdrucksweise: es ist wieder eine anziehende Kraft als Nebenwirkung hinzugetreten. Bei der Mittelung über alle möglichen Orientierungen verschwindet die Hauptwirkung; die Nebenwirkung dagegen ist stets anziehend und bleibt demnach auch bei der Mittelung als solche erhalten.

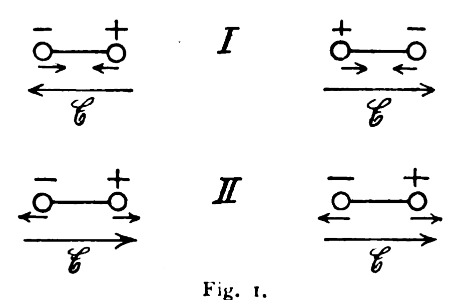


Fig. 1.

Man kann übrigens auch bemerken, daß im Sinne unserer Auffassung die van der Waalssche Kraft denselben Ursprung hat wie die Kraftwirkungen, welche beim Grundversuch der Elektrostatik in Erscheinung treten. Dabei zieht ein geladener Körper andere Körper an unabhängig davon, ob sie Leiter oder Isolatoren sind, d. h. es treten Kräfte auf, welche die beweglichen Teilchen von Stellen kleinerer zu Stellen größerer Kraftliniendichte treiben. In gleicher Weise erfahren die Moleküle Kräfte, welche bestrebt sind, die Teilchen einander zu nähern und damit in möglichst starke Felder hineinzubringen.

1) Das entsprechende Resultat für ein magnetisches Feld findet z. B. Anwendung bei der Bestimmung der Suszeptibilität schwach magnetisierbarer Körper mittels der Kraftwirkung, welche dieselben in einem inhomogenen Felde erfahren (Curie).

§ 3. Der quadratische Mittelwert der elektrischen Feldstärke.

Besteht ein Molekül aus elektrischen Ladungen e_k, welche an Stellen mit den Koordinaten ξ_k, η_k, ζ_k liegen, begibt man sich in einen im Abstande r vom Nullpunkt liegenden Aufpunkt mit den Koordinaten x, y, z und entwickelt das Potential nach negativen Potenzen von r, so erhält man in bekannter Weise:

$$\left.\begin{aligned} \varphi = \frac{\Sigma e_k}{r} + \frac{1}{r^2}\Big[\frac{x}{r}\Sigma e_k\xi_k + \frac{y}{r}\Sigma e_k\xi_k + \\ + \frac{z}{r}\Sigma e_k\zeta_k\Big] + \frac{1}{r^3}\Big[\frac{1}{2}\Big(3\frac{x^2}{r^2}-1\Big)\Sigma e_k\xi_k^2 + \\ + \frac{1}{2}\Big(3\frac{y^2}{r^2}-1\Big)\Sigma e_k\eta_k^2 + \frac{1}{2}\Big(3\frac{z^2}{r^2}-1\Big)\Sigma e_k\zeta_k^2 + \\ + \frac{3xy}{r^2}\Sigma e_k\xi_k\eta_k + \frac{3yz}{r^2}\Sigma e_k\eta_k\zeta_k + \\ + \frac{3zx}{r^2}\Sigma e_k\zeta_k\xi_k + \Big] + \ldots \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Das Molekül ist ungeladen, also verschwindet das erste Glied.

Es kann nun vorkommen, daß der Schwerpunkt der positiven Ladungen nicht mit dem Schwerpunkt der negativen Ladungen übereinstimmt. Dann hat das zweite Glied einen endlichen Betrag; man sagt, das Molekül trägt einen elektrischen Dipol. Ob ein Molekül dieser Kategorie angehört, entscheidet man z. B. mit Hilfe von Dielektrizitätskonstante δ und Brechungsexponente $\mathfrak{n}$. Das Molekül hat einen Dipol, wenn das Maxwellsche Gesetz $\delta = \mathfrak{n}^2$ nicht erfüllt ist. Oder man stellt fest, daß eine anormale Temperaturabhängigkeit von δ besteht, insofern trotz konstant gehaltener Dichte δ mit zunehmender Temperatur abnimmt[1]). Oder auch das Molekül hat einen Dipol, wenn anormale elektrische Dispersion im Drudeschen Sinne vorhanden ist[2]).

Gase von dieser Art zeigen bei genügender Größe des elektrischen Momentes ausgeprägte Assoziationserscheinungen[3]) und damit zugleich

1) P. Debye, diese Zeitschr. **13**, 97, 1912; M. Jona, diese Zeitschr. **20**, 14, 1919.

2) P. Debye, Verhandl. d. D. Phys. Ges. **15**, 777, 1913.

3) Für Fragen, welche mit der Zustandsgleichung in Zusammenhang stehen, unterscheidet man die Stoffe in normale und anormale (J. P. Kuenen, Zustandsgleichung und Kontinuitätstheorie, Braunschweig 1907, S. 139). Ich bin der Meinung, daß diese Unterscheidung nichts anderes

verhältnismäßig starke Abweichungen von der einfachen van der Waalsschen Gleichung. Wir werden deshalb an dieser Stelle solche Gase von der Betrachtung ausschließen; ihr Verhalten wird demnächst näher beleuchtet werden.

Für unsere Zwecke wird nunmehr das Potential durch das dritte Glied dargestellt. Die Moleküle verhalten sich dann wie elektrische Quadrupole. Nun kann man bekanntlich das Koordinatensystem in das Molekül so hineinlegen, daß

$$\Sigma e_k \xi_k \eta_k = \Sigma e_k \eta_k \zeta_k = \Sigma e_k \zeta_k \xi_k = 0,$$

so daß das ganze Molekül charakterisiert werden kann durch die drei elektrischen Hauptträgheitsmomente

$$\Theta_1 = \Sigma e_k \xi_k^2, \quad \Theta_2 = \Sigma e_k \eta_k^2, \quad \Theta_3 = \Sigma e_k \zeta_k^2. \quad (12)$$

Ist $\Theta_1 = \Theta_2 = \Theta_3$, dann verschwindet auch dieses dritte Glied und man müßte das nächste Glied der Reihenentwicklung benutzen. Es ist wahrscheinlich, daß diese Bedingung bei den meisten Gasen nicht erfüllt ist und wir werden deshalb mit dem Potentialausdruck für Quadrupole rechnen.

Man bilde jetzt aus dem angegebenen Ausdruck für das Potential die elektrische Feldstärke in einen um r entfernten Punkt nach der Beziehung

$$\mathfrak{E} = -\,grad\,\varphi,$$

berechne das Quadrat derselben und mittele über alle möglichen Orientierungen des Moleküls. Als Resultat dieser ganz elementaren Rechnung bekommt man dann für den gesuchten quadratischen Mittelwert eine Größe, welche nur abhängt von einer Kombination der drei Hauptträgheitsmomente, die mit τ^2 bezeichnet werden möge und den Wert hat

$$\tau^2 = \Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 - (\Theta_1\Theta_2 + \Theta_2\Theta_3 + \Theta_3\Theta_1). \quad (13)$$

Der Mittelwert selbst ist mit dieser Abkürzung gleich

$$\frac{3\tau^2}{r^8}. \quad (14)$$

Sind nun pro Kubikzentimeter n Moleküle vorhanden, dann bekommt man den in einem Punkt des Gases herrschenden quadratischen Mittelwert der elektrischen Feldstärke, indem man den Wert

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \int_{r=d}^{\infty} n\, 4\pi r^2\, dr\, \frac{3\tau^2}{r^8} = \frac{12\pi}{5}\,\frac{n\tau^2}{d^5} \quad (15)$$

bestimmt. Dabei ist die Integration erstreckt worden von einer unteren Grenze d an. Die Größe d steht für den Durchmesser eines Moleküls und ist gleich dem kleinsten Abstande, bis auf welchen sich zwei Molekülmittelpunkte nähern können[1]).

§ 4. Berechnung der van der Waalsschen Kohäsionskonstante.

Die Kombination von (10) und (15) würde für die potentielle Energie eines Moleküls im Gasinnern den Wert

$$-\frac{\alpha}{2}\,\overline{\mathfrak{E}^2} = -\frac{6\pi}{5}\,\frac{n\alpha\tau^2}{d^5} \quad (16)$$

liefern, wenn das elektrische Feld allein von den ursprünglich vorhandenen Molekülen herrühren würde und das hereingebrachte Molekül lediglich als polarisierbar und nicht als felderzeugend anzusehen wäre. Tatsächlich aber ist es von einem elektrischen Felde umgeben und polarisiert infolgedessen die gesamten schon vorhandenen Teilchen. Man sieht ohne weiteres, daß dementsprechend die bei dem Hereinbringen eines Moleküls in das Gas geleistete Arbeit doppelt so groß ist, als in (16) angegeben.

Sind nun schon Z-Moleküle in V enthalten, so daß $n = Z/V$ und fügt man dZ-Moleküle hinzu, so leistet man die Arbeit

$$-\frac{12\pi}{5}\,\frac{\alpha\tau^2}{d^5}\,\frac{Z\,dZ}{V};$$

die gesamte potentielle Energie eines Gases mit N-Molekülen im Volumen V beträgt demnach

$$-\frac{6\pi}{5}\,\frac{\alpha\tau^2}{d^5}\,\frac{N^2}{V}.$$

Andererseits fanden wir im § 1 für diese Energie den Wert $-\frac{A}{V}$, so daß wir erhalten

$$A = \frac{6\pi}{5}\,\frac{\alpha\tau^2}{d^5}\,N^2. \quad (17)$$

Die Gesamtenergie wird also richtig umgekehrt proportional dem Volumen. Gehen wir noch von

bedeutet, wie eine Einteilung der Moleküle in solche, die keine und solche, die wohl Dipole tragen. Der Unterschied der beiden Gruppen ist indessen kein absolut scharfer. Bei Molekülen mit relativ kleinen Momenten (CO, CO_2) hängt es von dem betrachteten Temperaturbereich ab, ob man die Substanz zur ersten oder zweiten Gruppe zählen will.

1) Zur Bestimmung von $\overline{\mathfrak{E}^2}$ kann man nicht die von J. Holtsmark, diese Zeitschr. **20**, 162, 1919, entwickelte Wahrscheinlichkeitsformel benutzen. An jener Stelle wurde nämlich der Durchmesser der Moleküle zu 0 angenommen und dem entspricht es, daß aus den Holtsmarkschen Formeln $\overline{\mathfrak{E}^2} = \infty$ folgt. Es möge in diesem Zusammenhange bemerkt werden, daß auch bei dem von Holtsmark behandelten Problem eine Berücksichtigung der Endlichkeit der Durchmesser erwünscht wäre, um so mehr, als dadurch die Druckabhängigkeit des Verbreiterungseffekts beeinflußt werden dürfte.

Tabelle I.

	T_k	p_k (atm.)	a dyne cm⁴	b cm³	d cm	P_0 cm⁻³	τ gr $^1/_2$ cm $^7/_2$ sec⁻¹
He . . .	5	2,75	$0{,}026 \cdot 10^{12}$	18,6	$2{,}44 \cdot 10^{-8}$	0,52	$2{,}84 \cdot 10^{-26}$
A	151	48,0	1,37 „	32,2	2,93 „	4,17	11,2 „
K . . .	210	54,3	2,34 „	39,6	3,14 „	6,25	14,5 „
X	288	57,2	4,17 „	51,6	3,42 „	10,2	18,9 „
H_2*) . .	32	19,4	0,15 „	16,6	2,36 „	2,03	3,20 „
N_2 . . .	128	33,6	1,40 „	39,0	3,12 „	4,35	13,3 „
O_2 . . .	154	50,8	1,34 „	31,0	2,90 „	3,98	11,2 „
Cl_2 . . .	419	93,5	5,39 „	45,8	3,30 „	11,6	18,3 „
CH_4 . .	191	54,9	1,91 „	35,6	3,04 „	6,36	11,9 „
C_2H_6 . .	305	48,9	5,47 „	63,9	3,68 „	11,3	25,0 „
C_5H_{12} .	470	33,0	19,2 „	145	4,85 „	25,7	60,7 „
C_2H_4 . .	283	51,1	4,50 „	56,7	3,54 „	9,42	22,1 „

*) Aus dem bekannten Wasserstoffmodell würde sich ergeben $\tau = 2{,}07 \cdot 10^{-26}$.

der auf ein beliebiges Volumen V bezogenen Konstante A über auf die auf das Molvolumen $\mathfrak{v}$ bezogene Konstante a, so ergibt sich

$$a = \frac{6\pi}{5} \mathsf{N}^2 \frac{\alpha\tau^2}{d^6}, \qquad (18)$$

wenn N ($N = 6{,}06 \cdot 10^{23}$) die Loschmidtsche Zahl bedeutet. Die Konstante α ist ohne weiteres auf experimentell bestimmte Größen zurückzuführen. Bekanntlich ist es üblich, die Molekularrefraktion P einer Substanz vom Molekulargewicht M und der Dichte ϱ aus ihren Brechungsexponenten $\mathfrak{n}$ zu bestimmen mittels der Gleichung

$$\frac{\mathfrak{n}^2 - 1}{\mathfrak{n}^2 + 2} \frac{M}{\varrho} = P. \qquad (19)$$

Der Grenzwert, den diese Größe für die Schwingungszahl o erhält, ist nach der Theorie der Dispersion nichts anderes wie unsere gesuchte Größe α, multipliziert mit $\frac{4\pi}{3}\mathsf{N}$, so daß wir haben[1])

$$P_0 = \frac{4\pi}{3} \mathsf{N} \cdot \alpha. \qquad (20)$$

Infolgedessen kann die Formel für a auch geschrieben werden

$$a = \frac{9}{10} P_0 \frac{\mathsf{N} \cdot \tau^2}{d^6}. \qquad (21)$$

Die Kombination τ unserer elektrischen Hauptträgheitsmomente, welche wir also „mittleres elektrisches Trägheitsmoment" bezeichnen wollen, würde man entnehmen können aus der Verbreiterung der Spektrallinien durch zugesetzte Gase[1]), wenn genügend Messungen auf diesem Gebiete vorlägen. Leider ist das nicht der Fall, so daß wir uns vorläufig begnügen müssen mit der Bemerkung, daß die Größe τ von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-26}$ sein muß (Ladung eines Elektrons mal Quadrat eines Moleküldurchmessers).

Die Größe d schließlich folgt aus der van der Waalsschen Konstante b, da bekanntlich

$$b = 4\mathsf{N}\frac{4\pi}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^2 = \frac{2\pi}{3}\mathsf{N}d^3.$$

Andererseits folgt b selbst aus dem kritischen Molekularvolumen $\mathfrak{v}_k = 3b$ oder wenn dieses, wie meistens, nicht beobachtet ist, aus kritischem Druck und kritischer Temperatur nach der Formel

$$\frac{RT_k}{p_k} = 8\,b. \qquad (22)$$

Um nun zu zeigen, inwieweit die für die van der Waalssche Konstante abgeleitete Formel ein Bild der tatsächlichen Verhältnisse gibt, gebe ich die Tabelle I.

In der ersten Kolonne stehen die Namen der Gase, in der zweiten und dritten Kolonne sind die beobachteten Werte für kritische Temperatur und kritischen Druck eingetragen (letzerer in Atmosphären). Die vierte Kolonne enthält die aus diesen Angaben berechnete van der Waalssche Konstante a, die fünfte Kolonne entsprechend gerechnet, die zweite die van der Waalssche Konstante b. Aus letzterer folgen dann in der sechsten Kolonne die Durchmesser d. Schließlich enthält die siebente Kolonne die aus den beobachteten Brechungsexponenten abgeleitete Molekularrefraktion.

Nunmehr werden in (21) die Werte von a, P_0 und d eingesetzt und daraus das mittlere elektrische Trägheitsmoment τ berechnet.

1) Es ist offenbar gerechtfertigt, mit dem Grenzwerte für die Schwingungszahl o zu rechnen. Man bedenke nur, daß die Eigenschwingungszahlen der für die Dispersion maßgebenden Elektronen von der Größenordnung 10^{15} sec⁻¹ sind und stelle dieser Zahl gegenüber die Anzahl Male, daß ein Molekül bei mittlerer Temperatur einen Moleküldurchmesser zurücklegt. Die letztere Zahl hat die Größenordnung 10^{12} sec⁻¹.

1) P. Debye, diese Zeitschr. **20**, 160, 1919; J. Holtsmark, diese Zeitschr. **20**, 162, 1919; J. Holtsmark, Ann. d. Phys. **58**, 577, 1919.

Soll unsere Theorie Vertrauen verdienen, dann müssen sich für τ Werte von der Größenordnung $5 \cdot 10^{-26}$ ergeben. Die letzte Kolonne der Tabelle zeigt, daß dem wirklich so ist. Auch mag noch hingewiesen werden auf den a priori zu erwartenden Anstieg der τ-Werte mit zunehmender Kompliziertheit des Moleküls, ein Verhalten, welches die drei zuletzt angeführten Zahlen wirklich zeigen.

§ 5. Die Oberflächenspannung.

Nachdem wir nun behaupten im Besitze des wirklichen Kraftgesetzes zwischen den Molekülen zu sein[1]), ist damit zugleich genau definiert, was man unter dem Radius der Wirkungssphäre eines Moleküls zu verstehen hat. Diese Größe aber ist von wesentlicher Bedeutung bei der Berechnung der Oberflächenspannung und wir werden demnach hoffen können, die beobachteten Werte derselben direkt aus der van der Waalsschen Kohäsionskonstanten berechnen zu können. Eine genaue Theorie derselben müßte Rücksicht nehmen auf die Temperaturbewegung. Hier wollen wir statt dessen uns begnügen mit einer Theorie, welche die Temperaturabhängigkeit noch unbeachtet läßt und welche uns also nur die auf $T = 0$ extrapolierten Werte der Oberflächenspannung zu liefern vermag[2]).

Senkrecht zur Oberfläche der Flüssigkeiten rechnen wir eine z-Koordinate, welche in der Oberfläche selbst den Wert 0 hat, außerhalb der Flüssigkeit positiv und innerhalb derselben negativ ist. Nimmt man nun einen Aufpunkt in der Nähe der Oberfläche an, so wird es keine Moleküle mehr geben, welche im positiven z-Gebiet liegen, so daß auch das mittlere Quadrat der elektrischen Feldstärke stetig abnehmen muß, wenn man sich aus dem Innern der Flüssigkeit durch die Begrenzungsfläche hindurch in den materiefreien Raum begibt. Es ist eine elementare Rechnung, durch welche die Abhängigkeit von $\overline{\mathfrak{E}^2}$ von der z-Koordinate bestimmt wird. Das Resultat derselben wird durch die folgenden Formeln und die zugehörige Fig. 2 dargestellt.

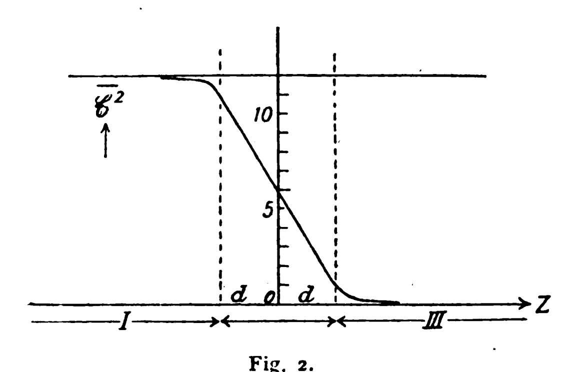


Fig. 2.

$$\text{I)} \quad \overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{12\pi}{5}\frac{n\tau^2}{d^5} + \frac{\pi}{5}\frac{n\tau^2}{z^5},$$

$$\text{II)} \quad \overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{\pi}{5}\frac{n\tau^2}{d^5}\left(6 - \frac{5z}{d}\right),$$

$$\text{III)} \quad \overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{\pi}{5}\frac{n\tau^2}{z^5}.$$

Im Innern der Flüssigkeit, genügend weit unterhalb der Oberfläche, gilt nach Formel I der alte Wert von $\overline{\mathfrak{E}^2}$. Nähert man sich derselben, so muß von diesem Werte ein Betrag abgezogen werden, welcher umgekehrt proportional der fünften Potenz der Tiefe unter der Oberfläche ist. Dieses gilt bis zum Abstande d von der Oberfläche. Von da an nimmt, wie Formel II zeigt, das mittlere Quadrat der Feldstärke proportional mit z ab, bis ein Punkt erreicht wird, welcher um d über der Oberfläche liegt. Hier setzt die Formel III ein, wonach nunmehr mit steigender Koordinate $\overline{\mathfrak{E}^2}$ umgekehrt proportional mit der fünften Potenz des Abstandes von der Oberfläche abnimmt.

Wir denken uns nun eine Flüssigkeit vom Volumen V mit einer Oberfläche F. Mit Rücksicht auf die Veränderungen, welche $\overline{\mathfrak{E}^2}$ in der Nähe der Oberfläche erfährt, würde es fehlerhaft sein, wenn man die gesamte potientielle Energie einfach proportional dem Volumen ansetzen würde. Vielmehr kommt noch ein der Oberfläche proportionaler Betrag hinzu. Bedeutet wieder n die Zahl der Moleküle pro Kubikzentimeter, so findet man leicht für die ganze potentielle Energie den Wert

$$-\frac{6\pi}{5}\alpha\frac{n^2\tau^2}{d^5}V + \frac{3\pi}{8}\alpha\frac{n^2\tau^2}{d^4}F \qquad (23)$$

auf Grund der eben angegebenen Formeln I, II, III. Man kann nun die Oberflächenspannung definieren als Energie pro Flächeneinheit der Oberfläche und erhält demnach

1) Tatsächlich wird in dieser Notiz nur das im Gase vorhandene mittlere Quadrat der elektrischen Feldstärke gebraucht, eine Größe, welche als aus dem Kraftgesetz abgeleitet angesehen werden kann. Aus unseren Voraussetzungen folgt übrigens ohne weiteres, daß bei den hier betrachteten, normalen Gasen die Anziehung umgekehrt proportional der 9. Potenz der Entfernung zweier Moleküle ist. Bei anomalen Dipolgasen wäre sie umgekehrt proportional der 7. Potenz. Man sieht, wie die Theorie den vielfach gezogenen Schlüssen über die starke Abnahme der van der Waalsschen Anziehung mit zunehmendem Abstande entspricht.

2) In den Arbeiten von E. Madelung, diese Zeitschr. **14**, 729, 1913, und von M. Born und R. Courant, diese Zeitschr. **14**, 731, 1913, wird eine Theorie der Temperaturabhängigkeit entworfen, während eine Deutung des Absolutwertes nicht versucht wird. Letzteres ist hier die Hauptsache.

Tabelle II.

	T_k	p_k atm.	a dyne cm⁴	b cm³	d cm	$\frac{\varrho}{M}$ cm⁻³	$\sigma_{\text{ber.}}$ dyne cm⁻¹	$\sigma_{\text{beob.}}$ dyne cm⁻¹
$C_4H_{10}O$ . .	467	35,6	$17{,}5 \cdot 10^{12}$	134	$4{,}72 \cdot 10^{-8}$	$0{,}96 \cdot 10^{-2}$	24	46
C_6H_6 . . .	561	47,9	18,9 „	120	4,56 „	1,12 „	34	59
C_6H_{14} . . .	508	29,6	24,9 „	175	5,15 „	0,77 „	24	42
CS_2	548	76	11,3 „	73,5	3,86 „	1,66 „	38	72

$$\sigma = \frac{3\pi}{8} a \frac{n^2 \tau^2}{d^4}. \qquad (24)$$

Eine übersichtlichere Form erhält die Beziehung, wenn man diese Darstellung für die Oberflächenspannung mit der früheren (18) für die van der Waalssche Konstante a vergleicht; so erhält man

$$\frac{\sigma}{a} = \frac{5}{16} d \left(\frac{\varrho}{M}\right)^2. \qquad (25)$$

Inwieweit mittels dieser Formel ein richtiger Wert von σ berechnet werden kann, möge durch Tabelle II veranschaulicht werden.

In den ersten drei Kolonnen derselben sind chemische Formeln, kritische Temperatur und kritischer Druck der Substanz angegeben. Dann folgen in der 4., 5. und 6. Kolonne die daraus nach den van der Waalsschen Formeln berechneten Werte von a, b und d. In der 7. Kolonne ist schließlich das reziproke Molekularvolumen $\frac{\varrho}{M}$ angegeben. Die vorletzte Spalte enthält die nach diesen Daten mittels (25) berechnete Oberflächenspannung. Um einen Vergleich mit dem Experiment möglich zu machen, ist es nötig, die beobachteten Werte der Oberflächenspannung auf die Temperatur $T = 0$ zu extrapolieren. Das geschah mit Hilfe des Eötvösschen Gesetzes. So entstanden die Werte der letzten Spalte. Man sieht, daß die Größenordnung durch die theoretische Formel richtig getroffen worden ist. Daß keine vollständige zahlenmäßige Übereinstimmung entsteht, ist eine Erscheinung, welche bekanntlich bei allen Anwendungen der van der Waalsschen Gleichung zutage tritt[1]).

Man kann die Bedeutung der Formel für die Oberflächenspannung auch noch durch folgende Überlegungen beleuchten: Nach dem Eötvösschen Gesetz ist

$$\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3} \sigma = 2{,}1\,(T_k - T) \qquad (26)$$

oder in der Grenze für $T = 0$

$$\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3} \sigma = 2{,}1\,T_k. \qquad (26')$$

Andererseits gilt nach unseren Überlegungen Gleichung (25). Mit Hilfe derselben findet man

$$\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3} \sigma = \frac{5}{16} \left(\frac{\varrho}{M}\right)^{4/3} a\,d.$$

Andererseits ist nach der van der Waalsschen Gleichung das Grenzvolumen, welches die Substanz bei $T = 0$ einnimmt gleich b, während $b = \frac{2\pi}{3} \mathrm{N} d^3$ ist. Demnach kann für die Größe d substituiert werden

$$d = \left(\frac{3}{2\pi} \frac{b}{\mathrm{N}}\right)^{1/3}.$$

Tut man das, so nimmt die Formel für die molekulare Oberflächenenergie die Form an

$$\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3} \sigma = \left(\frac{\varrho}{M}\right)^{4/3} \frac{5}{16} d\,a = \frac{5}{16} \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/3} \frac{1}{\mathrm{N}^{1/3}} \frac{a}{b}.$$

Andererseits wissen wir, daß

$$\frac{a}{b} = \frac{27}{8} R T_k = \frac{27}{8} \mathrm{N} \cdot k T_k$$

unter Einführung der Boltzmannschen Konstante $k = 1{,}37 \cdot 10^{-16}$ erg an Stelle der universellen Gaskonstante R. Benutzen wir diesen Zusammenhang mit der kritischen Temperatur, so ergibt sich also

$$\left(\frac{M}{\varrho}\right)^{2/3} \sigma = \frac{135}{128} \left(\frac{3}{2\pi}\right)^{1/3} \mathrm{N}^{2/3} k T_k. \qquad (27)$$

Tatsächlich ergibt also die Theorie Proportionalität der molekularen Oberflächenenergie mit der kritischen Temperatur. Für die Eötvössche Konstante findet man ein Vielfaches von $\mathrm{N}^{2/3} k$, was offenbar zu erwarten ist und was auch Madelung, sowie Born und Courant fanden bei ihrer Theorie des Temperaturfaktors im Eötvösschen Gesetz. Setzt man Zahlenwerte ein, so wird die Konstante jenes Gesetzes mit

$$k = 1{,}37 \cdot 10^{-16} \text{ und } \mathrm{N} = 6{,}06 \cdot 10^{23}$$

1) Es möge z. B. genügen daran zu erinnern, daß nach der van der Waalsschen Gleichung

$$\frac{R T_k}{p_k v_k} = \frac{8}{3} = 2{,}67$$

ist, während sich für die normalen Stoffe im Mittel experimentell

$$\frac{R T_k}{p_k v_k} = 3{,}7$$

ergibt.

gleich 0,82. Die Proportionalität in der kritischen Temperatur ist vorhanden, der Zahlenfaktor ist wieder, wie nicht anders zu erwarten, von dem experimentellen Faktor erheblich verschieden.

Man kann versuchen sowohl zur Berechnung der Oberflächenspannung, wie auch zur Berechnung der Eötvösschen Konstante einen Weg zu beschreiten, welcher nicht so weitgehende Extrapolationen erfordert, wie sie im obigen insbesondere zur Berechnung von van der Waalsscher Anziehung und Molekularvolumen angewandt worden sind. Offenbar kann der Wert von a mit erheblich mehr Sicherheit für den flüssigen Zustand berechnet werden, wenn man statt kritischer Größen nur Beobachtungen nimmt, welche sich auf den flüssigen Zustand selbst beziehen. Nun hat man um die Masse M einer Flüssigkeit zu verdampfen, eine Arbeit zu leisten, welche durch die molekulare Verdampfungswärme Λ gemessen wird. Andererseits ist die potentielle Energie, welche geleistet werden muß, um die Moleküle der Masse M in so weiten gegenseitigen Abstand zu bringen, daß die molekularen Kräfte vernachlässigbar sind, nach den obigen Überlegungen gleich

$$\frac{6\pi}{5}\frac{N^2\alpha\tau^2}{d^5}\frac{\varrho}{M}.$$

Bis auf geringe Korrektionen (wegen der Leistung äußerer Arbeit und der Differenz der Energie der Molekularbewegung in Gas und Flüssigkeit) hat man demnach

$$\Lambda = \frac{6\pi}{5}\frac{N^2\alpha\tau^2}{d^5}\frac{\varrho}{M}. \qquad (28)$$

Andererseits ist

$$a = \frac{6\pi}{5}\frac{N^2\alpha\tau^2}{d^5},$$

so daß sich ergibt

$$a = \Lambda\frac{M}{\varrho}. \qquad (29)$$

In Tabelle III sind für dieselben Substanzen wie oben in der ersten Spalte angegeben die chemischen Formeln, in der zweiten die beobachtete Verdampfungswärme, in der dritten die daraus nach (29) berechnete van der Waalssche Aktraktionskonstante und in der vierten die nach (25) folgende Oberflächenspannung. Die letzte Spalte enthält schließlich zum Vergleich die beobachteten Werte.

Tabelle III.

	$\Lambda_{beob.}$ cal	a dyne cm^4	$\sigma_{ber.}$ dyne cm^{-1}	$\sigma_{beob.}$ dyne cm^{-1}
$C_4H_{10}O$ . .	6900	$30\cdot 10^{12}$	41	46
C_6H_6 . . .	7800	29 „	52	59
C_6H_{14} . . .	7700	42 „	40	42
CS_2 . . .	6800	17 „	57	72

Die Übereinstimmung ist jetzt eine gute.

Im gleichen Gedankengange beharrend kann man versuchen, auch für die Eötvössche Konstante einen besseren Wert zu berechnen. Bekanntlich ist die praktische Grenzdichte wesentlich größer als die nach dem van der Waalsschen Gesetz zu berechnende, man findet im Mittel für das Verhältnis dieser beiden Größen den Wert 1,82[1]). Rechnet man also mit der wirklichen Dichte, so bedingt das in der Eötvösschen Konstante einen zusätzlichen Faktor im Werte $(1{,}82)^{4/3}$. Damit wird dieselbe 1,8 statt dem früher gefundenen Werte 0,82, nähert sich also erheblich mehr der experimentellen Zahl 2,1.

§ 6. Schlußbemerkungen.

Betrachtet man das Gesamtbild, so kann man meines Erachtens nicht umhin, die Wahrscheinlichkeit unserer Auffassung der van der Waalsschen Attraktionskräfte und damit ihren elektrischen Ursprung zuzugeben. Dann aber ist der am Anfang angekündigte Zusammenhang zwischen den optischen Konstanten einerseits und den van der Waalsschen Konstanten andererseits erreicht und man kann nun umgekehrt das große Erfahrungsmaterial bezüglich der Zustandsgleichung benutzen, um daraus auf die elektrischen Hauptträgheitsmomente der Moleküle zu schließen. Ich bin nicht der Ansicht, daß die in Tabelle I angegebenen Zahlen für jene Größe mehr als eine Größenordnung derselben darstellen. Das liegt meines Erachtens nicht an der Grundlage der Theorie, sondern an der Ausführung, die in quantitativem Sinne gleich mangelhaft ist, wie die van der Waalssche Gleichung mit konstantem a und b. Es liegt aber gar kein Anlaß vor, bei der hier gegebenen Übersicht, welche für eine erste Orientierung genügen mag, stehen zu bleiben. Der richtige Weg scheint mir der zu sein, daß man die Zustandsgleichung schreibt in der von Kamerlingh-Onnes schließlich bevorzugten Form

$$p\mathfrak{v} = \mathfrak{A} + \frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{v}} + \frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{v}^2} + \dots$$

mit Virialkoeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ usw. Tatsächlich haben wir zur Berechnung jener Koeffizienten als Temperaturfunktion eine völlig einwandfreie und strenge Methode, welche auf dem Boltzmann-Maxwellschen Gesetz basiert und schon

1) Diese Zahl entstand durch Kombination der Angaben über den Zusammenhang von den praktischen Werten für kritische Dichte und Grenzdichte mit den theoretischen in J. P. Kuenen, l. c. S. 60 und 83.

in mehreren Arbeiten von Keesom benutzt worden ist. Es kommt nur darauf an, die von Keesom eingeführten Kräfte zwischen den Molekülen zu vervollständigen durch die hier hauptsächlich betrachteten. Eine Arbeit, welche diesen Gedankengang für die anormalen Dipolgase durchführt, ist im Gange. Ich erhoffe von derselben unter anderem die Möglichkeit einer erneuten Berechnung der elektrischen Molekularmomente und damit die Herstellung des quantitativen Zusammenhangs zwischen den Beobachtungen über die Zustandsgleichungen einerseits und den Beobachtungen über die Temperaturabhängigkeit der Dielektrizitätskonstanten andererseits[1]).

Daneben wird es nötig sein, die Oberflächenerscheinungen insbesondere in ihrer Temperaturabhängigkeit näher zu verfolgen. Auch dürfte es nunmehr möglich sein, die merkwürdigen Beeinflussungen der Oberflächenspannung durch geringe Mengen fremder Zusätze molekulartheoretisch zu deuten. Damit kommen wir in das Gebiet der Mischungen, in dem auch, ohne daß man die Oberflächenerscheinungen so stark in den Vordergrund rückt, die nach der Theorie leicht erhältliche Mischungsformel für die van der Waalssche Attraktionskonstante nützlich sein dürfte.

Die Hauptsache, welche bei der genauen Theorie zu erreichen ist, scheint mir allerdings die Erzielung quantitativ richtiger Zahlen für elektrische Momente und elektrische Trägheitsmomente, welche man bei der Prüfung und Aufstellung detaillierter Molekülmodelle zugrunde legen kann.

1) Rechnungen dieser Art sind inzwischen von Herrn Falkenhagen ausgeführt worden und haben meine Erwartung bestätigt.

Göttingen, Physikalisches Institut, 29. Januar 1920.

Zusatz bei der Korrektur.

Das Bestreben, einen zweiten, unabhängigen Weg zur Bestimmung des mittleren elektrischen Trägheitsmomentes τ zu gewinnen, führte mich inzwischen dazu, die Temperaturabhängigkeit der inneren Reibung mit in die Betrachtung hineinzuziehen. Die einzige Formel, welche jene Abhängigkeit für höhere Temperaturen befriedigend darstellt, ist die Sutherlandsche. Sie lautet:

$$\eta = \frac{C\sqrt{T}}{1 + \frac{\Theta}{T}},$$

wenn η der Reibungskoeffizient ist und C und Θ zwei für das Gas charakteristische Konstanten bedeuten. C ist umgekehrt proportional dem Quadrate des Moleküldurchmessers und mißt im wesentlichen die freie Weglänge, wie sie sein würde, wenn zwischen den Molekülen keine Kräfte vorhanden wären; Θ ist eine für das Gas charakteristische Temperatur, welche proportional ist der potentiellen Energie zweier Moleküle im Augenblicke der Berührung dividiert durch die Boltzmannsche Konstante k.

Es wäre nun nicht möglich gewesen, von jener Sutherlandschen Formel den richtigen Gebrauch für unsere Zwecke zu machen, wenn nicht die Zahlenkoeffizienten mathematisch einwandfrei bekannt wären. Die zu dieser Bestimmung notwendige Rechnung ist aber inzwischen ausgeführt worden in einer unter Leitung von Oseen angefertigten Dissertation von Enskog. Diese enthält in bezug auf unsere Frage das folgende Resultat:

Ist die anziehende Kraft K zwischen zwei Molekülen der νten Potenz der reziproken Entfernung proportional, so daß

$$K = \frac{c}{r^\nu},$$

dann ergibt sich für die innere Reibung die Sutherlandsche Formel mit

$$\Theta = \frac{217}{205}\frac{2\Delta}{3}\frac{Nc}{(\nu-1)d^{\nu-1}R}$$

und

$$C = 1{,}015\frac{5}{16\sqrt{\pi}}\frac{\sqrt{MR}}{Nd^2},$$

wobei 2Δ ein Zahlenfaktor ist, welcher noch von der Potenz im Kraftgesetz abhängt und für den Enskog eine Tabelle gibt[1]).

Nach unserem Ansatz ist nun die potentielle Energie zweier Moleküle im Abstande r gleich

$$-\alpha\overline{\mathfrak{E}^2} = -\frac{3\alpha\tau^2}{r^8},$$

wobei für $\overline{\mathfrak{E}^2}$ nach (14) der im Abstande r gültige Mittelwert eingesetzt ist. Die Kraft K wird also

$$K = \frac{24\alpha\tau^2}{r^9}.$$

Andererseits gibt Enskog für $\nu = 9$ an $2\Delta = \frac{7}{15}$; alles in allem ergibt sich also unter Einführung der Molekularrefraktion $P_0 = \frac{4\pi}{3}N\alpha$ an Stelle von α:

1) Enskog bezeichnet den Zahlenfaktor mit 2δ; wir schreiben statt dessen 2Δ, weil der Buchstabe δ schon als Bezeichnung für die Dielektrizitätskonstante verbraucht ist.

Tabelle IV.

	Θ	C g cm^{-1} sec^{-1}	d cm	τ g $^{1/2}$ cm $^{7/2}$ sec^{-1}	d cm	τ g $^{1/2}$ cm $^{7/2}$ sec^{-1}
He	75	$1,46 \cdot 10^{-5}$	$1,92 \cdot 10^{-8}$	$4,33 \cdot 10^{-26}$	$2,44 \cdot 10^{-8}$	$2,84 \cdot 10^{-26}$
A	162	2,04 „	2,88 „	11,4 „	2,93 „	11,2 „
Kr	188	2,38 „	3,20 „	15,5 „	3,14 „	14,5 „
X	252	2,46 „	3,53 „	20,6 „	3,42 „	18,9 „
H_2	82	0,666 „	2,40 „	5,60 „	2,36 „	3,20 „
N_2	113	1,43 „	3,15 „	13,4 „	3,12 „	13,3 „
O_2	137	1,76 „	2,94 „	11,7 „	2,90 „	11,2 „
C_2H_4	226	1,04 „	3,70 „	24,4 „	3,54 „	22,1 „

$$\Theta = \frac{217}{205} \frac{7}{20\pi} \frac{P_0 \tau^2}{R d^8},$$

$$C = 1,015 \frac{5}{16\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{MR}}{N d^2}.$$

Aus dem experimentell bestimmten Werte von C folgt also der Moleküldurchmesser d; die Sutherlandsche Temperatur Θ liefert danach das mittlere elektrische Trägheitsmoment τ. In der obigen Tabelle IV steht in der ersten Kolonne der Name des Gases, in der zweiten folgen die Werte von Θ, in der dritten die von C, wie sie aus den Beobachtungen folgen. Die vierte Kolonne enthält den aus C berechneten Durchmesser d, die fünfte das aus Θ und C berechnete Trägheitsmoment τ. Zum Vergleich mit dem früheren sind eine sechste und eine siebente Kolonne hinzugefügt, welche die Werte von d und τ enthalten, wie wir sie früher mit Hilfe der kritischen Daten gefunden haben.

Die Übereinstimmung der auf beiden Wegen gefundenen Werte von d und τ ist (mit Ausnahme der Zahlen für He und H_2) viel besser, als ich zu erwarten gewagt hatte. Es entspricht also offenbar unser Kraftgesetz und seine Deutung vollständig der Wirklichkeit[1]).

1) Aus unserer Formel für Θ kann auch gefolgert werden, daß die Sutherlandsche Temperatur Θ der kritischen Temperatur T_k proportional ist. Als Proportionalitätsfaktor ergibt sich $\Theta / T_k = \frac{217}{205} \frac{7}{8} = 0,925$, während aus den experimentellen Daten für die oben angegebenen Gase unter Ausschluß von H_2 und He im Mittel folgt $\Theta / T_k = 0,904$.

Göttingen, 17. März 1920.

(Eingegangen 29. Januar 1920.)

Die Grundform des mechanisch-akustischen Schwingungskörpers. (Der Tonpilz.)

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Bei unseren Versuchen zur Herstellung von Schallgebern und Schallempfängern wurden wir vor die Aufgabe gestellt, akustische Schwingungsgebilde zu bauen, in denen die beiden maßgebenden Größen — Masse und Elastizität — klar und eindeutig voneinander getrennt waren. Während bei den in der Technik gebräuchlichen elektrischen quasistationären Schwingungskreisen — von Resonanzspulen abgesehen — praktisch stets Selbstinduktion und Kapazität getrennt sind, und es auch bis zu den Frequenzen der Telegraphie mit elektrischen Wellen hinauf keine besonderen Schwierigkeiten macht, genügend kapazitätsfreie Selbstinduktionen und induktionsfreie Kapazitäten herzustellen, ist in der Akustik auf eine reinliche Scheidung von Masse und Elastizität bisher scheinbar noch kein Gewicht gelegt worden. Bei fast allen bekannten akustischen Schwingungskörpern, wie beispielsweise den Saiten, Membranen, Glocken, Stimmgabeln, sind Masse und Elastizität ziemlich gleichmäßig verteilt, und eine gewisse Ausnahme scheint nur der geschlossene oder Helmholtzsche Resonator zu machen, in dem die Schwingungsenergie in potentieller Form im Resonatorraum und in kinetischer Form in der Öffnung lokalisiert erscheint.

Alle gewöhnlichen Schwingungskörper mit verteilter Masse und Elastizität zeigten bei unseren Versuchen die störende Eigenschaft, daß sie ihre Schwingungsform änderten, d. h. ihre Knotenpunkte verschoben, sobald man an Stellen größerer Amplitude mit stark erregenden oder abbremsenden Kräften angriff. Wurde z. B. eine Stimmgabel zwischen den Zinken erregt und mit dem Stiele auf eine strahlende Fläche gesetzt, so wanderten bei zunehmender Erregung und Strahlungsleistung die beiden freien Knotenpunkte der Gabel nach dem Stiele zu, wobei die Resonanzfrequenz allmählich abnahm und die Gabel wie zwei fest-freie Stäbe schwang.

Ganz allgemein versuchte der Schwingungskörper immer eine Form anzunehmen, in der möglichst wenig Energie aufgenommen bzw. abgegeben wurde. Wir erkannten, daß es zur Verhinderung dieser Eigenschaft notwendig war, Masse und Elastizität vollkommen zu trennen und die Schwingungsamplituden möglichst in eine Gerade, die am besten die Schwerpunkts-

linie war, zu legen. Durch diese Maßnahme mußte dann eine Verschiebung der Knotenpunkte unmöglich werden. Bei der weiteren Verfolgung dieses Gedankens trat uns eine einfache und reine Form des mechanisch-akustischen Schwingungskörpers entgegen, die man als die Grund- und Urform jedes mechanisch-akustischen Schwingungsgebildes bezeichnen kann. Diese besteht aus zwei elastizitätsfreien Massen, die durch eine masselose Elastizität miteinander verbunden sind und sich in Richtung der Verbindungslinie ihrer Schwerpunkte bewegen.

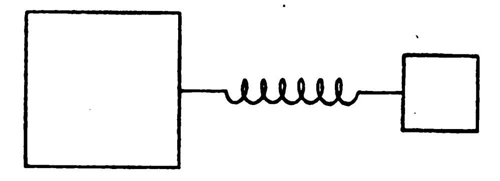


Fig. 1.

In der Fig. 1 ist ein solcher Schwingungskörper schematisch dargestellt, wobei als Elastizität beispielsweise eine Spiralfeder gewählt ist. Diese besondere Form des Schwingungskörpers ist praktisch wohl geeignet zur Erzeugung niederer Schwingungszahlen, würde aber kaum mehr anwendbar sein, wenn man in das Gebiet der Akustik gelangt, d. h. zu Schwingungszahlen, die durch das menschliche Ohr als Töne wahrgenommen werden. Handelt es sich gar um die Erzeugung relativ hoher Töne, so müßten die Massen so klein und die Feder so stark werden, daß man die Federmasse praktisch keinesfalls mehr gegen die freien Massen vernachlässigen kann. In diesen Fällen wird man die mit der denkbar geringsten Masse zu bauende kleinste Elastizität benutzen, und das ist der longitudinal-deformierte Stab[1]). Damit zeitlich der Vorgang in allen Stabquerschnitten der gleiche, d. h. quasistationär ist, muß die Stablänge kleiner als $\frac{\lambda}{4}$ sein, wenn λ die Wellenlänge des betreffenden Tones im Stabmaterial ist. Diese besondere Form des einfachen akustischen Schwingungskörpers ist schematisch in Fig. 2 dargestellt. Wir haben diesen Schwingungskörper den akustischen Pilz oder Tonpilz genannt. Wir haben solche Schwingungskörper für tiefe und hohe Töne und in den verschiedensten Abmessungen gebaut und gefunden, daß sie ebenso rein und ungedämpft klingen wie Stimmgabeln. Wie wir später sehen werden, hat man in der Wahl der Masse und in den Stababmessungen ein bequemes Mittel, um praktisch in weiten Grenzen die Schwingungszahl variieren zu können.

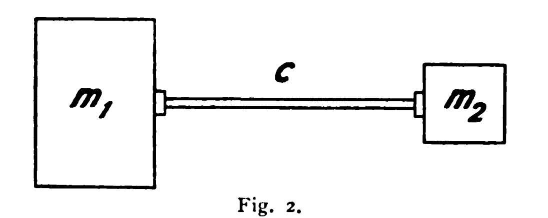


Fig. 2.

1) Dieser Vorschlag stammt von Herrn A. du Bois-Reymond, Kiel.

Bei näherer Betrachtung findet man, daß sich alle bekannten mechanischen und akustischen Schwingungsgebilde auf diese einfachste Form zurückführen lassen. Beispielsweise wird bei einer in einem Ringe eingespannten Membran die eine Masse durch die Schwingungsmasse der Membran selbst[1]), die andere Masse durch die Ringmasse und die Elastizität durch diejenige der Membran dargestellt. Es kann eine von beiden Massen sehr viel größer als die andere und praktisch unendlich groß werden, wie es beispielsweise bei einer fest in einen großen Klotz eingespannten dünnen Blattfeder der Fall ist. Sehr häufig wird in solchen Fällen die zweite Masse gar nicht beachtet und man ist nicht gewohnt sie als zum Schwingungsgebilde gehörig zu betrachten, wie z. B. die Masse, an der ein Pendel aufgehängt ist, in der bekannten Gleichung des Pendels gar nicht erscheint. Man muß sich in diesem Fall aber stets klar sein, daß dies nur statthaft ist, wenn die eigentliche Schwingungsmasse, z. B. die des Pendels klein gegenüber der anderen Masse, z. B. derjenigen der Aufhängung ist.

Um über die Verteilung der Schwingungsenergie im Tonpilz ein Bild zu gewinnen und die Eigenschwingungszahl zu finden, stellen wir die Schwingungsgleichungen auf und beschränken uns hierbei auf die ungedämpfte Schwingung. Bezeichnen wir mit x_1 und x_2 die Momentanwerte des Ausschlages der beiden Massen m_1 und m_2 und mit c die Größe der Elastizität des elastischen Verbindungsgliedes, so sind die Kräftegleichungen für die beiden Massen

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{x_1 - x_2}{c} = 0$$

$$m_2 \ddot{x}_2 - \frac{x_1 - x_2}{c} = 0.$$

Durch Addition dieser beiden Gleichungen findet man

$$m_1 \ddot{x}_1 + m_2 \ddot{x}_2 = 0$$

und erkennt hieraus, daß sich die Maximalamplituden umgekehrt wie die Massen ver-

1) W. Hahnemann u. H. Hecht, Schallfelder und Schallantennen, diese Zeitschr. 17, 601, 1916.

halten und entgegengesetzt gerichtet sind. Nennen wir die in den beiden Massen schwingenden Energien E_1 und E_2 und die maximalen Amplituden der Massen a_1 und a_2, so verhält sich

$$E_1 : E_2 = m_1 a_1^2 : m_2 a_2^2$$

oder auch, da

$$a_1 : a_2 = m_2 : m_1 \text{ ist,}$$

$$E_1 : E_2 = m_2 : m_1.$$

Hieraus erkennt man, daß sich die Schwingungsenergien umgekehrt wie die Massen verhalten, und daß die ganze Schwingungsenergie praktisch in der kleineren Masse steckt, wenn die andere Masse sehr groß geworden ist. Nur für diesen Fall kann man sich beim Schwingungsvorgang auf Betrachtung der einen Masse allein beschränken und die andere als ruhend annehmen. Will man die Schwingung eines Tonpilzes also wirksam dämpfen, so wird man mit den abbremsenden Kräften an der kleineren Masse angreifen, wie man umgekehrt, um möglichst ungedämpfte Tonpilze zu bauen, das Massenverhältnis sehr groß wählen und die größere Masse zur Befestigung oder Aufstellung des Pilzes verwenden wird. Auch bei dünnen Membranen in dicken Einspannringen oder dünnen Blattfedern in großen Klötzen steckt die gesamte Schwingungsenergie praktisch vollständig in der Membran oder in der Feder und die Befestigungsteile werden um so weniger dämpfende Wirkung ausüben können, je mehr Masse sie haben.

Durch die Tatsache, daß sich die Schwingungsamplituden umgekehrt wie die Massen verhalten, erkennt man, daß der Knotenpunkt mit dem Schwerpunkt des Systems zutammenfällt und daher bei Gleichheit der beiden Massen in der Mitte des Stabes liegt, während er bei Ungleichheit immer mehr an die größere Masse heranrückt, um sich mit dieser praktisch zu vereinigen, wenn sie sehr viel mal größer als die kleinere Masse geworden ist.

Die Eigenschwingungszahl des Systems ω in 2π Sekunden findet man durch einfache Rechnung zu

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{c} \cdot \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}},$$

was in

$$\omega = \sqrt{\frac{q \cdot E}{l} \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2}}$$

übergeht, wenn man einen Stab von der Länge l, dem Querschnitt q und dem Elastizitätskoeffizienten E benutzt. Hierbei ist entsprechend dem Ausgange der Betrachtung die Masse des Stabes als vernachlässigbar klein gegen die freie Schwingungsmasse angenommen, eine der Eigenschaften, durch die ja gerade diese einfachste Form des Schwingungskörpers ihre große Bedeutung für uns gewonnen hat. Bei kleiner Stabmasse kann man durch eine einfache Korrektur diese Stabmasse einführen und findet, daß man die freien Massen m_1 und m_2 durch die Ausdrücke

$$m_1\left(1 + \frac{1}{3}\frac{m_s}{m_1}\frac{m_2}{m_1 + m_2}\right)$$

und

$$m_2\left(1 + \frac{1}{3}\frac{m_s}{m_2}\frac{m_1}{m_1 + m_2}\right)$$

zu ersetzen hat, wenn m_s die Stabmasse darstellt und klein gegenüber m_1 und m_2 ist. Die Tatsache, daß die Stabmasse, wenn auch praktisch sehr gering, so doch tatsächlich immer vorhanden ist, bedingt außer dieser Korrektur der eigentlichen Schwingungszahl des Tonpilzes, die im allgemeinen nur wenige Promille betragen wird, auch das Auftreten einer neuen Schwingungsform, indem der Stab wie eine Saite schwingt, die zwischen den beiden Massen ausgespannt ist. Diese Querschwingungszahl wollen wir uns aber im allgemeinen so weit von der Hauptschwingungszahl entfernt denken, daß sie keinen Einfluß auf die letztere auszuüben imstande ist. Wir denken uns diese Nebenschwingung weit oberhalb der Hauptschwingungszahl des Tonpilzes liegend, da bei Lagen unterhalb wieder Nebenschwingungen höherer Ordnung auftreten, die dann die Rolle des Grundtones der Nebenschwingung übernehmen würden. Ein Mittel zur praktischen Durchführung dieser Forderung besteht gegebenenfalls darin, daß man keinen Stab, sondern ein Rohr von gleichem Querschnitt anwendet, das gegenüber dem Stab eine mit der vierten Potenz des Durchmessers abnehmende Querelastizität bei gleichbleibender Longitudinalelastizität besitzt.

Durch die Eigenschaft, die Amplituden umgekehrt wie die Massen einzustellen, hat der Tonpilz für alle die Fälle eine große praktische Bedeutung erlangt, in denen eine Amplitudenübersetzung, d. h. ein akustischer Hebel gefordert wird. Handelt es sich um Schallgeber und -empfänger für Luft oder Wasser, die beispielsweise elektrisch erregt und abgebremst werden sollen, so ergibt sich eine derartige Forderung der Amplitudenübersetzung sofort, wenn man auf gute Wirkungsgrade Gewicht legt. Die Charakteristik des Ankers eines Elektromagneten oder einer Spule in einem konstanten Magnetfelde, d. h. die Änderung ihrer Zugkraft auf die Einheit der Weglänge hat im allgemeinen solche Werte, daß bei Anwendung prak-

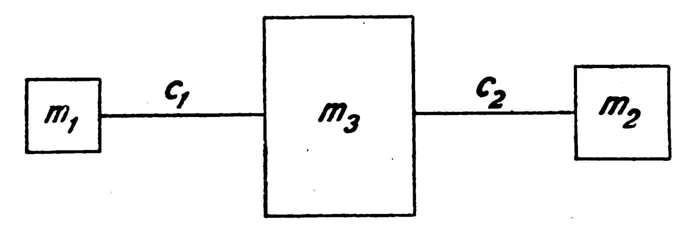


Fig. 3.

tisch möglicher Schallantennen dieses Verhältnis, das wir für das freie Medium Schallhärte[1]) genannt haben, zwischen den Werten für Luft und Wasser steht. Wollte man also Schallgeber für Wasser so bauen, daß man die strahlende Fläche direkt elektromagnetisch erregte, so würde man im allgemeinen sehr schlechte Wirkungsgrade erhalten, da das Wasser viel schallhärter als der elektrische Erreger ist. Schalten wir dagegen einen akustischen Tonpilz ein und bringen die elektrische Erregung an der kleineren Masse und die strahlende Antenne an der größeren Masse an, so erreichen wir bei passender Wahl des Massenverhältnisses, daß die im elektrischen Erreger mit großer Amplitude und kleiner Kraft schwingende Energie mit gutem Wirkungsgrade auf die Antenne übertragen wird, von der sie mit kleiner Amplitude und großer Kraft als Schallwelle abwandert. Bei Sendern und Empfängern für Luftschall liegen die Verhältnisse gerade umgekehrt, und man muß eine Übersetzung von klein nach groß anwenden, wenn man vom elektrischen Erreger zu Luft übergeht. In welcher Weise diese Aufgabe zum Beispiel im gewöhnlichen Telephon gelöst wird, geht aus einer Arbeit[2]) von uns über den mechanisch-akustischen Aufbau eines Telephons und seinen Wirkungsgrad hervor.

Häufig werden die Schwingungsgebilde, die man in der technischen Akustik anzuwenden gezwungen ist, nicht aus solchen einfachen Schwingungskörpern bestehen, sondern aus zwei oder mehr miteinander gekoppelten Gebilden. Handelt es sich zum Beispiel um schallaufnehmende Membranen, so wird man sowohl diese wie den Detektor (Mikrophon, Telephon) abstimmen, um das Maximum an Lautstärke zu erhalten, und wird ähnlich wie in der Telegraphie mit elektrischen Wellen mit doppelwelligen Gebilden arbeiten. Ja, es kann der Fall eintreten und aus bestimmten Gründen sogar wünschenswert sein, daß unser Tonpilz infolge der Kopplung zwischen Quer- und Stabton schon doppelwellig wird, und daß wir bewußt mit diesen beiden Schwingungen arbeiten müssen.

Wir wollen daher einen besonders häufigen Fall der Kopplung zweier einfacher Schwingungskörper miteinander betrachten, wie er in Fig. 3 dargestellt ist, und in dem die beiden Einzelsysteme mit den Massen m_1 und m_3 bzw. m_2 und m_3 durch die gemeinsame Masse m_3 miteinander gekoppelt sind. Die Kräftegleichungen für die drei Massen des ungedämpft schwingenden Systems lauten:

$$m_1 \ddot{x}_1 + \frac{x_1 - x_3}{c_1} = 0$$

$$m_1 \ddot{x}_2 - \frac{x_3 - x_2}{c_2} = 0$$

$$m_3 \ddot{x}_3 - \frac{x_1 - x_3}{c_1} + \frac{x_3 - x_2}{c_2} = 0.$$

Durch einfache Rechnung findet man als Bestimmungsgleichung für die Eigenschwingungszahlen

$$\omega^4 - \omega^2 \left(\frac{1}{c_1 m_1} + \frac{1}{c_1 m_3} + \frac{1}{c_2 m_2} + \frac{1}{c_2 m_3} \right) + + \frac{m_1 + m_2 + m_3}{m_1 \cdot m_2 \cdot m_3} = 0.$$

Diese Gleichung besitzt zwei Wurzeln, die unter Benutzung der Ausdrücke für die freien Schwingungszahlen der beiden ungekoppelten Systeme

$$\omega_1^2 = \frac{1}{c_1} \cdot \frac{m_1 + m_3}{m_1 \cdot m_3}$$

$$\omega_2^2 = \frac{1}{c_2} \cdot \frac{m_2 + m_3}{m_2 \cdot m_3}$$

sich berechnen zu

$$\omega^2 = \frac{1}{2} (\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (\omega_1^2 - \omega_2^2)^2 + \omega_1^2 \omega_2^2 \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}}.$$

1) Diese Zeitschr. **17**, 601, 1916.

2) Ann. d. Phys. **60**, 454, 1919.

Der Ausdruck

$$\frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_3)(m_2 + m_3)}$$

stellt das Produkt der Verhältnisse von der im Kopplungsgliede schwingenden Energie zu der Gesamtenergie jedes Einzelsystems dar und soll mit k^2 bezeichnet werden. Ist die gemeinsame Masse m_3 klein gegenüber den freien Massen m_1 und m_2, so steckt praktisch die gesamte Schwingungsenergie im Kopplungsgliede und wir haben den Fall der sehr festen Kopplung: k^2 wird gleich eins. Wird m_3 dagegen größer als m_1 und m_2, so wird die Kopplung loser und es wird ungenähert

$$k^2 = \frac{m_1 \cdot m_2}{m_3^2}$$

und bildet damit ein Analogon zu den Kopplungskoeffizienten zweier elektrischer Kreise mit gemeinsamer Selbstinduktion

$$k^2 = \frac{M^2}{L_1 L_2},$$

wenn L_1 und L_2 die freien Selbstinduktionen und M der gemeinsame oder gegenseitige Induktionskoeffizient sind. Werden m_1 und m_2 klein gegenüber m_3, so haben wir den Fall der extremlosen Kopplung, und k^2 nähert sich der Null.

Führen wir k^2 in unsere obige Bestimmungsgleichung für ω^2 ein, so wird

$$\omega^2 = \tfrac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2) \pm$$
$$\pm \sqrt{\tfrac{1}{4}(\omega_1^2 + \omega_2^2)^2 + k^2 \omega_1^2 \omega_2^2}.$$

Diese Formel ist in den weitesten Grenzen durch das Experiment bestätigt worden, auch wenn sie auf Kopplungskoeffizienten von nahezu null und eins angewandt wurde. Im ersteren Fall gehen, wie man ohne weiteres erkennt, die beiden gekoppelten Schwingungszahlen in die beiden freien über, im Falle des Kopplungskoeffizienten eins sind die beiden Schwingungsformen dadurch gekennzeichnet, daß einmal die kleine gemeinsame Masse m_3 mit parallel geschalteten Elastizitäten c_1 und c_2 schwingt, während die beiden freien Massen praktisch stillstehen, und daß zweitens die beiden freien Massen mit in Serie geschalteten Elastizitäten schwingen und in der Form eines einfachen Tonpilzes. Umgekehrt leiten sich aus dieser Betrachtung auf direktem Wege Schwingungszahlen ab, die Spezialfälle der oben mitgeteilten allgemeinen Formel sind.

Haben die beiden ungekoppelten Systeme gleiche Eigenfrequenz — ein Fall, der in der Praxis sehr häufig angestrebt wird — und ist

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_0,$$

so wird

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 + k},$$

ein Ausdruck, der für kleine Kopplungskoeffizienten in den von der Kopplung elektrischer Schwingungskreise her gebräuchlichen

$$\omega = \omega_0 \left(1 + \frac{k}{2}\right)$$

übergeht.

Durch die Betrachtung der Fig. 3 kann man der unmittelbaren Vorstellung die Tatsache näherbringen, daß durch die Kopplung zweier Schwingungsgebilde immer zwei Resonanzfrequenzen entstehen müssen und die Schwingungskörper stets das Bestreben haben, ihre Resonanzen auseinanderzudrängen, eine Erscheinung, die darin ihren Ausdruck findet, daß das tiefere System durch die Kopplung stets erniedrigt, das höhere erhöht wird.

Ist z. B. das System 1 in der Fig. 3 das tiefere und nehmen wir die drei Massen der Einfachheit der Betrachtung zuliebe als gleich an, so bedeutet dies, daß der Stab 1 im Gegensatz zum Stab 2 länger bzw. dünner ist. Für das System 1 bedeutet also die Kopplung mit dem System 2 das Anlegen der Masse 2 an die Masse 3 mit relativ kurzem dickem Stab, d. h. praktisch starre Befestigung der Masse 2 an der Masse 3, wobei die Schwingungszahl von System 1 erniedrigt werden muß. Für das höhere System 2 bedeutet die Kopplung mit System 1 das Hinzufügen einer im Vergleich zum Stab 2 geringen elastischen Kraft[1]) in Gestalt des Stabes 1 an die Masse 3 bei fast stillstehender Masse 1, d. h. Erhöhung der Schwingungszahl.

Es macht auch keine Schwierigkeiten, ohne Rechnung die Schwingungsphasen der einzelnen Massen gedanklich unmittelbar zu verfolgen, je nachdem ob die Erregung im tieferen oder höheren System erfolgt. Überhaupt ist dies Beispiel der beiden gekoppelten Schwingungsgebilde sehr geeignet für die Betrachtung aller Vorgänge, die bei der Kopplung auftreten und die im allgemeinen durch die Theorie[2]) in nur schwer diskutierbaren Formeln wiedergegeben werden.

Wir haben schon erwähnt, daß sich alle bekannten Schwingungsgebilde der Akustik auf die Grundform des Tonpilzes zurückführen lassen, in dem zwei Massen durch eine Elastizität verbunden gegeneinander schwingen, und daß eine Masse sehr häufig praktisch unendlich groß ist. Man kann bei Körpern mit stetiger

1) Unter elastischer Kraft verstehen wir den reziproken Wert der Elastizität.

2) U. a. M. Wien, Ann. d. Phys. 61, 151, 1897.

Verteilung von Masse und Elastizität, wie Saiten, Membranen usw., sich immer die äquivalenten Massen und die äquivalente Elastizität berechnen und sich einen Tonpilz substituiert denken, der das betrachtete System schwingungstechnisch vollständig ersetzt, d. h. gleiche Resonanzfrequenz, Dämpfung, Amplitude, Verteilung der Schwingungsenergie usw. hat. Erleichtert schon bei den einfachen Schwingungskörpern diese gedankliche Hilfskonstruktion die Vorausberechnung und den Bau der Schwingungskörper mit bestimmten gewünschten Eigenschaften im hohen Maße, so wird sie fast unentbehrlich, wenn kompliziert zusammengesetzte Schwingungsgebilde vorliegen. Durch den gedanklichen Aufbau der einzelnen Schwingungskörper in Pilzform schafft man sich ein akustisches Schaltungsschema und kann die entscheidenden Größen berechnen, wozu besonders die Kopplungskoeffizienten gehören, die bei doppel- und mehrwelligen Gebilden das Verhalten des Systems in hohem Maße bestimmen.

Aber nicht nur als Berechnungsglied und als Mittel, den akustischen Aufbau von zusammengesetzten Schwingungsgebilden zu studieren, ist der Tonpilz für uns bedeutungsvoll geworden, sondern er ist direkt, in körperlicher Gestalt, zum Bau von Schallapparaten von uns verwandt worden. Hierdurch ist es uns gelungen, Schallerzeuger[1]) für Wasser für große Leistungen und gute Wirkungsgrade herzustellen. Bei akustischen Versuchen und in der technischen Akustik wird in Zukunft der Tonpilz mit Vorteil die Stelle von anderen, bisher gebräuchlichen Schwingungskörpern einnehmen und seine großen Vorzüge der Einfachheit der Berechnung und Erreichung gewünschter Eigenschaften bezüglich Abstimmung, Übersetzung, Kopplung und Dämpfung geltend machen können.

Zusammenfassung.

Im Vorstehenden ist der „Tonpilz", ein akustischer Schwingungskörper, in dem die Schwingungsgrößen — Masse und Elastizität — klar und eindeutig getrennt sind, näher beschrieben. Alle vorkommenden Schwingungsgebilde lassen sich auf einen oder mehrere miteinander gekoppelte Tonpilze zurückführen und auf diese Weise ihr akustisches Schaltungsschema entwerfen. Für einen einfachen Fall der Kopplung sind die Formeln zur Berechnung des Kopplungskoeffizienten und der gekoppelten Schwingungszahlen abgeleitet.

1) Eine genauere Beschreibung dieser Apparate wird an anderer Stelle erfolgen.

(Eingegangen 17. November 1919.)

BESPRECHUNGEN.

Max Planck, Einführung in die Mechanik deformierbarer Körper, zum Gebrauch bei Vorträgen, sowie zum Selbstunterricht, 8°. IV u. 193 S. Mit 12 Figuren. Leipzig, S. Hirzel. 1919. Preis geheftet M. 12.55, geb. M. 21.75.

Der vorliegende Band bildet gewissermaßen die Fortsetzung des neuerdings in zweiter Auflage bei Hirzel erschienenen Buches „Einführung in die allgemeine Mechanik" desselben Verfassers und ist in dem gleichen Sinne bearbeitet. (Besprechung der ersten Auflage des ersten Bandes: diese Zeitschr. **18**, 167, 1917.)

Seine Eigenart liegt darin, daß es eine wirklich brauchbare Einführung ist, die sich nicht an irgendein traditionelles Schema bindet, sondern mit einem bemerkenswerten Lehrgeschick dem Leser eine Grundlage bietet, die ihn zum Studium größerer Werke befähigen wird. Ohne ermüdende Breite ist die Darstellung so gehalten, daß der Anfänger nicht durch Schwierigkeiten formaler oder begrifflicher Art an der Durcharbeitung des Buches gehindert wird. Bei den Ableitungen werden nicht immer die kürzesten, sondern die lehrreichsten Wege gewählt. Vielleicht hätte die Darstellung teilweise durch stärkere Benutzung der Vektorenrechnung noch an Übersichtlichkeit gewonnen, doch ist das mehr oder weniger Geschmackssache. Der Stoff ist in drei Teilen behandelt: I. Allgemeine Bewegungsgesetze eines stetig ausgedehnten Körpers; II. Unendlich kleine Deformationen; III. Endliche Deformationen. Das ausgezeichnete Werk wird sich zweifellos bald einführen.

H. Hörig.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Charlottenburg Fabrikdirektor M. Freiberg für Textilchemie.

Berufen: Der ord. Professor für angewandte Chemie an der Universität Würzburg Dr. Alfred Heiduschka zum ord. Professor für Lebensmittelchemie an der Technischen Hochschule Dresden.

Gestorben: Der ord. Professor der Chemie und chemischen Technologie an der Universität Frankfurt a. M. Geh. Regierungsrat Dr. Martin Freund.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

# PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 8. 15. April 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 10 am 25. April 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Die Streuung der γ-Strahlen.

Von K. W. Fritz Kohlrausch.

Im folgenden werden die Resultate einer Experimentalarbeit mitgeteilt, die sich mit den von den γ-Strahlen des Radiums ($Ra\text{-}C$) an Materie erregten harten Sekundärstrahlen befaßt. Eine ausführliche Beschreibung der experimentellen Methodik ist in den Sitzungsberichten der Akademie der Wissenschaften in Wien gegeben, und ich verweise bezüglich aller Arbeitsdetails auf jene Zeitschrift, während hier die Untersuchungsmethode nur kurz skizziert, die Diskussion der Ergebnisse dagegen etwas ausführlicher und in manchen Punkten geändert durchgeführt werden soll.

Von einem starken Ra-Präparat (807 mg $RaCl_2$) wird ein γ-Strahlenbündel ausgeblendet, das in 50 cm Entfernung auf den Sekundärstrahler trifft. Die von diesem ausgehende sekundäre γ-Strahlung wird unter verschiedenen Emissionswinkeln α in einer Ionisierungskammer von $6^2\pi$ cm² Stirnwandfläche untersucht, die um den Radiator als Zentrum auf einem Kreise von 64 cm Radius bewegt werden kann. Der Winkel α wird von der Primärrichtung an gezählt und definiert mit seinen Werten von Null bis $\pm 90^0$ einen Horizontalschnitt durch den „Austrittsraum", von ± 90 bis $\pm 180^0$ einen Schnitt durch den „Eintrittsraum". Bleiabsorber, unmittelbar vor dem Ra-Präparat angebracht, gestatten eine Filterung der Primärstrahlung, d. i. eine Änderung in der Zusammensetzung der erregenden γ-Strahlung. Bleiabsorber zwischen Strahler und Ionisierungskammer erlauben die Untersuchung der Sekundärstrahlungsqualität. Als Radiatoren wurden quadratische Scheiben von 2,2 cm² Breite und rund 2 cm Dicke verwendet, und zwar aus C, Al, Zn, Sn, Pb.

In Übereinstimmung mit den gleichartigen Versuchen von Florance[1]) und Gray[2]) ergaben die ersten Beobachtungen die Abnahme der Intensität und die Abnahme der Härte der Sekundärstrahlung mit zunehmendem α. Möglichst exakt durchgeführte Absorptionsmessungen zeigten aber, daß die Abnahme der Härte davon herrührt, daß in der Sekundärstrahlung zwei verschieden durchdringliche Komponenten S_1 und S_2 übereinandergelagert sind, deren Intensitätsverhältnis sich mit wachsendem α zugunsten der weicheren Komponente S_2 ändert. — Filterung des Primärstrahles erbrachte den Nachweis, daß die härtere S_1-Komponente erregt wird von der im primären γ-Gemisch[3]) enthaltenen härtesten $Ra\text{-}C$-Strahlung K_1 und daß die weichere S_2-Komponente erregt wird von der primären, gleichfalls von RaC stammenden K_2-Strahlung.

Der Absorptionskoeffizient und damit die Qualität von S_1 in Blei erwies sich als unabhängig von der Natur des Radiators und als identisch mit K_1; somit ist S_1 als eine gestreute K_1-Strahlung anzusehen. Die analogen Beobachtungen an S_2 sind wegen der Schwierigkeit der Messungen weniger sicher; immerhin wird man aus den Absorptionsresultaten sowie aus der weiter unten besprochenen Intensitätsverteilung zum mindesten mit großer Wahrscheinlichkeit auch S_2 als gestreute K_2-Strahlung auffassen können.

Für jedes der erwähnten Materialien wurde die Intensitätsverteilung mit und ohne Absorber (0,3 cm Pb) ausgemessen. Die beiden Beobachtungsreihen gestatten die Berechnung der

1) D. C. H. Florance, Phil. Mag. **20**, 921, 1910; **27**, 225, 1914.
2) J. A. Gray, Phil. Mag. **26**, 611, 1913.
3) K. W. F. Kohlrausch, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **15**, 64, 1918.

Tabelle I.

	$\alpha =$	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°
S_1	*C*	10,0	7,78	4,85	2,04	1,12	0,39	0,07	0	0									
	Al	13,8	10,0	6,30	2,86	1,62	0,87	0,49	0,31	0,18									
	Zn	6,87	5,21	3,65	1,77	1,06	0,59	0,25	0.05	0									
	Sn	5,73	4,30	3,00	1,72	1,06	0,68	0,58	0,14	0									
	Pb	6,33	4,19	2,22	1,32	0,63	0,29	0,31	0,08	0,09									
S_2	*C*	3,45	2,76	2,27	1,84	1,60	1,70	1,58	1,36	1,23	1,16	1,06	0,97	1,03	0,99	0,88	0,85	0,8	0,8
	Al	5,10	4,35	3,73	3,09	1,94	1,96	1,86	1,68	1,63	1,46	1,28	1,12	1,04	1,66	1,74	1,05	1,0	0,9
	Zn	7,90	5,82	4,43	3,48	3.05	2,67	2,51	2,24	2,08	1,69	1,66	1,46	1,46	1,18	0,91	0,95	0,8	0,7
	Sn	9,52	7,08	3,68	2,98	2,16	1,66	1,60	1,92	2,07	1,58	1,24	0,98	0,91	0,91	0.59	0,45	0,3	0,2
	Pb	7,72	6,49	5,46	4,54	4,10	3,80	3,10	2,83	2,25	1,42	1,02	0,95	0,79	0,51	0,18	0,15	0,05	0

Intensitätsverteilung der beiden Komponenten S_1' und S_2', wenn ihre Absorptionskoeffizienten in Blei ($\mu_1 = 0{,}54\ \mathrm{cm}^{-1}$; $\mu_2 = 1{,}49\ \mathrm{cm}^{-1}$) bekannt sind. Die so erhaltenen Zahlen sind, da die Sekundärstrahlung im Strahlermaterial einen von α abhängigen Weg zurückzulegen hat und dabei je nach ihrer Härte Absorptionsverluste erleidet, zu korrigieren. Die Korrektur liefert die Intensitätsverteilung für S_1 und S_2, wobei alle Zahlen bereits durch $\varrho \cdot D$ ($\varrho =$ Dichte, $D =$ Dicke des Strahlers) dividiert sind, so daß S_1 und S_2 die von der Masseneinheit gestreute Intensität darstellen.

Tabelle I enthält das so gewonnene endgültige Zahlenmaterial, das in den Figuren 1 (für S_1) und 2 (für S_2) graphisch dargestellt ist. Zur Tabelle wäre noch zu bemerken, daß die unter $\alpha = 160, 170, 180^0$ angeführten Zahlen durch Extrapolation gewonnen, also nicht beobachtet sind. In den Figuren sind der Deutlichkeit halber die Kurven durch Verlegung der Abszissenachse voneinander getrennt.

Fig. 1 zeigt, daß S_1 nur im Austrittsraum vorhanden ist, soweit die Beobachtungsempfindlichkeit eine solche positive Aussage gestattet. Von hohen Intensitäten in unmittelbarer Umgebung der Primärrichtung ausgehend nimmt die Intensität scharf ab für größere Winkelwerte α und wird unmerklich bei $\alpha > 80^0$. Die weiche Sekundärstrahlung ist ebenfalls asymmetrisch verteilt bei Bevorzugung des Austrittsraumes. Hier wäre noch zu erwähnen, daß für *Sn* wegen der auftretenden Abweichungen Doppelbeobachtungen vorhanden und in Fig. 2 eingetragen sind.

Zur besseren Übersicht wurde noch der Gesamtstreueffekt berechnet, den die $\varkappa_1$ bzw. $\varkappa_2$-Strahlung in den einzelnen Materialien erfährt. Er ist gegeben durch

$$\Sigma = C \int_0^{2\pi} S \sin \alpha\, d\alpha,$$

worin C eine von der Entfernung und von den

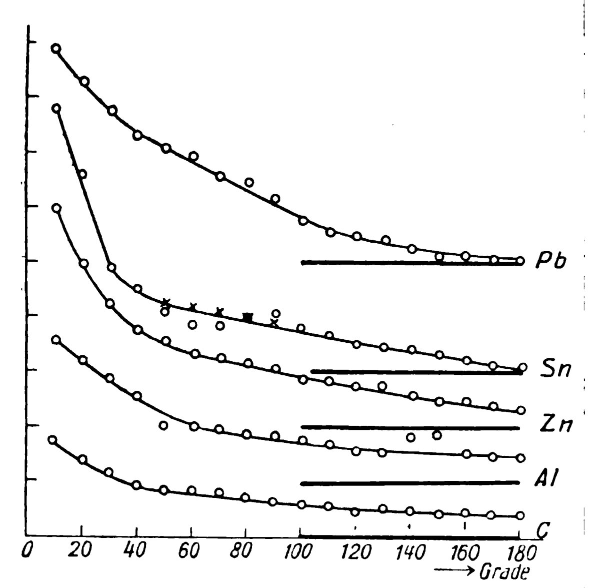


Fig. 1.

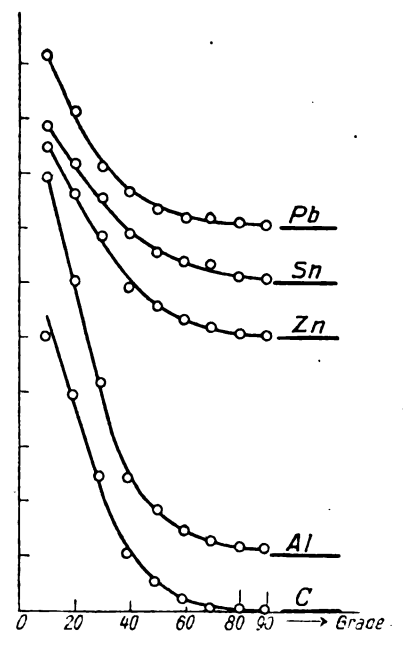


Fig. 2.

Tabelle II.

	Z	A	Σ_1	Σ_2	Σ_2'	Σ_2''	$\sigma_1 = A\Sigma_1$	$\sigma_2 = A\Sigma_2$	Σ_2'/Σ_2''	λ/a	S_γ	$a \cdot 10^8$	$\lambda \cdot 10^8$
C	6	12,0	1,96	3,22	2,02	1,20	23,6	38,6	1,68	1,4	1,827	0,152	0,213
Al	13	27,1	2,77	4,21	2,87	1,34	75,0	114	2,12	2,0	5,565	0,085	0,170
Zn	30	65,4	1,57	5,31	3,58	1,73	113	349	2,06	2,0	17,588	0,051	0,102
Sn	50	118,7	1,43	4,43	3,24	1,19	170	527	2,75	2,7	32,88	0,037	0,100
Pb	82	207,2	1,11	5,65	4,44	1,21	230	1170	3,66	3,7	59,87	0,029	0,107
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14

Dimensionen des Meßgefäßes abhängige Versuchskonstante ist. Trägt man $S \sin a$ als $f(a)$ auf und planimetriert diese Kurven von 0 bis 180, 0 bis 90, 90 bis 180, so erhält man die Gesamtstreuung Σ, bzw. die Streuung Σ' in den Austrittsraum, und die Streuung Σ'' in den Eintrittsraum, und zwar nach der früheren Bemerkung immer die Massenstreuung (Str. pro Masseneinheit). In Tabelle II sind die Resultate enthalten; die einzelnen Spalten geben der Reihe nach: 1. Strahlermaterial, 2. seine Atomnummer Z (Zahl der Elektronen im Atom), 3. sein Atomgewicht A, 4. den Integraleffekt Σ_1 für die harte S_1-Strahlung, 5. dasselbe, Σ_2, für die weichere S_2-Strahlung, 6. den Integral-Austrittseffekt Σ_2', 7. den Integral-Eintrittseffekt Σ_2'' für S_2, 8. und 9. die Streuung pro Atom, d. i. $\sigma_1 = A\Sigma_1$ und $\sigma_2 = A\Sigma_2$ für beide Strahlungsarten, 10. die Asymmetrie, die an dem Verhältnis Σ_2'/Σ_2'' gemessen sein soll. Für S_1 ist die Asymmetrie demnach unendlich. Die Zahlen unter 11, 12, 13 und 14 werden weiter unten besprochen werden.

Man entnimmt zunächst aus der Tabelle, daß die Massenstreuung Σ bei S_1 mit dem Atomgewicht ab-, bei S_2 mit dem Atomgewicht zunimmt. Die Streuung pro Atom, d. i. σ_1 und σ_2, ist, wie Fig. 3 zeigt, im ersteren Falle proportional der Atomnummer, während sie im zweiten Falle schneller mit Z wächst, als der linearen Proportionalität zukommt, aber langsamer als einer Proportionalität mit Z_2 entsprechen würde. Die Asymmetrie der weicheren Sekundärstrahlung nimmt mit steigendem Atomgewicht des Strahlers zu.

Eine quantitative Verwertung des Zahlenmaterials der Tabelle II ist erst an Hand der Theorie möglich. Eine solche hat P. Debye[1]) im Jahre 1915 entwickelt und sie ist meines Wissens die einzige, die Asymmetrie der Streustrahlung liefert. Ihre Anwendung auf den vorliegenden Fall soll im folgenden versucht werden.

Nach Debye geben die von der Primärwelle getroffenen und mit deren Frequenz schwingenden Elektronen des Strahlenmaterials infolge ihrer regelmäßigen Anordnung im Atom Anlaß zu Interferenzerscheinungen, die auch dann nicht gänzlich verschwinden, wenn die Atome völlig regellos (amorpher Körper) orientiert sind. Die Auswertung der allgemeinen Resultate ist von Debye für ein möglichst einfaches Schema durchgeführt worden, für den Fall nämlich, daß alle Elektronen auf einem Ring in gleichen Abständen voneinander um den Atomkern rotieren. Bezeichnet N die Zahl der Atome, r den Beobachtungsabstand, a den Radius der Elektronenbahn, λ die erregende Wellenlänge, c die Lichtgeschwindigkeit, ε und m Ladung und Masse der Elektronen, so ist in der Beobachtungsrichtung α der beobachtete Bruchteil s_α der primären Energie gegeben durch:

$$s_\alpha = \frac{NZe^4}{r^2m^2c^4}\,\frac{1+\cos^2\alpha}{2}\sum_{x=0}^{x=Z-1}\frac{\sin\left[8\pi\frac{a}{\lambda}\sin\frac{x\pi}{Z}\sin\frac{\alpha}{2}\right]}{8\pi\frac{a}{\lambda}\sin\frac{x\pi}{Z}\sin\frac{\alpha}{2}} \qquad (1)$$

Die gestreute Energie ist also für ein und dasselbe Material (vorgegebenes Z) Funktion des Beobachtungswinkels α, sowie des Verhältnisses $\frac{a}{\lambda}$. Für die Extremfälle von relativ sehr großem oder sehr kleinem λ erhält man durch Integration die gesamte von N-Atomen gestreute Strahlung zu:

$$\lambda >> a \quad S = \frac{8\pi Ne^4}{3m^2c^4}Z^2 \qquad (2)$$

$$\lambda << a \quad S = \frac{8\pi Ne^4}{3m^2c^4}Z \qquad (3)$$

Die Atomstreuung $\frac{S}{N} = \frac{SA\mu}{\varrho}$ (μ ist die Masse des Wasserstoffatoms) ist somit im ersten Falle proportional Z^2, im zweiten proportional Z. Vergleicht man diese Aussage

1) P. Debye, Ber. d. kgl. Ges. d. Wiss. in Göttingen, 27. Februar 1915; Ann. 46, 809, 1915.

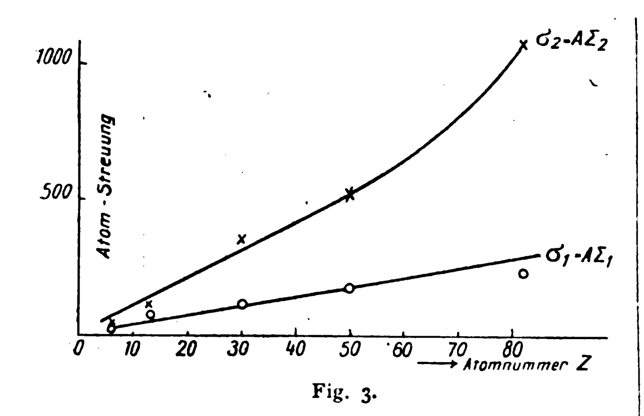


Fig. 3.

mit den Zahlen für σ_1 und σ_2 der Tabelle II bzw. mit ihrer graphischen Darstellung in Fig. 3, so wäre die Wellenlänge der erregenden K_1-Strahlung als sehr klein, die der erregenden K_2-Strahlung weder als sehr klein noch als sehr groß im Verhältnis zu den vorkommenden Elektronenring-Dimensionen zu erwarten.

Um eine präzisere Aussage zu erhalten, wurde Formel (1) für $Z = 6$ (Kohle) ausgewertet; Fig. 4 zeigt die erhaltene Kurvenschar,

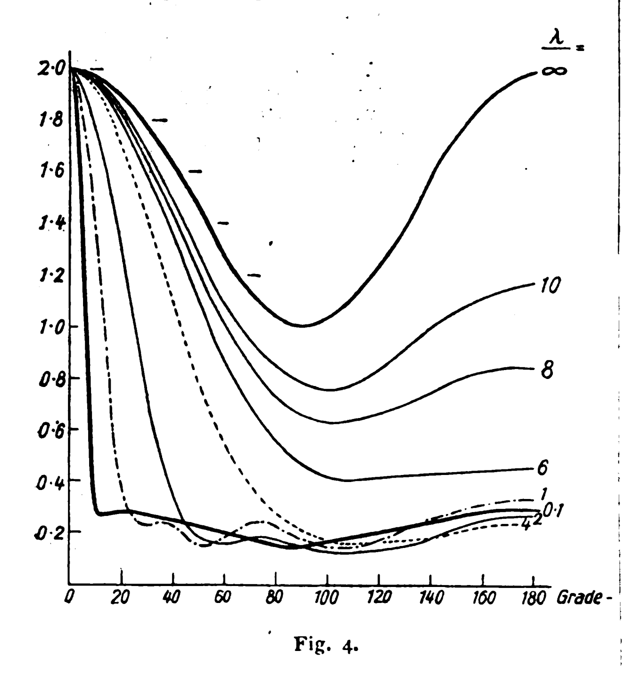


Fig. 4.

die den Fällen entspricht: $\frac{\lambda}{a} = \infty$, 10, 8, 6, 4, 2, 1, 0,1. — Diese Kurven illustrieren am besten die Konsequenzen der Debyeschen Rechnung. Für große Wellenlängen erhält man die bekannte Symmetrie, entsprechend dem in Gl. (1) vor dem Summenzeichen stehenden „Polarisationsfaktor". Aber auch für relativ kurze Wellen wird man Symmetrie beobachten, denn das scharfe Maximum der in Fig. 4 dick ausgezogenen untersten Kurve erfüllt einen so kleinen Winkelbereich, daß die darin enthaltene Energie von der des Primärstrahles nicht zu trennen ist und diesem zugezählt werden wird. Nur die Gesamtstreuung ist im letzteren Falle wesentlich kleiner als im ersteren, wo die Elektronen alle in Phase schwingen. Für Wellenlängen zwischen diesen beiden Extremen erhält man kräftiges Überwiegen der Austrittstrahlung und für λ nahe gleich a sekundäre Maxima, bezgl. derer Debye an die Friedrichschen Interferenzringe erinnert.

Eine exakte Anwendung der Theorie auf das Experiment wäre nur bei den an Kohle gewonnenen Resultaten möglich, da Formel (1) nur für $Z = 6$ ausgewertet wurde. Um auch das übrige Beobachtungsmaterial in den Bereich der Betrachtungen ziehen zu können, sei angenommen, daß auch für höhere Zahlen Z Kurvenscharen von gleichem Charakter wie in Fig. 4 erhalten wurden. Dann stellt Fig. 2 eine Kurvenschar vor, in der das Verhältnis $\frac{\lambda}{a}$ durch Variation von a (der Elektronenring zieht sich zusammen, wenn die Elektronendichte wächst) bei konstantem λ (d. i. die Wellenlänge der K_2-Strahlung) geändert wurde, während in Fig. 4 a (Ringradius für Kohle) konstant ist und die erregende Wellenlänge sich ändert; also identische Fälle, wenn die gemachte Voraussetzung angenähert gilt. In der Tat ändert sich im allgemeinen die Kurvenform in Fig. 2 von Al nach Pb so, wie dies in Fig. 4 von unten nach oben, im Sinne zunehmender Werte für $\frac{\lambda}{a}$ stattfindet. Die Ähnlichkeit wird noch etwas deutlicher, wenn man sich die Fig. 2 durch steil ansteigende Äste am Kurvenanfang ergänzt denkt. Dagegen fehlt bei allen beobachteten Kurven der neuerliche Anstieg, den Fig. 4 bei $\alpha > 100^0$ zeigt.

Um den Vergleich in konkreten Zahlen weiterführen zu können, ist nur nötig, aus Fig. 4, ebenso wie dies an den Kurven der Fig. 1 und 2 geschehen ist, die Integraleffekte S, S' und S'' durch Planimetrieren zu berechnen. Für die Extremfälle ist das Resultat durch die Ausdrücke 2 und 3 bereits bekannt. Man erhält damit für die nach Formel (1) zu erwartende Asymmetrie S'/S'' eine Reihe von Werten, die als Funktion von $\frac{\lambda}{a}$ aufgetragen eine Kurve ergeben, welche von $S'/S'' = 1$ für $\frac{\lambda}{a} < 0{,}1$ beginnend, zu einem Maximum für $S'/S'' = 4{,}2$

für $\frac{\lambda}{a} = 4{,}3$ ansteigt, um dann wieder auf $S'/S'' = 1$ bei $\frac{\lambda}{a} = \infty$ asymptotisch abzunehmen. Trägt man in diese Kurve die beobachteten Zahlen der Tabelle II für Σ'/Σ'' ein — es ist natürlich der aufsteigende Kurvenast zu wählen, da die Asymmetrie mit abnehmendem a noch wächst, — so kann man die zugehörigen $\frac{\lambda}{a}$ auf der Abszisse ablesen und erhält die in Spalte 11 (Tab. II) eingetragenen Werte. Da weiter voraussetzungsgemäß alle Elektronen auf einem Ring zu denken sind, so läßt sich zunächst a und damit aus Spalte 11 λ berechnen. Wenn Z-Elektronen auf einem Ring um einen Kern mit der Ladung Ze kreisen, jedes mit dem Impulsmoment $h/2\pi$, so gilt[1])

$$a = \frac{\varepsilon^2}{2hR(Z - S_z)}, \tag{4}$$

worin h das Wirkungsquantum $6{,}55 \cdot 10^{-27} \frac{\text{erg}}{\text{sec}}$, R die Rydbergsche Konstante $2{,}734 \cdot 10^{15} \frac{1}{\text{sec}}$, ε das Elementarquantum $4{,}77 \cdot 10^{-10}$ st. E. und S_z endlich folgenden Ausdruck bedeutet:

$$S_z = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^{i=Z-1} \frac{1}{\sin i \frac{\pi}{2}}.$$

S_z wurde für bequeme Zahlenwerte von Z gerechnet und für die hier benötigten interpoliert, welcher Vorgang für den Überschlagscharakter dieser Überlegungen genügt, und in Spalte 12 eingetragen. Daraus ergeben sich nach $a = \frac{0{,}635 \cdot 10^{-8}}{Z - S_z}$ die Werte für a (Spalte 13) und daraus weiter die Zahlen für λ, die konstant sein sollten. — Aus der Planimetrierung der theoretischen Kurven ergibt sich ferner, — was der Anblick der Fig. 4 unmittelbar zeigt — daß in dem Bereich $\frac{\lambda}{a} < 5$ die Zahlen für S'' (Intensität der Eintrittsstrahlung bezogen auf die Zahl NZ der Elektronen im cm³, ein Ausdruck, der der Massenstrahlung proportional ist, wenn $Z = \frac{A}{2}$ gesetzt wird) nahe konstant sein müssen. Das Gleiche findet bei den beobachteten Kurven, die nach dem früheren im gleichen $\frac{\lambda}{a}$-Bereich liegen, statt; vgl. Spalte 7 der Tabelle II.

1) Bohr, Phil. Mag. **26**, 482, 1913; auch Debye, diese Zeitschr. **18**, 276, 1917.

Überblickt man diese Ergebnisse und berücksichtigt man die vielen schematisierenden Annahmen, so wird man zugeben müssen, daß die Debyesche Theorie eine qualitative Beschreibung der beobachteten Erscheinungen zu liefern imstande ist. Auch mit der erreichten Konstanz von λ (Spalte 14) wird man sich begnügen, wenn man zu obigem noch die Schwierigkeit der Beobachtung und die vielen daran nötigen Korrekturen mit nicht absolut sicheren Daten sich vergegenwärtigt. Im ersten Moment scheint sogar diese Darstellung einen schönen quantitativen Erfolg aufzuweisen, da Rutherford und Andrade[1]) bei ihren Interferenzversuchen kräftige Linien entsprechend den Wellenlängen 0,10 und $0{,}16 \cdot 10^{-8}$ cm für die γ-Strahlung von RaC gefunden haben, was in gewiß befriedigender Übereinstimmung mit dem Endergebnis der Tabelle II stünde. —

Trotzdem hat sich mein anfänglicher Optimismus in bezug auf die Deutbarkeit derartiger Streuvorgänge durch Welleninterferenzen allmählich ins Gegenteil verkehrt, und ich stehe heute auf dem Standpunkt, daß dies nicht der richtige und zu einer das ganze Erscheinungsgebiet umfassenden Erklärung führende Weg ist. Die Gründe dafür sind etwa folgende:

1. An die quantitative Aussage über die Wellenlänge der γ-Strahlung vermag ich trotz der bemerkenswerten und wohl nur zufälligen Übereinstimmung mit den direkten Rutherfordschen Wellenlängenbestimmungen nicht zu glauben, da die experimentell viel besser fundierten Absorptionsmessungen gezeigt haben, daß es sich hier um ein Wellenlängengebiet handeln muß, das um mindestens eine Zehnerpotenz kleiner sein muß als $0{,}1 \cdot 10^{-8}$ cm[2]).

2. Wenn es vielleicht auch gelingen mag, durch sinngemäßere Rechenannahmen — z. B. entsprechend mehreren Elektronenringen und ihrer Wechselwirkung bei der Interferenz, oder durch Berücksichtigung eventuell vorhandener mikrokristallinischer Struktur — die Form der beobachteten Verteilungskurven für die weichere S_2-Strahlung (Fig. 2) besser wiederzugeben, als dies hier möglich war, so kann ich mir doch keinen Weg vorstellen, der zu der „unendlichen“ Asymmetrie der harten S_1-Strahlung (Fig. 1) führen könnte.

3. Und selbst wenn dies gelänge, bliebe ein mit dem Auftreten sekundärer oder gestreuter Wellenstrahlung innig verknüpfter Erscheinungskomplex, die sekundär erregte β-Strahlung, unaufgeklärt. — In dieser Hinsicht zeigt das Ex-

1) E. Rutherford u. E. N. C. de Andrade, Phil. Mag. **27**, 856, 1914; **28**, 263, 1914.

2) Vgl. z. B. K. W. F. Kohlrausch, diese Zeitschr. **19**, 345, 1918.

periment[1]): Daß für die sekundäre β-Strahlung der Atomstrahlungskoeffizient[2]) mit der Atomnummer des Strahlers wächst (von Al bis Pb auf das 19fache des Al-Wertes); daß die Strahlung im Eintrittsraum weicher ist als im Austrittsraum, daß ihre Härte unabhängig ist von der Natur des Strahlers und daß die Asymmetrie mit abnehmender Atomnummer zunimmt. — Die erregende γ-Strahlung war das Gemisch $K_1 + K_2$ von RaC, und die Versuche wurden ohne Rücksicht auf diese damals noch unbekannte Nichthomogenität der harten Ra-C-Strahlung durchgeführt und berechnet. Für die gestreute γ-Strahlung (zum Vergleich müssen die unzerlegten Beobachtungen herangezogen werden, also $\sigma_1 + \sigma_2$, $\frac{\Sigma_1 + \Sigma_2'}{\Sigma_2''}$ usw.) ergeben die Versuche: Daß der Atomstreuungskoeffizient $\sigma_1 + \sigma_2$ mit der Atomnummer zunimmt, daß die unzerlegte Strahlung im Eintrittsraum weicher ist, daß die Härte unabhängig ist vom Strahlermaterial, und daß die Asymmetrie keine deutliche Abhängigkeit von Z zeigt. Also bis auf den letzten Punkt überall qualitativ gleichsinniges Geschehen. Wenn nun auch die beiden Beobachtungsreihen noch keine quantitativen Beziehungen aufzustellen erlauben, so scheinen sie mir doch die Richtung zu weisen, in der sich die theoretische Behandlung des Problems wird bewegen müssen.

Zunächst muß aufgeklärt werden, warum die durch das transversale elektrische Feld des γ-Wellenzuges bis zur Auslösung beschleunigten Elektronen sich nicht nur oder mindestens nicht vorwiegend senkrecht zur γ-Richtung bewegen, vielmehr deren Richtung bevorzugen. Ist für diesen Auslösemechanismus eine den Tatsachen entsprechende Theorie gefunden, dann wird es nicht schwierig sein, die der Elektronenbeschleunigung entstammende γ-Strahlung, eventuell unter Zuhilfenahme der von A. Sommerfeld[3]) entwickelten Anschauungen über die Anisotropie solcher Beschleunigungsstrahlung, zur Erklärung der hier oder bei Röntgenexperimenten auftretenden Streuung von γ- oder X-Strahlen heranzuziehen. —

1) K. W. F. Kohlrausch u. E. Schrödinger, Wien. Ber. **123**, 1319, 1914.

2) An einer anderen Stelle wurden zu einer ähnlichen Überlegung die Massenstrahlungskoeffizienten herangezogen, was nicht sinngemäß ist.

3) A. Sommerfeld, Münchner Ber. 1, 1911.

Wien, Juli 1919.

(Eingegangen 28. Juli 1919.)

Die Bestimmung der Radioaktivität von Quellwässern.

Von Ottomar Nürnberger †.

Vorwort des Herausgebers. In den Jahren 1912—1914 hat O. Nürnberger im Physikalischen Institut der Universität Leipzig eine umfangreiche Untersuchung über die verschiedenen gebräuchlichen fontaktometrischen Methoden durchgeführt und diese Untersuchung im Sommersemester 1914 durch Messungen in Bad Brambach i. V. ergänzt. Seine Versuche waren im wesentlichen abgeschlossen und sollten den Gegenstand seiner Dissertation bilden. Bei Kriegsausbruch meldete sich Nürnberger als Freiwilliger und wurde im November 1914 eingestellt. Im Frühjahr 1915 kam er ins Feld nach Frankreich und ist am 6. Juni 1915 bei Neuville wahrscheinlich gefallen, da er seitdem vermißt wird.

Die folgende Mitteilung und eine zweite, die im nächsten Heft dieser Zeitschrift erscheint, stellen einen stark gekürzten Auszug aus der Dissertation dar, für welche ein nahezu druckfertiges Manuskript vorliegt. Bei Herstellung des Auszuges hat der Herausgeber sich auf diejenigen Punkte beschränkt, welche nach seiner Auffassung allgemeineres Interesse verdienen.

George Jaffé.

Die im folgenden mitgeteilten Versuche dienten dem Zwecke, die verschiedenen fontaktometrischen Apparate und Methoden auf die Genauigkeit und Vergleichbarkeit ihrer Ergebnisse zu untersuchen. Es sollten dabei nur Versuchsweisen und Apparate behandelt werden, die sich zu Beobachtungen im Gelände eignen; besondere Laboratoriumsmethoden blieben unberücksichtigt.

An Apparaten wurden zunächst verwendet der von H. W. Schmidt[1]) und der nach Engler und Sieveking mit der Verbesserung von Mache und Meyer[2]). Zu den späteren Messungen stellte die Brambacher Sprudelgesellschaft, Radium-Mineralbad Brambach i. V. bereitwilligst die Kanne nach Engler und Sieveking[3]) und die nach Kohlrausch und Loewenthal[4]) zur Verfügung, wofür ihr auch hier der Dank des Verfassers ausgesprochen sei. Endlich wurde noch eine Kanne benutzt, die im Prinzip ganz dem Mache- und Meyerschen Fontaktometer entspricht, die aber voll-

1) H. W. Schmidt, diese Zeitschr. **6**, 561. 1905.

2) H. Mache u. St. Meyer, Zeitschr. f. Instrumentenkunde **29**, 65, 1909.

3) C. Engler, Zeitschr. f. Elektrochemie **11**, 714, 1905; H. Sieveking, diese Zeitschr. **6**, 700, 1905.

4) Gudzent, Zeitschr. f. prakt. Geologie **18**, 147, 1910.

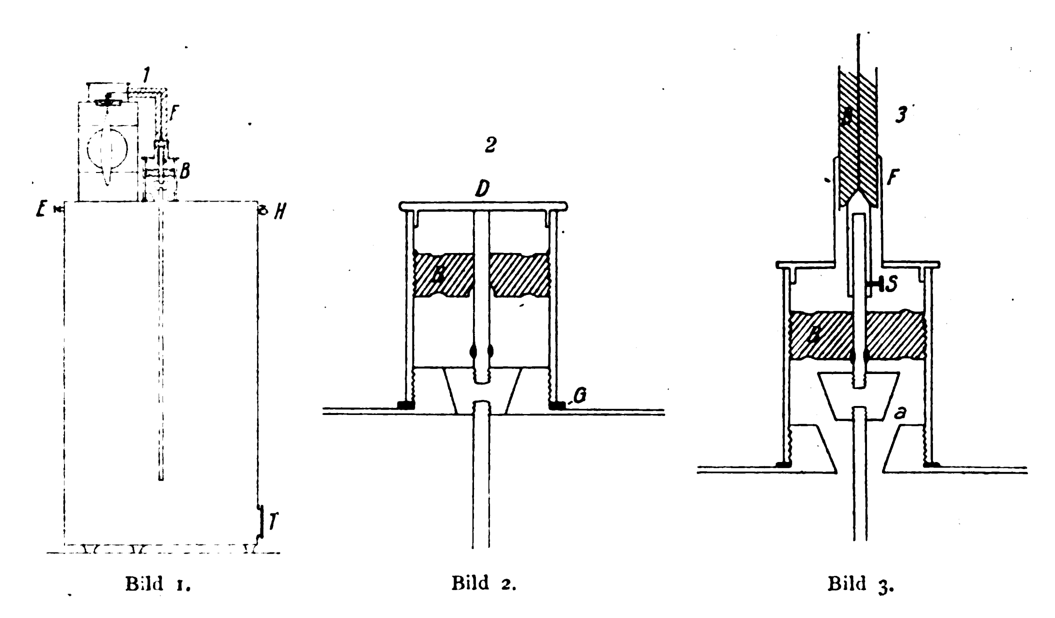


Bild 1. Bild 2. Bild 3.

ständig (auch gegen das Elektroskop) abgeschlossen ist.

Die Meßkanne ist aus 2 mm starkem Kupferblech angefertigt und faßt genau 15 Liter. Ein großer Tubus (*T*, Fig 1, Bild 1) ist für das Einfüllen des Wassers angebracht. Eine äußere eingefettete Gummilederdichtung schließt die Öffnung auch bei größerem Überdruck vollkommen dicht ab. Außerdem ist eine Erdungsschraube *E* vorgesehen und ein Hahn *H*, der gewünschtenfalls das Ablassen von Wasser ermöglichen soll. Die Innenelektrode ist konisch eingefügt, sie schließt beim Schütteln die Kanne dicht ab (Fig. 1, Bild 2). Der Deckel *D* ermöglicht es, das Wasser zu schütteln, ohne daß die Isolation abgenommen werden muß und ohne daß sie beim Schütteln irgendeinen Schaden erleidet. Selbst bei stark kohlensäurehaltigem Wasser drang die Feuchtigkeit nach dem Heben der Elektrode nicht an den Bernstein. Die Fassung der Isolation (*B*, Fig. 1, Bild 1) ist aufgeschraubt, die eingefettete Dichtung (*G*, Bild 2) kommt mit dem inneren Luftraum nicht in Berührung. Der Bernstein ist eingeschraubt und abgedichtet. Die Innenelektrode ist luftdicht durch den Bernstein geführt, ein kleiner eingefügter Ring aus festem Gummi hält die Elektrode nach dem Heben immer in derselben Stellung (Bild 3). Der kleine Raum *a* (Bild 3) beträgt nur $^1/_{1800}$ vom Gesamtvolumen, kommt also wegen stärkerer Absorption der α-Strahlung nicht in Betracht. Der durch das Schütteln entstehende Überdruck braucht nicht abgelassen zu werden, was — wie später gezeigt wird — bei der Untersuchung der Mineralwässer von großem Vorteil ist.

Wegen seiner bekannten Vorzüge und kleinen Kapazität wurde ein Wulfsches Fadenelektrometer[1]) in Verbindung mit der beschriebenen Kanne benutzt[2]). Die Verbindung zwischen Innenelektrode und Fadenpaar wurde durch eine Drahtführung *F*, die in Bernstein gebettet ist, hergestellt. Das Elektrometer wird nach dem Schütteln und Heben der Elektrode bei *S* (Bild 3) angeschraubt.

Mit dieser Anordnung wurden die besten Ergebnisse erzielt; ihre elektrostatische Kapazität betrug 16,7 cm.

Es kann wohl als feststehend angesehen werden, daß diejenigen Meßmethoden, bei denen die Bildung des aktiven Niederschlags nicht berücksichtigt wird, bei denen also die erste Messung, oder eine Messung nach zwei Minuten als Maß der Aktivität gilt („Schnellmethode") nur zu angenäherten Resultaten führen können, ganz abgesehen davon, daß keine Gewähr dafür vorliegt, inwieweit die beobachtete Wirkung auf Radioaktivität allein zurückzuführen ist.

Auch diejenigen Verfahren, bei denen zu

1) Th. Wulf, diese Zeitschr. **8**, 246 u. 526, 1907.

2) Anmerkung des Herausgebers. Das Wulfsche Elektrometer ist inzwischen von verschiedenen Seiten für fontaktometrische Messungen benutzt worden, und zwar in Überkopfstellung (C. Engler, H. Sieveking u. A. Koenig, Chem. Ztg. **38**, 425, 446, 1916; B. Walter, diese Zeitschr. **17**, 21, 1916; C. Engler u. A. Koenig, diese Zeitschr. **17**, 73, 1916). Die oben beschriebene Anordnung ließe sich natürlich auch mit dem Wulfelektrometer in Überkopfstellung verbinden; die elektrostatische Kapazität wäre dann noch kleiner. Das Wesentliche der Anordnung besteht jedoch in dem luftdichten Abschluß. Störungen durch feuchten Beschlag, wie sie von V. F. Hess (diese Zeitschr. **17**, 72, 1916) bei direkter Verbindung der Kanne mit dem Elektroskop erwähnt werden, sind von Nürnberger, wie aus dem Text hervorgeht, bei der beschriebenen Anordnung nicht beobachtet worden.



einem bestimmten Zeitpunkt nach Einfüllung der Emanation der Strom gemessen, dann die Emanation so schnell wie möglich verdrängt und der gemessene Anteil des aktiven Niederschlags in Abzug gebracht wird („Zweiminutenmessung", „Zehnminutenmessung"), liefern keine zuverlässigen Werte. Die Ergebnisse liegen durchweg zu hoch, weil der aktive Niederschlag nicht ganz erfaßt wird. Nach den vergleichenden Messungen des Verfassers liefert die Zweiminutenmessung Resultate, die um 5—20 Proz., und die Zehnminutenmessung Resultate, die um 45—60 Proz. zu hoch liegen. Je später der Gesamtstrom beobachtet wird, um so fehlerhafter wird das Ergebnis.

Eine große Anzahl von Versuchen wurde angestellt, um zu prüfen, inwieweit es möglich ist, aus der Beobachtung des Abklingens des aktiven Beschlags graphisch oder rechnerisch den Wert zu ermitteln, der ihm zur Zeit der letzten Beobachtung des Gesamtstroms zukam. Es ergab sich, daß auch bei diesem Verfahren der aktive Niederschlag stets zu niedrig gemessen wird und darum die Aktivitätszahlen zu hoch ausfallen. Der Fehler ist bei Beobachtungen kurz nach dem Schütteln gering, wächst dann aber schnell mit der Dauer der Messung des Gesamtstroms. Bei 3 Stunden (und mehr) Expositionszeit ist der Fehler am größten, das Ergebnis liegt 70—80 Proz. über dem wahren Wert. Im Schmidtschen Apparat liegen die Verhältnisse am günstigsten; hier beträgt der Fehler je nach der Dauer der Messung 5 bis 23 Proz.

Als weiteres Verfahren bietet sich die Beobachtung des radioaktiven Anstieges nach dem Einbringen der Emanation und Extrapolation auf den Zeitpunkt des Einbringens. Zur Berechnung des Nullwertes aus den Beobachtungen stehen Zahlenreihen von Duane[1]), H. W. Schmidt[2]) (für die ersten 15—30 Minuten), G. Berndt[3]) und J. Götz[4]) zur Verfügung. Diese vier Anstiegkurven sind in der folgenden Tabelle I zusammengestellt; $\frac{I_0}{I_t}$ ist der Faktor, mit welchem man die zur Zeit t gemachte Beobachtung multiplizieren muß, um den Anfangswert zu erhalten.

Zum Vergleich mit den Beobachtungen ist in Tabelle II eine vollständige Messungsreihe mit künstlichem Emanationswasser im Schmidtschen Apparat mitgeteilt. Aus dieser Tabelle geht hervor, daß der beobachtete radioaktive Anstieg am besten mit den von Duane aufgestellten Werten übereinstimmt. Der beste Beweis dafür ist, daß der beobachtete Maximalwert dem Mittel aus den nach Duane berechneten Höchstwerten bis auf $1^1/_3$ Proz. gleichkommt. Die nach Götz berechneten Zahlen fallen hier und bei allen Versuchen mit der Beobachtungszeit[4]); die aus den ersten Ablesungen berechneten Maximalwerte liegen beträchtlich zu hoch. Die Abweichungen von der Berndtschen Kurve sind zu groß; die Schmidtschen Zahlen haben sich bei anderen Versuchen nicht als gleich gut erwiesen.

Dasselbe Bild ergeben zahlreiche Versuche sowohl mit künstlichem als auch mit natürlichem Emanationswasser, viele Beobachtungen im Schmidtschen Apparat, wie im Mache-

Tabelle I[1]).

t	I_0/I_t			
	Duane	Schmidt	Berndt	Götz
0′	1,000	1,000*	1,000*	1,000
1′	0,860	0,882*	0,910*	0,865.
2′	0,775	0,810*	0,850*	0,777
3′	0,714	0,761*	0,806*	0,718.
4′	0,676	0,727*	0,775*	0,676
5′	0,650	0,703*	0,751*	0,6485
6′	0,629	0,686*	0,733*	0,627
7′	0,614	0,671*	0,718*	0,610.
8′	0,602	0,662*	0,707*	0,597.
9′	0,593	0,653*	0,697*	0,588
10′	0,585	0,647*	0,690*	0,580
$12^1/_2$′	0,572.	0,6335	0,674	0,566
15′	0,5625	0,625*	0,663*	0,556
$17^1/_2$′	0,556	0,620	0,654	0,548
20′	0,550	0,613	0,645*	0,542.
25′	0,541	0,604.	0,630*	0,531
30′	0,533	0,596	0,615*	0,520.
40′	0,517	0,580	0,592	0,4975
50′	0,504	0,563	0,569	0,481.
1 h —	0,492	0,550.	0,550	0,467
1 h 20′	0,473	0,525.	0,518	0,445
1 h 40′	0,457	0,503	0,497	0,429
2 h —	0,446	0,487.	0,480	0,418.
2 h 20′	0,438	0,477	0,468	0,4125
2 h 40′	0,433	0,473	0,462.	0,409.
3 h —[2])	0,431	0,470[3])	0,460*	0,4075

1) W. Duane, Journ. d. Phys. **4**, 607, 1905; Le Radium **7**, 163, 1910.
2) H. W. Schmidt, diese Zeitschr. **6**, 561, 1905.
3) G. Berndt, Ann. d. Phys. **38**, 958, 1912.
4) J. Götz, Inauguraldiss. aus dem II. Chem. Inst. der kgl. Ungar. Univ.; man vgl. J. v. Weszelszky, diese Zeitschr. **13**, 240, 1912.

1) Die mit einem * versehenen Zahlen sind von den betreffenden Autoren selbst angegeben, alle übrigen wurden rechnerisch oder graphisch ermittelt; 5. bedeutet 5 ist zu klein; 5 heißt, 5 ist zu groß.
2) Zwischen 3 h und 5 h soll der Ionisationsstrom konstant sein, nach etwa 6 h klingt er mit der bekannten Halbwertszeit von 3,85 Tagen ab.
3) Dieser Maximalwert wurde nach Hammer u. Vohsen, diese Zeitschr. **14**, 452, 1913, in Verbindung mit den Schmidtschen Größen verwendet. Die Zahlen sind bis 30 Min. aus der Näherungsgleichung berechnet, die späteren graphisch gefunden.
4) Dieser Umstand kann nicht auf Entweichen von Emanation zurückgeführt werden; die Apparate waren völlig dicht, was tagelang fortgesetzte Versuche bestätigten.

Tabelle II.

Beobachtung		Götz		Berndt		Schmidt		Duane	
Zeit	1/1000 Volt sec⁻¹	I_0	I_{max}	I_0	I_{max}	I_0	I_{max}	I_0	I_{max}
2'17"	402	305	748.	336	730	320	680	305	707
2'48"	408	298	730.	333	724	314.	669	296	687
3'47"	428.	293	718	334.	727	314.	669	293	679
4'45"	449	294	722	339.	738	318.	677.	295	683.
5'45"	470.	297.	729.	346.	753	324.	690.	298	692
6'45"	490	301	738	353	767.	330.	703.	303	702
8' 7"	496	295.	724.	350	761	328	697.	298	691.
9'50"	507	294	721	350	761	328	698	297	689
10'44"	516	296.	727.	353	767	331	704	299.	694.
12' 4"	516.	293.	720	349	759.	328	698	296.	688
14'54"	534.	297	729	355	771.	334.	711.	301	698
17'22"	544.	299	733	356.	775	337.	718	303	702.
18'36"	544	297	729	354.	770.	336	714.	301	698.
20'14"	544	295	724	351	763.	334	710	299.	694.
22'27"	553	296.	727.	353	767.	337.	718	302	701
24'36"	560	298	730.	354	769.	339.	722	304	705
26'45"	563	297	728.	352	765.	339	720.	303.	704
28'43"	563.	295	723.	349	759	336.	716	302	700.
30'34"	566	293.	720	347	754.	336	714.	302	699.
32'49"	575.	295	723.	351	763.	339.	722	303.	703.
35'—"	576.	292	718	349	758.	339	720.	303	702
37'57"	581.	291.	715	347	755	339	721	301	697.
40'29"	579.	288.	707.	342	743.	335	712.	299	693
42'49"	583	288	707	341.	742	335.	713.	299.	694
45'41"	584.	285.	700	338	735.	333.	709	297.	689.
48'43"	599.	291	713.	343.	747	339	720.	303	702.
51'59"	616.	295	724	348.	757.	346	736	309	716.
54'51"	621.	295.	724.	347	754	347	737.	309.	718
1 h —'	620.	290	711	341.	742.	341.	726	308	709
1 h 10'	624.	282	693.	333	724.	335.	713.	301	698
1 h 24'	644.	285.	700	331	719	335	713	302	700.
1 h 42'	666.	285	698.	329.	716.	334	711	304	705
2 h —'	676	283	693.	325	706	329.	699	302	700
2 h 20'	684.	282.	693	321	697.	326.	694	300	695.
2 h 40'	688.	282.	693	318	692	325	691	298	691.
3 h —'	689.	281		317.		324		297.	
4 h —'	690	281.		317.		324.		297.	
5 h —'	689	281		317		324		297	
Mittelwert		292	718	341	747	332	707	301	698
Mittlerer Fehler		± 2,2 Proz.		± 12,2 Proz.		± 2,3 Proz.		± 1,2 Proz.	

Tabelle III.

Apparat	Emanationslösung	beobachteter Maximalwert	Mittel aus den berechneten Maximalwerten nach			
			Duane	Götz	H. W. Schmidt (Hammer u. Vohsen)	Berndt
H. W. Schmidt	künstliche	0,124	0,127 ± 2 (3)	0,129 ± 3 (5)	0,129 ± 3 (5)	0,133 ± 6 (9)
„	„	0,429[1])	0,425 ± 6 (4)	0,436 ± 6 (7)	0,434 ± 9 (5)	0,452 ± 12 (23)
„	„	0,690	0,697 ± 7 (7)	0,717 ± 14 (27)	0,706 ± 15 (16)	0,750 ± 25 (60)
Mache u. Meyer	„	2,30	2,54 ± 13 (24)	2,65 ± 16 (35)	2,62 ± 14 (32)	0,74 ± 21 (44)
„	„	3,35	3,39 ± 7 (4)	3,39 ± 7 (4)	3,42 ± 9 (7)	3,49 ± 9 (14)
„	„	4,10	4,39 ± 13 (29)	4,50 ± 20 (40)	4,45 ± 18 (35)	4,63 ± 28 (53)
Wulfelektrometer	„	1,83	1,99 ± 1 (16)	2,04 ± 10 (21)	2,04 ± 2 (21)	2,14 ± 5 (31)
	Bad Brambach:					
„	Wettinquelle	2,75	2,85 ± 6 (10)	2,96 ± 9 (21)	2,91 ± 7 (16)	3,09 ± 12 (34)
„	Grenzquelle	3,50	3,69 ± 7 (19)	3,81 ± 9 (31)	3,74 ± 13 (24)	3,96 ± 17 (46)
„	Kohlensäure der Schillerquelle	6,36	6,55 ± 13 (19)	6,74 ± 13 (38)	6,58 ± 12 (22)	6,93 ± 18 (57)

1) Der beobachtete Höchstwert ist bei diesem Versuch infolge einer Änderung des natürlichen Abfalls um etwa 0,01 zu groß.

Tabelle IV. Apparat Mache und Meyer.

Dauer des Schüttelns	Zeit des Höhepunktes	Abnahme bis 3^h	Abnahme 3^h—5^h	Richtiger Gang ab:	Dauer des Perlens	Zeit des Höhepunktes	Abnahme bis 3^h	Abnahme 3^h—5^h	Richtiger Gang ab:
0,5′	2^h 40′	1,00 Proz.	—	3^h	30′	2^h 40′	0,25 Proz.	1,50 Proz.	5^h
0,5′	2^h 20′	1,00 Proz.	6,00 Proz.	?	25′	3^h —′	—	2,00 Proz.	5^h
0,5′	2^h 30′	—	—	3^h	30′	2^h 20′	1,25 Proz.	1,60 Proz.	4^h
0,5′	2^h —′	1,00 Proz.	5,00 Proz.	7^h	30′	2^h —′ bis 2^h 40′	1,25 Proz.	3,00 Proz.	5^h
1,0′	2^h 20′	0,50 Proz.	6,50 Proz.	6 h	30′	2^h —′	0,30 Proz.	—	3^h
1,0′ ruhig	2^h —′	1,75 Proz.	1,00 Proz.	5^h	30′	3^h —′	—	—	3^h
1,0′ kräftig	1^h 40′	5,50 Proz.	—	3^h	30′	3^h —′	—	1,00 Proz.	5^h
1,0′	2^h —′	2,00 Proz.	3,00 Proz.	5^h	30′	2^h 40′	—	—	3^h

und Meyerschen Fontaktometer und in der vollständig geschlossenen Kanne. Ein Teil der Beobachtungen ist in der vorstehenden Tabelle III vermerkt (die angegebenen Zahlen bedeuten Volt sec^{-1} und sind für verschiedene Reihen nicht vergleichbar). Die Mittelwerte sind bei den einzelnen Versuchen aus 15—40 Beobachtungen berechnet. Wesentlich ist, daß sich die Ablesungen über den ganzen Zeitraum verteilen, zur Berechnung also der vollständige Anstieg herangezogen wird, dann paßt die Beobachtung sich immer am besten den Duaneschen Zahlen an. Liegen die Beobachtungen ausschließlich am Anfang des Anstieges, so scheinen sie günstiger für die Götzsche, ja unter Umständen für die Berndtsche Kurve. Der mittlere Fehler ist in Einheiten der letzten Dezimale angegeben; er wurde wie in allen Tabellen nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet. Die in Klammern beigesetzten Zahlen geben den Unterschied des beobachteten Mittelwerts vom berechneten wiederum in Einheiten der letzten Dezimale an.

Hiernach muß angenommen werden, daß die Duaneschen Zahlen dem beobachtbaren Anstieg am nächsten kommen und den wahren Nullwert zu berechnen gestatten. Der Nullpunkt nach Götz würde dann im allgemeinen um 3—5 Proz. zu tief, der nach Schmidt 7—10 Proz. zu hoch und der Berndtsche 9—14 Proz. zu hoch liegen.

Obgleich demnach der Vergleich der Beobachtungen mit den Duaneschen Zahlen befriedigend ausfällt, blieben dennoch systematische Abweichungen bestehen, die sich nicht aus Ablesungsfehlern erklären lassen; das zeigt sich vor allem darin, daß die berechneten Maximalwerte fast ausnahmslos höher liegen, als die beobachteten. Außerdem treten — vor allem im Fontaktometer — Unregelmäßigkeiten auf, wie sie aus der Aufstellung in Tabelle IV hervorgehen. Der beobachtete Höchststrom liegt häufig vor 3^h, der Ionisationsstrom nimmt dann bis 3^h und länger ab und schlägt erst später den richtigen Gang wieder ein.

Für die Erklärung dieser Störungen und der systematischen Abweichungen von den Duaneschen Zahlen kommen — wie durch besondere Versuche nachgewiesen werden konnte — drei Umstände in Frage: der Lenardeffekt, ausgeschüttelte radioaktive Umwandlungsstoffe[1]) und Temperaturströme. Die Abweichungen sind beim Schütteln größer als beim Durchperlen (man vergleiche Tabelle IV); sie hängen mit der Dauer der Zirkulation, mit der Stärke des Schüttelns und mit dem Temperaturunterschied zwischen Luft und Wasser zusammen.

Aus alledem folgt, daß beträchtliche Störungen im Anstieg des Ionisationsstroms eine genaue Bestimmung der anwesenden Emanationsmenge durch einen wenige Minuten andauernden Versuch unmöglich machen. Andererseits bietet auch die Beobachtung des Maximalstroms allein (zwischen 3 und 4 Stunden) keine ausreichende Sicherheit. Für die Berechnung des Nullwerts aus dem Maximalstrom verdient die Duanesche Zahl 0,431[2]) den Vorzug gegenüber den Zahlen 0,470 von Hammer und Vohsen, 0,460 von Berndt und 0,4075 von Weszelszky-Götz.

Die mitgeteilten Erfahrungen lassen sich dahin zusammenfassen, daß eine genaue und sichere Bestimmung des Radiumemanationsgehalts einer Quelle nur möglich ist, wenn das volle Anklingen des Ionisationsstromes beobachtet wird, bis Übereinstimmung mit dem theoretischen Verhalten eintritt. Die Berechnung der von der Emanation allein herrührenden Wirkung muß nach Duane ausgeführt werden. Von diesem Nullwert muß noch auf die Zeit des Schöpfens zurückgerechnet werden. Apparate, deren Meßraum dauernd oder zeitweise mit der Außenluft in Verbindung steht, sind zu diesen Beobach-

1) W. Hammer u. Fr. Vohsen, diese Zeitschr. **14**, 452, 1913.

2) Von ihr weicht die von Mache und Meyer (Radium in Biologie und Heilkunde **1**, 350, 1912) für ihren Apparat gegebene Vorschrift (Emanation = 49 Proz. des Maximalstroms) nur unwesentlich ab, da der Duanesche Faktor für ihren Apparat 1,15 ist.

tungen nicht zu gebrauchen[1]). Sollen die Beobachtungen nur statistischen Zwecken dienen, wobei auf die Genauigkeit weniger Wert gelegt wird, so genügt eine kürzere Beobachtungszeit.

Zusammenfasung.

Es wurden vergleichende Messungen mit verschiedenen fontaktometrischen Apparaten und Methoden ausgeführt. Es hat sich ergeben, daß zuverlässige und vergleichbare Ergebnisse nur durch Beobachtung der vollständigen Anstiegkurve zu erzielen sind.

Der unter den gegebenen Bedingungen beobachtbare Anstieg der Ionisationskurve wird durch die Zahlen von Duane besser wiedergegeben, als durch diejenigen von Schmidt, Berndt und Götz. Die häufig auftretenden Abweichungen vom normalen Verhalten sind auf den Lenardeffekt, auf ausgeschüttelte Zerfallstoffe und auf Temperaturströmungen zurückzuführen.

1) Den relativen Einfluß der Öffnung bei den Apparaten nach Engler und Sieveking bzw. Kohlrausch und Loewenthal zeigen die in der folgende Tabelle V wiedergegebenen Messungen.

Tabelle V.

Zeit	geschlossener Kondensator	Engler u. Sieveking	Kohlrausch u. Loewenthal
— 10 Min.	100 Proz.	99½ Proz.	90 Proz.
— 30 Min.	100 Proz.	96 Proz.	75 Proz.
1 h —	100 Proz.	93½ Proz.	60 Proz.
2 h —	109 Proz.	92 Proz.	50 Proz.
3 h —	100 Proz.	90 Proz.	40½ Proz.
5 h —	100 Proz.	80 Proz.	20 Proz.

Leipzig, im Oktober 1919.

(Eingegangen 15. November 1919.)

Neuere Anschauungen über die chemischen Elemente und ihre Atome[1]).

Von Emil Kohlweiler.

Das Studium der radioaktiven Strahlungsphänomene und des damit verknüpften Atomzerfalls hat mit einem Schlage die chemischen Grundstoffe ihres universal-elementaren Charakters beraubt. Es hat mit kühnem Griff den durch die Grenzen unserer derzeitigen rein physikalischen und chemischen Untersuchungsmethoden gebildeten Schleier, der das wahre Wesen der sogenannten Grundstoffe der Materie verdeckte, gelüftet, um uns klar und deutlich zu zeigen, daß die Eigenschaft der Einfachheit und Homogenität der chemischen Elemente lediglich eine scheinbare, uns vorgetäuschte ist, daß die Grundstoffe des Chemikers vielmehr komplexen Charakter besitzen, sogar — und dies ist vor allem das überraschende Moment — in doppelter Hinsicht.

Denn einmal stellte sich mit Bestimmtheit heraus, daß die Atome (zunächst einiger schwereren Elemente) nicht nur gemäß den Rutherford-Bohrschen Ideen aus einem äußeren Elektronensystem und einem zentral dazu gelegenen, materiellen, elektrisch positiv geladenen und relativ kleinen Kernteil bestehen, sondern daß auch dieser Kernteil selbst wieder (mindestens teilweise) aufgebaut ist aus Elektronen und Heliumkernen. Zum anderen ließ sich die Existenz sog. isotoper Elemente konstatieren, die bei verschiedenen Atommassen zurzeit nicht unterscheidbare chemische Eigenschaften, optische Spektren, Röntgenspektren und andere physikalische Qualitäten besitzen, und die daher, miteinander gemischt, als ein und dasselbe chemische Element in Erscheinung treten, sodaß teilweise das, was wir als homoatomares Element ansprachen, wie z. B. das Uran, sich als ein Gemisch heteroatomarer, lediglich isotoper Elemente, als eine sog. Plejade entpuppte, die in Wirklichkeit nicht ein Element, sondern einen bestimmten, aus mehreren Elementen gebildeten Elementtypus repräsentiert. Sowohl der Atombegriff als auch der Elementbegriff mußten bzw. müssen einer eingehenden Revision unterzogen werden[1]). Das erstere war vorauszusehen, das zweite nicht. Denn während der Todesstoß der alten Atomvorstellung weniger katastrophal wirkte, insofern er vorbereitet war durch die Tatsache der periodischen Regelmäßigkeiten der chemischen Elemente, den komplexen Charakter der optischen Spektren der chemischen Grundstoffe sowie das Phänomen der Kathodenstrahlung, trat die Erscheinung der Isotopie ganz unvermittelt und völlig überraschend in Erscheinung.

Es ist nun sehr naheliegend und begründet, die im Rahmen der Radioaktivität aufgefundenen Beziehungen betreff des Baues der Atome und der Grundstoffe des Chemikers überhaupt nicht nur auf einige der schwersten Elemente

1) Nach einem am 22. Nov. 1919 anläßlich der Herbstversammlung des mathematisch-naturwissenschaftlichen Vereins von Württemberg gehaltenen Vortrag. Vgl. auch Referate in der Zeitschr. f. angew. Chemie und der Chemikerzeitung über einen am 27. Juni 1919 vor der Chemischen Gesellschaft zu Stuttgart gehaltenen Vortrag, sowie meine in der Zeitschr. f. phys. Chemie **94**, 513, 1920 erschienene Arbeit „Konstitution und Konfiguration der Atome".

1) Vgl. „Radioaktivität und die neueste Entwicklung der Lehre von den chemischen Elementen" von K. Fajans. Heft 45 der Sammlung Vieweg.

zu beschränken, sondern dieselben vielmehr auf alle chemischen Elemente (ev. mit diesen oder jenen Einschränkungen bzw. Erweiterungen) zu übertragen. D. h. es ist einmal äußerst wahrscheinlich, daß alle Atome komplex sind, daß insbesondere auch die Kerne aller Atome (1 oder 2 Atome ausgenommen) völlig aus einigen wenigen Grundsteinen zusammengesetzt sind, so daß sich die einzelnen Elemente bzw. ihre Atome nicht qualitativ und prinzipiell, sondern nur quantitativ und graduell voneinander unterscheiden. Und weiterhin spricht die Wahrscheinlichkeit in hohem Grade für die Annahme, daß alle Elemente des Chemikers (wieder einige wenige zum Teil vielleicht nur praktische Ausnahmen ignoriert) Isotopengemische darstellen, deren einzelnen Komponenten demselben Elementtypus angehören, dessen Eigenschaften durch das bisherige physikalische und chemische Studium allein fixiert sind, während die differierenden Qualitäten der einzelnen isotopen Komponenten eines Typus zurzeit noch nicht festgestellt sind. Die zahlreichen periodischen Regelmäßigkeiten in Eigenschaften und Verhalten der sogenannten Elemente, die zwingend auf einen genetischen bzw. konstitutionellen Zusammenhang der scheinbaren Grundstoffe der Materie hinweisen, sprechen für die erste Annahme, während sich mit der zweiten Annahme die bezogen auf $He = 4$ unganzzahligen und sich im Feinern völlig unregelmäßig entwickelnden Atomgewichte, deren nur angenähert funktionelle Abhängigkeit von der Frequenz einer bestimmten Welle des Hochfrequenzspektrums sowie die bekannten sog. Unregelmäßigkeiten des periodischen Systems befriedigend erklären lassen.

Denn all diese Tatsachen weisen ausnahmslos eindeutig darauf hin, daß die Verbindungsgewichte nicht der integrierende primäre Faktor der Elemente sind, daß dieser vielmehr in der elektrischen Ladung der Atome besteht, die für alle Glieder eines Typus dieselbe ist, und die sich von Typus zu Typus um eine Einheit regelmäßig ändert, während die Verbindungsgewichte Mischungsgewichte darstellen, Mittelwerte aus den verschiedenen Atomgewichten der isotopen Komponenten eines Typus, die sich von Typus zu Typus nicht um genau denselben Betrag ändern.

Die Grundstoffe des Chemikers sind Isotopengemische, ihre Verbindungsgewichte sind sekundäre Größen, sind Mischungswerte, sind Eigenschaften, die nur der Mischung als solcher zukommen. Die elektrische Kernladung in ihrer Gesamtheit, d. h. die Differenz aus der Zahl der positiven und der Zahl der negativen Elementarquanten des Kerns, kurz die Kerndifferenz und alle nur von dieser bedingten Qualitäten sind ausgesprochene Typuseigenschaften und sind somit für alle Elemente eines Typus gleich. Die Atomgewichte der Elemente endlich, sowie die beiden Arten von elektrischen Kernladungen und die hierdurch bestimmten Qualitäten sind Arteigenschaften, Eigenschaften, die nur einem Element des Typus zustehen.

Die Atomgewichte aller Elemente, d. h. der einzelnen Glieder aller 87 bekannten Typen, sind auf $He = 4$ bezogen ganzzahlig und geradzahlig, so daß die einzelnen Werte um eine gerade Anzahl von (relativen) Einheiten differieren. Es ist dies eine Folgerung aus dem Atomgewicht des *He* als einem Bestandteil der Atome, der hierdurch bedingten Atommassendifferenz von $2 \cdot 2$ Einheiten der Isotope derselben aktiven Zerfallsreihe, sowie der Atommassendifferenz der Kopfglieder beider Zerfallsreihen, *U* und *Th*, um $3 \cdot 2$ Einheiten[1]) und dem dadurch bedingten Unterschied in den Atomgewichten zweier Isotope verschiedener Zerfallsreihen um wenigstens 2 Einheiten. Mindestens zwei solcher gerade und ganzzahlige Atomgewichte aufweisende isotope Elemente sind im allgemeinen zu einem Scheinelemente gemischt und zwar in (nahezu und meist) konstantem, jedem Typus spezifischem Verhältnis, so daß die gebrochenen Verbindungsgewichte als scheinbar primäre Konstanten unserer ebenfalls nur scheinbaren Elemente resultieren.

Der genetische bzw. konstitutionelle Zusammenhang der Elemente dürfte nun in den aktiven Zerfallsreihen sein Spiegelbild besitzen. Wir nehmen daher die Existenz zweier Entwicklungsreihen mit den bekannten Endgliedern *Th* und *U* an, die parallel (im groben wenigstens) durchs periodische System schreiten, und zwar nicht in einer Richtung geradlinig, sondern alternierend infolge Wechsels in der Einlagerung von Heliumkernen und Elektronen, wobei die Addition von He^{++} eine Verschiebung um 2 Plätze gegen das Ende des periodischen Systems und ein Plus eines Elektrons ein Produkt in dem vorhergehenden Platz bedingt. Während der geradlinigen Entwicklung besteht somit jedes Scheinelement aus 2 Isotopen verschiedener Reihen mit den zum bekannten Mischungsgewicht des Typus nächst niederen und nächst höheren geraden Werten als Atom-

1) Die von Hönigschmid für *U* und *Th* ermittelten Werte 238,2 und 232,15 dürften Mischwerte und keine Atomgewichte sein, d. h. die Abweichung dieser Werte von den nächsten geraden und ganzzahligen dürften wohl auf beigemischte schwerere, noch unbekannte Isotope zurückzuführen sein.

gewichten. So besteht Neon (20,2) aus einem *Ne* 20 und einem *Ne* 22. Durch Addition eines He^{++} in jeder Reihe entstehen *Mg* 24 und *Mg* 26, die zur Plejade *Mg* (24,3) gemischt sind.

Da die Einlagerung von He^{++} eine Verschiebung im System um 2 Plätze bedingt, und die Alternationen analog denen in den Zerfallsreihen paarweise auftreten dürften, liegt es im Wesen des Entwicklungsmechanismus begründet, daß nicht sämtliche Plätze von den beiden Reihen passiert werden, wie auch die beiden Zerfallsreihen die Gruppen I und VII völlig ignorieren. Um den bestehenden Verhältnissen nun gerecht zu werden, nehmen wir zwei obiger Reihenpaare an, eines der geradwertigen und eines der ungeradwertigen Elemente, die getrennt aber analog verlaufen und sich infolge Alternationen hin und wieder kreuzen und vermischen. So entsteht die zwischen dem diskutierten *Ne* und *Mg* liegende Plejade Natrium (23,0) als Mischung eines *Na* 22 und eines *Na* 24 durch He^{++}-Einlagerung in die beiden Isotopen *F* 18 und *F* 20 des Scheinelementes *F* (19). Es ist bekannt, daß die Änderung der Verbindungsgewichte im Groben einen entsprechenden Gang zeigt und so unsere Annahme stützt.

Soweit nur 2 Komponenten an der Bildung einer Plejade beteiligt sind, kann, da die Atomgewichte der beiden Isotope nach der Theorie und das Verbindungsgewicht der Mischung experimentell bekannt sind, die quantitative Beteiligung beider Elemente durch einfache Rechnung (z. B. mittels der Winkelregel) ermittelt werden. Für *Ne* (20,2) ergibt sich z. B., daß 9 Teile des leichteren Isotops mit einem Teil des schwereren gemischt sind.

Innerhalb der beiden Reihenpaare vollzieht sich die Entwicklung der Materie durch Einlagerung (ausnahmsweise auch wieder durch Austritt) von *He*-Kernen und Elektronen. Wodurch unterscheiden sich nun die isotopen Glieder eines Reihenpaares, die wir als Thor- und Urankomponente unterscheiden können, angesichts der Tatsache, daß *Th* und *U* die Endglieder des geradwertigen Reihenpaares sind?

Es hat sich gezeigt, daß Isotope bei gleicher Kerndifferenz verschiedene Atommassen besitzen[1]). Da sich nun sowohl die Endglieder eines Reihenpaares, *Th* und *U*, als auch die isotopen Komponenten der beiden Reihen in der aktiven Zerfallszone und am Anfang der Entwicklungsreihen um eine ungerade Anzahl von 2 Einheiten in ihren Atomgewichten unterscheiden, kann die Differenz auf verschiedenen He^{++}-Gehalt nicht zurückgeführt werden. Diese muß vielmehr durch Partikelchen mit 1 oder 2 Masseneinheiten begründet sein, weshalb von Bekanntem nur der Wasserstoff in Form von Doppelatomen bzw. Molekülkernen in Betracht kommen kann. Wir nehmen daher an, daß sich in beiden Reihenpaaren die Glieder der einen Reihe, die wir Thorreihe nennen können, von den isotopen Elementen der anderen (Uran-)Reihe dadurch unterscheiden, daß sie im Zentrum des Atomkerns an Stelle des He^{++} der Uran-Komponenten ein H_2^{++}-Gebilde besitzen. Es ist evident, daß hierdurch eine Atommassendifferenz der beiden isotopen Glieder um 2 Einheiten bei gleicher Kerndifferenz gegeben ist. Wir werden noch sehen, daß die eingeführte Annahme durch die genialen Versuche Rutherfords, nach denen das Stickstoffatom aus 3 *He*- und 2 *H*-Atomen aufgebaut ist, glänzend bestätigt wird.

Auftretende Alternationen infolge Einbaus von Kernelektronen und Kompensation der dadurch bewirkten rückwärtsgehenden Richtungsänderung in der Entwicklung der Materie durch Extra-Addition eines He^{++} bedingen eine Vermehrung der Komponentenzahl für die Elementtypen, durch deren Plätze die Alternation erfolgt, und damit natürlich auch (in der Richtung der Entwicklung gesehen) eine Erhöhung des Mischungsgewichts der Plejaden. Während also beim Fehlen von Alternationen die Vergrößerung des Atomgewichts z. B. der leichteren Komponente um 4 Einheiten die zum Verbindungsgewicht der übernächsten Plejade im System nächst niedere gerade Zahl ergeben muß, stimmt dieser Gang beim Eintreten von Alternationen nicht mehr.

Auf diese Weise läßt sich feststellen, daß für die 17 ersten Elementtypen des Systems keine Alternationen in Betracht kommen, daß somit alle Plejaden bis zum Scheinelement *Cl* aus nur 2 Isotopen bestehen, während bei *Ar* (Plejade 18) erstmals mehrere Isotope (Alternationsisotope, Isotope derselben Reihe) auftreten infolge Alternierens einer Reihe zwischen Platz 20 und Platz 18. Es ergibt sich das ohne weiteres aus der Änderung der Verbindungsgewichte: Die schwerste Komponente der Plejade 16 ist *S* 34; die Einlagerung von He^{++} ergibt *Ar* 38 als ohne Alternation schwerste Komponente für Plejade 18. Da aber der Mischwert 39,9 beträgt, muß mindestens noch eine Komponente *Ar* 40 vorhanden sein, gebildet

1) Eine Isotopie bei gleicher Atommasse dürfte nicht anzunehmen sein, da sie nur durch Strukturisometrie zweier Atome erklärbar wäre, für deren Vorhandensein aber nichts spricht. Aus diesem Grunde erscheint mir auch die derzeitige Theorie der Genesis des *Ac* (über *Pa* und *UY*) durch dualen Zerfall des *U* II unter gleicher (α-) Strahlung völlig unwahrscheinlich.

durch Alternation der „leichteren“ Reihe: $S\,32 + He^{++} = Ar\,36$; $Ar\,36 + He^{++} = Ca\,40$; $Ca\,40 + 2\,(-) = Ar\,40$. Wie sich so ermitteln läßt, zeigen sich beim Gang durch das periodische System im ganzen 22 *He*-Alternationen.

Die Materie entwickelt sich somit in 2 Reihenpaaren, einem Reihenpaar der (maximal) ungeradwertigen und einem der (maximal) geradwertigen Elemente, die sich hin und wieder infolge Alterationen vermischen, erstmals im Platz 19[1]). Jedes Paar besteht aus 2 Zwillingsreihen, die als Kopfglieder das nullwertige *He*-Atom und das ebenfalls nullwertige H_2-Molekül besitzen. Die Kerne aller folgenden Glieder entstehen beim normalen Verlauf, wie er sich zunächst bis zum Platz 26 abspielt, durch Addition von *He*-Kernen und Elektronen unter Verschiebung um zwei Plätze nach oben bez. einen Platz nach rückwärts.

$H_2^{++} + He^{++}$ ergibt den materiellen Kern von *Li* 6 und aus $He^{++} + He^{++}$ resultiert der Kern von *Li* 8, welche beiden Elemente zum Scheinelement *Li* (6,94) gemischt sind. Da die Kerndifferenz für den *Li*-Typus 3 betragen muß, enthalten beide Isotope des *Li*, sowie alle sich von diesen durch Addition von He^{++} ableitenden ungeradwertigen Elemente 1 Elektron in Kern.

$He^{++} + He^{++} + 1\,(-)$ ergibt *Li* 8; $He^{++} + He^{++}$ ohne Kernelektron ist die Kernkonstitution des *Be* 8 mit der Kerndifferenz 4. Die schwerere Komponente des *Be* (9,1), *Be* 10, ist fixiert als $H_2^{++} + 2\,He^{++} + 2\,(-)$. Alle folgenden Elemente dieses Reihenpaars bis *Ar* 36 und *Ar* 38 besitzen ebenfalls das leichtere Isotop 0 und das schwerere 2 Kernelektronen. Die theoretische Möglichkeit der Umwandlungen eines Isotops eines Typus in ein Element des

Tabelle I.

Typus	Mischungsgewicht	Komponenten					
		Atomgewichte	Atomkern				
			Materielle Partikel	Positive Quanten	Kernelektronen	Kerndifferenz	Mischungsverhältnis
3 *Li*	6,94	6	$H_2^{++} + He^{++}$	4	1	3	53
		8	$He^{++} + He^{++}$	4	1	3	47
5 *B*	11,0	10	$H_2^{++} + 2\,He^{++}$	6	1	5	1
		12	$He^{++} + 2\,He^{++}$	6	1	5	1
7 *N*	14,01	14	$H_2^{++} + 3\,He^{++}$	8	1	7	199
		16	$He^{++} + 3\,He^{++}$	8	1	7	1
9 *F*	19,0	18	$H_2^{++} + 4\,He^{++}$	10	1	9	1
		20	$He^{++} + 4\,He^{++}$	10	1	9	1
11 *Na*	23,0	22	$H_2^{++} + 5\,He^{++}$	12	1	11	1
		24	$He^{++} + 5\,He^{++}$	12	1	11	1
13 *Al*	27,1	26	$H_2^{++} + 6\,He^{++}$	14	1	13	9
		28	$He^{++} + 6\,He^{++}$	14	1	13	11
15 *P*	31,0	30	$H_2^{++} + 7\,He^{++}$	16	1	15	1
		32	$He^{++} + 7\,He^{++}$	16	1	15	1
17 *Cl*	35,46	34	$H_2^{++} + 8\,He^{++}$	18	1	17	27
		36	$He^{++} + 8\,He^{++}$	18	1	17	73
19 *K*	39,1	38	$H_2^{++} + 9\,He^{++}$	20	1	19	
		40	$He^{++} + 9\,He^{++}$	20	1	19	
		40	$He^{++} + 9\,He^{++}$	20	1	19	
21 *Sc*	45,1	42	$H_2^{++} + 10\,He^{++}$	22	1	21	
		44	$He^{++} + 10\,He^{++}$	22	1	21	
		48	$He^{++} + 11\,He^{++}$	24	3	21	
23 *V*	51,0	46	$H_2^{++} + 11\,He^{++}$	24	1	23	
		48	$He^{++} + 11\,He^{++}$	24	1	23	
		50	$H_2^{++} + 12\,He^{++}$	26	3	23	
		52	$He^{++} + 12\,He^{++}$	26	3	23	
25 *Mn*	54,9	50	$H_2^{++} + 12\,He^{++}$	26	1	25	
		56	$He^{++} + 13\,He^{++}$	28	3	25	

1) Beim β-aktiven Typus *K*!

Tabelle II.

Typus	Mischungsgewicht	Komponenten					
		Atomgewichte	Atomkern				
			Materielle Partikel	Positive Quanten	Kernelektronen	Kerndifferenz	Mischungsverhältnis
4 *Be*	9,1	8	$He^{++} + He^{++}$	4	0	4	9
		10	$H_2^{++} + 2\,He^{++}$	6	2	4	11
6 *C*	12,0	12	$He^{++} + 2\,He^{++}$	6	0	6	1
		14	$H_2^{++} + 3\,He^{++}$	8	2	6	0
8 *O*	16,00	16	$He^{++} + 3\,He^{++}$	8	0	8	1
		18	$H_2^{++} + 4\,He^{++}$	10	2	8	0
10 *Ne*	20,2	20	$He^{++} + 4\,He^{++}$	10	0	10	9
		22	$H_2^{++} + 5\,He^{++}$	12	2	10	1
12 *Mg*	24,3	24	$He^{++} + 5\,He^{++}$	12	0	12	17
		26	$H_2^{++} + 6\,He^{++}$	14	2	12	3
14 *Si*	28,3	28	$He^{++} + 6\,He^{++}$	14	0	14	17
		30	$H_2^{++} + 7\,He^{++}$	16	2	14	3
16 *S*	32,1	32	$He^{++} + 7\,He^{++}$	16	0	16	19
		34	$H_2^{++} + 8\,He^{++}$	18	2	16	1
18 *Ar*	39,9	36	$He^{++} + 8\,He^{++}$	18	0	18	
		38	$H_2^{++} + 9\,He^{++}$	20	2	18	
		40	$He^{++} + 9\,He^{++}$	20	2	18	
20 *Ca*	40,1	40	$He^{++} + 9\,He^{++}$	20	0	20	
		42	$H_2^{++} + 10\,He^{++}$	22	2	20	
		44	$He^{++} + 10\,He^{++}$	22	2	20	
22 *Ti*	48,1	46	$H_2^{++} + 11\,He^{++}$	24	2	22	
		48	$He^{++} + 11\,He^{++}$	24	2	22	
		48	$He^{++} + 11\,He^{++}$	24	2	22	
		50	$H_2^{++} + 12\,He^{++}$	26	4	22	
24 *Cr*	52,0	50	$H_2^{++} + 12\,He^{++}$	26	2	24	
		52	$He^{++} + 12\,He^{++}$	26	2	24	
		54	$H_2^{++} + 13\,He^{++}$	28	4	24	
		50	$H_2^{++} + 12\,He^{++}$	26	2	24	
		56	$He^{++} + 13\,He^{++}$	28	4	24	

benachbarten Typus durch Elektronenmission liegt auf der Hand.

Die Tabellen I und II fixieren die gegebenen Verhältnisse für die anfänglichen Glieder des Systems, Tabelle I für das ungeradwertige Reihenpaar, Tabelle II für das geradwertige Reihenpaar. *K* 40 und *V* 50 sind Alternationsglieder der geraden Reihen; *Ti* 48, *Cr* 50 und *Cr* 56 gehören dem ungeraden Reihenpaar an. Die Plätze 19 und 23, 22 und 24 sind somit Kreuzpunkte beider Reihenpaare. Eine o in der Rubrik Mischungsverhältnis bedeutet das Fehlen der betreffenden Komponente. Den konstitutionellen bzw. genetischen Zusammenhang aller Elemente wird ein Schema meiner nächsten Arbeit fixieren.

Die gegebene Isotopen- und Atombautheorie wird den bestehenden Verhältnissen und Tatsachen in jeder Weise gerecht und ist besonders durch den Gang der Atomgewichte und die radioaktiven Forschungsergebnisse sehr wahrscheinlich gemacht. Eine sehr wesentliche und glänzende Bestätigung erhielt jedoch die Theorie durch die ebenso interessanten wie bedeutenden Versuche Rutherfords.

Rutherford erhielt[1]) beim Bombardement völlig trockener Luft mit α-Partikelchen des *RaC* weitreichende Strahlen, die sich mittelst der Szintillationsmethode und auf Grund ihres Verhaltens im elektrischen Feld als identisch erwiesen mit den Strahlen, die bereits früher bei der Bestrahlung von Wasserstoffgas mit α-Partikelchen beobachtet wurden, mit H^+-Strahlen. Beim Experiment mit reinem N_2 anstatt mit Luft zeigte sich der Effekt um 25 Proz. öfter. Dies beweist, daß die Erscheinung auf den Stickstoff zurückgeführt werden muß: Durch den zentral erfolgenden Zusammenstoß eines mit großer kinetischer Energie begabten He^{++}-Partikels mit einem N_2-Molekül, wird letzteres völlig demoliert und in seine atomistisch gebundenen elementaren Bestandteile aufgelöst, zu denen somit, wie das Experiment ergab, der Wasserstoff zu zählen ist. Auf 10^5 emittierte He^{++}-Strahlen des *RaC* kommt nur 1 H^+-Strahl; dies beweist, daß nur der Zusammenstoß mit dem Kern eines *N*-Atoms, der, in Anbetracht des, verglichen mit der ganzen Atomgröße, sehr, sehr kleinen Volumens des Kerns, natürlich relativ selten erfolgt, H^+-Strahlen liefert. Da weiter reines H_2-Gas 12 H^+-Strahlen auf 1 H^+-Strahl in N_2-Gas zeigt, kann nicht jeder Kernzusammenstoß zur Entstehung des Effektes führen. Hieraus wird gefolgert werden dürfen, daß periphere Streifschüsse eines *N*-Kerns noch keine H^+-Strahlung ergeben, daß diese vielmehr nur bei völlig zentralem Zusammenstoß erfolgt, ein Argument für die Annahme, die Thorkomponenten der Elementtypen besitzen im Zentrum die H_2^{++}-Gebilde.

Rutherford kommt zu dem Ergebnis, daß das Stickstoffatom aus 3 *He*- und 2 *H*-Atomen aufgebaut sei, eine sehr beachtenswerte Übereinstimmung mit meiner Theorie.

Weiter arbeitete Rutherford mit reinem O_2 an Stelle von N_2. Da hierbei der Effekt vollständig ausblieb, so folgt, daß der Sauerstoff keinen Wasserstoff zum Atomaufbau benötigt hat. Nach der entwickelten Theorie besteht nun die Plejade *O* aus den beiden Isotopen *O* 16 und *O* 18. Diese sind derart gemischt, daß sich für die Mischung das Gewicht 16,00 ergibt, woraus folgt, daß die schwerere Komponente *O* 18 (mindestens praktisch) völlig fehlen muß. Diese fehlende Komponente ist aber gerade die, welche, wie aus Tabelle II ersichtlich ist, das H_2^{++}-Zentrum besitzt, während das allein vorhandene Isotop *O* 16 lediglich aus 4 He^{++} besteht. Beim Stickstoff liegt der Fall dagegen, wie Tabelle I zeigt, gerade umgekehrt. Hier überwiegt weit die Komponente *N* 14, so daß fast alle *N*-Atome H_2^{++}-Zentren besitzen. Die Übereinstimmung meiner Theorie mit den experimentellen Daten Rutherfords ist überraschend gut.

Aus den diskutierten Verhältnissen folgt sodann ohne weiteres, daß es von vornherein aussichtslos erscheinen muß, die Frage nach der Isotopie der Grundstoffe des Chemikers mit einer diesbezüglichen Untersuchung an Sauerstoffgas entscheiden zu wollen, und ein hierbei sich ergebendes negatives Resultat, wie es die Herren Stern und Volmer[1]) erhielten, ist kein Argument gegen die Isotopentheorie der chemischen Elemente, sondern bildet geradezu eine Bestätigung der vorliegenden Theorie, nach der ja der Sauerstoff eine der wenigen Plejaden bildet, die nur aus einer Komponente bestehen.

Zwecks direkter Prüfung der Isotopentheorie werden von mir zurzeit an der Stuttgarter Technischen Hochschule Versuche ausgeführt, und zwar mit dem Typus Jod, der nach der Theorie durch 5 Komponenten[2]) vertreten ist, und zwar derart, daß die 3 leichteren (*J* 122, *J* 124 und *J* 126) mit den beiden schwereren (*J* 128 und *J* 130) nahezu in dem Verhältnis 1 : 1 gemischt sind, angesichts der Tatsache, daß das Mischgewicht (126,92) von den beiden

1) Phil. Mag. **37**, 537—587, Juli 1919.

1) Ann. d. Phys. [4] **59**, 225—238, 1919.
2) Siehe meine folgende Arbeit.



nächsten Isotopenatomgewichten fast gleich weit entfernt ist[1]).

Ebenso wie beim Sauerstoff mußte Rutherford bei CO_2 ein Ausbleiben des untersuchten Effekts konstatieren: auch das Kohlenstoffatom ist wasserstoffrei. Tabelle II beweist auch hier die glänzende Bestätigung der Theorie.

Endlich sei noch die subtile Methode der elektromagnetischen Analyse der Kanalstrahlen Thomsons erwähnt. Werden Kanalstrahlen, die durch ein magnetisches und ein elektrisches Feld abgelenkt wurden, senkrecht zur ursprünglichen Strahlenrichtung photographiert, so entstehen auf den Platten Parabeln, deren Verlauf eine Funktion der Größe der erfolgten Ablenkung ist und somit von der spezifischen Ladung e/m der Teilchen und ihrer Wucht $\frac{1}{2} mv^2$ bedingt ist. Partikelchen mit gleichem e/m erfahren dieselbe Ablenkung bei gleichem v und ergeben so bei verschiedenem v ein und dieselbe Parabel, während verschiedene e/m verschiedene Parabeln ergeben, wobei Thomson zeigte, daß aus der Entfernung des Parabelanfangs vom zentralen Auftreffpunkt der nicht abgelenkten Strahlen e und m ermittelt werden können. Thomson arbeitete mit Edelgasen und es ergaben sich für Ne-Kanalstrahlen zwei Parabeln, aus deren Anfang Thomson die Massen der beiden Partikelarten zu 20 und 22 ermittelte. Dies bedeutet aber nichts anderes, als daß $Ne(20,2)$ aus einem $Ne\,20$ und einem $Ne\,22$, dem Neon und dem Metaneon besteht, genau wie meine Theorie ableitet[2]).

Es wäre äußerst wichtig und interessant, sowohl die Thomsonschen als auch die Rutherfordschen Versuche an einem geeigneten Institut zu wiederholen und auszudehnen. Besonders bedeutungsvoll müßte bei den Rutherfordschen Versuchen eine quantitative Verfolgung des Effekts sein, woraus sich ein subtiler Prüfstein meiner Theorie ergäbe. Da z. B. $F(19)$ beide Komponenten zu gleichen Teilen besitzt, müßten im F_2-Gas unter denselben Bedingungen in derselben Zeit nur halb soviel durch H^+-Partikelchen hervorgerufene Lichtblitze wie in einer N_2-Atmosphäre zu konstatieren sein. Denselben Wert müßte auch z. B. P_2-Dampf ergeben, während bei Cl_2-Gas der Effekt nur $\frac{1}{4}$ des Effekts bei N_2 ausmachen dürfte, in Anbetracht der in $Cl(35,5)$ vorliegenden Mischung

$$Cl\,34 : Cl\,36 = Cl_{H_2^{++}} : Cl_{He^{++}} = 1 : 3.$$

Über den Verlauf der beiden Reihenpaare durch die Plätze von Nummer 26 des periodischen Systems an, über die Zahl der Isotope dieser Plejaden und die Konstitution ihrer Atome wird eine folgende Arbeit kurz berichten.

Stuttgart, Dezember 1919.

(Eingegangen 16. Dezember 1919.)

1) Anmerkung bei der Korrektur: Die vorläufigen Versuche ergaben ein positives Resultat im Sinne der Isotopentheorie, worüber in der Zeitschr. f. phys. Chemie eingehend berichtet werden wird. Auch konnte Aston Cl als Isotopenmischung identifizieren. Allerdings findet Aston (Nature **104**, 337, 1919) $Cl(35,46) = Cl\,35 + Cl\,37$.

2) Eine neuere Notiz von Aston und Lindemann (Phil. Mag. **37**, 523, 1919 bezeichnet die Existenz des Metaneons als noch nicht erwiesen, während frühere Diffusionsversuche Astons (diese Zeitschr. **14**, 1303, 1913) eine Gliederung des $Ne(20,2)$ in $Ne\,20$ und $Ne\,22$ rechtfertigen.

Eine Schwebungsmethode zur Prüfung der Trägheit von Kontaktdetektoren.

Von Robert Ettenreich.

1. Problemstellung.

Enge gekoppelt mit der Frage nach der Wirkungsweise der Empfangsanzeiger für drahtlose Telegraphie ist die Erforschung ihrer Ansprechdauer, bzw. ihrer Trägheit. Der in der Praxis soviel gebrauchte Kontaktdetektor besteht bekanntlich aus zwei sich berührenden Halbleitern (meist Glanzen oder Kiesen) oder eines solchen Minerals mit einem Metall, und zeigt bei der Untersuchung mit Gleichstrom eine auffallende Abweichung vom Ohmschen Gesetz. Die Strom-Spannungscharakteristik verläuft, verschieden je nach der Art des verwendeten Detektors, zwar stetig, aber stark gekrümmt durch den Ursprung, rechts und links davon aber nähert sie sich wieder einer geraden Linie, also dem Ohmschen Gesetz. Fig. 1 zeigt die Gleichstromcharakteristik, die an einem Bleiglanz-Nickelin-Detektor, auf dem sich auch die folgenden Messungen beziehen, aufgenommen wurde. Eine bestimmte in der Richtung Bleiglanz-Nickelin angelegte Spannung verursacht eine bedeutend größere Stromstärke, als die gleiche Spannung in entgegengesetzter Richtung; die Folge davon ist eine „Gleichrichterwirkung" beim Anlegen von Wechselstrom an den Detektor. Den Verlauf dieser Gleichrichterwirkung für 50 periodigen Wechselstrom hat G. W. Pierce an Oszillographen-Aufnahmen mittelst Braunscher Röhre bereits 1910 studiert und volle Übereinstimmung mit den Gleichstrommessungen festgestellt[1]).

Es fragt sich nun: Inwieweit ist die Gleich-

1) G. W. Pierce, Principles of wireless telegraphy New York 1910.

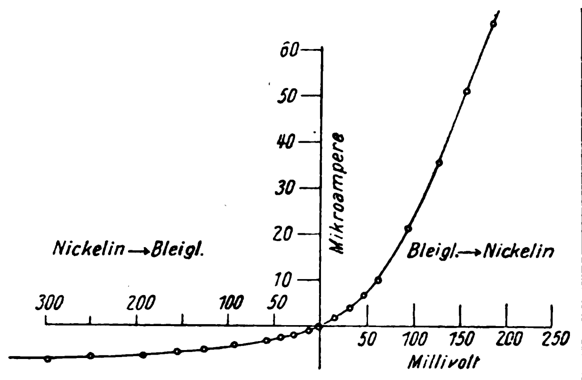


Fig. 1. Gleichstromcharakteristik eines Bleiglanz-Nickelin-Detektors.

stromcharakteristik auch auf schnelle Wechselströme anwendbar? oder mit anderen Worten: bis zu welcher Frequenz ist die dynamische Charakteristik mit der statischen praktisch identisch?

Zunächst ist klar, daß diese gesuchte kritische Frequenz höher als Tonfrequenz liegt, denn sonst wäre kein Empfang von tönenden Funkenstationen, und kein Schwebungsempfang[1]) ungedämpfter Sender möglich. Bei diesem Schwebungs- oder Überlagerungsempfang wird die ankommende Schwingung bekanntlich durch einen in der Empfangsstation befindlichen kleinen Audiongenerator (A in Fig. 2) mit einer Schwin-

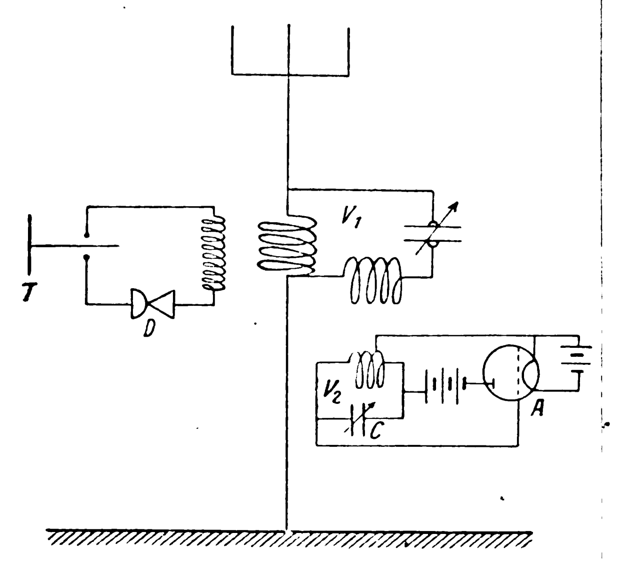


Fig. 2. Schema eines Schwebungsempfängers.

gung von nahezu gleicher Frequenz überlagert, so daß im Detektorkreis Schwebungsfolgen induziert werden (Fig. 3). Die Schwebungsfrequenz, d. h. die Anzahl der Schwebungsmaxima pro Sekunde ist natürlich gleich der Frequenzdifferenz zwischen der ankommenden und der Lokal-Schwingung, und kann durch Veränderung der Wellenlänge des Lokalgenerators beliebig verändert werden. Es sei z. B. die Frequenz der Lokalschwingung, ν_2 größer als die der empfangenen ν_1; dann ist in Telephon T (Fig. 2) der Ton $\nu_2 - \nu_1$ hörbar, der um so tiefer wird, je mehr man durch Vergrößerung des Schwingungskondensators C ν_2 verkleinert. Bei $\nu_2 = \nu_1$ verschwindet der Ton und durchläuft bei weiterer Vergrößerung von C, wie eine Sirene, wiederum in steigender Folge alle Tonhöhen. Dabei ist die erreichbare Tonhöhe, wie die Praxis zeigt, nach oben nur durch die Empfindungsschwelle des Ohres, bzw. durch die Trägheit der Telephon-Membrane, nicht aber

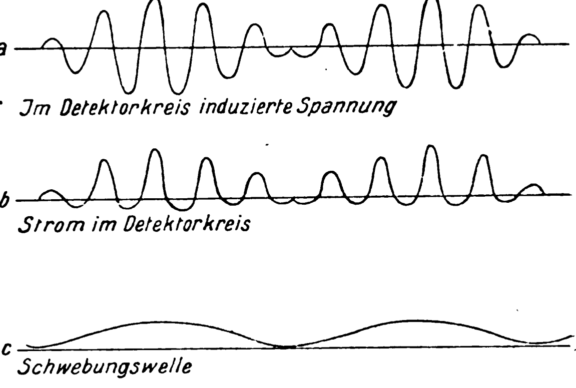


Fig. 3.

durch die Trägheit des Kristalldetektors D begrenzt. Damit ist bewiesen, daß der Detektorkreis von Gleichstromstößen von der Schwebungsfrequenz durchflossen wird. Der Detektor verzerrt also die in Fig. 3a gezeichnete Schwebung etwa in die Form der Fig. 3b, die außer den beiden Grundschwingungen auch noch die in Fig. 3c skizzierte Frequenz $\nu = \nu_2 - \nu_1$ als Komponente enthält. Das kann entweder dadurch erfolgen, daß jede einzelne Schwingung gleichgerichtet wird, oder dadurch, daß die in jeder Schwebungsfolge der Kontaktstelle zugeführte elektrische Energie dort in eine Sekundärspannung verwandelt wird. Jedenfalls beweist die Praxis, daß diese Gleichstromstöße bis zur höchsten akustischen Frequenz vorhanden sind, daß also die „kritische Frequenz" höher liegen muß als etwa 20000 $\sec^{-1}$. Um ihr näher zu kommen, mußte ich daher die akustische Methode verlassen und zu einer elektrischen Reso-

1) Heterodyne-Empfang. Fessenden, Electrician 59, 985, 1907. Diese Empfangsanordnung soll, weil für das Kommende wichtig, für jene Leser, die der drahtlosen Technik ferner stehen, ganz kurz beschrieben werden.

nanz-Methode übergehen[1]). Die Anordnung war folgende:

2. Methode.

Zwei Audiongeneratoren (A_1 und A_2 in Fig. 4 bloß durch ihre Schwingungskreise angedeutet) induzierten auf die Kopplungsspulen k_1 und k_2 eines aperiodischen Kreises, der außerdem den zu untersuchenden Detektor D und eine dritte Kopplungsschleife K_3 enthielt, die auf die Spule des Wellenmessers W wirkte. Wurde der Detektor D zunächst durch den Schlüssel S überbrückt, so konnten nur die Frequenzen ν_1 und ν_2 der beiden Generatoren aus den Resonanzausschlägen des Wellenmesserinstrumentes

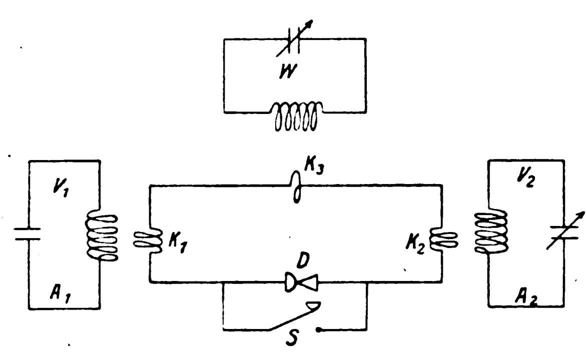


Fig. 4. Schwebungsschaltung.

abgelesen werden. Wurde aber S geöffnet, so ergab sich auch Resonanz bei der Frequenz $\nu_2 - \nu_1$, also bei der Schwebungsfrequenz. Diese Frequenz kann natürlich weit über das akustische Gebiet gesteigert werden. Um nun die „kritische Frequenz", bei der der Detektor nicht mehr anspricht, zu erreichen oder ihr wenigstens möglichst nahe zu kommen, handelte es sich darum, $\nu_2 - \nu_1$ möglichst groß zu machen. Das geschah durch Steigerung von ν_2. Der Vergrößerung von ν_2 sind praktisch folgende Grenzen gesetzt:

1. Die Eigenkapazität und die Energieverhältnisse des Audiongenerators A_2 ließen eine Verkürzung der Wellenlänge unter 30 m ($\nu_2 = 1{,}10^7$ sec^{-1}) nicht zu.

2. ν_2 darf nicht viel höher liegen als die Eigenschwingung des Übertragerkreises, da dieser sonst drosselt. Ich verkleinerte daher die Kopplungsspulen tunlichst (k_1 und k_2 je 2 Windungen von 80 mm Φ, k_3 eine einzige Schleife von gleichem Durchmesser) und wählte möglichst kurze, gerade Verbindungen. Dadurch wurde die Eigenwelle dieses aperiodischen Kreises auf etwa 20 m herabgesetzt[1]) ($\nu \sim 1{,}5 \cdot 10^7$ sec^{-1}).

3. Bei sehr raschen Schwingungen wird der Detektor durch seine Eigenkapazität, wenn man diese auch noch so klein macht, gewissermaßen überbrückt. Sein scheinbarer Widerstand wird viel geringer als sein Ohmscher, indem nur ein geringer Teil des Stromes als Leitungsstrom die Kontaktstelle tatsächlich passiert, während der größte Teil als Verschiebungsstrom einen Nebenschluß bildet und somit für den „Gleichrichtereffekt" verloren geht. — In dem benutzten Wellenbereich bildete jedoch diese Erscheinung bloß eine Erschwerung der Beobachtung, aber kein Hindernis; bei noch rascheren Schwingungen würde sie jedoch ernstliche Schwierigkeiten bereiten.

Trotz dieser Einschränkungen gelang es, wie im folgenden ausgeführt wird, die Schwebungsfrequenz bis zu $5{,}10^6$ sec^{-1} zu steigern, ohne daß der Resonanzausschlag ausblieb. Die kritische Frequenz des benutzten Bleiglanzdetektors muß somit noch höher liegen[2]).

3. Apparatur.

a) Generatoren. Als Hochfrequenzquellen (A_1 und A_2 in Fig. 4) dienten zwei kleine aus Kapazität und Selbstinduktion bestehende Schwingungskreise, die in „Spannungsteilerschaltung" von je einem Telefunken-Schwingungsaudion (Rotkäppchenlampen, R in Fig. 5) angeregt wurden.

Als Selbstinduktion bewährten sich Spulen, die ohne Spulenkörper, bloß aus nebeneinanderliegenden Windungen von Hochfrequenzlitze gewickelt und mit Spagat gebunden waren. Sämtliche untersuchte Spulenkörper aus den verschiedenen Isoliermaterialien (Fibre, Preßspan, Hartgummi) hatten bei den verwendeten hohen Frequenzen sehr unangenehme Dämpfungen zur Folge; die Schwingungen setzten aus. Da nur wenig Windungen (10 bis 16) erforderlich waren, konnte der erwähnte Übel-

1) Eine Mitteilung über diese Methode ist bereits in meiner Arbeit „Reaktionszeit von Kontaktdetektoren, I. Teil", Sitzungsberichte der Akademie der Wissenschaften in Wien Abt. IIa, **128**, 1919, enthalten. Seither ist es mir gelungen, die Schwebungsfrequenz um eine Zehnerpotenz höher zu treiben.

1) Die Einschaltung eines Verkürzungskondensators ist nicht angängig, da ein solcher die vom Detektor erzeugte Gleichstromkomponente unterdrückt, wodurch, wie ich a. a. O. gezeigt habe, der innere Widerstand des Detektors bedeutend erhöht und seine „Gleichrichterwirkung" nahezu vernichtet wird. Tatsächlich bleibt auch bei der Einschaltung eines Verkürzungskondensators der Resonanzausschlag bei der Schwebungsfrequenz $\nu_2 - \nu_1$ aus, während die Resonanzen bei ν_1 und ν_2 nur geschwächt werden.

2) In meiner angeführten Arbeit habe ich den Begriff der „Reaktionszeit" eingeführt und sie als jene Zeit bezeichnet, die verstreichen muß, damit die im Detektor erzeugte sekundäre E.M.K. nach Aufhören des erregenden Stromes auf $1/e$ ihres ursprünglichen Betrages sinkt. Die kritische Frequenz ist ihr reziproker Wert. Die Reaktionszeit des Bleiglanzdetektors ist somit kleiner als $2{,}10^{-7}$ sec.

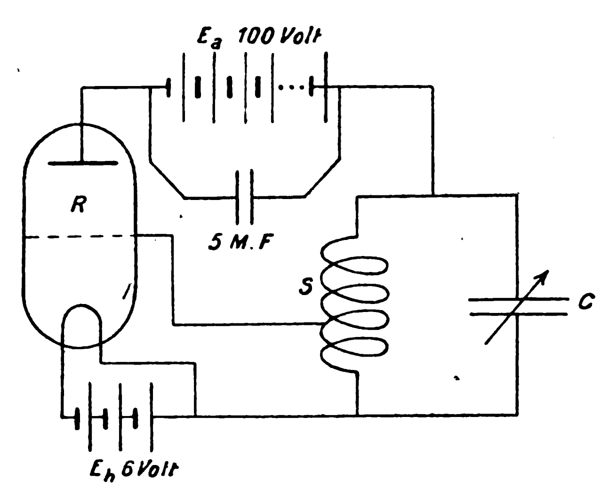


Fig. 5. Audiongenerator in Spannungsteilerschaltung.

stand einfach durch Weglassung des Spulenkörpers behoben werden. Außerdem mußten die Spulen, um den dämpfenden Einfluß benachbarter Apparatbestandteile und der hölzernen Tischplatte zu vermeiden, in etwa 40 cm Höhe über dem Tisch isoliert aufgehängt werden. Der Windungsdurchmesser betrug 75 mm. Vom ersten Drittel jeder Spule führte eine Abzweigung zur Kathode.

Der Generator A_1 enthielt eine feste Kapazität C von 24,5 cm (Kreisplattenkondensator mit Luftisolation), der andere, A_2 einen variablen Zylindermantelkondensator von Dr. Seibt (gleichfalls Luftisolation) mit einer Maximalkapazität von 20 cm, von dem Fig. 6 ein Querschnittschema gibt.

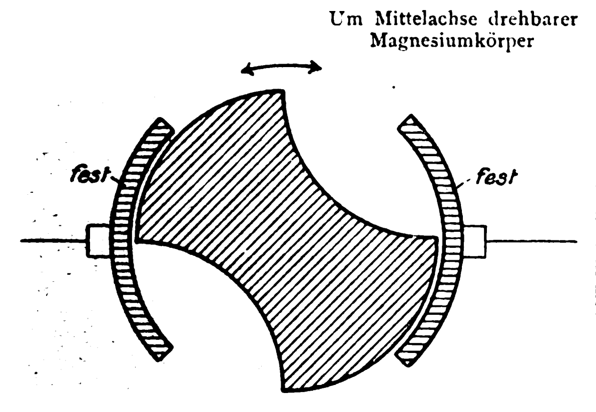


Fig. 6. Zylinder-Drehkondensator nach Dr. Seibt. Max. 20 cm.

Als Spannungsquellen dienten Akkumulatoren; die Anodenbatterie E_a von 100 Volt war durch 5 M.F. überbrückt. Auf die Isolation des Heizkreises (E_h) mußte besonders sorgfältig geachtet werden. Die sämtlichen leitenden Verbindungen an den beiden Generatoren bestanden aus starren blanken Kupferdrähten von 1,5 mm Φ.

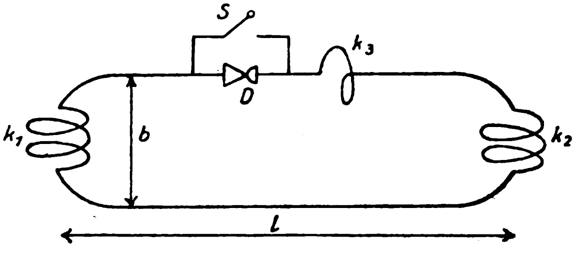


Fig. 7. Übertragerkreis.

b) Der Übertragerkreis (Fig. 7) bewirkte die Kopplung zwischen den beiden Generatoren und dem Wellenmesser; er bestand aus 4 m Hochfrequenzlitze von 5 mm² Querschnitt, in die je zwei Schlingen von 75 mm Φ für die Kopplungen k_1 und k_2 und eine Einfachwindung k_3 als Verbindung zum Wellenmesser gelegt waren. Die Entfernung l der Spulen k_1 und k_2 voneinander war 120 cm groß gewählt worden, um eine direkte gegenseitige Beeinflussung der Generatoren sicher zu vermeiden, während die Entfernung b der beiden Leiterzweige ca. 30 cm betrug, um die verteilte Kapazität gering zu halten. k_1 und k_2 waren in 40 cm Höhe über der Tischplatte isoliert aufgehängt, ebenso wie die Schwingungsselbstinduktionen und hatten von diesen je ca. 5 cm Abstand.

Die Wellenmesserkopplung wurde je nach Bedarf durch Änderung des Abstandes fester oder loser gemacht.

Zwischen k_1 und k_3 war der Detektor D eingeschaltet, der bedarfsweise durch den Schlüssel S überbrückt, oder mittels eines Wechsels gegen einen äquivalenten Widerstand ausgetauscht werden konnte.

c) Detektor. Alle folgenden Messungen sind an einem Bleiglanz-Nickelin-Detektor ausgeführt. Es wurde eine frische Spaltfläche eines gut ausgebildeten Kristallwürfels verwendet. (Fundort: Schemnitz, Ungarn, Maria-Theresien-Gang). Dieser war in die Backen einer Miniaturschraubzwinge geklemmt; seine Fläche berührte ein mittels Kugelgelenks allseitig beweglicher, am Ende zugespitzter Nickelindraht. Eine besondere Schraube zur Änderung des Auflagedruckes (der durchschnittlich 5 g betrug) war nicht vorgesehen. Um die unvermeidlichen Erschütterungen möglichst zu dämpfen, war der isolierte Sockel des Detektors auf einen Bleiklotz montiert, der auf einer dicken Filzunterlage ruhte.

d) Als Wellenmesser diente für $\lambda > 100$ m ein von der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt geeichtes Gerät von Telefunken, Type



Tabelle I.

Generator A_2		Schwebungswelle			Frequenzdifferenz
λ_2 in m	$\nu_2 \times 10^{-6}$ sec	λ in m	Resonanzschärfe	$\nu \times 10^{-6}$ sec	$(\nu_2 - \nu_1) \cdot 10^6$ sec
79	3,79	565	550—575	0,53	0,59
78	3,85	510	500—530	0,59	0,65
77	3,90	440	440—450	0,68	0,70
74	4,05	370	366—378	0,80	0,85
72	4,17	334	326—341	0,90	0,97
70	4,28	300	294—302	1,00	1,08
69	4,35	271	278	1,11	1,15
67,5	4,45	243	240—248	1,23	1,25
66	4,55	221	—	1,35	1,35

K. G. W. 2 mit Öldrehplattenkondensator (Maximalkapazität 5200 cm) und 6 auswechselbaren Spulen für verschiedene Meßbereiche.

Für $\lambda < 100$ m benutzte ich einen selbstangefertigten kleinen Meßkreis mit Luftdrehplattenkondensator (Maximalkapazität 600 cm) und 3 auswechselbaren Spulen. Diesen eichte ich nach einer von mir angegebenen Methode mittels harmonischer Oberschwingungen.

Die Ablesung der Resonanzlage erfolgte an einem Drehspulenspiegelgalvanometer (Edelmann) in objektiver Anordnung, das in Verbindung mit einem Perikondetektor[1]) dem Meßkondensator parallel gelegt war (Fig. 8). Empfindlichkeit: 1 cm entsprach $7,8 \cdot 10^{-8}$ Amp.

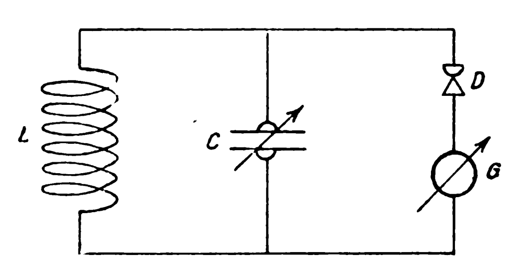


Fig. 8. Schaltung des Wellenmessers.

4. Beobachtungsergebnisse.

Tabelle I gibt eine Beobachtungsreihe wieder, die bei allmählicher Erhöhung der Frequenz des veränderlichen Generators (A_2 in Fig. 4) gewonnen wurde, während die Einstellung des anderen konstant

$$\lambda_1 = 94 \text{ m}, \quad \nu_1 = 3,20 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}$$

betrug.

Die erste Kolonne enthält die Wellenlänge λ_2 von A_2, die mittels Eichkurve aus der beobachteten Resonanzeinstellung des kleinen Wellenmessers (Spule I) abgelesen wurde; in der zweiten Spalte steht die entsprechende Frequenz ν_2. Die dritte gibt die am großen Wellenmesser gewonnene Wellenlänge λ der Schwebungswelle, während in die vierte zur Beurteilung der Resonanzschärfe jene zwei Wellenlängen eingetragen sind, bei denen der abgelesene Galvanometerausschlag die Hälfte des Maximalausschlages betrug. In der fünften Kolonne ist die Frequenz ν der Schwebungswellen enthalten. Diese muß natürlich innerhalb der Versuchsfehler gleich der Differenz der Generatorfrequenzen sein, $\nu = \nu_2 - \nu_1$. Um den Vergleich zu erleichtern, wurde als sechste Kolonne $\nu_2 - \nu_1$ beigesetzt.

1) Rotzinkerzkupferkies, Fabrikat der „Lorenz-Werke" Wien.

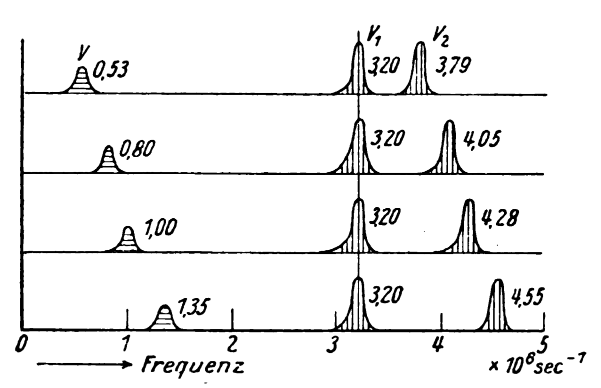


Fig. 9. Schwebungsresonanzen zu Tabelle I. $\nu_1 = 3,20 \cdot 10^6$ sec^{-1}, ≡ Schwebung, ||| Komponenten.

Fig. 9 stellt das Ergebnis graphisch dar. Als Abszissen sind die Frequenzen, als Ordinaten die Ausschläge am Wellenmeßinstrument aufgetragen. Die Resonanzkurven der Grundschwingungen sind vertikal, die der Schwebung horizontal schraffiert. Man sieht, wie bei der Vergrößerung der Frequenzdifferenz auch die der Schwebungswelle entsprechende Resonanzkurve sich nach rechts verschiebt, so zwar, daß ihr Abstand vom Ursprung stets gleich dem Abstand der beiden anderen Maxima voneinander bleibt. Die größte Schwebungsfrequenz, die bei dieser Versuchsreihe erreicht wurde, ist

$$\nu = 1,35 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1};$$

daraus ist zu schließen, daß die kritische Fre-

quenz des untersuchten Bleiglanzdetektors höher liegen muß als 10^6 sec^{-1}, und zwar wesentlich höher, da noch keine Abnahme in der Intensität des Resonanzmaximums zu bemerken war.

Eine andere Meßreihe ist in Tabelle II und Fig. 10 wiedergegeben.

Tabelle II.

Generator A_2		Schwebungswelle		Frequenzdifferenz
λ_2 in m	ν_2 $\times 10^{-6}$ sec	λ in m	ν $\times 10^{-6}$ sec	$\nu_2 - \nu_1$ $\times 10^{-6}$ sec
60,0	5,00	359	0,83	0,82
57,5	5,21	308	0,97	1,03
44,5	6,72	118	2,54	2,54
43,0	6,98	107	2,80	2,70
41,5	7,21	96	3,13	3,03

Die Einstellung des Generators A_1 war dabei $\lambda_1 = 72$ m, $\nu_1 = 4{,}18 \cdot 10^6$ sec^{-1}. Die höchste erreichte Frequenz beträgt hier

$$3{,}13 \cdot 10^6 \text{ sec}^{-1}.$$

Auch hier war noch kein Anzeichen für ein Versagen des Detektors wahrzunehmen.

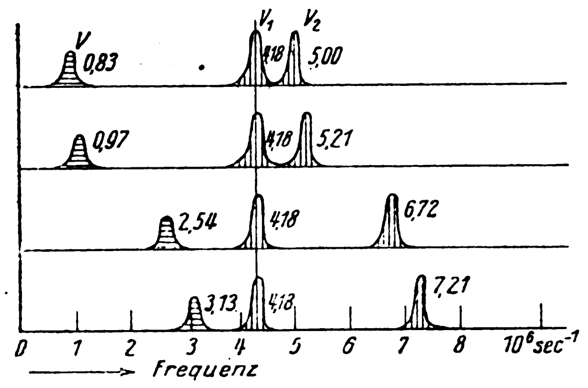


Fig. 10. Schwebungsresonanzen zu Tabelle II. $\nu_1 = 4{,}18 \cdot 10^6$ sec^{-1}, ☰ Schwebung, ||| Komponenten.

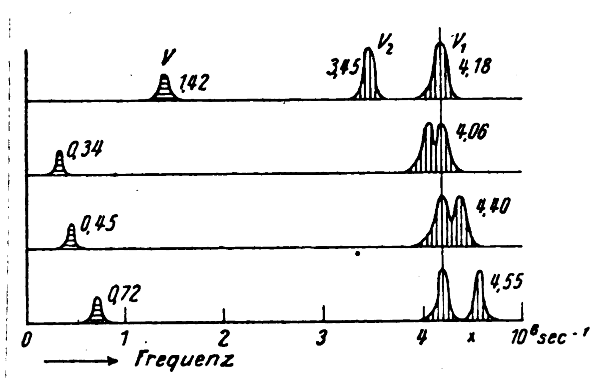


Fig. 11. Zweite Harmonische der Schwebungswelle zu Tabelle III. ☰ Schwebung, ||| Komponenten.

Die Schwebungswelle (Fig. 3c) ist nicht rein sinusförmig; das wird dadurch erhärtet, daß es gelingt, harmonische Oberwellen, also ganzzahlige Vielfache der Frequenz $\nu_2 - \nu_1$ zu beobachten. Eine entsprechende Versuchsreihe ist in Tabelle III und Fig. 11 zusammengestellt. Es gelangte die zweite Harmonische der Schwebungswelle zur Beobachtung. Man muß daher, wie es in den zwei letzten Kolonnen der Tabelle III durchgeführt ist, die halbe Schwebungsfrequenz mit der Frequenzdifferenz der Generatoren vergleichen.

Die feste Einstellung von A_1 war dabei wie früher $\lambda_1 = 71{,}8$ m, $\nu_1 = 4{,}18 \cdot 10^6$ sec^{-1}. Hier wurde der Unterschied der zwei erzeugenden Wellen zunächst verringert, dabei geht die Schwebungswellenlänge, wie zu erwarten war, gegen ∞, ihre Frequenz gegen 0. In der Nähe dieser Unstetigkeitsstelle ist die Einstellung von A_2 natürlich sehr empfindlich; einer Drehung des veränderlichen Kondensators von A_2 um $^1/_2$ Grad (8. Zeile der Tabelle III) entspricht eine Verdopplung der Schwebungswellenlänge; daher auch die ver-

Tabelle III.

Generator A_2		zweite Harmonische der Schwebungswelle			Frequenzdifferenz
λ_2 in m	$\nu_2 \cdot 10^{-6}$ sec	λ in m	$\nu \cdot 10^{-6}$ sec	$\frac{\nu}{2} \cdot 10^{-6}$ sec	$\nu_2 - \nu_1$
87	3,45	210	1,43	0,71	− 0,73
83	3,61	246	1,22	0,61	− 0,57
79	3,80	336	0,89	0,45	− 0,38
77	3,90	388	0,77	0,38	− 0,28
76	3,95	590	0,51	0,25	− 0,23
74,5	4,06	898	0,34	0,17	− 0,12
73,5	4,09	1555	0,194	0,09	− 0,09
73,0	4,10	1690	0,178	0,09	− 0,08
72,5	4,14	2800	0,107	0,05	− 0,04
71,5	4,16	3200	0,094	0,05	− 0,02
68	4,40	660	0,45	0,22	+ 0,22
66,5	4,50	510	0,59	0,29	+ 0,32
66	4,55	420	0,72	0,36	+ 0,37

hältnismäßig größeren Abweichungen. Wird ν_2 noch weiter gesteigert, so wiederholt sich der Vorgang spiegelbildlich.

Zuletzt sei noch eine Beobachtung angeführt, die von besonderem Interesse sein dürfte. Steigert man die Frequenzdifferenz $\nu_2 - \nu_1$ durch Vergrößerung von ν_2 immer mehr, so könnte man erwarten, daß eine Schwebung dann überhaupt nicht mehr zustande kommen kann, wenn weniger als zwei Einzelschwingungen auf eine Schwebungsperiode entfallen. Das Experiment zeigt jedoch, daß auch dann noch Schwebungswellen sich durch Resonanz nachweisen lassen, ja daß dies sogar der Fall ist, wenn die Schwebungsfrequenz größer ist, als die der langsameren der beiden Erzeugenden, $\nu > \nu_1$. Dann muß, weil die Frequenz eine wesentlich positive Größe ist, und weil $\nu = \nu_2 - \nu_1$, ν zwischen den beiden Grundfrequenzen liegen; $\nu_2 > \nu > \nu_1$.

Diesen Verhältnissen entspricht die in Tabelle IV und Fig. 12 wiedergegebene Messung.

Tabelle IV.

Generator A_2		Schwebungswelle		Frequenzdifferenz
λ_2 in m	$\nu_2 \cdot 10^{-6}$ sec	λ in m	$\nu \cdot 10^{-6}$ sec	$\nu_2 - \nu_1$
65	4,62	220	1,36	1,43
36	8,32	59	5,09	5,13

Fig. 12. Zu Tabelle IV. $\nu_1 = 3,19 \cdot 10^6$ sec^{-1}. Schwebung zwischen sehr verschiedenen Komponenten. ═ Schwebung, ||| Komponenten.

Die Wellenlänge von A_1 war dabei $\lambda_1 = 94$ m, $\nu_1 = 3,19 \cdot 10^6$ sec^{-1}. Wie man sieht, durchdringt bei Steigerung von ν_2 die Resonanzkurve ν der Schwebungswelle (horizontal schraffiert) die Resonanzkurve von ν_1 (vertikal schraffiert).

In der unmittelbaren Umgebung von $\nu = \nu_1$ ist es schwer zu beobachten, da sich die beiden Resonanzkurven überlappen. Die Trennung gelingt jedoch, wenn man den Detektor mittels eines Umschalters durch einen äquivalenten Widerstand ersetzt; dabei bleibt die Amplitude von ν_2 unverändert, während ν, die Schwebungswelle, natürlich verschwindet.

Die hier angeführte Schwebungsfrequenz von $5,09 \cdot 10^6$ sec^{-1} ist die raschste von mir bisher beobachtete. Sie beweist, daß die „Reaktionszeit“ des Detektors kleiner ist, als 0,2 Millionstel Sekunden.

5. Zusammenfassung.

a) Zur Bestimmung der „kritischen Frequenz“, bei der ein Detektor infolge seiner elektrischen Trägheit versagt, wurde eine auf dem Schwebungsprinzip beruhende elektrische Resonanzmethode ausgebildet, wobei der zu untersuchende Detektor in einem aperiodischen Kreis liegt, der die Schwingungen zweier Audiongeneratoren auf einen Meßkreis überträgt.

b) Resonanz bei der Schwebungsfrequenz ν tritt auch dann ein, wenn eine Schwebung im landläufigen Sinne eines Ansteigens und Abklingens der Amplituden nicht vorhanden ist, infolge zu großen Unterschiedes in der Frequenz ν_1 und ν_2 der beiden Komponenten. Wenn $\nu_2 > 2\nu_1$, liegt ν zwischen den beiden Komponenten.

c) Die Schwebungswelle ist nicht rein sinusförmig. Es lassen sich, gleichfalls durch Resonanz, ganzzahlige Vielfache der Frequenz $\nu_2 - \nu_1$ feststellen.

d) Die schnellste bei einem Bleiglanz-Nickelin-Detektor beobachtete Schwebungsfrequenz war $5,09 \cdot 10^6$ sec^{-1}, womit bewiesen ist, daß dieser Detektor noch Stromschwankuugen von der Dauer von 2 Zehnmillionstel Sekunden zu folgen vermag. Damit wird der thermoelektrischen Theorie der Detektorwirkung der Boden entzogen.

I. Physikalisches Institut der Universität Wien IX, Strudlhofgasse 4, 29. Oktober 1919.

(Eingegangen 12. November 1919.)

Wellenmesser mit Kapazitätsmeßbrücke.

Von F. Kock.

Für die Verwendung während des Feldzuges, zum Abstimmen und zu Kapazitätsbestimmungen an funkentelegraphischen Sende- und Empfangsstationen, erschien es wünschenswert, statt der bisher in verschiedenen Apparaten getrennten Wellenmesser und Kapazitätsmeßbrücken einen leicht transportablen Apparat zu haben, der einen großen Meßbereich besitzt und beide Messungen mit wenig Handgriffen auszuführen gestattet.

Dies wurde dadurch erreicht, daß bei den drei notwendigen Schaltungen (Fig. 1a, b, c):



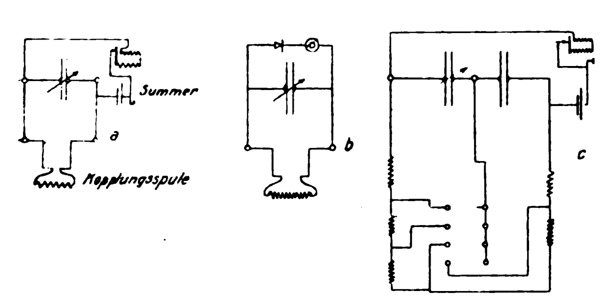


Fig. 1.

1. Apparat als Wellenmesser (Sender) geschaltet,
2. Apparat als Wellenmesser (Empfänger) geschaltet,

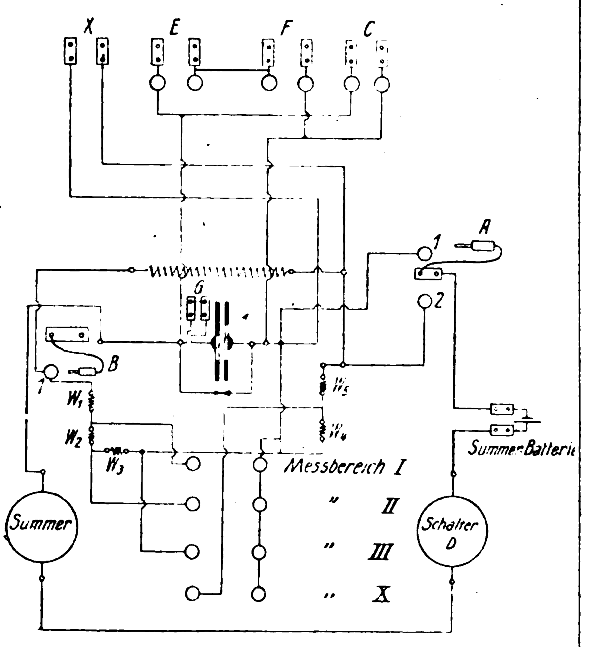


Fig. 2.

3. als Kapazitätsmeßbrücke geschaltet, der Meßdrehkondensator bei allen drei Schaltungen und die Summererregung bei Schaltung 1 und 3 gemeinsam benutzt wurde. Die zu den einzelnen Messungen nötigen Umschaltungen sind in einfacher Weise durch zwei Stöpselschalter auszuführen. So entsteht die Schaltung Fig. 2, welche die Gesamtschaltung des Apparates zeigt.

Das Stöpseln von Kontakt *A* in 1, Kontakt *B* (Fig. 2) offen, Einstöpseln des Kopplungsspulenschlusses in Kontakt *C* und Schließen des Schalters *D* ergibt die Schaltung Fig. 1a, d. h. Schaltung des Apparates als Wellensender.

Kontakt *A* und *B* offen, Summerschalter *D* offen, Kopplungsspule, Detektor und Telephon in die entsprechenden Kontakte *C*, *E* und *F* gestöpselt, bewirkt Schaltung Fig. 1b, d. h. Wellenempfangsschaltung.

Kontakt *B* in 1, Kontakt *A* in 2 gestöpselt, zu messender Kondensator an *x* geschaltet und

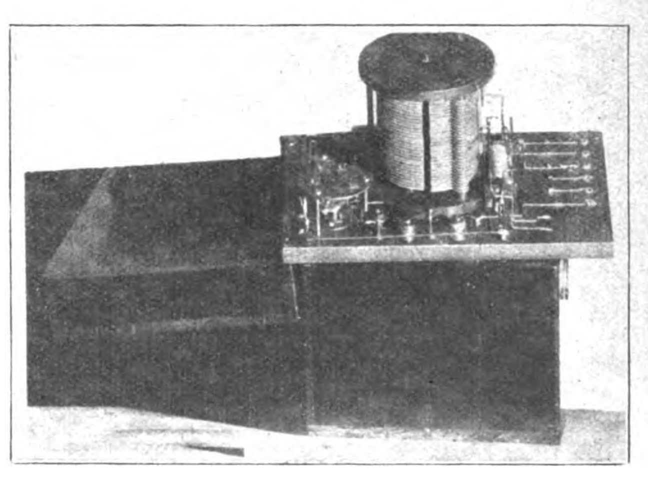


Fig. 3.

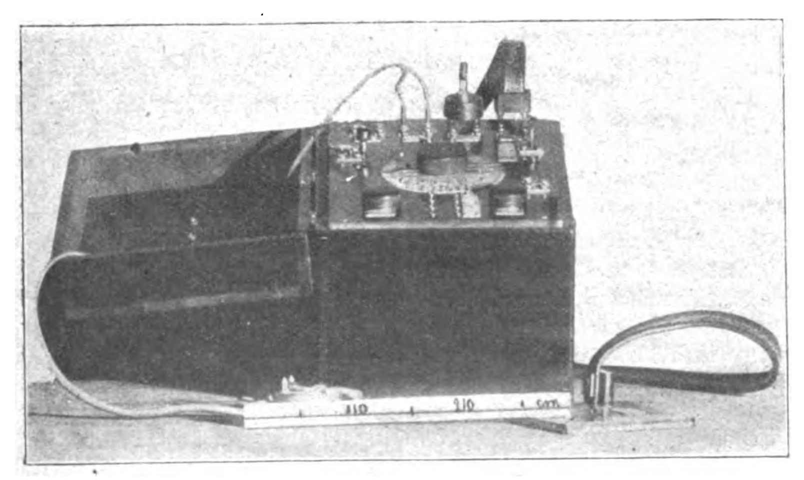


Fig. 4.

das Telephon in die Buchsen eines der vier Meßbereiche gestöpselt, ergibt die Schaltung Fig. 1c als Kapazitätsmeßbrücke.

Die Kapazitätsmeßbrücke ist entsprechend der Kapazitätsmeßbrücke nach Seibt ausgeführt. Fig. 3 und 4 zeigen eine Gesamtansicht des Apparates.

Die Dimensionen des kombinierten Apparates sind, wie der mitaufgenommene Maßstab zeigt, klein und lassen sich durch Anwendung eines Kondensators von geringeren Dimensionen, der nicht zur Verfügung stand, noch verringern. Die Kopplungsspulen sind als Flachspulen ausgebildet und zwischen Schutzplatten untergebracht. Bei einer Kapazität des Meßkondensators von 50—2000 cm lassen sich bei 6 Kopplungsspulen Wellenlängen von 60—8000 m herstellen. Der Meßbereich für Kapazitäten beträgt 50—200000 cm. Durch Vorschalten bzw. Parallelschalten von Kapazität (Kontakte G bzw. C) läßt sich der Wellen- bzw. Kapazitätsmeßbereich nach oben und unten erweitern. Als Detektor wurde ein solcher mit Karboundkristall benutzt, der sich infolge seines Ansprechens für einen kleinen Einstellungsbereich des Drehkondensators für Wellenmesser gut eignet und ein scharfes Maximum gibt.

Der vorstehend beschriebene Apparat wurde vom Verfasser zu Messungen an funkentelegraphischen Systemen und Überlagerungsempfänger während des Feldzuges mit gutem Erfolge benutzt.

Charlottenburg, den 12. November 1919. Physikal. Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 17. November 1919.)

Das Verhältnis des mittleren Fehlers des arithmetischen Mittels zu dessen wahrem Fehler bei der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Von Heinrich Vater.

Wenn eine große Anzahl von Beobachtungen derselben Größe gegeben ist, so gilt für das oben genannte Verhältnis die sich aus dem Gaußschen Fehlerhäufigkeitsgesetz (abgekürzt: G. G.) ergebende Wahrscheinlichkeit, daß der wahre Fehler zwischen 0 und dem k-fachen mittleren Fehler liegt. Eine Tafel dieser Wahrscheinlichkeit, abgestuft auf die Hundertstel des mittleren Fehlers, hat z. B. Jordan[1]) gegeben. Bei Bodenkulturversuchen handelt es sich in vielen Fällen darum, die Ausgleichungsrechnung auf nur wenige Wiederholungen desselben Versuches anzuwenden[1]). Wie gestaltet sich dann obiges Verhältnis? Hierüber gibt das Schrifttum keine nähere Auskunft. Zur Beantwortung dieser Frage beschloß ich, Beispiele von arithmetischen Mitteln mit bekannten wahren und mittleren Fehlern so lange zu vermehren, bis ihre statistische Behandlung die gesuchte Beziehung erkennen ließ. Im folgenden wird in gedrängtester Kürze über diese Untersuchung berichtet. Die bereits im Jahre 1917 abgeschlossene ausführliche Darstellung konnte noch nicht veröffentlicht werden.

Da bei der beabsichtigten Untersuchung die wahren Fehler der Beobachtungen in aller Strenge dem G. G. gehorchen müssen, so sind nicht wirkliche Beobachtungen, welche leicht mannigfachen Zweifeln unterliegen, zu benutzen, sondern es ist ein Wertsystem anzuwenden, welches dem G. G. vollkommen entspricht. Um von einem solchen zu Wertgruppen zu gelangen, welche Beobachtungsgruppen vertreten können, ist nur erforderlich, die Aushebung der Werte dem Zufall zu überlassen. Die Glieder derartiger Wertgruppen besitzen jene beiden Eigenschaften, welche die Ausgleichungsrechnung den Fehlern zuschreibt: Sie gehorchen dem G. G., und ihr besonderes Auftreten ist rein zufällig. Als Anzahl der Werte, welche die Gesamtheit der möglichen dem G. G. entsprechenden Fehler vertritt, wurde 100 gewählt. Diese werden erhalten, wenn die zu den Werten 0,01, 0,03, 0,05 ..... 0,95, 0,97, 0,99 der Funktion $\Phi(x)$ gehörigen Werte von x einer Tafel[2]) entnommen und mit beiden Vorzeichen berücksichtigt werden. Diese Werte entsprechen einer Präzision $h = 1$. Sie wurden nach steigender Größe so geordnet, daß $-1,821$ und $+1,821$ die Ordnungsnummern 1 bzw. 100 erhielten. Als zufällige Reihenfolge von Ordnungsnummern zur Aushebung der Fehler wurden die letzten beiden Ziffern der einzelnen Zahlen geeigneter umfangreicher statistischer Zahlenreihen, besonders Einwohnerzahlen, verwendet. 00 galt hierbei als 100. Als Anzahl n der Beobachtungen zur Bildung von arithmetischen Mitteln wurden 2, 3, 5 und 10 gewählt. Aus den wahren Fehlern der Beobachtungen wurde der wahre Fehler $\varepsilon(x)$ und der mittlere Fehler $\mu(x)$ des arithmetischen Mittels und hieraus der Quotient $\frac{\varepsilon(x)}{\mu(x)}$ be-

1) W. Jordan, Handbuch der Vermessungskunde. I. Bd. Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate. 6. Aufl., S. (21), bearbeitet von O. Eggert. Stuttgart 1910.

1) Vgl. z. B. H. Vater, Ausgleichungsrechnung bei Bodenkulturversuchen. Mitteilungen aus der forstlichen Versuchsanstalt zu Tharandt. Bd. II, Heft 1. Berlin 1918.

2) z. B. der Tafel in H. Bruns, Wahrscheinlichkeitsrechnung und Kollektivmaßlehre. Leipzig u. Berlin 1906.

rechnet. Für jede Anzahl der Beobachtungen wurden 300 Beispiele durchgeführt, denen nochmalige 300 für 3 Beobachtungen folgten.

Die statistische Untersuchung dieser Beispiele zeigte, daß der Quotient $\frac{\varepsilon(x)}{\mu(x)}$ bei nur 2 Beobachtungen dem G. G. nicht entspricht, daß mit Vermehrung der Beobachtungen wohl die Verteilung der Werte der Quotienten der vom G. G. geforderten ähnlicher wird, daß aber auch die Annäherung bei $n = 10$ zur praktischen Anwendung noch nicht genügt.

Es könnte an den Ausweg gedacht werden, durch Erweiterung der Theorie oder durch Häufung von empirischen Werten auf eine genügende Anzahl von Stellen genaue Summenfunktionen von $\frac{\varepsilon(x)}{\mu(x)}$ für $n = 2, 3$ usw. zu ermitteln. An Stelle der jetzt gebräuchlichen Fehlerwahrscheinlichkeitstafel, welche unendlich viele Beobachtungen voraussetzt, wäre dann die Summenfunktion für die betreffende Anzahl von Beobachtungen anzuwenden. Allein bei der Zusammenstellung der Einzelwerte für $n = 2$ fiel mir auf, daß die Voraussetzung, auf welcher die Anwendung der auf Grund des G. G. hergestellten Wahrscheinlichkeitstafel beruht, bei wenigen Beobachtungen überhaupt nicht zutrifft. Die grundlegende, allerdings stets stillschweigend gemachte Voraussetzung ist doch die, daß der Quotient $\frac{\varepsilon(x)}{\mu(x)}$ im Durchschnitt vieler, zu gleichem $\mu(x)$ gehöriger Werte von der Größe von $\mu(x)$ unabhängig ist. Die Einzelfälle ließen jedoch vermuten, daß es vorzugsweise die kleineren mittleren Fehler sind, denen ein großer Quotient zugehört, und daß umgekehrt den größeren Werten von $\mu(x)$ vorzugsweise kleine $\frac{\varepsilon(x)}{\mu(x)}$ entsprechen.

Um dies zu prüfen, wurden die je 300 mittleren Fehler nach steigendem Werte geordnet und in 10 Gruppen zu je 30 geteilt. Von jeder Gruppe wurden der Durchschnitt der mittleren Fehler $D[\mu(x)]$ sowie der wahren Fehler $D[\varepsilon(x)]$ berechnet und der Quotient $\frac{D[\varepsilon(x)]}{D[\mu(x)]}$ gebildet. Bei 30 Beobachtungen ist eine Ausgleichung des Zufalls in dem Grade zu erwarten, daß je 10 Gruppen die vorliegenden Beziehungen erkennen lassen. Nach der grundlegenden Annahme für die Anwendbarkeit der erwähnten Wahrscheinlichkeitstafel müßten die Durchschnitte der wahren Fehler den Durchschnitten der mittleren Fehler proportional steigen; sie ergaben sich jedoch dieser Folgerung entgegen in allen Gruppen annähernd gleich. Die Regellosigkeit der Abweichungen von der Gleichheit berechtigt zu der Annahme, daß die Abweichungen nur durch unvollkommene Ausgleichung des Zufalls bei nur je 30 Fällen verursacht werden. Der Quotient $\frac{D[\varepsilon(x)]}{D[\mu(x)]}$ zeigte infolge der ständigen Gleichheit von $D[\varepsilon(x)]$ eine vom Werte von $\mu(x)$ im Sinne der oben ausgesprochenen Vermutung abhängige Größe. Aus der ständigen Gleichheit von $D[\varepsilon(x)]$ folgt: Der wahre Fehler des arithmetischen Mittels von wenigen Beobachtungen ist unabhängig von der Größe seines mittleren Fehlers. Es wird daher in solchem Fall auch die Formel des mittleren Fehlers gegenstandslos. Wohl aber läßt sich, wenn die Präzision h der vorliegenden Art der Beobachtungen aus einer genügend großen Anzahl anderweitiger Beobachtungen der gleichen Art ermittelt werden kann, der durchschnittliche wahre Fehler aller Mittelwerte aus n derartigen Beobachtungen berechnen. Der durchschnittliche Fehler ϑ von unendlich vielen Beobachtungen mit der Präzision h entspricht der Gleichung

$$\vartheta = \frac{1}{h\sqrt{\pi}}.$$

Da die Fehler der Beobachtungen ε dem G. G. gehorchen, so gilt dies auch für die Fehler $\varepsilon(x)$ der arithmetischen Mittel, bezogen auf denselben wahren Wert wie die ε. Da ferner die Fehler der arithmetischen Mittel proportional $\sqrt{n}$ abnehmen, so ist der durchschnittliche wahre Fehler unendlich vieler arithmetischer Mittelwerte aus je n Beobachtungen mit der Präzision h

$$\vartheta[\varepsilon(x)] = \frac{1}{h\sqrt{\pi n}}.$$

Die statistische Untersuchung der 1500 wahren Fehler von arithmetischen Mitteln bestätigt diese Folgerung und die sich aus dem G. G. ergebende Verteilung der Werte. Es gilt daher der fernere Satz: Die wahren Fehler der arithmetischen Mittel von n Beobachtungen betragen im Durchschnitt

$$\frac{1}{h\sqrt{\pi n}},$$

wobei h aus einer großen Anzahl von Beobachtungen derselben Art zu berechnen ist. Die Unterschiede der Quotienten

$$\frac{D[\varepsilon(x)]}{D[\mu(x)]}$$

werden bei wachsendem n kleiner. Während z. B. bei der vorliegenden Berechnung die Werte

der 1. und der 10. Gruppe bei $n = 2$ 13,15 und 0,30 betragen, belaufen sie sich bei $n = 10$ auf 1,27 und 0,61. Dies weist in Übereinstimmung mit den Folgerungen aus dem G. G. darauf hin, daß bei $n = \infty$ der Unterschied verschwindet.

Es empfiehlt sich, bei der Würdigung eines arithmetischen Mittels aus nur wenigen Beobachtungen bekannter Art den durchschnittlichen wahren oder den sich hieraus ableitenden durchschnittlichen mittleren Fehler der betreffenden Mittel als Maß der Genauigkeit zu verwenden.

(Eingegangen 24. November 1919.)

Über einen ionenbildenden Effekt in den obersten Schichten der Atmosphäre.

Von W. Hammer.

Als Ursache der Ionisation der obersten Luftschichten betrachtet man in erster Linie die Sonnenstrahlung, und zwar das ultraviolette Licht und vielleicht auch Strahlen korpuskularer Natur, wenn wir von der noch nicht hinreichend erklärten Heßschen durchdringenden Strahlung zunächst absehen. Im folgenden soll nun auf die Möglichkeit einer weiteren ionisierenden Wirkung hingewiesen werden, die, soweit mir bekannt, noch nicht in Betracht gezogen wurde.

Aus einer Arbeit von E. v. Bahr und J. Frank[1]) geht hervor, daß positive Ionen von Wasserstoff ($H+$) nach etwa 6 Volt frei durchlaufener Spannung ionisieren. Die Ionisierungsspannung ließ sich nicht mit derselben Schärfe bestimmen wie bei Elektronen, es lagen Anzeichen vor, daß bei großer Zahl der stoßenden Teilchen die Ionisation auch unter 6 Volt begann. Aus den Untersuchungen an neutralen Kanalstrahlen, wie sie von W. Wien, J. Thomson, Königsberger, v. Dechend und Hammer und anderen vorgenommen wurden, geht hervor, daß auch schnell bewegte neutrale Atome und Moleküle durch Stoß zu ionisieren vermögen. Die Minimalgeschwindigkeit, bei der eben noch Stoßionisation eintritt, läßt sich bei diesen Teilchen nicht genauer angeben, doch kann man der ganzen Sachlage nach wohl behaupten, daß sie bei ähnlicher kinetischer Energie ionisieren, wie die entsprechenden Ionen.

Bei 6 Volt frei durchlaufener Spannung hat ein $H+$ eine Geschwindigkeit von etwa 35 km/sec., ein H-Molekül hat also bei etwa 25 km dieselbe kinetische Energie und damit die Fähigkeit zu ionisieren.

Wir dürfen nun wohl annehmen, daß der Weltraum, zum wenigsten im Sonnensystem, nicht ganz frei von gasförmiger Materie ist. Meteorsteine und Meteorstaub sind vorhanden, es ist also kaum zu bezweifeln, daß sich auch einzelne Moleküle der verschiedenen Elemente dort befinden.

Wenn die Atmosphäre der Erde auf ihrer Bahn mit einer Geschwindigkeit von 29 km solche zunächst als ruhend gedachte Moleküle trifft, so reicht diese relative Geschwindigkeit selbst für H-Moleküle zur Bildung eines Ionenpaares aus, während die schwereren mehr zu bilden vermögen. Um die Zahl der gebildeten Ionen wenigstens größenordnungsweise zu schätzen, muß man gewisse Annahmen über die Molekülzahl im Raum des Sonnensystems, d. h. über den Druck der von der Erde durcheilten Raumatmosphäre machen. Die obere Grenze läßt sich aus dem Umstand annäherungsweise schätzen, daß bisher keine Verlangsamung der Planeten beobachtet wurde, die auf eine Bremswirkung durch ein widerstrebendes Mittel hingedeutet hätte. Auch bei den Kometen, bei deren geringerer Dichte eine derartige Abbremsung eher nachweisbar sein müßte, konnte sie nicht mit Sicherheit festgestellt werden. Man findet, daß eine Raumatmosphäre, deren Druck nicht größer als 10^{-15} Atmosphären ist, sicher keine Bremsung ergibt. Rechnen wir mit diesem Druck, so haben wir etwa 10^4—10^5 Moleküle im Kubikzentimeter, was auf den Quadratzentimeter des voraneilenden Teils der Erdatmosphäre $29 \cdot 10^5 \cdot 10^4 = 29 \cdot 10^9$ rund 10^{11} Ionenpaare ergibt. Eine Ionisation dieser Größenordnung müßte für die oberste Luftschicht aller auf einem Meridian liegenden Orte um 6 Uhr vormittags Ortszeit ein Maximum haben, und zwar hinge dieses nicht in derselben Weise von Jahreszeit und Breitengrad ab, wie dasjenige der Ionisation durch Sonnenlicht.

Die Fortpflanzung der Wellen der drahtlosen Telegraphie erleidet Schwankungen nach Richtung und Größe mit der Tageszeit, ebenso die Erdströme. Zur Erklärung dieser täglichen Periode hat man die Annahme einer Ionisation der obersten Luftschichten gemacht. Erdströme und Wellen sind erfahrungsgemäß bei Nacht erheblich größeren unregelmäßigen Störungen ausgesetzt, als bei Tage. Die Verringerung der Störungen bei Tage läßt sich durch die ausgleichende Wirkung einer leitenden Hülle verständlich machen. Wird diese Hülle lediglich durch die ionisierende Wirkung des Sonnenlichts hervorgerufen, so muß ihre Leitfähigkeit eine Funktion des Sonnenstandes sein; beteiligt sich aber der oben beschriebene Stoßeffekt in vergleichbarer Stärke an der Ionisation, so ist eine Verschiebung des Maximums nach 6 Uhr vormittags Ortszeit zu erwarten. Durch Bearbeitung des umfangreichen Erfahrungsmaterials

1) Verh. d. D. phys. Ges. 1913, S. 57.

über die Störungen der Wellenausbreitung und der Erdströme, das im Laufe des Krieges im Funkdienste (besonders Richtempfang) und durch die Abhörtätigkeit an vagabundierenden Telephonströmen gesammelt worden ist, ist hierüber vielleicht Aufklärung zu erhalten. Sollte sich aus diesem Material oder aus besonderen Versuchen der prozentuale Anteil des Stoßeffektes ermitteln lassen, so wäre, wenn man die Zahl der durch die Sonnenstrahlung gebildeten Ionen aus der Solarkonstante und der Absorption annähernd berechnet, die Zahl der durch den Stoßeffekt erzeugten Ionen zu bestimmen. Man hätte damit indirekt die Größenordnung des Druckes des in der Erdbahn liegenden Teils der Raumatmosphäre ermittelt.

Sollte sich in den erd- und luftelektrischen Daten der gesuchte Effekt nicht merklich ausprägen, so kann das daran liegen, daß sich die Raumatmosphäre längs der Bahn der Erde mit ähnlicher Geschwindigkeit wie diese um die Sonne bewegt, so daß keine relative Bewegung zustande kommt. Bei den Kometen dagegen, zum mindesten bei den nicht periodischen, wird stets Relativbewegung gegen die Raumatmosphäre vorliegen, so daß in den mitbewegten Gashüllen, den Kometenatmosphären, der Stoßeffekt zur Wirkung kommen kann.

Im Perihel sind bei einigen Kometen Geschwindigkeiten von mehreren hundert Kilometern beobachtet worden, d. h. von der Größenordnung der Geschwindigkeit, welche die Ionen in einer Geißlerröhre bei einer Entladungsspannung von mehr als 1000 Volt besitzen. Da die verschiedenen Leuchterscheinungen in Gasen durch bewegte Ionen und durch die inneren Erschütterungen bei Ionisation durch Stoß und bei der Wiedervereinigung erklärt werden, so müßte auch eine andere Ursache als elektrische Entladung, falls sie zu Stoßionisation und Beschleunigung von Ionen führt, ähnliche optische Erscheinungen in Gasen bedingen, wie eine elektrische Entladung. Jener Stoßeffekt infolge der kosmischen Geschwindigkeit könnte also Leuchterscheinungen in den Kometenatmosphären hervorrufen, ohne daß elektrische Felder primär vorhanden zu sein brauchen. Mit dieser Auffassung stimmt es gut überein, daß die Kometenspektren so große Ähnlichkeit mit Geißlerrohr-Spektren besitzen, daß man bisher das Leuchten der Kometenhüllen auf elektrische Entladungen zurückführte. Bei dieser Deutung stieß aber die Erklärung der Herkunft und Lage der diese Entladungen hervorrufenden Felder auf Schwierigkeiten, welche bei einer Zurückführung des Leuchtens auf den Stoßeffekt fortfallen.

In einem terrestrischen Experiment lassen sich diese Verhältnisse auf rein mechanischem Wege nicht herstellen, da wir keinen Gasstrahl von genügender Geschwindigkeit erzeugen können. Höchstens können die Leuchterscheinungen, die beim Eindringen des neutralen Teiles eines Kanalstrahls in ein Gas von geeignetem Druck auftreten, als Analogon betrachtet werden. In diesem Falle haben allerdings die stoßenden neutralen Atome und Moleküle ihre kinetische Energie ursprünglich durch einen Entladungsvorgang erhalten.

Der Zweck dieser Notiz ist es, diejenigen, denen ausgedehnteres Material aus dem Gebiet der Luft- und Erdelektrizität, sowie der Kometenkunde zur Verfügung steht, auf die Möglichkeit hinzuweisen, einige Erscheinungen durch einen Stoßeffekt der Teilchen einer Raumatmosphäre zu erklären.

Auf eine andere Betrachtungsweise der erwähnten Zusammenstöße sei hier noch kurz hingewiesen: Die kinetische Energie der Moleküle eines mit 29 km bewegten Gases ist gleich der mittleren Energie der Moleküle eines Gases bei einer Temperatur von mehr als 50000 Grad. Prallen zwei Moleküle, welche miteinander reagieren können, mit derartiger Flugenergie aufeinander, so ist die nötige Aktivierungswärme für viele Reaktionen sicher vorhanden, ferner spielen sich die Vorgänge infolge der niedrigen Temperatur des Weltraumes in einer extremen „kaltwarmen Röhre“ ab bei sehr geringer Strahlungsdichte, so daß der umgekehrte Verlauf der Reaktion unwahrscheinlich wird und der Vorgang quantitativ in einer Richtung läuft. Infolge der großen freien Weglänge kommt ein Ausgleich der relativen Flugenergien der zum Stoß gelangenden Moleküle mit der gesamten Menge nie zustande. Der Typ dieser Reaktion unterscheidet sich also von den sonst üblichen, die sich bei verhältnismäßig hohem Druck aber in kleinen Mengen abspielen, in erheblichem Maße. Möglicherweise spielt dieser Prozeß bei der Bildung von Stickstoffverbindungen, die mit den Niederschlägen zur Erde gelangen, eine gewisse Rolle. In den obersten Luftschichten entstanden, sänken diese Verbindungen nur durch ihre Schwere bis in die Troposphäre und kämen dann durch meteorologische Faktoren bis zum Boden.

Freiburg i. Br., 1. Dezember 1919.

(Eingegangen 16. Dezember 1919.)



Ein rechnerisches Verfahren zur Ermittelung des Spektrums der Röntgenstrahlen.

Von H. Kröncke.

Vorbemerkung. Die folgende kleine Arbeit über eine Methode, die gestattet, auf rechnerischem Wege das Spektrum der Röntgenstrahlen zu gewinnen, hatte der Verf. schon im Juli 1914 fertiggestellt und damals von Deutsch Südwest-Afrika aus an diese Zeitschrift eingesandt. Infolge des Krieges gingen sowohl das Manuskript wie sämtliche Unterlagen verloren, so daß die Arbeit erst jetzt wieder neu gemacht werden konnte. Trotzdem inzwischen die Spektrographie der Röntgenstrahlen so außerordentliche Fortschritte gemacht hat, dürfte vielleicht ein Verfahren nicht des Interesses entbehren, daß auf einem ganz anderen Wege dasselbe Ziel verfolgt.

Die Durchdringungsfähigkeit eines Strahles sei durch seinen Absorptionskoeffizienten x gemessen, bezogen auf Aluminium von 1 mm Dicke. Das heißt also: ein Strahl von der Intensität I wird durch eine Schicht Al von 1 mm Stärke so geschwächt, daß der Strahlenrest die Intensität $I \cdot \bar{\varepsilon}^{x}$ hat. Die Strahlung einer Röntgenröhre von der Gesamtintensität S setzt sich nun zusammen aus Strahlen mit den Absorptionsindizes x_1, x_2 ...., die jeweils die Intensität I_1, I_2 ..... haben. Es ist also

$$S = I_1 + I_2 + \ldots\ldots$$

Die Aufgabe besteht darin, für eine bestimmte Gesamtstrahlung S die Intensität I eines einzelnen Strahles als Funktion der x darzustellen, wie es, zunächst schematisch, in Fig. 1

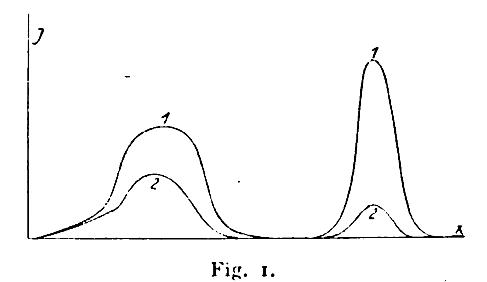


Fig. 1.

Kurve 1, geschehen ist. Die Gesamtstrahlung ist daher

$$S = \int_0^\infty I \cdot dx\,,$$

also gleich dem numerischen Wert der von der Kurve 1 und der Abszissenachse eingeschlossenen Fläche. Nach Absorption der Strahlung durch eine Schicht Al von der Dicke δ bleibt eine Strahlung von der Intensität

$$S(\delta) = \int_0^\infty I \cdot \bar{\varepsilon}^{\delta \cdot x} dx$$

übrig, die durch den Flächeninhalt der Kurve 2 dargestellt wird.

Nun ist es nicht schwierig, die Intensität der Strahlung einer Röntgenröhre nach Absorption durch Al verschiedener Dicken zu messen. Benutzen wir daher die so durch Messungen gewonnenen Werte von $S(\delta)$ und ersetzen die entsprechenden Integrale durch Summen, so erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$S(\delta_1) = S(0) = (x_2 - x_1)\,(I_1 + I_2 + \ldots\ldots + I_n)$$

$$S(\delta_2) = (x_2 - x_1)\,(I_1 \cdot \bar{\varepsilon}^{\delta_2 x_1} + I_2 \cdot \bar{\varepsilon}^{\delta_2 x_2} + \\ + \ldots\ldots I_n \cdot \bar{\varepsilon}^{\delta_2 x_n})$$

— — — — — — — — — — — — — — —

$$S(\delta_n) = (x_2 - x_1)\,(I_1 \cdot \bar{\varepsilon}^{\delta_n x_1} + I_2 \cdot \bar{\varepsilon}^{\delta_n x_2} + \\ + \ldots\ldots + I_n \cdot \bar{\varepsilon}^{\delta_n x_n}).$$

Dabei sind zur Vereinfachung der Gleichungen die x so gewählt, daß $x_2 - x_1 = x_3 - x_2 = \ldots\ldots$ ist; ferner ist $\delta_1 = 0$ genommen. Das System von n linearen Gleichungen gestattet, die n Unbekannten I_1, I_2, ... I_n zu gewinnen. Man erkennt hier weiterhin, daß zu den n bestimmten Werten $S(0)$, $S(\delta_2)$, ... $S(\delta_n)$ auch n eindeutig bestimmte Werte I gehören, so daß also durch das System der gemessenen Werte S das Spektrum der Strahlen eindeutig festgelegt ist.

Eine gewisse Schwierigkeit bietet jedoch die numerische Auflösung der Gleichungen, da durch die Natur der Koeffizienten $\bar{\varepsilon}^{\delta x}$ der Unbekannten die Determinante der rechten Seite der Gleichung nahezu Null wird, so daß die unvermeidlichen Ungenauigkeiten der Messungen eine direkte Auflösung, etwa mittels Determinanten, unmöglich machen. Man erhält jedoch eine numerische Auflösung durch das folgende Verfahren allmählicher Annäherung. Dabei darf man das Spektrum der Strahlung als mit dem vorliegenden Zahlenmaterial hinreichend genau berechnet ansehen, wenn die gemessenen Werte S sich von den aus den I berechneten Werten der Gesamtstrahlung um weniger unterscheiden, als die Messungsfehler betragen.

Um zunächst einen rohen Überblick über die Verteilung der Strahlen zu gewinnen, lösen wir folgendes Gleichungssystem nach den Unbekannten I_1, I_2 und I_3 auf:

$$S(0) = (x_2 - x_1)\,(I_1 + I_2 + I_3)$$

$$S(\delta_p) = (x_2 - x_1)\,(I_1 \cdot \bar{\varepsilon}^{\delta_p x_1} + I_2 \cdot \bar{\varepsilon}^{\delta_p x_2} + \\ + I_3 \cdot \bar{\varepsilon}^{\delta_p x_3})$$

$$S(\delta_q) = (x_2 - x_1)\,(I_1 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_q x_1} + I_2 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_q x_2} + \\ + I_3 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_q x_3}).$$

Bei Aufstellung dieser Gleichungen wählen wir x_2 etwa als den mittleren Absorptionskoeffizienten der Strahlung, x_1 so, wie es bei großen Schichtstärken gemessen wird, wo also im wesentlichen nur noch die harten Strahlen vorhanden sind, und x_3 entsprechend dem weichsten Teil der Strahlung. Die Schichtstärken δ_p und δ_q sind willkürlich; wir wählen etwa δ_q sehr groß und δ_p vielleicht gleich $\frac{1}{2}\delta_q$. Nach Auflösung der drei Gleichungen stellen uns die Werte I_1, I_2 und I_3 ein rohes Bild von der Verteilung der Strahlungsenergie im Röntgenspektrum dar, wie es in der ebenfalls schematischen Fig. 2 durch die Kurve 1 an-

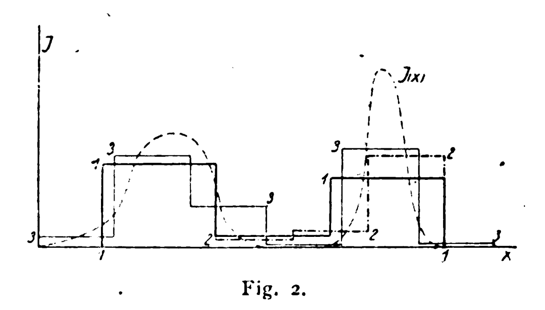


Fig. 2.

gedeutet ist. Nunmehr behalten wir I_1 als erste Annäherung bei und erhalten durch Auflösung des folgenden Gleichungssystems ein genaueres Bild von der Verteilung der weichen Strahlen:

$$S(0) - (x_2 - x_1) \cdot I_1 = (x_2 - x_1)\,(I_2 + I_3 + I_4)$$

$$S(\delta_r) - (x_2 - x_1) \cdot I_1 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_r x_1} = \\ = (x_2 - x_1)\,(I_2 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_r x_2} + I_3 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_r x_3} + I_4 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_r x_4})$$

$$S(\delta_s) - (x_2 - x_1) \cdot I_1 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_s x_1} = \\ = (x_2 - x_1)\,(I_2 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_s x_2} + I_3 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_s x_3} + I_4 \cdot \overline{\varepsilon}^{\delta_s x_4}).$$

Den Fehler, den wir dadurch begehen, daß wir für einen ganzen Strahlenbereich den Wert I_1 annehmen, der schon an sich nur eine rohe Annäherung ist, machen wir dadurch weniger wirksam, daß wir jetzt bei der Aufstellung der Gleichungen das Gebiet der weichen Strahlen bevorzugen, also kleine Werte für δ_r und δ_s wählen. Hier spielt der Anteil I_1 an der Gesamtenergie die geringste Rolle, so daß die auf diese Weise erhaltene Kurve 2 (Fig. 2) eine wesentliche Verbesserung gegenüber der Kurve 1 ist.

Nehmen wir nun I_3 und I_4 als vorläufig hinreichende Annäherungen an, so können wir wieder das Gebiet der harten Strahlen weiter verbessern, wobei wir jetzt aber für die drei Gleichungen große Werte von δ wählen, um den Einfluß der fehlerhaften Bestimmung von I_3 und I_4 möglichst klein zu machen. Es versteht sich von selbst, daß man sich dabei nicht dauernd an die ursprünglich gewählten Werte x halten wird, sondern diese den allmählich sich entwickelnden Kenntnissen über den Bau des Spektrums anpassen wird. Im allgemeinen empfiehlt es sich, immer nur Systeme von drei Gleichungen mit drei Unbekannten zu verwenden. Sind die Messungsfehler nicht zu groß, so kann man, wenn erst einige Annäherung erreicht ist, die Lösung der Aufgabe dadurch beschleunigen, daß man 4 oder auch 5 Gleichungen zur Bestimmung der Werte I verwendet.

Das Verfahren läßt von selbst erkennen, wann eine weitere Verbesserung der Annäherung nicht mehr möglich ist. Man erhält so schließlich eine Darstellung der Kurve 1 der Fig. 1 durch eine Treppenlinie, wie sie etwa die Kurve 3 in Fig. 2 zeigt, und die sich um so besser der Kurve $I(x)$ anschmiegt, je größer die Zahl der Stufen ist; ein Umstand, der natürlich von der Anzahl und der Genauigkeit der zugrunde gelegten Messungen abhängt.

Zur Aufstellung der linearen Gleichungen leistet die Tabelle der Funktion $\overline{\varepsilon}^{x}$ von P. Gruner (Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 1906) sehr gute Dienste. Die Auflösung der Gleichungen geschieht zweckmäßig mittels des Rechenschiebers nach dem Verfahren von C. Runge.

Um das Rechenverfahren praktisch anzuwenden, standen mir nur zwei Reihen von Messungen zur Verfügung, die ich vor mehreren Jahren für die Zwecke meiner Dissertation machte. Beide Serien von Messungen wurden mit einer Röntgenröhre von Heinz Bauer gemacht, die mit Gleichspannung von 25000 bzw. 30000 Volt bei einer Stromstärke von 2,5 Milliamp. betrieben wurde. Die Ergebnisse der Rechnung sind in Fig. 3 graphisch dargestellt.

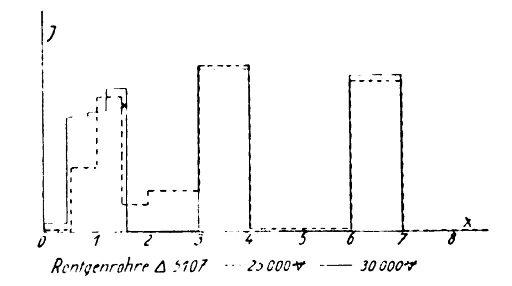


Fig. 3.

Da man bei Intensitätsmessungen durch Ionisation doch nur stets relative Werte bekommen kann, sind in der Fig. 3 die Beträge der Gesamtstrahlungen gleich gesetzt, um so

Tabelle I.

25000 Volt. 2,5 Milliamp.

Schichtstärke	0	0 5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	4,5
Strahlung berechnet	52,00	12,21	5,08	2,669	1,559	0,610	0,268	0,185
Strahlung gemessen	52,0	12,3	5,20	2,60	1,59	0,632	0,262	0,192
Differenz in Prozenten	0	— 0,7	— 2,3	+ 2,7	— 2,0	— 3,5	+ 2,3	— 3,6

Tabelle II.

30000 Volt. 2,5 Milliamp.

Schichtstärke	0	0,5	1,0	1,5	2,0	3,0	4,0	5,0
Strahlung berechnet	18,80	5,11	2,576	1,582	1,042	0,506	0,270	0,153
Strahlung gemessen	18,8	5,15	2,55	1,53	1,604	0,507	0,254	0,153
Differenz in Prozenten	0	— 0,76	+ 1,02	+ 3,4	— 2,2	— 0,2	+ 6,3	0

gleichzeitig einen Überblick zu bekommen, wie sich bei den verschiedenen Spannungen die Spektra gegeneinander verschieben. Allerdings ist dazu zu bemerken, daß die benutzten Messungen für andere Zwecke gemacht wurden, und daher nicht mit der besonderen Sorgfalt, die für die vorliegende Aufgabe unbedingt erforderlich ist. Auch waren damals die neueren Arbeiten über die Messung der Intensität von Röntgenstrahlen, besonders die von Lilienfeld und Glocker, noch nicht bekannt. Eine Diskussion der Kurven der Fig. 3 ist deshalb auch nur mit einiger Vorsicht ausführbar.

Es leuchtet ein, daß eine erhebliche Verbesserung schon durch die Verwendung weiterer dünner Filterbleche (zwischen 0,1 und 1 mm Stärke) eintreten würde, da sich hieraus ein weit besseres Bild von den wenig durchdringungsfähigen Strahlen ergeben würde. Aber auch die harten Strahlen hätten durch die Benutzung noch stärkerer Filterdicken bedeutend mehr geklärt werden können. Mit dem vorliegenden Zahlenmaterial konnten leider die Kurven der Fig. 3 nur ziemlich roh werden. Immerhin ist wohl so viel aus der Figur zu erkennen, daß sowohl bei 25000 wie bei 30000 Volt Gleichspannung die Strahlung der Röntgenröhre sich in der Hauptsache aus drei „Linien" zusammensetzt, deren Absorptionskoeffizienten für Al etwa 1, 3,5 und 6,5 sind. Sehr merkwürdig ist ja, daß bei beiden Spannungen die Energie sich auf die verschieden harten Strahlen fast ganz gleichmäßig verteilt, während zu erwarten wäre, daß mit wachsender Spannung der Anteil der weichen Strahlung stark zurückgeht. Der einzige wesentliche Unterschied der Strahlungen bei 25000 und 30000 Volt ist hier in der Verteilung der Energie innerhalb der harten Strahlen zu erkennen. Ob dies Ergebnis auf Ungenauigkeit der Messungen zurückzuführen ist, oder ob es die tatsächlichen Verhältnisse wiedergibt, läßt sich natürlich auf Grund der zwei Reihen von Messungen nicht angeben.

Zur Kontrolle der Genauigkeit der Messungen sind in den folgenden Tabellen die aus den I und x berechneten Werte der Strahlung für die verschiedenen Schichtstärken des Al den gemessenen Werten $S(\delta)$ gegenübergestellt. Die Abweichungen sind gleichmäßig verteilt und liegen ihrer Größe nach durchaus innerhalb der Fehlergrenze des damals angewandten Meßverfahrens.

Das Verfahren hat den Nachteil, daß kein scharfer Unterschied zwischen dem kontinuierlichen Teil des Spektrums und den einzelnen Linien hervortritt. Außerdem werden auch trotz größter Genauigkeit schwache Linien der Entdeckung durch die Rechnung entgehen. Dagegen hat das Verfahren den Vorteil, auf direktem Wege ein gutes Bild der Intensitätsverhältnisse innerhalb des Spektrums zu geben. Beim Röntgenspektrographen ist man ja hier auf Schwärzungsmessungen angewiesen, bei denen einmal die Eigenschaften der lichtempfindlichen Schicht, und dann vor allem die Abhängigkeit der photochemischen Wirkung von der Wellenlänge der Strahlung als Fehlerquellen zu berücksichtigen sind.

Göttingen, den 15. Dezember 1919.

(Eingegangen 20. Dezember 1919.)

Bemerkung zu der „schallempfindlichen Flamme" von Heinrich Mache[1]).

Von H. Kost.

Schall- und geräuschempfindliche Bunsenbrenner wurden 1914 im Sloane-Laboratorium der Yale Universität U.S.A. photographisch nach der Schlierenmethode untersucht. — In Übereinstimmung mit obiger Arbeit wurde als empfindliche Stelle der aus einer Düse unter bestimmtem kritischen Druck austretende Gasstrahl festgestellt[2]). Das praktische Ergebnis der Untersuchung war die Steigerung der Empfindlichkeit:

1. durch Verringerung des Durchmessers des Brennrohres bis ca. 3 mm Durchmesser;
2. durch geringen Luftzutritt vom Boden aus (unter Fortlassung des Trichters);
3. durch Wahl einer passenden Düse.

Solche Brenner sind außerordentlich empfindlich, besonders wenn sie auf resonierende Unterlagen gestellt werden, sie zeigen Töne und Geräusche an durch mehrere Stockwerke, die dem menschlichen Ohr nicht mehr wahrnehmbar sind.

1) Diese Zeitschr. **20**, 467, 1919.
2) Emden, Habilitationsschrift München 1898 über Die Ausströmungerscheinungen permanenter Gase. Winkelmann, Handbuch I, S. 1343.

Bergen bei Traunstein, den 25. Nov. 1919.

(Eingegangen 2. Dezember 1919.)

Bemerkung zu der Notiz von E. Nesper und P. Floch „Universalröhreninstrumentarium".

Von der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie m. b. H. Berlin.

Zu den Ausführungen auf Seite 371 dieser Zeitschrift möchten wir uns erlauben

1. richtig zu stellen, daß es sich bei den hier verwendeten Kathodenröhren nicht um Gasröhren, sondern um Hochvakuumröhren handelt und
2. nachzutragen, daß die hier angegebenen Schaltungen und Anordnungen von der Gesellschaft für drahtlose Telegraphie entwickelt worden sind.

(Eingegangen 15. Februar 1920.)

Erwiderung zu der Bemerkung von Telefunken.

Von E. Nesper und P. Floch.

Zu der „Richtigstellung" von Punkt 1:

In dem von uns beschriebenen Apparat können nicht nur die zuerst von Hollweck und Majorana angegebenen Hochvakuumröhren benutzt werden, sondern prinzipiell auch Gasröhren, d. h. also Röhren, welche sowohl mit Elektronenstrom als auch mit Gasionisation arbeiten. Hierunter fallen auch die modernsten Gasröhren, welche zurzeit in Amerika in Ausbildung begriffen sind.

Zu dem „Nachtrag" zu Punkt 2:

Die von uns beispielsweise abgebildeten Schaltungen, welche mit dem Universalröhreninstrumentarium hergestellt werden können, betreffen nicht nur das Senden, sondern z. B. auch die Audion- und Ultraaudionschaltung. Es ist interessant, daß Telefunken auch diese letzteren Schaltungen, welche schon vor 1914, z. B. von de Forest angegeben wurden, als ihr geistiges Eigentum reklamiert. Im übrigen würde ein näheres Eingehen auf diese Sache eine Würdigung patentrechtlicher Fragen in sich schließen, wozu die Physikalische Zeitschrift schon aus Raummangel nicht der geeignete Platz sein dürfte.

(Eingegangen 1. März 1920.)

BESPRECHUNGEN.

Prof. Dr. Arnold Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien. Mit 103 Abbildungen. 35 Bogen. 8°. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1920. Geh. M. 25.—, geb. M. 28.60. Ausschließlich Sortimentszuschlag.

Daß durch die glänzende Bestätigung der Zerfallstheorie der Radioaktivität, durch die Isolierung der einzelnen α- und β-Teilchen, der erste verheißungsvolle Schritt zu einer Physik des Atoms getan war, ist jedem Physiker klar gewesen, der diese Folge von Entdeckungen mit erlebt hat. Aber die geradezu erstaunliche Entwicklung des neuen Forschungsgebietes, vor der wir heute stehen, hätte er schwerlich zu prophezeien gewagt. Eine Fülle von Beobachtungen und neuen Gedanken, z. T. grundstürzender Art, mußte verarbeitet und auf den einen Punkt hin, auf die Frage nach der Natur des Atoms zusammengefaßt werden.

Untersuchungen über die Streuung der α-Strahlen führten zu dem Atommodell von Rutherford, quantentheoretische Erwägungen über die Emission der Spektrallinien des Wasserstoffs zur Idee von Bohr. Die Gesetze der radioaktiven Verschiebungen zusammen mit der charakteristischen Röntgenstrahlung ließen das

periodische System der Elemente durch Einführung der Ordnungszahl erst richtig verstehen. Die Relativitätstheorie, mit ihren Forderungen der Trägheit, der Energie und der Veränderlichkeit der Masse gab in Verbindung mit der Quantenlehre der Energie Aufschluß über die Feinstruktur der Spektrallinien. Eine große Reihe von Spektralerscheinungen, einschließlich des Zeeman- und des Stark-Effektes, haben ihre theoretische Aufklärung schon gefunden, andere wieder, wie die komplizierten Spektren der Elemente von höheren Atommassen, stehen noch aus.

Auf diesem kurz gekennzeichneten reichen Gebiete, das seit den letzten Jahren unter erfolgreicher Mitwirkung des Verfassers bearbeitet wird, will das Buch ein Führer sein. Das Ziel wird voll und ganz erreicht! Wo Schwierigkeiten vorliegen, die noch nicht beseitigt sind, z. B. bei der Frage der Versöhnung der Wellen- und der Quantentheorie des Lichtes, werden diese deutlich hervorgehoben. Das Buch ist überaus anregend geschrieben, aber besonders in den letzten Kapiteln nicht gerade leicht zu verstehen. Begründet ist dies in der Natur des Gegenstandes, nicht etwa in einem Mangel des Darstellungsvermögens des Verfassers. Das Werk Sommerfelds enthält eine solche Fülle von Stoff, daß wir hier nur kurz seinen Inhalt durch Angabe der einzelnen Kapitel skizzieren können. 1. Vorbereitende Tatsachen (Atomismus der Elektrizität, Strahlungen, Radioaktivität). 2. Das natürliche System der Elemente (Perioden, Kernladung und Ordnungszahl, Atommodelle, Atomphysik und Kernphysik). 3. Die Röntgenspektren (*K*-, *L*- und *M*-Serie). 4. Die optischen Serienspektren. 5. Theorie der Feinstruktur. 6. Wellentheorie und Quantentheorie. Den Schluß bilden mathematische Zusätze und Ergänzungen zu den einzelnen Kapiteln. — Für den Physiker, der für das oben umgrenzte Gebiet Interesse hat oder auf ihm arbeitet, wird das ausgezeichnete Werk A. Sommerfelds unentbehrlich sein. Karl Bergwitz.

Martin Uibe, Über die Helligkeitsverteilung des diffusen Sonnenlichtes am klaren Himmel. gr. 8⁰. 50 S. m. 6 Fig. u. 28 Tafeln. Abhandl. d. Mathem.-Physikal. Klasse der Kgl. Sächs. Ges. d. Wissenschaften. Bd. XXXV, Nr. VI. Leipzig, B. G. Teubner. Geheftet M. 2.40.

Der Verf. berichtet über die Resultate einer im Auftrage des Kartells der deutschen Akademien unternommenen Expedition nach Teneriffa in Rücksicht auf die Helligkeitsverteilung des diffusen Sonnenlichtes am Himmel. Nach einer kurzen Darstellung der bisher von verschiedenen Beobachtern (Bouguer, Brennauds, Wild, Weber und Wiener) erlangten Daten gibt er eine Beschreibung des von ihm benutzten, im wesentlichen nach Wieners Angaben konstruierten Photometers und eine Darlegung über dessen Benutzungsweise und Eichung.

Daran schließen sich die Mitteilungen der Einzelresultate, wie sie auf dem Gipfel des Pik de Teide 3700 m über dem Meer und in dem Orte Güimar auf Teneriffa 300 m über dem Meer erhalten wurden. Durch übersichtliche graphische Darstellungen sind diese zur Anschauung gebracht.

Die gewonnenen Resultate faßt der Verf. am Schluße der Abhandlungen in wenigen Leitsätzen zusammen, die in Kürze folgenden Inhalt haben:

1. Durch die Messungen auf dem Pik werden die Resultate der älteren Beobachtungen im wesentlichen bestätigt.
2. Bei größter Sonnenhöhe (84⁰) sind die Linien gleicher Helligkeit nahezu Kreise von gleicher Höhe. In vertikalem Sinne gelangt man von größter Helligkeit in der Nähe des Zenits zu kleineren bis zu einem Minimum in der Höhe zwischen 33⁰ und 65⁰ Zenitdistanz. Dann nimmt dieselbe wieder zu bis zum Horizont.
3. Je klarer der Himmel ist, desto größer sind die Helligkeitsunterschiede.
4. Im Sonnenvertikal nähert sich das Minimum der Helligkeit mit steigender Höhe der Sonne von 90⁰ bis zu 56⁰ bei größter Sonnenhöhe.
5. Je klarer der Himmel, desto näher liegt die Zone schneller Helligkeitszunahme der Sonne selbst.
6. Der Pik-Himmel ist noch beträchtlich von dem Rayleighschen Himmel unterschieden, wie er sich ergeben würde, wenn alle zerstreuenden Teilchen der Luftbeimischungen gegenüber der Lichtwellenlänge klein sein würden.
7. Die Beobachtungen bestätigen durchaus die Chr. Wienersche Theorie der Himmelshelligkeit. Es können aus ihr alle Eigentümlichkeiten des Pik-Himmels und des Güimar-Himmels erklärt werden, ebenso wie deren Unterschiede gegen den für Karlsruhe theoretisch berechneten Himmelszustand.

Die Beschaffenheit des Papiers hat wohl eine gute Wiedergabe der wichtigen Kurventafeln gestattet, aber die Abbildung des benutzten Instrumentes mit Hilfe der Autotypie ist gänzlich mißglückt, denn zu solchen Abbildungen eignet sich dieses Verfahren durchaus nicht. L. Ambronn.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule München Dr. Otto v. Gruber für angewandte Mathematik, Dr. Walter Kossel für Physik, Dipl.-Ing. Dr. Karl Henckh für Anwendung der technischen Wärmetechnik, an der Universität Erlangen Dr. J. Frank für Physik, an der Universität München Dr. Karl Herzfeld (bisher an der Universität Wien) für theoretische Physik und Chemie.

Ernannt: Der Professor der Militärtechnischen Akademie zu Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Carl Cranz zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Technischen Hochschule Charlottenburg, der Privatdozent an der Universität Würzburg Dr. Ludwig Föppl zum ord. Professor für Festigkeitslehre, Hydromechanik und Aeromechanik an der Technischen Hochschule Dresden, der a. o. Professor an der Universität Gießen Dr. Karl Feist zum a. o. Professor der pharmazeutischen Chemie an der Universität Göttingen, der Privatdozent für physikalische Elektrochemie an der Technischen Hochschule Berlin Dr. Salomon Kalischer zum ord. Honorarprofessor daselbst, die Privatdozenten an der Universität Leipzig Dr. Gustav Reddelien (Chemie) und Dr.-Ing. Wilhelm Wilke (technische Physik) zu außeretatsmäßigen außerord. Professoren.

Berufen: Der ord. Professor an der Universität Münster Dr. Heinrich Konen zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Bonn, der a. o. Professor an der Universität Jena Dr. Walter Rogowsky zum ord. Professor der technischen Physik an der Technischen Hochschule Aachen.

Preise: Der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität München Geh. Hofrat Dr. Arnold Sommerfeld erhielt den Vahlbruch-Preis der Akademie der Wissenschaften in Göttingen.

Gestorben: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Kiel Geh. Regierungsrat Dr. Leo Pochhammer, der Lektor der wissenschaftlichen Photographie an der Universität Breslau Geh. Sanitätsrat Dr. Berthold Riesenfeld.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Göttingen. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 9. | 1. Mai 1920. Redaktionsschluß für No. 11 am 10. Mai 1920. | 21. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik. I.

Allgemeine Betrachtungen.

Von R. v. Mises.

Den Kernpunkt aller begrifflichen Schwierigkeiten in der physikalischen Statistik bildet bisher der in jedem Problem an irgendeiner Stelle notwendig zu vollziehende Übergang von räumlichen (oder auch sogenannten virtuellen) Gesamtheiten zu Zeitgesamtheiten[1]). Bekanntlich ist zur Überwindung oder Umgehung dieser Schwierigkeit durch Maxwell und Boltzmann die Ergodenhypothese eingeführt worden, die in der einen oder anderen Form jeder statistisch-physikalischen Untersuchung zugrunde liegt. P. u. T. Ehrenfest haben das logisch Unbefriedigende eines derartigen Aufbaus in unübertrefflicher Weise gekennzeichnet und mit Recht ausgesprochen, daß ein entscheidender Fortschritt nur von einer Klärung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes zu erwarten sei[2]). Es ist der Zweck der folgenden Zeilen, anzudeuten, in welcher Weise die von mir anderwärts durchgeführte Grundlegung einer exakten Wahrscheinlichkeitsrechnung[3]) völlig ungezwungen zu einem Aufbau der physikalisch-statistischen Theorien führt, bei dem die Ergodenhypothese (und jede ähnliche Annahme) ausgeschaltet bleibt. An ihre Stelle treten lediglich Annahmen über „Ausgangs-Wahrscheinlichkeiten", z. B. über die Gleichmöglichkeit gewisser primitiver Fälle. Der entscheidende, unten näher ausgeführte Gedanke liegt darin, daß nicht, wie üblich, eine Gesamtheit mit gegebenen Wahrscheinlichkeiten, sondern deren zwei gleichberechtigt nebeneinanderstehende, zum Ausgangspunkt genommen werden. Dabei erweist sich die gewohnte Unterscheidung in virtuelle, Zeit- und Raumgesamtheiten als für eine logisch einwandfreie Darstellung nicht zureichend.

Im zweiten Teil der vorliegenden Note wird als Beispiel zu den „Allgemeinen Betrachtungen" die Theorie der Brownschen Bewegung etwas eingehender erörtert. Eine ausführlichere Darstellung der Grundzüge der physikalischen Statistik, in der auch die in Betracht kommenden Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie wiedergegeben werden sollen, beabsichtige ich später zu veröffentlichen.

1. Die Rolle der Ergodenhypothese. Zunächst ist es notwendig festzustellen, in welcher Funktion die Ergodenhypothese innerhalb des Aufbaus der statistischen Theorien zu ersetzen ist. Man muß zwischen einer Ergodenhypothese im engeren und im weiteren Sinn unterscheiden.

Ergoden-(oder Quasi-Ergoden)-Hypothese im engeren Sinn heißt die Annahme, daß das ins Auge gefaßte mechanische System im Laufe der Zeit alle Zustände, die mit der ihm mitgegebenen Totalenergie verträglich sind, tatsächlich durchläuft (oder mindestens jedem solchen Zustand beliebig nahe kommt). Daß bisher kein Beispiel eines mechanischen Systems bekannt wurde, für das ein derartiges Verhalten aus den mechanischen Gleichungen abgeleitet werden könnte, kommt hier nicht in Betracht. Man weiß jedoch, daß zufolge des Liouvilleschen Satzes die Ergodenhypothese gleichbedeutend ist mit der Annahme gleicher mittlerer kinetischer Energie für alle Freiheitsgrade des Systems. Da diese Annahme in der Theorie der Strahlung, der spezifischen Wärme bei niederen Temperaturen usw., in grellem Widerspruch mit der Erfahrung steht, mußte man die „engere" Ergoden-(oder Quasi-Ergoden)-Hypothese in vielen Fällen aufgeben.

1) Die in der letzten Zeit mehr in den Vordergrund des Interesses getretene Schwierigkeit der richtigen „Quantelung" ist ein physikalisches, und kein statistisches Problem.

2) Enzyklop. d. math. Wiss. **4**, 32, insbes. Nr. 27—30.

3) Grundlagen d. Wahrscheinlichkeitsrechnung, Math. Zeitschr. **5**, 52—99, 1919; Fundamentalsätze d. Wahrscheinlichkeitsrechnung, ebenda **4**, 1—97, 1919. Eine populäre Darstellung einiger Hauptgedanken der „Grundlagen" vgl. in Die Naturwissenschaften **7**, Heft 11—13, 1919.

Nun ist die Ergodenhypothese keineswegs dazu geschaffen worden, um den für ideale Gase bei höheren Temperaturen brauchbaren Gleichverteilungssatz der kinetischen Energie zu liefern. Ihr Zweck war vielmehr, die folgende Schlußweise in der Statistik zu ermöglichen:

Innerhalb einer unendlichen Folge von Exemplaren des gleichen mechanischen Systems sei die relative Häufigkeit für das Auftreten eines Zustandes (Wert der Systemkoordinaten und Geschwindigkeitsparameter), der einem bestimmt abgegrenzten Zustandsgebiet A von konstanter Energie angehört, zu W_A festgestellt; dabei erfülle die Verteilung der W_A-Werte über alle Zustandsgebiete A die aus dem Liouvilleschen Satz fließenden Bedingungen des Stationärseins. Dann soll daraus gefolgert werden können, daß beim tatsächlichen Ablauf der Bewegung eines jeden Exemplars des mechanischen Systems die relative Zeitdauer des Aufenthalts im Zustandsgebiet A ebenfalls W_A sei.

In der Tat reicht die Ergodenhypothese hin, um diese Schlußweise zu ermöglichen. Bezeichnet nämlich N die Anzahl der betrachteten Exemplare des mechanischen Systems, so ist im limes für $N = \infty$ das Produkt NW_A die Anzahl der im Zustandsgebiet A befindlichen Systeme. Da die Verteilung sich voraussetzungsgemäß dauernd aufrecht erhält, so ist bei Betrachtung einer beliebigen Zeitstrecke T der Quotient $NW_A T : N$ die durchschnittlich auf ein Exemplar entfallende Dauer des Aufenthalts in A. Zufolge der Ergodenhypothese ist aber für unendlich lange Zeitdauer T das Verhalten jedes der Exemplare dasselbe, weil ja jedes dieselbe Energiefläche vollständig durchläuft[1]). Also ist für jedes die relative Aufenthaltsdauer im limes für $T = \infty$ gleich $NW_A T : NT = W_A$, w. z. b. w. — Wie weit man hier schon mit der Quasi-Ergodenhypothese allein das Auslangen finden kann, kommt für uns wieder nicht in Betracht.

Aber die Ergoden-(oder Quasi-Ergoden)-Hypothese im engeren Sinne ist zur Ermöglichung dieser Schlußweise nicht notwendig. Wir wollen als „Ergodenhypothese im weiteren Sinn" jede Annahme bezeichnen, durch welche die oben gekennzeichnete Schlußform ermöglicht wird, jede Annahme also, die gestattet, den für irgendeine konstruierte Gesamtheit auf kombinatorischem Weg errechneten Wert einer relativen Häufigkeit hinterher zu deuten als die relative Zeitdauer beim wirklichen Ablauf der Bewegung eines bestimmten mechanischen Systems. Indem wir nicht nur die ursprüngliche Ergodenhypothese, sondern auch jede im eben umschriebenen weiteren Sinn, aus unserer Theorie ausschließen, verwerfen wir somit nicht nur die obige Schlußform, sondern auch ihr Ergebnis. In der Tat stellt sich die hier anzudeutende neue Theorie auf den Standpunkt, daß bestimmte Aussagen über den wirklichen Ablauf der Bewegung eines einzelnen Systems nur aus den mechanischen Gleichungen, aber niemals aus Wahrscheinlichkeitsbetrachtungen abgeleitet werden können. — Wir wollen uns zunächst an drei typischen Beispielen, der klassischen Gastheorie, der Quantentheorie und der Thorie der Brownschen Bewegung die Verhältnisse näher ansehen.

Die klassische Gastheorie ist die Domäne der engeren Ergodenhypothese. Hier wird angenommen, daß das Gasmodell alle mit seiner Totalenergie E verträglichen Zustände — die durch Koordinaten- und Parameterwerte der einzelnen Moleküle gekennzeichnet werden — erreichen kann und im Sinne der Ergodenhypothese in unendlich langer Zeit auch tatsächlich erreicht. Der Liouvillesche Satz führt dann dahin, daß W_A dem in bestimmter Weise (als infinitesimales Volumen im $6n$ dimensionalen Phasenraum) zu messenden Inhalt des Zustandsgebietes A proportional gesetzt werden muß, damit es sich stationär aufrecht erhält. Berechnet wird nun z. B., daß der weitaus größte Teil des überhaupt zur Verfügung stehenden Zustandsraumes von jenen Zuständen erfüllt wird, die einer gewissen (der Maxwell-Boltzmannschen) Geschwindigkeitsverteilung der Moleküle entsprechen, also so, daß W_A für dieses Gebiet A (den zur M.-B.-Verteilung gehörigen „Stern" nach Ehrenfest) sehr nahe angenähert 1 wird. Aus der Ergodenhypothese wird geschlossen (H-Theorem): Das Gasmodell bewegt sich tatsächlich so, daß es die überwiegend längste Zeit im Zustandsgebiet A anzutreffen ist[1]). Auch andere ähnliche Schlüsse ergeben sich durch analoge Übertragungen von der „virtuellen" auf die „Zeit"-Gesamtheit.

Die Quantentheorie geht von vornherein von Vorstellungen aus, die mit der engeren Ergodenhypothese im Widerspruch stehen (womit zugleich jede Grundlage für den Gleichverteilungssatz der kinetischen Energie wegfällt). Sie nimmt nämlich an, daß das mechanische System, das hier etwa aus sehr vielen elastisch gekoppelten Atommodellen bestehen mag, unter

1) Die „Geschwindigkeit" des Phasenpunktes ist zufolge der mechanischen Gleichungen eine eindeutige Funktion seiner Koordinaten, unabhängig von den Anfangsbedingungen.

1) Auf gewisse „modifizierte" Fassungen des H-Theorems kommen wir noch weiter unten zurück.



den mit seiner Gesamtenergie verträglichen Zuständen nur ganz bestimmte, diskret liegende erreichen kann, z. B. solche, die durch ganzzahlige Werte[1]) der auf die einzelnen Atome entfallenden Teilenergie herausgehoben werden. Der Liouvillesche Satz gibt dann für das Stationärbleiben der Verteilung nur die triviale Bedingung, daß den Zuständen, die vermöge der mechanischen Gleichungen aufeinander folgen, dieselbe relative Häufigkeit zugeschrieben werden muß; das ist immer erfüllt, wenn nicht einzelne Phasenpunkte, sondern ganze Phasenbahnen mit angenommenen Häufigkeitswerten ausgestattet werden. Nun wird wieder berechnet, daß ein bestimmtes Zustandsgebiet — der „Stern", der zur Planckschen Aufteilung der Gesamtenergie auf die einzelnen Freiheitsgrade gehört — die weitaus größte Wahrscheinlichkeit für sich hat. Stillschweigend wird dann angenommen, daß das mechanische System während der überwiegend längsten Zeit seiner tatsächlichen Bewegung in diesem Zustandsgebiet anzutreffen ist. Daß hier eine besondere, der engeren Ergodenhypothese analoge Annahme vorliegt, hat A. Szarvassi klar erkannt und diese unter der treffenden Bezeichnung „Ergozonenhypothese" ausdrücklich formuliert[2]).

Ganz ähnlich liegt es in der Theorie der Brownschen Bewegung, wo man eine Ergodenhypothese bisher nie ausgesprochen, aber umso unbedenklicher angewendet hat. Das mechanische System besteht hier aus einer Gruppe von Brownschen Partikelchen, die in einem widerstehenden Medium die bekannte Zickzackbewegung ausführen. Der Variabilitätsbereich der Zustandsgrößen wird in der Regel so wie in der klassischen Gastheorie als kontinuierlich angesehen, die Bedingung des Stationärbleibens hat dann wesentlich dieselbe Form wie dort, scheidet aber aus der weiteren Untersuchung dadurch aus, daß von den Geschwindigkeiten in der Regel ganz abgesehen wird. Man berechnet hier die Wahrscheinlichkeit W_A dafür, daß auf einen irgendwie herausgehobenen Raumteil gerade n Partikelchen entfallen; d. h. genauer: unter N gleichen Systemen sind im limes für $N = \infty$ gerade NW_A so beschaffen, daß von den Koordinatentripeln der einzelnen Teilchen eben n die den Raumteil bestimmenden Ungleichungen erfüllen. (Das Zustandsgebiet A wird durch die Zahl n und die Grenzen des herausgegriffenen Raumteiles definiert.) Um dieses Ergebnis der Rechnung zu „prüfen", beobachtet man ohne Bedenken [Svedberg[1]) u. a.] und mit zweifellosem Erfolg die von einem System in aufeinanderfolgenden Zeiten wirklich durchlaufenen Zustände. Besonders charakteristisch ist das Verfahren von R. Lorenz und W. Eitel[2]), die räumlich nebeneinanderliegende und zeitlich aufeinanderfolgende Teilchenanzahlen als ganz gleichberechtigt behandeln. Der ganzen Auffassung liegt die (weitere) Ergodenhypothese zugrunde, wonach die sogenannte „Zeitgesamtheit" ein getreues Abbild sowohl der „räumlichen" als der „virtuellen" Gesamtheit ist. — Wir werden übrigens im folgenden sehen, daß diese Begriffsbildungen, die schon einem gewissen kritischen Bestreben ihre Entstehung verdanken, für eine einwandfreie Darstellung der Verhältnisse nicht zureichen; zumindest müßte der Begriff der virtuellen Gesamtheit dem der räumlichen und zeitlichen übergeordnet werden.

Es könnte vielleicht einen Augenblick lang fraglich erscheinen, ob denn der Übergang zu zeitlichen Verteilungen überhaupt unentbehrlich ist, ob man nicht in der physikalischen Statistik etwa mit virtuellen Gesamtheiten allein das Auslangen finden kann? Aber eine derartige Betrachtungsweise hätte offenbar keinen physikalischen Inhalt, denn die Physik will ja gerade über den zeitlichen Ablauf der Erscheinungen etwas aussagen. Auch wäre es widersinnig anzunehmen, daß z. B. die Entropie eines Systems bestimmt sein sollte durch die Häufigkeitsverteilung in einer Gesamtheit, die willkürlich, ohne Rücksicht auf den wirklichen Ablauf der Bewegung konstruiert ist. Geht man andrerseits unmittelbar von zeitlichen Verteilungen aus, wie es Einstein[3]) bei Einführung der Boltzmannschen Entropie-Wahrscheinlichkeitsbeziehung tut, so klafft eine Lücke zwischen dem Ausgangspunkt der Betrachtung und der Anwendung kombinatorischer Formeln[4]) in ihrem weiteren Verlauf. Es besteht eben ein tiefliegender, bisher nicht überwundener Widerspruch in der physikalischen Statistik darin, daß man auf der einen Seite den Ablauf der Vorgänge als durch die physikalischen Gleichungen (die Differentialgleichungen der Bewegung des Systems) völlig bestimmt ansieht, dann aber doch von ganz anderer Seite her zu bestimmten Aussagen über diesen Ablauf gelangen zu können meint.

2. Die Form des neuen Ansatzes. Die

1) Bzw. ganze Vielfache irgendwelcher Einheiten.

2) Über die Grundlagen der statistischen Mechanik, Denkschr. d. Akad. Wien 95, 391—460, 1918.

1) Vgl. Th. Svedberg, Die Existenz der Moleküle, Leipzig 1912, S. 140ff.

2) Zeitschr. f. anorg. Chemie 17, 357—374, 1914.

3) z. B. Ann. d. Phys. (4) 33, 1275, 1910.

4) Oder, was wesentlich auf dasselbe hinausläuft, von Formeln, die dem Ideenkreis des Gaußschen Fehlergesetzes entstammen.



physikalische Statistik ist ein Teil der rationellen Wahrscheinlichkeitsrechnung, deren Aufgabe in meinen „Grundlagen" ungefähr folgendermaßen definiert erscheint[1]).

Innerhalb gewisser unendlicher Gesamtheiten oder Folgen von Elementen (Kollektivs) sind die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten (die Wahrscheinlichkeiten) für das Auftreten der verschiedenen Merkmale der Elemente gegeben. Solche Elemente können z. B. bestimmte Beobachtungen an einzelnen Molekülen oder zusammengesetzten mechanischen Systemen sein, ihre Merkmale etwa die beobachteten Lagenkoordinaten und Geschwindigkeitsparameter. Die Grenzwerte der relativen Häufigkeiten bilden die „Verteilung" des Kollektivs, wobei die Zuordnung der Merkmale an die Elemente zwei Forderungen, eben die nach der Existenz der Grenzwerte und eine weitere nach einer gewissen „Zufallsartigkeit" erfüllen muß. Nun lassen sich aus den zuerst betrachteten Kollektivs mit gegebenen Verteilungen durch verschiedene genau angebbare Operationen andere Kollektivs ableiten. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung beschäftigt sich ausschließlich damit, die Verteilungen innerhalb der abgeleiteten Kollektivs aus den gegebenen Verteilungen der Ausgangskollektivs zu berechnen.

In der Regel erscheinen die Verteilungen der Ausgangskollektivs in der Gestalt von Annahmen über sogenannte „gleichmögliche Fälle", was aber durchaus nebensächlich ist. Wesentlich ist nur, daß die Wahrscheinlichkeitsrechnung 1. lediglich aus gegebenen oder angenommenen Wahrscheinlichkeiten andere Wahrscheinlichkeiten zu rechnen lehrt (so etwa wie die theoretische Mechanik aus Anfangsgeschwindigkeiten die späteren Geschwindigkeiten des Systems liefert) und 2. daß sie aus ihren Daten immer nur Wahrscheinlichkeiten innerhalb eines Kollektivs, niemals aber bestimmte Aussagen über den tatsächlichen Ablauf eines Vorganges, abzuleiten gestattet. Auf dieser Basis wollen wir jetzt an einem Beispiel zeigen, wie man ohne weitere Hypothesen, nur auf Grund der erforderlichen Annahmen über die Ausgangsverteilungen, zu einer gewissen Beherrschung der in der physikalischen Statistik auftretenden Fragen gelangt.

In der Planckschen Strahlungstheorie betrachtet man als Ausgangskollektiv eine Gesamtheit von unendlich vielen einzelnen Oszillatoren gleicher Schwingungszahl ν. Das Merkmal eines jeden solchen Elementes ist die Anzahl der Energiequanten, die es augenblicklich besitzt, und man pflegt anzunehmen, daß jede überhaupt mögliche Anzahl gleich wahrscheinlich sei. Damit ist die Ausgangsverteilung gegeben. Ein abgeleitetes Kollektiv hat z. B. die Beobachtung einer Gruppe von n solchen Oszillatoren (n endlich) zum Element und die Summe der n Quantenzahlen für jede Gruppe als Merkmal. Die Wahrscheinlichkeitsrechnung lehrt, wie man für diese Art der Ableitung (eine sogenannte „Faltung") die neue Verteilung findet, also hier die Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ dafür, daß eine Gruppe von n Oszillatoren gerade x Quanten besitzt. Natürlich lassen sich noch verschiedene andere Kollektivs aus dem ursprünglichen konstruieren und ihre Verteilungen berechnen — aber niemals gelangt man auf diesem Wege zu irgendeinem Zusammenhange mit dem zeitlichen Verlauf der Energieänderungen.

Nun kann man aber — und hierin bahnt sich die Lösung des ganzen Problems an — noch ein zweites Ausgangskollektiv der Betrachtung zugrunde legen. Das Element sei jetzt die Beobachtung eines Oszillators von bestimmter Schwingungszahl ν und bestimmter Quantenzahl x_1 durch eine gewisse Zeit τ hindurch; sein Merkmal die Zahl y_1 der Energiequanten, um die sich sein Energieinhalt in der bestimmten Zeitspanne τ ändert. Als gegeben sind jetzt anzusehen die Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Änderungsmöglichkeiten in der Zeit τ. Nehmen wir z. B. an, es sei a die Wahrscheinlichkeit für Zu- oder Abnahme um eine Einheit (also für die Merkmale ± 1) und $1-2a$ die Wahrscheinlichkeit dafür, den Energieinhalt unverändert zu erhalten (Merkmal 0). Die Zahl a sei ferner von x_1 unabhängig, d. h. es werde eigentlich eine ganze Reihe neuer Ausgangs-Kollektivs in Betracht gezogen, bei denen man nur untereinander gleiche Verteilungen voraussetzt. Aus den so konstruierten Kollektivs kann man vor allem wieder durch „Faltung" ein neues gewinnen, dessen Element die Beobachtung einer Gruppe von n Oszillatoren mit beliebigen Quantenzahlen $x_1, x_2 \dots x_n$ und dessen Merkmal die in der Zeit τ erfolgende Gesamtänderung y ist. Wichtiger sind für uns zwei andere Kollektivs, deren Elemente die eben bezeichneten Gruppen, aber mit anderen Merkmalen sein sollen: Das eine Mal sei das neue Merkmal die Gruppe der n Quantenzahlen x_1', $x_2' \dots x_n'$ nach der Zeit τ („n-fache Verbindung"), das andere Mal die Summe

$$x' = x_1' + x_2' + \dots x_n'$$

(„Verbindung" und darauf folgende „Mischung"). Die zugehörigen, nach den Regeln der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bestimmenden Verteilungen sind von den $x_1, x_2 \dots x_n$ abhängig,

1) l. c. §§ 1 und 2, insbes. S. 59.

wir wollen sie mit $V(x_1', x_2' \ldots x_n'; x_1, x_2 \ldots x_n)$ bzw. $v_1(x'; x_1, x_2 \ldots x_n)$ bezeichnen, oder indem wir $\mathfrak{x}$ für den Vektor mit den Komponenten $x_1 \ldots x_n$ schreiben (wobei aber x nicht für die Länge des Vektors $\mathfrak{x}$ steht), kürzer mit $V(\mathfrak{x}'; \mathfrak{x})$ bzw. $v_1(x'; \mathfrak{x})$. Hier bedeutet also V die Wahrscheinlichkeit dafür, daß in der Zeit τ aus dem Anfangszustand $\mathfrak{x}$ der Endzustand $\mathfrak{x}'$ hervorgeht, v_1 die Wahrscheinlichkeit dafür, daß aus $\mathfrak{x}$ irgendein Zustand mit der Gesamtenergie x' entsteht.

Es bedarf keiner besonderen Erklärung, wie man durch weitere „Verbindung" zu der durch das Produkt $V(\mathfrak{x}'; \mathfrak{x})\, V(\mathfrak{x}''; \mathfrak{x}') \ldots V(\mathfrak{x}^{(m)}; \mathfrak{x}^{(m-1)})$ gegebenen Wahrscheinlichkeit dafür gelangt, daß die Zustände $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}' \ldots\ldots \mathfrak{x}^{(m)}$ in m Zeitteilchen von der Länge τ aufeinanderfolgen, und durch weitere „Mischung" zu der Wahrscheinlichkeit $v_m(x; \mathfrak{x})$ dafür, daß aus dem Zustand $\mathfrak{x}$ nach der Zeit $m\tau$ irgendein Zustand mit der Gesamtenergie x hervorgeht. Man braucht, um v_m zu erhalten, nur die Summe der obigen Produkte über alle Werte der $x_1' \ldots\ldots\ldots x_n^{(m)}$ bei konstantem $\mathfrak{x}$ und konstantem

$$x = x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + \ldots . x_n^{(m)}$$

zu bilden. Summiert man schließlich das Produkt der V über alle jene Wertverbindungen der $\mathfrak{x}', \mathfrak{x}'' \ldots . \mathfrak{x}^{(m)}$, für die unter den n Komponentensummen $x_1' + x_2' + \ldots x_n', x_1'' + x_2'' + \ldots . x_n'', \ldots\ldots . x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + \ldots . x_n^{(m)}$ der Summenwert x gerade ym mal vorkommt, so erhält man die Wahrscheinlichkeit $f_m(y; \mathfrak{x}, x)$ dafür, daß in den m Zeitpunkten, die auf den Zustand $\mathfrak{x}$ folgen, die Energie x mit der relativen Häufigkeit y auftritt.

Wird die hier angedeutete Rechnung unter geeigneten, durchaus plausiblen und in weiten Grenzen noch willkürlichen Annahmen für die Ausgangswahrscheinlichkeiten durchgeführt, so erhält man folgendes Resultat: 1. Die Funktion $v_m(x; \mathfrak{x})$ wird für große m und große n von $\mathfrak{x}$ unabhängig und nähert sich dem Wert des oben erwähnten $w_n(x)$, das aus dem ersten Ausgangskollektiv hervorgegangen ist. 2. Die Verteilung $f_m(y; \mathfrak{x}, x)$ verdichtet sich, unter den gleichen Voraussetzungen für m und n, an einer bestimmten, von $\mathfrak{x}$ unabhängigen, nur von x abhängigen Stelle y, die bei $y_0 = w_n(x)$ liegt, derart, daß auf eine sehr enge Umgebung dieser Stelle nahezu die Wahrscheinlichkeit 1, auf den übrigen Bereich von y nahezu 0 entfällt. Mit anderen Worten heißt das: 1. Die erstberechnete Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ dafür, daß eine Gruppe von n Oszillatoren die Energie x besitzt, ist bei großem m und n der Größe nach gleich der Wahrscheinlichkeit dafür, daß aus einem beliebigen Anfangszustand in m Zeitelementen ein Zustand mit der Energie x hervorgeht; und 2. es ist bei großem m und n mit überwiegender Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß, wie immer der Anfangszustand war, in m aufeinanderfolgenden Zeitpunkten ein Zustand von der Energie x sich gerade mit der relativen Häufigkeit $w_n(x)$ zeigt. Diese Sätze treten an Stelle dessen, was in der bisherigen Theorie das Ergebnis der Ergodenhypothese war.

Daß die hier festgestellte Übereinstimmung dreier Größen noch bei verhältnismäßig sehr weiter Wählbarkeit der Ausgangsverteilungen zutrifft, hat seinen Grund darin, daß die „Fundamentalsätze" der Wahrscheinlichkeitsrechnung und die in ihnen enthaltenen „Gesetze der großen Zahl" eben zu Aussagen führen, die von der Form der Ausgangsverteilungen wesentlich unabhängig sind.

Es mag noch ausdrücklich hervorgehoben werden, daß die von uns betrachtete „Zeitgesamtheit", etwa die Aufeinanderfolge der m Energiesummen

$$x' = x_1' + x_2' + \ldots . x_n', \; x'' = x_1'' + x_2'' + + \ldots . x_n'', \ldots\ldots x^{(m)} = x_1^{(m)} + x_2^{(m)} + \ldots . x_n^{(m)}$$

(deren letzte oben mit x bezeichnet wurde) keineswegs ein Kollektiv bildet. Der ganze Gang der Überlegungen hat in keiner Weise dazu geführt, in ihr ein Kollektiv zu sehen, und sie erfüllt auch nicht die unumgängliche Bedingung der „Zufallsartigkeit" der Zuordnung, da ja zwischen unmittelbar hintereinanderfolgenden Zahlen gewisse Bindungen bestehen. Die relative Zeitdauer y ist somit, auch im limes für $m = \infty$, keine Wahrscheinlichkeit im Sinne unserer Definition. In dieser sich von selbst ergebenden Wendung erblicken wir ein besonders befriedigendes Ergebnis der Theorie, da sie den Zwiespalt der Auffassung zwischen kausaler Verknüpfung und Zufälligkeit vermeidet.

Der zweite Teil des oben hervorgehobenen Resultates hat eine auffallende äußere Ähnlichkeit mit einer sogenannten „modifizierten Fassung" des H-Theorems; wir wollen aber zeigen, daß es sich dort um etwas ganz anderes handelt. In der Gastheorie hat man sich gewöhnt, die beiden Gruppen von Merkmalkomponenten, Lagenkoordinaten und Geschwindigkeiten der Moleküle, sehr verschieden zu behandeln. So spricht man in der Regel nur von einer Geschwindigkeitsverteilung und läßt die eigentliche räumliche oder Lagen-Verteilung zunächst unbeachtet. Das, was man dann einen Anfangszustand nennt, legt nur die Geschwindigkeitswerte fest und läßt die der Koordinaten noch offen, so daß es für einen (unvollständig be-

stimmten) „Anfangszustand" noch unendlich viel verschiedene Realisierungen, nämlich mit verschiedenen Raumverteilungen der Moleküle gibt. Unter diesen ist eine bestimmte (oder genauer ein bestimmtes Gebiet von Realisierungen), die der sogenannten molekularen Unordnung entsprechende, von überwiegender Wahrscheinlichkeit, gerechnet von dem ursprünglichen Ausgangskollektiv der Gastheorie aus. Man schließt nun, und zwar unter wesentlicher Verwendung der Ergodenhypothese, daß unter den unendlich viel Exemplaren mit gleichem (unvollständig bestimmten) „Anfangszustand" die überwiegende Mehrzahl das Verhalten aufweisen wird, das das H-Theorem fordert. So kommt eine Aussage zustande, die ähnlich lautet wie unser zweiter Satz, die sich aber ganz in den alten, von der Ergodenhypothese beherrschten Rahmen einfügt. Wir kommen auf den grundsätzlichen Gegensatz der beiden Auffassungen, der in der verschiedenen Stellung zum „Determinationspostulat" liegt, im folgenden Abschnitt zu sprechen und werden dort auch die Gestalt, die unser neuer Ansatz speziell in der Gastheorie erhalten muß, andeuten.

Für das dritte typische Beispiel der physikalischen Statistik, die Theorie der Brownschen Bewegung, geben wir im zweiten Teil dieser Note eine etwas ausführliche Darstellung, so daß sich hier eine Erörterung erübrigt.

3. Die physikalische Bedeutung des neuen Ansatzes. Wenn die theoretische Physik sich den hier vertretenen Standpunkt zu eigen machen sollte, so wird sie die Beseitigung einiger begrifflicher Schwierigkeiten mit dem Verzicht auf einen bisher festgehaltenen Anspruch erkaufen müssen. Wir wollen zeigen, daß es sich dabei um das Aufgeben einer ohnehin unhaltbaren Position handelt.

In der Physik der sichtbaren Welt bestand, bis zum Auftreten der modernen Atomistik, die Auffassung, daß durch den augenblicklichen Zustand (und eventuell die Vergangenheit) eines abgeschlossenen Systems der weitere Ablauf seiner Zustandsänderungen eindeutig gegeben sei. Die atomistischen Theorien seit Boltzmann haben dieses „Determinationspostulat" dahin eingeschränkt, daß nur der mikroskopisch gegebene Anfangszustand (eventuell einschließlich der mikroskopischen Vergangenheit) den weiteren Ablauf, und zwar auch den makroskopischen, bestimmt. Das heißt: es müssen, etwa in der Gastheorie, Lagen- und Geschwindigkeitsparameter aller Moleküle in ihren augenblicklichen Werten gegeben sein, damit sich die weiteren Zustände des ganzen Gases eindeutig berechnen lassen. In diesem Sinne war auch die oben besprochene modifizierte Fassung des H-Theorems zu verstehen.

Die Wendung, die wir hier der physikalischen Statistik geben, verlangt aber eine noch etwas weitergehende Einschränkung des Determinationspostulates.

Das festgefügte Gebäude der Mechanik sichtbarer Körper hat wohl vor allem die Ansicht begründet, daß die Differentialgleichungen der Bewegung, oder die analogen Ansätze etwa der Wärmeleitungstheorie usw., zur völligen Beschreibung eines Erscheinungsablaufes, dessen Anfang gegeben ist, hinreichen. Allein es gibt doch auch in der Grobmechanik ausgedehnter schwerer Körper gewisse Fälle, deren Analogie zum Gasmodell oft bemerkt wurde, und in denen dieser Standpunkt bis jetzt sicherlich nicht praktisch durchgeführt werden konnte und für die Zukunft auch kaum durchführbar erscheint. Wir wollen uns das bekannte Galtonsche Brett oder die „Quincunx" dahin abgeändert denken, daß zwischen den in einem Diagonalgitter angeordneten Nägeln des vertikal gestellten Brettes nicht Kugeln, sondern kleine, ebene kreisrunde Scheibchen herabfallen, so daß sich gleichzeitig mehrere von ihnen hintereinander in derselben Zelle aufhalten können. Wenn man eine sehr große Zahl solcher Scheibchen in irgendeiner Weise auf die Zellen der obersten Reihe aufteilt, so kommen sie, wie man aus unzähligen Beobachtungen weiß, unten in einer Aufteilung an, die sich nach dem ersten Fundamentalsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung voraussagen läßt [Gaußsches Gesetz][1]). Trotzdem also der Vorgang zweifellos von den mechanischen Differentialgleichungen beherrscht wird, besteht das wahrscheinlichkeits-theoretisch errechnete Resultat zu Recht, während der mechanische Ansatz dabei gewissermaßen leer läuft. Man rettet bekanntlich den mechanischen Ansatz durch die Erklärung, die Festlegung des Anfangszustandes durch die Angabe der Zelle, in der sich jedes Scheibchen befindet, sei nicht ausreichend, man müßte die „genaue" Lage jedes Scheibchens, jede Abweichung von der Kreisform usw. kennen, auch sei wohl der von früheren Stößen beeinflußte Schwingungszustand der Nägel, vielleicht auch jeder Windhauch maßgebend usf. Aber es gibt ja auch für den vollkommen idealisierten Fall, exakt runde Scheibchen, exakte Nägelanordnung ohne

1) Das Resultat, zu dem die Wahrscheinlichkeitsrechnung führt, lautet für den Fall, daß alle Scheibchen von einer Stelle aus herabfallen, so: Es ist bei großer Zahl von Scheibchen und bei großer Zahl von Reihen mit erdrückender Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß die Scheibchen in der untersten Reihe sich entsprechend dem Gaußschen Gesetz verteilen.

Spielraum usf. einen mechanischen Ansatz! Das Wesentliche scheint hier zu sein, daß dieser exakte Ansatz eben keine eindeutige Lösung besitzt, sondern, mathematisch gesprochen, durch eine lange Aufeinanderfolge von Verzweigungspunkten charaktersiert wird. In solchen Fällen bedeutet das Eingreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung unmöglich einen Widerspruch, vielmehr eine — erfahrungsgemäß zutreffende — Ergänzung zur Mechanik.

Die Folgerung, die sich aus diesem Beispiel für unser Problem aufdrängt und die wir als einen wesentlichen Bestandteil in unsere Theorie aufnehmen, ist die, daß auch das Gasmodell und überhaupt jedes einer statistischen Betrachtungsweise zu unterziehende mechanische System sich wie die Gesamtheit der Scheibchen auf dem Galtonschen Brett verhält: Die Bewegung erfolgt „regulär" im Sinne der mechanischen Differentialgleichungen, bis auf einzelne, immer wiederkehrende singuläre Zeitpunkte, in denen Verzweigungen der regulären Lösung eintreten[1]). Der Ablauf der Bewegung eines derartigen (idealisierten) Systems wird durch die mechanischen Gleichungen nicht eindeutig bestimmt und genügt hinsichtlich der durch die Verzweigungspunkte gesetzten Unbestimmtheiten erfahrungsgemäß den Ergebnissen der rationellen Wahrscheinlichkeitsrechnung.

Unser Standpunkt zum Determinationspostulat der Mechanik ist hiernach wie folgt bestimmt. Nur wenn das mechanische System mit allen inbetracht kommenden Nebenerscheinungen, Unregelmäßigkeiten usf. gegeben wird — was im Falle des Galtonschen Brettes oder des Gasmodells praktisch unerreichbar ist —, lassen die Differentialgleichungen der Bewegung aus dem Anfangszustand die Folgezustände berechnen. Für das idealisierte System — und nur mit einem solchen haben wir es in allen Problemen der statistischen Mechanik zu tun — besteht diese Determinierung nicht: hier versagt der mechanische Ansatz und nur die Wahrscheinlichkeitsrechnung führt zu einer gewissen, freilich andersgearteten, Aussage über den Ablauf der Bewegung.

In der Quantentheorie, der Theorie der Brownschen Bewegung und den meisten anderen Fällen physikalischer Statistik steht die bisher herrschende Auffassung zumindest nicht in offenem Widerspruch zu der hier dargelegten Einschränkung des Determinationspostulats, wohl aber in der Gastheorie. In dieser pflegt man auch heute noch, nach klassischem Vorbild, durch Anfangslage und -geschwindigkeit der Moleküle den ganzen Bewegungsverlauf gemäß den Gesetzen des elastischen Stoßes als eindeutig gegeben anzusehen — trotzdem die dabei ausschlaggebende Annahme der Kugelform der Moleküle längst jede Berechtigung verloren hat. Das Entscheidende scheint darin zu liegen, daß die Größenabmessungen der Moleküle verschwindend klein gegen die mittleren Weglängen vorausgesetzt werden müssen: danach bedingen verschwindend kleine Änderungen des Anfangszustandes (der Geschwindigkeitsrichtung) endliche Abweichungen des Folgezustandes schon nach dem ersten Stoß, und weiterhin werden jedesmal unendlich kleine Abweichungen für das Ergebnis eines Zusammenstoßes entscheidend. Der Fall liegt also durchaus nicht anders als beim Galtonschen Brett; jeder Zusammenstoß ist ein Verzweigungspunkt der regulären Bahn.

Für den unserer Auffassung entsprechenden Ansatz der kinetischen Gastheorie ergibt sich aus dem Vorstehenden, daß von jedem Eingehen auf die Mechanik des Stoßvorganges (das ohnehin von der unzutreffenden Annahme der Kugelgestalt beherrscht wäre) abgesehen werden muß. Zugrundezulegen ist erstens ein „räumliches" Ausgangskollektiv, etwa so: Für das einzelne Molekül ist jeder überhaupt mögliche Koordinaten- und Geschwindigkeitswert gleich wahrscheinlich; und zweitens ein „zeitliches" Ausgangskollektiv, etwa: Für jedes Molekül besteht eine bestimmte Wahrscheinlichkeit dafür, in einem Zeitelement τ seine Geschwindigkeit nach Größe und Richtung in bestimmtem Maße zu ändern. Bei der Feststellung dieser Annahmen wird man sich von mechanischen Überlegungen wohl leiten lassen, aber nur von solchen, die der Unbestimmtheit oder Zufallsartigkeit des Vorganges beim Geschwindigkeitswechsel Rechnung tragen.

Für den Begriff der Entropie und die Boltzmannsche Entropie-Wahrscheinlichkeitsrelation ergibt sich im allgemeinen Rahmen unserer Theorie das Folgende. Bekanntlich hat P. Ehrenfest[1]) gezeigt, daß die Verfügung über das (räumlich gedachte) Ausgangskollektiv beschränkt wird durch die Forderung, ein gewisser, der Wärmezufuhr entsprechender Ausdruck, solle einen integrierenden Nenner besitzen; dabei kommt es allerdings nur auf die Abhängigkeit der Ausgangsverteilung von sogenannten „langsam veränderlichen" Parametern an, d. h. von solchen Koordinaten des Systems, in bezug auf die man die mechanischen Gleichungen als von vornherein erfüllt ansieht. Da

1) Vgl. hierzu eine ähnliche Feststellung bei Szarvassi, l. c. S. 414.

1) Diese Zeitschr. 15, 657, 1914 und Ann. d. Phys. 51, 327, 1916.



in unserer Theorie die Verteilungen im ersten und im „zeitlichen" Ausgangskollektiv nicht völlig voneinander unabhängig angenommen werden können, so folgt daraus, daß auch die letztere Verteilung durch das Postulat der Boltzmannschen Relation mitreguliert wird. Hat man sich aber einmal überzeugt, daß eine dem Postulat Genüge leistende Annahme möglich ist, so wird damit — durch die Ergebnisse unserer Theorie — hinterher der von Einstein eingeschlagene Weg gerechtfertigt, wonach die Entropie schlechthin dem log der relativen Aufenthaltsdauer des Systems in dem betreffenden Zustandsgebiet proportional gesetzt wird. Wir müssen diesen Ansatz, um mit allem Vorangehenden im Einklang zu bleiben, nur dahin präzisieren: Entropie ist der Logarithmus der, mit erdrückender Wahrscheinlichkeit beim tatsächlichen Ablauf des Vorganges zu erwartenden, relativen Zeitdauer des Aufenthalts in dem betrachteten Zustandsgebiet.

Man könnte schließlich fragen, ob unser Ansatz vielleicht die Ergodeneigenschaft der Systembahnen tatsächlich bestätigt, etwa in dem Sinn, daß die überwiegende Mehrheit der Bahnen die gesamte Energiefläche erfüllt. Dies läßt sich jedoch nicht folgern. Es könnte sehr gut sein, daß jede Bahn einen Teil der Energiefläche unberührt läßt und daß trotzdem für jedes Zustandsgebiet A in fast allen Bahnen die gleiche zeitliche Häufigkeit resultiert.

(Eingegangen 18. Dezember 1919.)

Gleichgewichtssätze für die elektromagnetisch aufgebaute Materie.

Von W. Schottky.

1. Satz: Wird einem materiellen System, daß sich ohne die Einwirkungen äußerer Kräfte in einem kinetischen Gleichgewichtszustande zu erhalten vermag, die Energie ΔU zugeführt, ohne daß dabei die Eigenschaft des Systems, sich ohne äußere Kräfte im Gleichgewicht zu erhalten, verloren geht, so ist die Zunahme der elektromagnetischen Energie, $\Delta\mathfrak{E}$, gleich der doppelten Zunahme der Gesamtenergie, während die Energie der inneren Bewegungen, L, daher um den Betrag ΔU abnimmt.

2. Satz: Wird insbesondere ein materielles System, das sich ohne die Einwirkung äußerer Kräfte im Gleichgewichtszustande zu erhalten vermag, in verschiedene Teile zerlegt, für die dasselbe gilt, so ist die Zunahme der elektromagnetischen Energie des Gesamtsystems gleich der doppelten Trennungsenergie, während die Energie der inneren Bewegungen[1]) dabei um den Betrag der Trennungsenergie abnimmt.

3. Satz: In einem materiellen System, das sich ohne die Einwirkung äußerer Kräfte im Gleichgewichtszustande zu erhalten vermag, vermindert sich die Energie der inneren Bewegungen mit steigender Temperatur; ihren höchsten Wert hat diese Bewegungsenergie beim absoluten Nullpunkt der Temperatur.

4. Satz: Wird ein materielles System, das sich ohne die Einwirkungen äußerer Kräfte in einem kinetischen Gleichgewichtszustande zu erhalten vermag, äußeren Kräften ausgesetzt, die ein neues kinetisches Gleichgewicht herstellen, so ändern sich die elektromagnetischen und kinetischen Energien des Systems erstens entsprechend der im 1. Satz für kräftefreie Systeme aufgestellten Beziehung zur Gesamtenergie; außerdem nimmt aber die kinetische Energie um einen Betrag zu und die elektromagnetische Energie um einen Betrag ab, der durch die in dem System auftretenden Longitudinalspannungsgrößen oder durch das Clausiussche Virial ausdrückbar ist.

5. Satz: In einem „starren Körper" sind die Umwandlungen von elektromagnetischer in kinetische Energie bei Druck- oder Zug-Beanspruchung von höherer Größenordnung als die Änderung der Gesamtenergie des starren Körpers.

Einleitende Bemerkungen. Die unzweifelhaften Erfolge des Rutherford-Bohrschen Atommodelles auf spektraloptischem, chemischem und röntgenspektrographischem Gebiete haben der zeitweise fast aufgegebenen Ansicht von neuem eine gewisse Glaubwürdigkeit verschafft, daß der Aufbau der Materie eine Art kinetischen Gleichgewichtes darstelle, in dem die elektromagnetischen Kräfte, die durch Wechselwirkungen und unter dem Einfluß von Strahlungsfeldern auf die kleinsten Bausteine der Materie wirken, im Mittel ausgeglichen werden, nicht durch statische Gegen-

1) Unter „inneren Bewegungen" verstehen wir die Bewegungen gegen den Schwerpunkt des materiellen Systems, allgemeiner gegen ein Bezugssystem, in dem die Gesamtbewegungsgröße des betrachteten Gebildes verschwindet.

kräfte, sondern durch Trägheitskräfte, z. B. die Zentrifugalkräfte bewegter Massen. Ich glaube deshalb, daß man in einigen sehr merkwürdigen, auf derartige Gleichgewichte bezüglichen Sätzen, die mir schon 1912 bei gewissen Überlegungen entgegentraten, jetzt nicht mehr reine Absurditäten wird erblicken können, sondern, da sie sich bei den uns bekannten Atom- und Molekülmodellen bewähren, ihre Gültigkeit auch für den Aufbau komplizierterer Systeme, insbesondere der festen Materie, für wahrscheinlich halten wird. Mit der Quantentheorie sind diese Sätze durchaus verträglich und werden, soweit von dieser Theorie eine Nullpunktsenergie gefordert wird, sogar von ihr gestützt. Dagegen wird nicht angenommen, daß die Quantenbedingungen zur Stabilisierung der betrachteten Gleichgewichte etwas anderes beitragen, als was sich durch geeignete Wahl der Anfangsbedingungen ausdrücken läßt; man hat ja auch bei den bekannten Atommodellen nie gefunden, daß die Stabilitätsbedingungen irgendwie die Einführung energetischer Zusatzglieder rechtfertigen[1]).

1) Anmerkung bei der Korrektur: Durch einen freundlichen Hinweis von Herrn Prof. Einstein bin ich in der Lage, der obigen in winterlicher Einsamkeit niedergeschriebenen Notiz noch nachträglich einige Literaturangaben hinzufügen zu können. In den „Leçons sur les Hypothèses cosmogoniques" von H. Poincaré, Paris 1911, findet sich auf Seite 93/94 folgender Satz abgeleitet: „In einem System von materiellen Teilchen, die nur unter der Einwirkung ihrer gegenseitigen Gravitation stehen, ist die kinetische Energie gleich der negativen ‚Konstanten der lebendigen Kräfte' C, die Kräftefunktion gleich $-2C$". Ableitung aus dem Clausiusschen Virialsatz, und dem r^{-2}-Kraftgesetz, entsprechend unseren Schlußbetrachtungen S. 239. Würde die Konstante $-C$ unter Einbeziehung aller Wärmebewegungen in die kinetische Energie und unter der Voraussetzung der Gültigkeit des r^{-2}-Gesetzes für alle zwischen den materiellen Teilchen wirkenden Kräfte als Gesamtenergie des Systems gedeutet, so würde man unsern 1. Satz, allerdings noch unter Ausschluß von magnetischen und Strahlungserscheinungen, aus diesem Satz ableiten können. Gewisse Ansätze zur Aufstellung einer Energiebilanz im Sinne unseres 1. Satzes sind auch vorhanden; so wird z. B. S. 95, Anmerkung, darauf hingewiesen, daß durch unelastische Stöße der Teilchen unter sich und unter dem Einfluß reibender Medien die kinetische Energie des Systems merkwürdigerweise zunimmt. Übrigens stammt der angeführte Satz auch nicht eigentlich von Poincaré selbst, sondern geht auf viel ältere Betrachtungen von Lagrange, Poisson u. a. zurück, die z. B. von C. G. H. Jacobi in seinen „Vorlesungen über Dynamik" (Berlin 1866) entwickelt werden (Mitteilung von Herrn Dr. E. Freundlich). Die Ableitung, in der übrigens implizite auch der Virialsatz enthalten ist, bezieht sich dort auf statische Zentralkräfte mit beliebigen Kraftexponenten n und kommt zu der Folgerung, daß in Systemen, wie wir sie oben als kinetische Gleichgewichtssysteme bezeichnet haben, die lebendige Kraft dauernd um den Wert $(n+1)\cdot\Phi$, wobei Φ die Kräftefunktion bedeutet, schwanken muß. Daß damals die Beziehungen der zeitlichen Mittelwerte von L und Φ zur Gesamtenergie nicht aufgestellt wurden, ist nur dadurch zu erklären, daß diese Überlegungen noch ganz in den Anfang der Entwicklung der energetischen Betrachtungsweise fallen.

Voraussetzungen. Wir glauben deshalb, daß sich für die Wechselwirkung zwischen den kleinsten Bausteinen der Materie — nehmen wir an, dies seien die — unteilbar gedachten — positiven Kerne auf der einen Seite, die die Kernladung mehr oder weniger vollkommen kompensierenden „Körperelektronen" auf der anderen Seite — folgende energetische Einteilung als genügend erschöpfend erweisen wird: der einen „energetischen Einheit", die aus der Energie, Bewegungsgröße usw. von kleinsten Systemen mit konstanter Masse (Kerne und Elektronen) gebildet wird, und zu der die Eigenfeldenergie der geladenen Teilchen, in Ruhe und Bewegung, mit hinzugerechnet wird, steht als einzige weiter in Betracht zu ziehende energetische Einheit die elektromagnetische gegenüber, und zwar sind hierzu außer den von der Materie losgelösten elektromagnetischen Strahlungserscheinungen nur diejenigen Terme der elektromagnetischen Gesamtenergie usw. zu rechnen, die durch Produktbildung aus den Eigenfeldern verschiedener Teilchen entstehen. Zweifelhaft bleibt dann allerdings die Zuordnung der Feldenergie des Hertzschen Übergangsgebietes; doch ist diese im Verhältnis zu den übrigen Teilen der Energie verschwindend klein, und wir wissen zudem gar nicht, ob die Elementarstrahlung der Materie solche Gebiete enthält. Was die Gravitationswirkungen betrifft, so unterscheiden sich diese, soweit sie sich den elektromagnetischen Feldern einfach superponieren und soweit sie durch das r^{-2}-Gesetz bestimmt sind, in nichts von den elektromagnetischen Wirkungen (vgl. dazu die Ableitung in unseren Schlußbetrachtungen aus dem Virialsatz und den in der Anmerkung zitierten Satz von Lagrange-Poincaré); soweit jedoch bei sehr großer Annäherung der Massen aneinander Abweichungen vom Newtonschen Gesetz vorkommen, denen man etwa die konstituierenden Wirkungen für den inneren Aufbau der Materie zuschreiben möchte, so können diese Abweichungen, wie auch die neuere Einsteinsche Theorie zeigt, bei der Wechselwirkung verschiedener Elementarteilchen aufeinander noch keine merkliche Rolle spielen, sondern nur innerhalb derjenigen Systeme in Betracht kommen, die wir hier als Systeme von konstanter Masse einführen. Wie aber in diesen Systemen die Energie und der Zusammenhalt zustande kommt, kann bei unseren Betrachtungen offen bleiben. Daß die Masse, bis auf relativistische Geschwindigkeits- und noch kleinere Spannungskorrektionen, als konstant angesehen werden kann, geht aus Größenordnungsüberlegungen ohne weiteres hervor.

Beweis der Sätze: Wir bezeichnen in der

energetischen Einheit der Systeme mit konstanter Masse die (kinetische) Energie (die sich von der Gesamtenergie dieser Systeme nur um einen unter allen Umständen konstanten Betrag unterscheidet), mit L, die Bewegungsgröße mit G_x, G_y, G_z, die Komponenten der Strömung[1]) dieser Bewegungsgröße durch ein Flächenelement mit x_x, x_y ····· z_z und das vollständige Raumintegral über diese Impulsströmungen mit X_x, X_y, ····· Z_z. Für ein einzelnes bewegtes Teilchen gelten dann folgende Beziehungen:

$$L = {}^1/_2\, m (q_x^2 + q_y^2 + q_z^2)$$
$$G_x = m q_x \text{ usw.}$$
$$X_x = q_x G_x \text{ usw.}$$

also

$$X_x + Y_y + Z_z = m(q_x^2 + q_y^2 + q_z^2) = 2L \quad (1)$$

(Bei Berücksichtigung der relativtheoretischen Geschwindigkeitskorrektion steht statt 2 ein etwas kleinerer Faktor, der mit bis c wachsender Geschwindigkeit q bis 1 wächst. Bei allen uns bekannten Geschwindigkeiten im Innern der Materie ist aber der Faktor nahe an 2.)

Da die Beziehung (1) unabhängig von der Masse und Geschwindigkeit des betreffenden Teilchens ist, gilt sie auch für alle betrachteten Teilchen eines Systems zusammen, also allgemein für die betrachtete energetische Einheit.

Auf elektromagnetischem Gebiet bezeichnen wir die Energiedichte mit $\mathfrak{e}$, die Impulsströmungskomponenten mit $\mathfrak{x}_x$, $\mathfrak{x}_y \cdots \mathfrak{z}_z$, die Gesamtenergie mit $\mathfrak{E}$ und die Raumintegrale über die Impulsströmungskomponenten mit $\mathfrak{X}_x$, $\mathfrak{X}_y \cdots \mathfrak{Z}_z$. Dann gilt bekanntlich für die gesamte elektromagnetische Energieeinheit und, wie sich leicht zeigen läßt, auch für die speziell von uns betrachtete „Zwischeneinheit"[2]) die Beziehung:

$$\mathfrak{e} = \mathfrak{x}_x + \mathfrak{y}_y + \mathfrak{z}_z.$$

Dieselbe Beziehung gilt auch für die Raumintegrale, also:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{X}_x + \mathfrak{Y}_y + \mathfrak{Z}_z. \quad (2)$$

Während die bisher aufgestellten Beziehungen ohne jede spezielle Annahme gelten, beschränken wir uns nunmehr auf Systeme, die im Mittel im „kinetischen Gleichgewicht" sind, d. h. es soll in diesen Systemen ein Koordinatensystem geben, von dem jede darin feste Ebene die Eigenschaft hat, daß im Zeitmittel keine Energie durch diese Ebene hindurchtritt. Solche Systeme sind z. B. feste Körper, in reflektierende Wände eingeschlossene Hohlraumstrahlungen, Planetensysteme usw. Ferner werde aber auch noch angenommen, daß durch jede solche Ebene keine Bewegungsgröße hindurchtritt; das ist nur möglich, wenn keine äußeren Kräfte auf das System wirken, da sonst ein ständiger Fluß von Bewegungsgröße durch das System hindurch stattfindet. (Bei der Hohlraumstrahlung oder einem eingeschlossenen Gase sind also die Wände mit zu dem System zu rechnen!)

Unter diesen Voraussetzungen gilt definitionsgemäß bei der Integration über den ganzen Bereich B des betrachteten Systems für eine beliebige Koordinate x:

$$\int_{B,x} (x_x + \mathfrak{x}_x)\, dy\, dz = 0.$$

Denn die Summe $x_x + \mathfrak{x}_x$ stellt ja nach unseren Voraussetzungen die totale Impulsströmung dar, deren Gesamtbetrag z. B. auch für die Fläche $x = \text{const.}$ verschwindet. Da dies nun für jeden Wert $x = \text{const.}$ innerhalb des Bereiches B gilt, wo überhaupt noch von 0 verschiedene Werte x_x und $\mathfrak{x}_x$ auftreten, so folgt auch:

$$\int_B (x_x + \mathfrak{x}_x)\, dx\, dy\, dz = 0,$$

also

$$\left.\begin{aligned} X_x + \mathfrak{X}_x &= 0;\ \text{ebenso} \\ Y_y + \mathfrak{Y}_y &= 0, \\ Z_z + \mathfrak{Z}_z &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

und daraus:

$$\overline{X_x} + \overline{Y_y} + \overline{Z_z} = -\overline{(\mathfrak{X}_x + \mathfrak{Y}_y + \mathfrak{Z}_z)} \quad (4)$$

Drücken wir in dieser Beziehung[1]) beide

---

1) Über diesen Begriff vgl. M. Planck, diese Zeitschr. 9, 828ff., 1908.

2) Alle diese Begriffe und Beziehungen habe ich in meiner Dissertation „Zur relativtheoretischen Energetik und Dynamik" (Weida 1912) ausführlich entwickelt.

1) Gleichung (4) enthält noch keine Annahmen über die Eigenschaften der nicht materiellen Einheit. Ersetzen wir darin vermöge Gleichung (1) die linke Seite durch $2L$, so erhalten wir:

$$2\overline{L} = -\overline{(\mathfrak{X}_x + \mathfrak{Y}_y + \mathfrak{Z}_z)}; \quad (4')$$

Diese Gleichung ist mit dem bekannten Clausiusschen Virialsatz

$$2\overline{L} = -\overline{\Sigma(xF_x + yF_y + zF_z)}$$

auf innigste verwandt, wenn auch nicht ganz identisch. Der Virialsatz beruht nämlich auf der Voraussetzung, daß die Raumintegrale $\int x g_x d\tau$ usw., wobei g die Dichte der materiellen Bewegungsgröße bedeutet, im Zeitmittel konstant sind, während unserer Gleichung (4') dieselbe Voraussetzung nicht für die materielle, sondern für die totale Bewegungsgröße zugrunde liegt. Denn die oben angegebene Voraussetzung unserer Gleichung (4) läßt sich mathematisch auch durch die Forderung formulieren, daß $\int x \gamma_x d\tau$ usw. im Zeitmittel konstant ist, wobei $\gamma = g + \mathfrak{g}$ die Raumdichte der totalen Bewegungsgröße bedeutet.

Man erkennt, daß wegen der Gleichung $\gamma = g + \mathfrak{g}$ zugleich mit Erfüllung der beiden genannten Voraussetzungen auch die betreffende Gleichung für die nichtmaterielle Bewegungsgröße gilt: $\int x \mathfrak{g}_x d\tau$ usw. im Zeitmittel konstant. Läßt man andererseits beide Voraussetzungen gelten, so muß sowohl Gleichung (4') wie der

Seiten vermöge der Gleichungen (1) und (2) durch die betreffenden Energien aus, so folgt:

$$\left.\begin{aligned} 2\overline{L} &= -\overline{\mathfrak{E}} \\ \overline{L} &= -\frac{\overline{\mathfrak{E}}}{2}. \end{aligned}\right| \qquad (5)$$

Führen wir hier noch die Gesamtenergie des Systems, U, ein, in der wir außer der Summe $L + \mathfrak{E}$ noch den konstanten Betrag U_0 berücksichtigen, der von der Eigenenergie der betrachteten Systeme mit konstanter Masse herrührt, so haben wir:

$$U = L + \mathfrak{E} + U_0$$
$$L + \mathfrak{E} = U - U_0.$$

Wird hierin nach Gleichung (5) $\overline{\mathfrak{E}} = -2\overline{L}$ eingesetzt, so folgt:

$$\overline{L} = -(U - U_0)$$

oder

$$\overline{L} = U_0 - U. \qquad (6)$$

Die elektromagnetische Energie $\mathfrak{E}$ dagegen ist nach (5)

$$\overline{\mathfrak{E}} = -2(U_0 - U). \qquad (7)$$

U_0 kann gedeutet werden als die Energie unseres Systems konstanter Massen für den Fall, daß sich alle Massenteilchen unendlich weit voneinander entfernt und in Ruhe befinden. Diesen Zustand der Materie habe ich in einer gleichzeitig in den Annalen der Physik erscheinenden Arbeit „Thermodynamik der seltenen Zustände im Dampfraum" (Bd. 61, 1920) als „Zustand völliger Dissipation" bezeichnet. Da L notwendig eine positive Größe ist, so folgt aus (6), daß in jedem Zustand, wo die Materie unter dem Einfluß von gegenseitigen elektromagnetischen Wirkungen, Strahlung und Bewegungsenergie sich in dem von uns definierten Gleichgewichtszustande befindet, die Gesamtenergie U kleiner ist, als wenn alle Massenteilchen unendlich weit voneinander entfernt und in Ruhe sind; eine Tatsache, die mit der stets zu einer Verdampfung nötigen Energiezufuhr und ähnlichen Tatsachen im Einklang ist. Dann folgt aber aus (7), daß die elektromagnetische Energie (ausschließlich der Eigenfeldenergie) bei jedem Gleichgewichtssystem stets < 0 ist.

In ihren quantitativen Aussagen können wir den Inhalt der Gleichungen (6) und (7) folgendermaßen formulieren:

In einem kinetischen Gleichgewichtssystem der Materie ist die Energie der inneren Bewegungen dem Betrage nach gleich, den Vorzeichen nach umgekehrt gleich der Gesamtenergie des Systems, gerechnet gegen den Zustand der völligen Dissipation aller betrachteten „Systeme mit konstanter Masse". Der Unterschied der elektromagnetischen Energie gegen den Dissipationszustand ist stets negativ und doppelt so groß als der Unterschied der Gesamtenergie.

In dieser Form, die sich auf die Totalbeträge der verschiedenen Energien bezieht, hat das gefundene Gesetz die Bedeutung einer conditio sine qua non für alle elektromagnetischen Modelle der Materie. Eine unmittelbarere Anwendung scheint jedoch zunächst darin zu liegen, daß man zwei verschiedene mögliche Gleichgewichtszustände der Materie, deren gesamte Energiedifferenz man kennt, vergleicht. Dann erhält unser Resultat die in dem 1. Satz ausgesprochene Formulierung. Beziehen sich die verschiedenen Gleichgewichtszustände auf die Trennung des Gesamtsystems in mehrere einander nicht mehr beeinflussende Einzelsysteme, so gilt der oben formulierte Satz 2, von dem wir gleich noch verschiedene spezielle Anwendungen betrachten werden. Erfolgt die Energieänderung jedoch durch Wärmezufuhr, so gilt der Satz 3; es entspricht dann jeder Zunahme der Gesamtenergie eine Abnahme der inneren kinetischen Energie. Das geht z. B. bei einem festen Körper solange fort, bis er (gegebenenfalls nach dem Schmelzen) so rapide verdampft, daß von einem Gleichgewichtszustand im Innern nicht mehr gesprochen werden kann. Da der absolute Nullpunkt der Temperatur unter dieser Reihe den Zustand geringster Gesamtenergie darstellt, ergibt sich auch der 2. Teil des eingangs formulierten 3. Satzes[1]). Endlich können noch ver-

Virialsatz richtig sein. Es muß sich also auch die Beziehung

$$\mathfrak{X}_x + \mathfrak{Y}_y + \mathfrak{Z}_z = \Sigma(xF_x + yF_y + zF_z)$$

aus der Voraussetzung

$$\int x\mathfrak{g}_x d\tau = \text{const usw.}$$

direkt ableiten lassen. In der Tat gelingt dies durch Aufstellung der Strömungsgleichungen für die nichtmaterielle Bewegungsgröße, Multiplikation mit x bzw. y bzw. z, Integration über den ganzen Raum und eine gewisse einfache Umformung.

Nachdem so viel zur exakten Klärung der Voraussetzungen gesagt ist, kann jedoch zum Schluß bemerkt werden, daß abgeschlossene Systeme, in denen nur die eine oder die andere Art von Bewegungsgröße im Zeitmittel keine Verlagerung erfährt, kaum eine physikalische Bedeutung haben werden; diese Voraussetzung wird entweder für alle Arten von Bewegungsgröße gelten oder überhaupt nicht.

1) Damit ist nicht gesagt, daß alle Massenteilchen des Systems mit Erhöhung der Temperatur an kinetischer Energie verlieren müssen. Wir werden weiter unten den Fall des einatomigen in starre Wände eingeschlossenen Gases betrachten, wo die Gasteilchen nach wie vor ihre mit der Temperatur steigende Geschwindigkeit besitzen. Ebenso kann in festen Körpern die Bewegung der Atomschwerpunkte mit der Temperatur wachsen.

schiedene mögliche Gleichgewichtsgruppierungen in beliebig komplizierten planetaren Systemen oder in festen Körpern betrachtet werden, wie wir sie ja für ein und dieselbe stoffliche Zusammensetzung in der unendlich mannigfachen Reihe der verschiedenen chemischen Verbindungen, Modifikationen, Mischkristalle, Legierungen usw. kennen. Auch in diesem Falle wird beim Vergleich zweier verschiedener Zustände der Unterschied der inneren Bewegungsenergie immer entgegengesetzt gleich dem Unterschied der Totalenergien sein müssen.

Beispiele: Eine einfache und bekannte Illustration zu den durch Gleichungen (5) bis (7) ausgedrückten allgemeinen Sätzen bildet die Coulombsche Kreisbahn. Es ist hier

$$\mathfrak{E} = -\frac{e_0 e}{r},$$

wobei e_0 die Ladung des Zentralkörpers, e die des umlaufenden Teilchens bedeutet. Ist die Masse des Zentralkörpers groß gegen die des umlaufenden, so ist

$$L = {}^1/_2 m r^2 \omega^2,$$

wobei ω die Winkelgeschwindigkeit darstellt. Wegen

$$-\frac{e_0 e}{r^2} = m r \omega^2$$

ist

$$L = {}^1/_2 m r^2 \omega^2 = -\frac{e_0 e}{2r} = -\frac{\mathfrak{E}}{2},$$

entsprechend Gleichung (5), und demnach auch

$$L = U_0 - U,$$

entsprechend Gleichung (6)[1].

Bei der Coulombschen Ellipsenbahn ist L und $\mathfrak{E}$ zeitlich veränderlich. Durch Mittelwertbildung über einen ganzen Umlauf folgt nach einiger Rechnung, wieder unter der Annahme, daß der Zentralkörper sich an der Bewegung nicht merklich beteiligt:

$$\overline{L} = -\frac{e e_0}{2a} \quad (a \text{ große Halbachse})$$

$$\overline{\mathfrak{E}} = -\frac{e e_0}{a}$$

also

$$\overline{L} = -\frac{\overline{\mathfrak{E}}}{2},$$

und ebenso wieder Gleichung (6).

Interessanter als diese bereits bekannten Beispiele, denen sich noch z. B. das Debyesche Wasserstoffmolekülmodell anreihen ließe, sind die in ihrem genaueren Mechanismus noch völlig dunklen Fälle; so die Gleichgewichte in festen Körpern, insbesondere den einfachen Salzen. Wir wollen hier einen Prozeß betrachten, der in neuerer Zeit mehrfach zu theoretischen Schlüssen benutzt worden ist[1]), nämlich die beim absoluten Nullpunkt vorgenommene Zusammensetzung eines Salzes mit einwertigen entgegengesetzt geladenen Komponenten, wie $NaCl$, aus den anfangs unendlich weit voneinander entfernt und in Ruhe befindlichen Komponenten Na^+ und Cl^-. Die Gesamtenergie U des Systems wird hierbei um einen Betrag ΔU vermindert, der pro Mol nach Haber mit D bezeichnet werden möge. Nach unserer Gleichung (6) entspricht dieser Verminderung der Gesamtenergie eine Vermehrung der kinetischen Energie des Systems von dem Betrag D pro Mol. Nun ist aus Röntgenspektrogrammen und Theorien insbesondere von Debye mit Sicherheit zu entnehmen, daß eine oszillatorische Bewegung der Kerne bei tiefen Temperaturen nicht stattfindet. Wenn also das Gleichgewicht wirklich von der angenommenen Art ist, so müssen die die Ionenkerne umkreisenden Elektronen im festen Körper eine größere kinetische Energie besitzen als im leeren Raum, und zwar kann man wohl ohne besondere Hypothese annehmen, daß sowohl beim Na^+ wie beim Cl^- Ion nur die äußerste (nach Kossel aus je 8 Elektronen bestehende) Elektronengruppe eine Änderung ihrer kinetischen Energie erfährt, da die Änderung der Gleichgewichtsbedingungen für die inneren Elektronen verhältnismäßig viel geringer ist. Wie sich allerdings diese Zunahme der kinetischen Energie auf die beiden Ionenarten verteilt, läßt sich aus unseren Betrachtungen in keiner Weise entnehmen; nicht einmal, ob bei beiden Ionensorten die kinetische Energie zunimmt, oder ob sie etwa beim Ion eines Vorzeichens abnimmt, beim anderen desto mehr zunimmt. Doch scheint mir schon die Tatsache, daß die Energieänderungen innerhalb der Ionen von derselben Größenordnung sind wie die Änderungen der Gesamtenergie, für die Gleichgewichtsbetrachtungen wichtig; und da sich die Aufbauenergie D zur kinetischen Energie der äußersten Elektronengruppe größenordnungsmäßig wie der Atomabstand im Kristall zum Durchmesser der äußersten Elektronensphäre eines Ions verhält, so ist noch weiter festzustellen, daß die Änderung der kinetischen

1) N. Bohr hat auf dieselbe Beziehung auch in dem Fall, daß mehrere Elektronen regelmäßig auf einer Kreisbahn verteilt sind, aufmerksam gemacht (vgl. Phil. Mag. **26**, 1, 476, 857, 1913).

1) z. B. von F. Haber, Verh. d. D. Phys. Ges. 1911, S. 1117—1136 und von M. Born, Berl. Ber. 1918, S. 1048—1068 und Verh. d. D. Phys. Ges. 1918, S. 210—270.



Energie dieser Elektronen, die durch die Nachbarionen herbeigeführt wird, von derselben Größenordnung sein kann, wie ihre kinetische Energie selbst. Und weiter: da im ungestörten System die kinetische Energie der umlaufenden Elektronen ihrem Bahnradius umgekehrt proportional ist, wird man annehmen müssen, daß mit der Veränderung der kinetischen Energie der Elektronen im festen Körper auch eine Veränderung ihrer Entfernung vom Kern Hand in Hand geht, die nach unserer Größenordnungsbetrachtung nicht klein zu sein braucht gegen den Absolutbetrag dieser Entfernung im ungestörten System. Die „Atomdurchmesser" sind hiernach ziemlich stark von den Nachbaratomen oder -ionen abhängig. Dieselbe Betrachtung gilt für die Bildung eines einzigen $NaCl$ Moleküls im Dampfraum; überhaupt für jede Verbindung, bei der die Elektronensphäre der Komponenten im ganzen erhalten bleibt.

Eine ganz hübsche Folgerung aus unserem Satz kommt auch bei Betrachtung der Oberflächenenergie zutage. Bei der Teilung eines festen Körpers in 2 Stücke ist der Anfangs- und Endzustand ein Gleichgewicht in unserem Sinne; für den Energieunterschied gilt also unsere Gleichung (6). Danach nimmt die kinetische Energie pro Oberflächeneinheit um den halben Betrag (da sich ja die Energieänderung symmetrisch auf beide Stücke verteilt) der Trennungsarbeit ab. Hat man es wieder mit festen Körpern zu tun, in denen die Kerne ruhen, so muß durch die Trennung die Bewegung der Elektronen in den Oberflächenatomen oder -ionen verlangsamt werden. Und da an der „Innenseite" der Atome noch nahezu die Verhältnisse dieselben sind wie im Innern, so wird sich diese Bewegungsänderung hauptsächlich auf den dem Außenraum zugekehrten Teil der Elektronenbahn erstrecken. Man kann sich etwa vorstellen, daß die Elektronen sich auf dieser Seite weiter vom Kern entfernen, so daß ihre kinetische Energie geringer wird (dies alles auf die geordneten Bahnen bezüglich, also auch beim absoluten Nullpunkt gültig!) und durch diese Unsymmetrie kann wiederum eine resultierende dielektrische Verschiebung an der Oberfläche bewirkt werden, ein elektrostatischer Potentialsprung, dessen Größenordnung sich auf ähnliche Weise schätzen läßt wie die Veränderung der Atomradien im Innern des festen Körpers.

Bis hierher sind immer isolierte Gleichgewichtssysteme betrachtet worden. Wir wollen nunmehr noch die Energiebilanz in einem System behandeln, das mit äußeren Kräften im Gleichgewicht ist. Es bleiben dann für das System, auf welches die Kräfte wirken, die Gleichungen (1) und (2) unverändert bestehen; die Gleichungen (3) sind jedoch zu ersetzen durch:

$$\left.\begin{array}{l}\overline{X_x} + \overline{\mathfrak{X}_x} = \overline{\Xi_x} \\ \overline{Y_x} + \overline{\mathfrak{Y}_x} = \overline{H_x} \\ \overline{Z_z} + \overline{\mathfrak{Z}_z} = \overline{Z_z}\end{array}\right\} \qquad (8)$$

wobei die Größen $\overline{\Xi_x}$[1]) usw. die Zeitmittel der Raumintegrale $\int \xi_x d\tau$ über die totalen Impulsströmungskomponenten $\xi_x = x_x + \mathfrak{x}_x$ des betrachteten Systems darstellen. Handelt es sich bei den behandelten Systemen um „elastische Medien", so sind die Größen ξ_x usw. die gewöhnlichen elastischen Spannungskomponenten der Elastizitätstheorie, z. B. ist bei Flüssigkeiten $\xi_x = \eta_y = \zeta_z = p$, $\Xi_x = p \cdot V$ usw., wobei V das Volumen der Flüssigkeit darstellt. Bei Systemen, an denen Punktkräfte angreifen, ist nach einer bekannten Umformung $\Xi_x = \Sigma x F_x$ usw., wobei die F_x die an den Punkten x angreifenden Kräfte bedeuten.

Durch Kombination von (1), (2) und (8) ergibt sich für das durch äußere Kräfte im Gleichgewicht gehaltene System:

$$2\overline{L} + \overline{\mathfrak{E}} = \overline{\Xi_x} + \overline{H_y} + \overline{Z_z} \qquad (9)$$

oder nach Einführung der Gesamtenergie $U = U_0 + L + \mathfrak{E}$:

$$\overline{L} = U_0 - \overline{U} + (\overline{\Xi_x} + \overline{H_y} + \overline{Z_z}) \qquad (10)$$

$$\overline{\mathfrak{E}} = 2(\overline{U} - U_0) - (\overline{\Xi_x} + \overline{H_y} + \overline{Z_z}), \qquad (11)$$

also insbesondere für Systeme mit konstantem Druck p und dem Volumen V

$$\overline{L} = U_0 - \overline{U} + 3pV, \qquad (10')$$

$$\overline{\mathfrak{E}} = 2(\overline{U} - U_0) - 3pV. \qquad (11')$$

Werden zwei Gleichgewichtszustände desselben Systems betrachtet, die sich durch die Gesamtenergie und die äußeren Kräfte unterscheiden, so gelten die den Gleichungen (10) bis (11') entsprechenden Differenzengleichungen, und damit ist auch unser vierter Satz bewiesen. Durch äußeren Druck wird also die kinetische Energie eines Systems im Verhältnis zur Gesamtenergie und zur elektromagnetischen Energie gegenüber dem kräftefreien Zustande vergrößert, durch Zug verkleinert. In einem „starren Körper", der auf äußere Beanspruchung nur mit sehr geringen Ausweichungen reagiert, müssen hiernach trotzdem starke (dem Druck proportionale) innere energetische Umwandlungen vor sich gehen, wenn das elektromagnetisch-

1) Indem wir hier gleich die Mittelwerte der äußeren Kräfte einführen, umfassen wir noch einen allgemeineren Komplex von Erscheinungen, als wenn wir die Kräfte streng zeitlich konstant annehmen würden. Es ist die Gesamtenergie U des betrachteten Systems dann nicht mehr, wie vorher, streng konstant, sondern es ist ebenfalls ihr zeitlicher Mittelwert $\overline{U}$ einzuführen.

kinetische Gleichgewicht aufrecht erhalten bleiben soll.

Welchen Einfluß diese Vorgänge auf die gesamte Energiebilanz eines Systems haben müssen, erkennt man vielleicht am besten am Beispiel eines von „festen" Wänden eingeschlossenen Gases. Wir bezeichnen die auf das Gas bezüglichen Größen durch lateinische Buchstaben ohne Index, die auf das Gesamtsystem bezüglichen durch den Index t (total), die auf die Wände bezüglichen durch einen Strich. Die von uns eingeführten Mittelwertgrößen sind in diesem Fall mit den thermodynamisch = statistischen identisch: $\overline{U} = U$, $\overline{p} = p$, $\overline{L} = L$ usw. Für ein Gas ist, bei einer Temperaturerhöhung,

$$\Delta L = \Delta U,$$

während für das Gesamtsystem $\Delta L_t = -\Delta U_t$ sein muß. Sind die Wände „starr", so ist

$$\Delta U \backsim \Delta U_t,$$

doch kann unmöglich $\Delta L = \Delta L_t$ sein. Vielmehr ist für ein Mol eines Gases

$$\Delta L = \tfrac{3}{2} R \Delta T, \; \Delta (pV) = R \Delta T,$$

also $\Delta L = \frac{3}{2} \Delta (pV)$; für die feste Wand ist wegen $\Delta U \sim 0$ nach (10)

$$\Delta L' = \Delta (\Xi_x' + H_y' + Z_z')$$

oder wegen

$$\Delta \{(\Xi_x' + H_y' + Z_z') + 3pV)\} = 0 : \Delta L' = \\ = -3 \Delta (pV) = -2 \Delta L.$$

Also:

$$\Delta L_t = \Delta L + \Delta L' = -\Delta L = -\Delta U = -\Delta U_t.$$

Es könnte hier eingewendet werden, daß es bei elektromagnetisch-kinetischen Gleichgewichten wahrscheinlich gar nicht möglich ist, daß Spannungen und damit verbundene Änderungen der inneren kinetischen Energie auftreten, ohne daß sich gleichzeitig die Gesamtenergie des Systems ändert. Wir wollen deshalb auf diese Frage noch etwas genauer eingehen und darauf hinweisen, daß bei der Veränderung einer Lineardimension l eines solchen Gebildes (wir denken z. B. an einen festen Körper, insbesondere an Kristalle) um die unendlich kleine Strecke λ die Änderung der Totalenergie von der Größenordnung λ^2 ist, während die Änderung der Spannungsgrößen Ξ_x usw. nur von 1. Ordnung unendlich klein in λ ist. Demnach ist also bei kleinen Verrückungen aus der natürlichen Gleichgewichtslage die erste und einzige Energieumwandlung, die stattfindet, die von elektromagnetischer in kinetische Energie (bei Druck; bei Zug umgekehrt), während die Totalenergie noch merklich konstant bleibt. (Satz 5.) Dieses Resultat scheint mir eine nicht unwichtige Anwendung im Rahmen einer neuerdings von M. Born (a. a. O.) angestellten Betrachtung zu finden, in der ein Zusammenhang zwischen der Kompressibilität kristallinischer Substanzen und den Abstoßungsgesetzen der Elektronensphären behandelt wird. Ohne Zweifel ist es formal berechtigt, die Abstoßungskräfte der Elektronensphären neben den Anziehungskräften der entgegengesetzt geladenen Gesamtionen durch ein Exponentialgesetz mit unbekanntem Exponenten einzuführen, und ebenso ist es berechtigt, die Gesamtkräfte mehrerer Ionen aufeinander aus den elektrostatischen Kräften zu berechnen, die die irgendwie eingeführten Atommodelle (z. B. mit Bohrschen Elektronenringen) aufeinander ausüben. Jedoch scheint es nach dem obigen Satz nicht mehr erlaubt, bei der Berechnung von Kompressibilitäten, wo die Änderungen der Abstoßungskräfte bei einer Kompression des Systems eine Rolle spielen, die Abstoßungsgesetze bei konstanten Ringradien mit dem experimentellen Befund der Kompressibilität zu vergleichen. Da nämlich die Änderung der kinetischen Energie der Ringsysteme nach dem oben gefundenen allgemeinen Gesetz in λ von erster Ordnung sein müßte, ist zu folgern, daß sich auch die inneren linearen Abmessungen eines Atoms (Radien der Elektronenringe) mit λ in erster Ordnung ändern; da diese Änderungen nun wiederum in der Umgebung des Atoms Kraftänderungen bewirken müssen, die von erster Ordnung in λ, also von derselben Größenordnung wie die durch die gegenseitige Verschiebung der Atome bedingten Kraftänderungen, sind, so scheint mir die Berücksichtigung dieser inneren Änderungen, von denen Herr Born annimmt, daß sie das Resultat nicht wesentlich beeinflussen, doch bei diesen Betrachtungen unumgänglich nötig. Im einfacheren Beispiel zweier durch einen Ring zusammengehaltener Kerne (Debye) oder zweier verschieden geladener Kerne mit 2 Einzelringen kann man das Größenordnungsmäßige und auch den Sinn dieser Wirkungen näher verfolgen, doch würde ein Eingehen hierauf außerhalb des Rahmens dieser allgemeinen Betrachtungen liegen[1]).

1) Es sei bemerkt, daß die Gleichgewichtssätze, mit denen wir es hier zu tun haben, vielleicht auch einen Aufschluß darüber geben, weshalb das sogenannte „Hantelmodell", insbesondere des Wasserstoffmoleküls, bei allen genaueren Berechnungen von spezifischen Wärmen, Rotationsspektren usw. versagt hat [wegen der spezifischen Wärmen vgl. insbesondere die Abhandlung von F. Reiche, Zur Quantentheorie der Rotationswärme des Wasserstoffs, Ann. d. Phys. **58**, 657—694, 1919]. Nach meinem Urteil hängt dies damit zusammen, daß ein aus wenigen Bausteinen aufgebautes elektromagnetisches System undenkbar ist, dessen ganze Energiezunahme bei einer Temperaturerhöhung in einer Vermehrung der Rotationsenergie besteht. Vielmehr muß nach unserm Satz 3 die Änderung der elektromagnetischen Energie und die gewisser anderer innerkinetischer

Nicht elektromagnetische Kräfte. Eine andere Frage soll jedoch noch zum Schluß aufgeworfen und beantwortet werden. Es ist bekannt, daß sich die bisherigen Anschauungen über den Zusammenhang von kinetischer, potentieller und totaler Energie, insbesondere in festen Körpern, meist auf der Annahme quasielastischer Kräfte aufbauten, die das — in der Gleichgewichtslage ruhende — Massenteilchen mit einer der Elongation proportionalen Kraft in die Gleichgewichtslage zurückzuziehen streben. Bei Annahme dieses Kraftgesetzes gilt bekanntlich eine ganz andere Beziehung als (5), (6) und (7); sowohl die mittlere potentielle, wie die mittlere kinetische Energie wächst mit der Gesamtenergie, und beide Teile sind einander gleich und gleich der Hälfte der Gesamtenergie. Bezeichnet man die Elongation von dem Anziehungszentrum aus mit r, so findet also bei einem Kraftgesetz proportional r^{+1} ein Wachsen der kinetischen Energie mit der Gesamtenergie statt. Andererseits sind die elektromagnetischen Kräfte (bei den hier einzuführenden Spezialannahmen, auf die wir gleich weiter unten zurückkommen) bekanntlich charakterisiert durch Anziehungskräfte, die in r von der — 2. Ordnung sind; hierbei nimmt die kinetische Energie mit zunehmender Gesamtenergie ab. Zwischen den Exponenten $n = -2$ und $n = +1$ muß es also einen Exponenten n_0 geben, bei dem die kinetische Energie mit veränderlicher Totalenergie in Gleichgewichtssystemen weder zunoch abnimmt, sondern konstant bleibt, und es entsteht die Aufgabe, den Wert dieses Exponenten zu bestimmen.

Wir beschränken uns bei dieser Betrachtung auf die Annahme zweier Massenpunkte, von denen noch der eine, dessen Masse groß gegen die des anderen sei, ruhend angenommen werde. Das gefundene Resultat gilt trotzdem, wie man sich leicht überzeugen kann, ganz allgemein. Die kinetische Energie des Systems ist dann wieder gegeben durch $L = \frac{m}{2} q^2$, wobei m die Masse, q die Geschwindigkeit des leichteren Massenpunktes bedeutet, und es gilt, wie vorher, zwischen L und den Impulsströmungsgrößen X_x, Y_y, Z_z dieses Systems mit konstanter Masse die Beziehung (1). Für die andere Energieeinheit, deren Bestimmungsgrößen wir mit E', X_x' usw. bezeichnen, gilt die Spezialisierung des quasi-statischen Zustandes, der energetisch dadurch definiert ist, daß in dieser Energieeinheit keine eigene Bewegungsgröße, sondern nur Energien und Impulsströmungen auftreten; die Kräfte F, die von dieser Energieeinheit dann auf die Massenpunkte ausgeübt werden, lassen sich infolgedessen aus Impulsströmungen oder Spannungen ableiten, und es ist

$$X'_x = \Sigma x F_x \text{ usw.}$$

(Beweis wie oben in der den Clausiusschen Virialsatz behandelnden Anmerkung, unter Berücksichtigung von $g' = 0$.)

Sind nur 2 Massenpunkte vorhanden, von denen der eine, ruhende, im Koordinatenanfangspunkt angenommen werde, so ist $X_x' = x F_x$, wobei x die Abszisse des bewegten Punktes, F_x die auf diesen Massenpunkt wirkende Kraft ist. Ist die Kraft, die wir annehmen, eine Zentralkraft, so ist

$$X_x' + Y_y' + Z_z' = r F_r. \qquad (12)$$

Die Energie E' dagegen ist zufolge der Annahme des quasi-statischen Zustandes

$$E' = -\int_\infty^r F_r' dr. \qquad (13)$$

Ist nun $F_r = -\frac{A}{r^2}$ (A eine Konstante), so ist

$$r F_r = -\frac{A}{r}, \quad -\int_\infty^r F_r' dr = -\frac{A}{r},$$

$$\text{also } X_x' + Y_y' + Z_z' = E',$$

wie wir es allgemeiner schon in Gleichung (2) gefunden hatten, und diese Beziehung führt, wie wir wissen, zu einer in Gleichgewichtssystemen im umgekehrten Sinne wie die Totalenergie wachsenden kinetischen Energie. Jetzt wollen wir jedoch die allgemeine Beziehung zwischen L und U beim beliebigen Exponenten n für Gleichgewichtssysteme aufstellen.

Wegen der Forderung des kinetischen Gleichgewichts ist:

$$\overline{X_x} + \overline{X_x'} = 0 \text{ usw.}$$

$$\overline{X_x} + \overline{Y_y} + \overline{Z_z} = -(X_x' + Y_y' + Z_z')$$

oder, nach (1) und (12),

$$2\overline{L} = -r F_r{}^{1)}. \qquad (14)$$

Energien (— auch hier handelt es sich offenbar um die umlaufenden Elektronen —) bei einer Temperaturerhöhung die Zunahme der Rotationsenergie soweit überwiegen, daß im ganzen eine Abnahme der kinetischen Energie erfolgt. Dann wird aber allen Betrachtungen, die sich auf die Quantelung der Rotation allein, auf die Frage nach einer Nullpunktsenergie der Rotation usw. beziehen, die eigentliche Grundlage entzogen.

1) Dies ist wieder der Clausiussche Virialsatz, angewendet auf das spezielle, von uns betrachtete System. Wir hatten schon oben bemerkt, daß unsere Voraussetzung des kinetischen Gleichgewichts: $\overline{X_x} + \overline{X_x'} = 0$ usw. in Verbindung mit der Annahme, daß keine Verlagerung der nicht materiellen Bewegungsgröße g' stattfindet (— hier ist speziell $g' = 0$ —), mit der Voraussetzung

$$\overline{\frac{\partial}{\partial t} \int x g_x d\tau} = 0$$

des Clausiusschen Virialsatzes identisch ist.

Da nun $U - U_0 = L + E'$ ist, so ist weiter nach (13) und (14)

$$U - U_0 = -\frac{1}{2}\,\overline{rF_r} - \overline{\int_\infty^r F_r dr}. \qquad (15)$$

Ist nun $F_r = Ar^n$, so ist $rF_r = Ar^{n+1}$, also

$$\overline{L} = -\frac{1}{2}A\overline{r^{n+1}}.$$

Andererseits:

$$-\int_\infty^r Ar^n dr = -\frac{1}{n+1}Ar^{n+1} + \text{const}\,[1]),$$

also:

$$U - U_0 = -\frac{A}{2}\overline{r^{n+1}} - \frac{A}{n+1}\overline{r^{n+1}} +$$

$$+ \text{const} = -A\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2}\right)\overline{r^{n+1}} + \text{const.},$$

$$U - U_0 = -\frac{n+3}{n+1}\cdot\frac{A}{2}\overline{r^{n+1}} + \text{const.},$$

oder wegen

$$-\frac{A}{2}\overline{r^{n+1}} = \overline{L}:$$

$$U - U_0 = \frac{n+3}{n+1}\cdot\overline{L} + \text{const.}$$

Es besteht also die Differenzengleichung:

$$\Delta\overline{L} = \frac{n+1}{n+3}\Delta U. \qquad (16)$$

Für $n = -2$ folgt auch hieraus wieder

$$\Delta\overline{L} = -\Delta U,$$

für $n = +1$

$$\Delta\overline{L} = \frac{1}{2}\Delta U.$$

Allgemein liest man aus (16) ab, daß $\overline{L}$ für $n < -3$ und $n > -1$ mit wachsendem U wächst, in dem Zwischengebiet $-3 < n < -1$ jedoch mit wachsendem U abnimmt. Die kritischen Werte sind also $n_2 = -3$, wo $\frac{dU}{d\overline{L}} = 0$ ist, und $n_1 = -1$, wo $\frac{d\overline{L}}{dU} = 0$ ist.

1) Bei Kraftexponenten $n < -1$ wird diese Konstante $= 0$, dagegen bei $n \geq -1$ unendlich, d. h. es kann dann nicht mehr der „Zustand völliger Dissipation" als Anfangszustand der Energie beibehalten werden. In diesem Falle wählt man zweckmäßig den Zustand $r = 0$ als Nullzustand der Energie und definiert E' durch

$$E' = \int_0^r F_r' dr.$$

Wir haben jedoch im Text, da es auf den Wert der Konstanten nicht ankommt, die einheitliche Definition der Energie beibehalten.

Würde die alte Ansicht und Forderung beibehalten, daß die kinetische Energie eines abgeschlossenen Gleichgewichtssystems sich mit wachsender Totalenergie (z. B. infolge Wärmezufuhr) erhöhen muß, so müßten unbedingt Kraftgesetze eingeführt werden, in denen die Kraftwirkung[1]) zwischen 2 Massenpunkten einer Potenz der Entfernung proportional ist, die kleiner ist als -3 oder größer als -1.

Zusammenfassung.

1. Unter der Annahme eines elektromagnetisch-kinetischen Aufbaus der Materie und auf Grund einer für den vorliegenden Zweck ausreichenden energetischen Einteilung des gesamten Naturkomplexes in kleinste „Systeme mit konstanter Masse" einerseits, einer „elektromagnetischen Zwischeneinheit" andererseits, werden mit Hilfe allgemeiner energetischer Begriffe und Sätze die Beziehungen zwischen kinetischer, elektromagnetischer und Gesamt-Energie abgeleitet, die etwa in den Sätzen 1—3 ihren physikalisch brauchbarsten Ausdruck finden.

2. Nachdem diese Beziehungen an der Kreis- und Ellipsenbahn des Rutherford-Bohrschen Wasserstoffatommodells exemplifiziert sind, werden die in ihren Einzelheiten noch nicht übersehbaren Prozesse der Verdampfung (insbesondere beim absoluten Nullpunkt) und des Zerbrechens eines festen Körpers im Lichte dieser Beziehungen betrachtet und es wird die Abnahme der innermolekularen kinetischen Energie bei der Verdampfung zur Verdampfungswärme in Beziehung gesetzt.

3. Insbesondere wird bei festen Salzen (z. B. $NaCl$) eine Zunahme der kinetischen Gesamtenergie der Elektronen der äußersten Sphären gegenüber dem Dampfzustand (Na^+- und Cl^--Ion) gefolgert. Mittels eines auch für gestörte Systeme angenommenen Zusammenhanges zwischen kinetischer Energie der äußersten Körperelektronen und ihrem „Bahnradius" bzw. dem Atomhalbmesser wird ein größenordnungsmäßiger Zusammenhang zwischen der Änderung des Atomhalbmessers durch Verdampfung bzw. Kondensation und der Verdampfungswärme festgestellt. Diese Änderung ist hiernach nicht klein gegen den Atomhalbmesser selbst, sondern

1) Das Vorzeichen der Kräfte, die ein System von Massenpunkten im kinetischen Gleichgewicht halten sollen, bestimmt sich gemäß dem Clausiusschen Virialsatz wegen der Forderung $\overline{L} > 0$ durch die Bedingung

$$\Sigma\,\overline{xF_x + yF_y + zF_z} < 0.$$

Sind nur 2 Massenpunkte vorhanden, so wird gefordert: $\overline{rF_r} < 0$, d. h. $F_r < 0$. Die Kraft muß also eine Anziehungskraft sein.

von derselben Größenordnung. Ähnliche Betrachtungen führen zu größenordnungsmäßigen Angaben über gewisse an der Oberfläche fester Körper auftretende Potentialsprünge.

4. Unter dem Gesichtspunkt des Satzes 1 wird darauf hingewiesen, daß die Annahme eines elektromagnetisch aufgebauten „Hantelmodells" (z. B. des H_2-Moleküls) eine innere Schwierigkeit enthält, insofern als bei einem elektromagnetisch-kinetischen Modell keine ungestörte Superposition einer Rotationsenergie mit irgendwelchen anderen Arten von innermolekularer Energie möglich ist.

5. Unter Erweiterung der energetischen Betrachtungen für den Fall von außen angreifender Kräfte werden die Gleichgewichtssätze 4 und 5 abgeleitet.

6. Es wird insbesondere der Fall des von festen Wänden eingeschlossenen Gases behandelt, und gezeigt, daß sich die scheinbare Schwierigkeit zwischen dem Satz 3 und der bekannten gaskinetischen Beziehung zwischen Gesamtenergie des Gases und der lebendigen Kraft seiner Moleküle dadurch löst, daß in den „starren" Wänden unter dem Einfluß des Druckes eine beträchtliche Umwandlung von potentieller in kinetische Energie vor sich gehen muß.

7. Der Fall des „starren" Körpers wird dann noch näher untersucht und festgestellt, daß bei einer kleinen Verschiebung λ aus dem kräftefreien Zustand die Umwandlung von elektromagnetischer in kinetische Energie proportional λ ist, während die Änderung der Gesamtenergie proportional λ^2, also von kleinerer Größenordnung ist.

8. Im Anschluß hieran wird darauf hingewiesen, daß bei Kompressibilitätsberechnungen die Änderungen der Atomhalbmesser (speziell der „Ringradien") bei der Kompression nicht vernachlässigt werden dürfen.

9. Zum Schluß wird die den Sätzen 1—3 zugrunde liegende Beziehung für den Spezialfall elektrostatischer Kräfte auf anderem Wege abgeleitet, wobei eine anfangs benutzte allgemeine Beziehung in den Clausiusschen Virialsatz übergeht.

10. Es wird die Frage aufgeworfen und beantwortet, welche Potenzen der Entfernung in einem Kraftgesetz auftreten müssen, damit die kinetische Energie eines Gleichgewichtssystems zugleich mit der Gesamtenergie wächst. Alle Exponenten, die größer sind als —1 und kleiner als —3, erfüllen diese Bedingung.

Schloß Schaumburg a. d. Lahn, den 12. Januar 1920.

(Eingegangen 3. Februar 1920.)

Erfahrungen bei der Bestimmung der Radioaktivität von Quellwässern.

Von Ottomar Nürnberger †[1]).

In Sachsen vereinigen sich bei Brambach im oberen Vogtland zahlreiche radioaktive Quellen verschiedener Stärke; dieses Gebiet schien daher besonders geeignet, um die früher (loc. cit.) mitgeteilten Ergebnisse durch Messungen an natürlichen Emanationswässern zu ergänzen. Das sächsische Finanzministerium hat die von Herrn Prof. Wiener nachgesuchte Erlaubnis dazu erteilt. Die Brambacher Sprudelgesellschaft, Radium-Mineralbad Brambach i. V., hat als Inhaberin der Quellen die Beobachtung bereitwilligst gestattet und ihr Laboratorium zur Verfügung gestellt; der Verfasser möchte es nicht unterlassen, auch an dieser Stelle seinen Dank dafür zum Ausdruck zu bringen[2]). Die Quellen liegen alle eng beieinander, so daß alle Versuche im Laboratorium ausgeführt werden konnten. Die Elektroskope wurden mit der Starkstromleitung unter Zwischenschaltung großer Widerstände aufgeladen. Zur Prüfung der Spannungsausschläge war ständig das zur Eichung verwendete Normalvoltmeter angeschlossen. Der Apparat hatte gute Erdung. Starken Quellen wurde zur Verdünnung ausgeschütteltes und völlig inaktives Bachwasser zugesetzt. Vergleichsversuche mit Zusatz von destilliertem Wasser ergaben die Zulässigkeit der Verwendung von Bachwasser. Dagegen durfte ausgeschütteltes Leitungswasser oder anderes Brunnenwasser nicht zugesetzt werden.

Bei der Beobachtung der Eisen- und Wiesenquelle ist es aufgefallen, daß bei der kohlensäurehaltigen Eisenquelle die ersten Ablesungen sehr gute Übereinstimmung mit den Duaneschen Größen zeigen und der Ionisationsstrom erst später zu schnell ansteigt, während bei der etwa gleich starken, aber sehr gasarmen Wiesenquelle die Beobachtungen von Anfang an rascher ansteigen als nach der Duaneschen Kurve zu erwarten wäre. Weitere Versuche bestätigten dies. Die Erscheinung wurde eingehender untersucht; dabei hat sich herausgestellt, daß jeder Quelle eine eigene Anstiegkurve zugehört. Die einzelnen Kurven schmiegen sich wiederum am besten den Duaneschen Größen an, die Abweichungen davon sind für jede Quelle charakteristisch. Diese Unterschiede müssen also als Störungen bezeichnet werden, die nicht auf

1) Herausgegeben von George Jaffé. Man vergleiche den im vorigen Heft dieser Zeitschrift erschienenen Aufsatz, auf den mit loc. cit. verwiesen wird.

2) Insbesondere bin ich Herrn Dr.-Ing. Schneider für seine liebenswürdigen Aufklärungen und Führungen an Ort und Stelle zu großem Dank verpflichtet.

die reine Radiumemanation zurückzuführen sind, sondern von der Eigenart der Quelle, ihrem Salz- und Gasgehalt abhängen.

Bei den Messungen mit dem Wulfelektrometer und der vollständig geschlossenen Kanne sind die Beobachtungsfehler nur gering, alle Beobachtungen einer und derselben Quelle liefern übereinstimmende Werte für die Anklingkurve. Für die Wettin-, Wiesen- und Eisen-Quelle zu Bad Brambach sind die Anstiegkurven in der folgenden Kurventafel (s. Fig.) zusammen mit der Duaneschen (D) angegeben. Die Ordinaten geben die Werte $\frac{I_0}{I_t}$ an (loc. cit. S. 200). Die Kurven gelten für 1 Liter Eisenquelle (E), 1 Liter Wiesenquelle (W) und 50 cm³ Wettinquelle gemischt

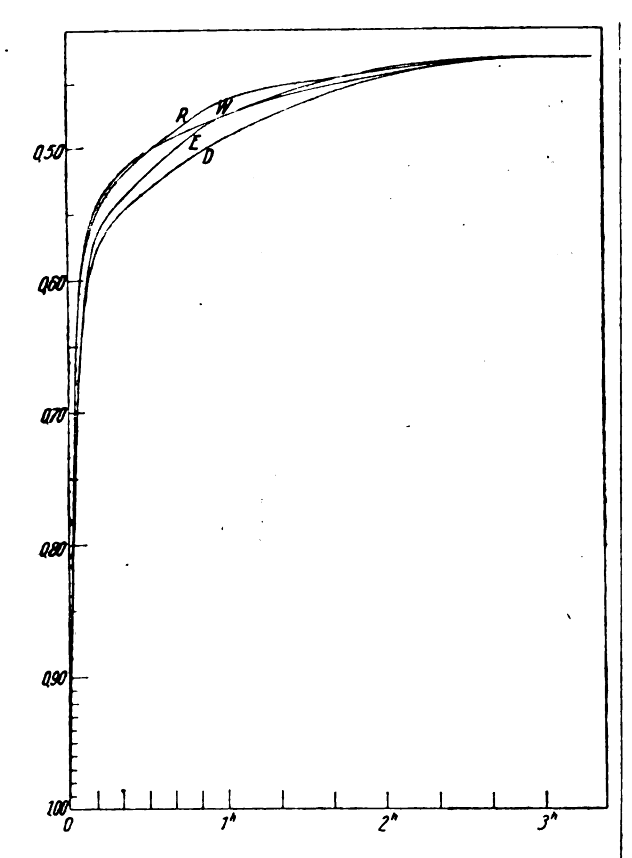
Tabelle I.

Quelle	50 cm³ Wettinquelle			50 cm³ Wettinquelle		
Zusatz	950 cm³ Bachwasser			950 cm³ Bachwasser		
Zeit	Volt sec⁻¹	$I_0 R$	I_0 Duane	Zeit	Volt sec⁻¹	$I_0 R$
4′59″	1,975	1,17.	1,29	3′34″	1,86	1,15
5′45″	2,040	1,18	1,29.	5′45″	1,96	1,15
8′36″	2,050.	1,16	1,23	8′ 5″	2,03	1,15
10′11″	2,085.	1,16	1,22	10′16″	2,10	1,16.
11′53″	2,106	1,15	1,21	12′21″	2,14	1,16.
13′36″	2,155	1,16.	1,22.	14′45″	2,14.	1,15.
15′31″	2,161	1,15.	1,21.	16′46″	2,17	1,15
16′59″	2,200.	1,16.	1,22.	19′14″	2,20	1,15.
18′45″	2,220	1,16.	1,22.	21′19″	2,22	1,15.
20′25″	2,230	1,16.	1,22.	23′29″	2,22.	1,15
21′55″	2,245.	1,16.	1,23	25′45″	2,24	1,14.
23′38″	2,261	1,16.	1,23	28′ 4″	2,25	1,14.
25′15″	2,285.	1,17	1,23	30′22″	2,28	1,15
27′16″	2,297.	1,17	1,24	34′54″	2,29.	1,14
28′33″	2,320.	1,17.	1,24	37′12″	2,31	1,13.
30′18″	2,320	1,17	1,24	40′14″	2,31.	1,13
31′57″	2,335	1,17	1,24	42′29″	2,34	1.13.
33′33″	2,352.	1,17	1,24	48′23″	2,38	1,13
35′ 8″	2,361	1,17	1,24	53′28″	2,41	1,13.
37′12″	2,385.	1,17.	1,24	58′ 6″	2,45	1,14
39′ 5″	2,422	1,18	1,25	1 h —	2,45	1,13
40′56″	2,425	1,18	1,25	1 h 10′	2,47	1,13
50′—	2,500	1,18	1,25.	1 h 15′	2,51	1,14
1 h —	2,560	1,18	1,25	1 h 24′	2,52	1,14
2 h 25½′	2,720	1,18	1,18.	1 h 40′	2,54	1,13
3 h —	2,750	1,18	1,18	2 h —	2,58	1,13.
5 h —	2,750	1,18	1,18	2 h 20′	2,60	1,13
				2 h 40′	2,61	1,13
				3 h —	2,61	1,13
Richtiger Nullwert		1,18	1,18			1,13
Mittelwert		1,17	1,23			1,14
Mittlerer Fehler		± 0,8 Proz.	± 2,2 Proz.			± 0,9 Proz.

Tabelle II.

Versuchsverfahren: Zwei-Minuten-Messung. Der aktive Beschlag müßte etwa 26 Proz. vom Gesamtstrom ausmachen.

Nr.	Quelle	Apparat	Wassermenge		Gesamtstrom	aktiver Beschlag	bei der Wiesenquelle
			Quelle	Zusatz			
1.	Wiesenquelle	Engler u. Sieveking	250 cm³	—	100 Proz.	20,7 Proz.	—
2.	„	„ „	250 cm³	—	100 „	20,2 „	—
3.	„	„ „	500 cm³	—	100 „	17,8 „	—
4.	„	„ „	1000 cm³	—	100 „	13,7 „	—
5.	„	„ „	500 cm³	500 cm³ Bachwasser	100 „	11,4 „	—
6.	„	„ „	500 cm³	500 cm³ kohlensäurereiches Wasser	100 „	15,3 „	—
7.	Eisenquelle	„ „	500 cm³	500 cm³ Bachwasser	100 „	12,0 „	11,4 Proz.
8.	Wettinquelle	„ „	50 cm³	975 cm³ „	100 „	11,0 „	11,4 „
9.	„	H. W. Schmidt	25 cm³	475 cm³ „	100 „	22,5 „	11,4 „



mit 950 cm³ ausgeschütteltem Bachwasser (*R*), beobachtet mit dem Wulfelektrometer und der 15-Liter-Kanne. Anderer Wasserzusatz, Beimengungen von Salzen oder Gasen beeinflussen den radioaktiven Verlauf des Anstiegs. In der vorstehenden Tabelle I sind zwei unter gleichen Bedingungen angestellte Beobachtungen der Wettinquelle angegeben. Die Nullwerte wurden nach der Kurve *R* (Fig. 1) berechnet, sie zeigen gute Übereinstimmung, die nach Duane berechneten dagegen systematische Abweichungen.

Diese besonderen Anstiegkurven sind von Bedeutung, wenn die Aktivität einer Quelle ständig geprüft werden soll. Man braucht dann den radioaktiven Anstieg nur kurze Zeit zu beobachten und kann hieraus den Nullwert mit guter Genauigkeit bestimmen (1 Proz., Tabelle I).

Die Kurven zeigen, daß der Ionisationsstrom fast durchgängig größer ist, als er der reinen Emanation und ihren Zerfallsstoffen zukommt, und zwar zu gleichen Zeiten für jede Quelle um einen verschiedenen Betrag. Dies fand eine Bestätigung in den mehrjährigen Beobachtungen des Herrn Bergrats Bachmann in Zwickau, der die Brambacher Quellen seit April 1912 alle 8 oder 14 Tage einer Kontrolle nach der „Zweiminuten-Messung" unterzieht. Er hat gefunden, daß der Betrag des aktiven Niederschlags bei jeder Quelle einen anderen Prozentsatz vom Gesamtstrom ausmacht und führt dies auf den verschiedenen Kohlensäuregehalt und auf den Grad der Verdünnung des zu untersuchenden Wassers zurück.

Um Anschluß an die sonst gebräuchlichen Methoden zu schaffen, wurden noch Versuche mit der Zwei- und Zehn-Minuten-Messung angestellt.

In den drei Tabellen II, III, IV ist eine größere Reihe solcher Versuche angegeben. Es sind alle wichtigeren Daten eingetragen, wie der Name der Quelle und der Apparat, in welchem beobachtet wurde, die Menge des Quellwassers und der Verdünnung. Der jeweilig beobachtete Gesamtstrom ist in allen Tabellen mit 100 Proz. eingetragen, der danach gemessene aktive Beschlag ist in Prozenten des vorher gemessenen Gesamtstromes angegeben, selbstverständlich beide Male nach Abzug der Normalzerstreuung. Bei einem Teil der Versuche ist in der letzten Spalte noch der Prozentsatz des Niederschlags angegeben, der bei dem in gleicher Weise angestellten Versuche mit der Wiesenquelle beobachtet wurde. Es muß noch vorausgeschickt werden, daß die Wiesenquelle sehr kohlensäurearm ist, ihre Aktivität beträgt etwa 150 Mache-Einheiten. Die Eisenquelle ist ungefähr gleich aktiv, aber kohlensäurereich. Die Wettinquelle ist so hoch aktiv, daß ihre Stärke nur in größter Verdünnung gemessen werden kann.

Zu den Versuchen ist im einzelnen folgendes zu bemerken:

1. Die beiden ersten Versuche zeigen, daß bei derselben Quelle im gleichen Apparat, unter gleichen Bedingungen und nach demselben Versuchsverfahren der gleiche Anteil vom Gesamtstrom später als aktiver Beschlag gemessen wird. Dasselbe geht für sich aus den Versuchspaaren 14 und 15, 18 und 19, 20 und 23 hervor.

2. Ergänzend hierzu beweisen die Versuche 10, 11 und 12, daß sich unter gleichen Verhältnissen in ungefähr gleich großen Apparaten derselbe Betrag von Zerfallsstoffen an den Wänden niederschlägt.

3. Dagegen zeigen die Versuche 8 und 9, desgleichen vollständiger die Versuche 23, 24 und 25, daß auch bei sonst gleichen Bedingungen in großen Kondensatoren bedeutend weniger aktiver Niederschlag gemessen werden kann als in kleinen Apparaten.

4. Betrachtet man die ersten 4 Versuche zusammen, so sieht man, daß sich bei einer kleinen ausgeschüttelten Wassermenge mehr Zerfallstoffe niederschlagen und daß sich mit



Tabelle III.

Versuchsverfahren: Zehn-Minuten-Messung. Der aktive Beschlag müßte etwa 43 Proz. vom Gesamtstrom ausmachen.

Nr.	Quelle	Apparat	Wassermenge		Gesamtstrom	aktiver Beschlag	bei der Wiesenquelle
			Quelle	Zusatz			
10.	Wiesenquelle	Mache u. Meyer	500 cm³	500 cm³ Bachwasser	100 Proz.	10,3 Proz.	—
11.	„	Wulf	500 cm³	500 cm³ „	100 „	10,2 „	—
12.	„	Engler u. Sieveking	500 cm³	500 cm³ „	100 „	10,2 „	—
13.	Eisenquelle	„ „	500 cm³	500 cm³ „	100 „	12,9 „	10,2 Proz.
14.	Wiesenquelle	„ „	1000 cm³	—	100 „	14,2 „	—
15.	„	„ „	1000 cm³	—	100 „	14,3 „	—
16.	Eisenquelle	„ „	1000 cm³	—	100 „	16,0 „	14,2 „
17.	Wiesenquelle	H. W. Schmidt	500 cm³	—	100 „	17,2 „	14,2 „
18.	Eisenquelle	Engler u. Sieveking	250 cm³	—	100 „	13,3 „	—
19.	„	„ „	250 cm³	—	100 „	13,3 „	—
20.	Wettinquelle	„ „	50 cm³	950 cm³ Bachwasser	100 „	9,6 „	10,2 „
21.	„	Wulf	50 cm³	950 cm³ „	100 „	9,3 „	10,2 „
22.	„	Mache u. Meyer	25 cm³	975 cm³ „	100 „	9,5 „	10,2 „
23.	„	Engler u. Sieveking	50 cm³	950 cm³ „	100 „	9,6 „	10,2 „
24.	„	Kohlrausch u. Loewenthal	25 cm³	975 cm³ „	100 „	17,1 „	—
25.	„	H. W. Schmidt	25 cm³	475 cm³ „	100 „	40,0 „	—
26.	Eisenquelle	Engler u. Sieveking	500 cm³	500 cm³ Bachwasser	100 Proz.	7,9 Proz.	10,2 Proz.
27.	„	Wulf	500 cm³	500 cm³ „	100 „	8,0 „	10,2 „

Tabelle IV.

Nr.	Quelle	Apparat	Wassermenge		Zeit der Messung des Gesamtstromes	Gesamtstrom	aktiver Beschlag
			Quelle	Zusatz			
28.	Wettinquelle	Engler u. Sieveking	50 cm³	50 cm³ Bachwasser	2 Min.	100 Proz.	13,0 Proz.
29.	„	„ „	50 cm³	50 cm³ „	12 Min.	100 „	9,6 „
30.	„	„ „	50 cm³	50 cm³ „	1 h	100 „	13,9 „
31.	„	„ „	50 cm³	50 cm³ „	3 h	100 „	15,7 „

wachsender Wassermenge immer weniger absetzen[1]).

5. Bei den Beobachtungen 4 und 5 ist zwar die Wassermenge gleich, aktives Wasser ist aber bei 5 nur die Hälfte, die Menge des Niederschlags ist geringer. Dies wird bestätigt durch die Versuche 12 und 14[2]).

6. Es ist auffallend, daß durch Zusatz von kohlensäurereichem Wasser die Menge des aktiven Beschlags stark wächst, wie es der Versuch 6 gegen 5 zeigt. Dasselbe Bild gibt Versuch 7 bei der kohlensäurereichen Eisenquelle, wenn auch hier nur in geringem Maße. Deutlicher tritt die Wirkung der Kohlensäure bei dem Versuch 16 gegen 14 und 15 hervor, desgleichen 13 gegen 12[3]).

7. Die Versuche 16, 18, 19 sind nicht ganz zuverlässig. Im Engler und Sievekingschen Apparat muß der Überdruck durch Wasserablassen ausgeglichen werden, bei der Eisenquelle läuft nicht nur das ganze Wasser ab, es verpufft auch noch Gas.

8. Bei Vergleich der Tabellen II und III untereinander muß noch festgestellt werden, daß sich in Beziehung zum Gesamtstrom gebracht nach etwa 2 Minuten schon ebensoviel und mehr aktive Bestandteile niedergeschlagen haben wie nach etwa 10 Minuten. Man betrachte Versuch 4 und 14; 5 und 10, 11, 12; 7 und 13; 8 und 20, 21, 22, 23[1]).

9. Die Versuche 26 und 27 stehen abseits; der Apparat war nicht geerdet, das Elektroskop wurde nur zu den wenigen Ablesungen mit Hartgummi aufgeladen; es bestand also nur sehr kurze Zeit ein elektrisches Feld.

10. Nach den Beobachtungen 28, 29, 30 und 31 ist es fast ohne Einfluß, zu welcher Zeit der Gesamtstrom gemessen wird, die Menge des aktiven Beschlags im Verhältnis zum Gesamtstrom ändert sich nur wenig. Zwei Minuten nach dem Schütteln hat sich im Vergleich zum

1) Bei kleinen Wassermengen ist die Schüttelwirkung größer, es haben sich radioaktive Zerfallstoffe aus dem Wasser mit niedergesetzt.

2) Die Konzentration der Lösung ist schwächer, bei gleicher Wassermenge werden weniger aktive Stoffe ausgeschüttelt.

3) Dieselbe Wirkung folgt nach Zusatz von salzhaltigem Wasser.

1) Vermutlich infolge ausgeschüttelter Zerfallsstoffe.

Gesamtstrom mehr abgesetzt als nach 12 Minuten, nach 1 h und 3 h ist der aktive Beschlag wieder etwas gewachsen. Dies ist eine Bestätigung dafür, daß aktive Bestandteile mit ausgeschüttelt werden.

Aus den Versuchen im ganzen läßt sich ersehen, daß alle Verfahren der Beobachtung des aktiven Beschlages überhaupt unanwendbar sind; sie liefern nicht nur ein falsches Ergebnis, sie sind auch nicht zu vergleichenden Messungen zu gebrauchen. Einen sehr starken Einfluß auf die getrennt beobachtbare Menge des aktiven Niederschlags üben die Größe des Apparates, die Menge des geschüttelten Wassers, die Konzentration der Lösung und der Gas- und Salzgehalt einer Quelle aus.

Nachwort des Herausgebers. Am Schluß des Nürnbergerschen Manuskriptes waren Angaben der Aktivitätszahlen einer größeren Anzahl von Quellen, Untersuchungen auf Thoraktivität und Nachforschungen nach in Quellwasser gelösten aktiven Salzen angekündigt. Auf Grund der vorliegenden Beobachtungsprotokolle lassen sich wenigstens die Aktivitätszahlen der drei im Text behandelten Quellen berechnen.

Nürnberger hatte besondere Versuche über den Grad der erreichten Sättigung angestellt. Zu diesem Zwecke wurden die inneren Elektroden der Apparate mit Schutzring versehen und mit einer Piezoquarz-Anordnung verbunden, während die Kanne selbst auf wechselndes Potential (bis zu 2000 Volt) geladen wurde. Die Versuche waren nicht völlig abgeschlossen, es hat sich aber ergeben, daß in keinem der benutzten Apparate bei den zur Messung dienenden Spannungen völlige Sättigung erreicht ist. Im Schmidtschen Apparat fehlen etwa 5 Proz., in den großen Apparaten mindestens 9 Proz. an völliger Sättigung. (Bei Bestrahlung mit γ-Strahlen war die Sättigung, wie zu erwarten, wesentlich besser.)

Legt man diese Zahlen zugrunde, ferner die nach Duane und Laborde[1]) berechneten Faktoren für die unvollständige Ausnutzung der α-Strahlen, so gelangt man zu den in Tabelle V zusammengestellten Angaben. Es sind nur Messungen aufgenommen, bei denen die vollständige Anstiegkurve beobachtet worden ist.

Es muß bemerkt werden, daß die Versuche bei einem durchschnittlichen Barometerstand von 700 mm ausgeführt sind. Sieht man die von Frau Curie[2]) ermittelte Korrektionsformel

Tabelle V.

Datum	Quelle	Apparat	Aktivität in Mache-Einheiten
8. Mai 1914	Wettinquelle	Wulf	1710
8. „ 1914	„	H. W. Schmidt	1550
8. Juli 1914	„	Mache u. Meyer	1915
10. „ 1914	„	Wulf	1915
27. „ 1914	„	„	1685
28. April 1914	Eisenquelle	„	150
30. „ 1914	Wiesenquelle	„	154
23. Juli 1914	„	„	145

für diesen Druckbereich noch als gültig an, so sind also die Zahlen mindestens um weitere 4 Proz. zu erhöhen. Aus den Aufzeichnungen von Nürnberger ist kein Grund dafür ersichtlich, warum die Messungen im gleichen Apparat an verschiedenen Tagen so erheblich variieren, wie die beiden vom 10. und 27. Juli. Für den Schmidtschen Apparat dürfte die Berechnung des Duaneschen Faktors aus Oberfläche und Volum unzulässig sein, namentlich für den niedrigen Druck.

Nach den Angaben von Weidig[1]) beträgt die Aktivität der Wettinquelle („Neue Quelle") im Mittel 1942 M.-E., diejenige der Eisenquelle 167,2 und die der Wiesenquelle 176,3 M.-E. Diese Angaben sind nur 10—17 Proz. höher als die obigen; es ist aber zu beachten, daß Weidig weder eine Korrektur für die unvollständige Ausnützung der Strahlen, noch für die mangelhafte Sättigung angebracht hat; demnach ist — in Übereinstimmung mit den Angaben Nürnbergers — bei dem von Weidig benutzten Meßverfahren nach Engler und Sieveking der aktive Niederschlag viel zu niedrig in Rechnung gesetzt, so daß sich die Fehler größtenteils kompensieren.

Zusammenfassung.

Die Anstiegkurve natürlicher Mineralwässer zeigt systematische, für jede Quelle charakteristische, wahrscheinlich durch den Salz- und Gasgehalt bedingte Abweichungen von derjenigen reiner Emanationslösungen.

Die getrennte Bestimmung des aktiven Niederschlags führt zu fehlerhaften, stark von den Versuchsbedingungen abhängigen Ergebnissen.

In keinem der benutzten Apparate ist bei den für die Messung verwendeten Potentialen vollständige Sättigung erreicht.

1) W. Duane u. A. Laborde, Le Radium 7, 163. 1910.

2) M. Curie, Die Radioaktivität. Leipzig 1912. Band 1, S. 282.

1) M. Weidig, Radioaktive Wässer in Sachsen. IV. Teil. Freiberg i. S. 1912.

Leipzig, im Oktober 1919.

(Eingegangen 15. November 1919.)

Über die Bildverzerrung bei der Abbildung eingetauchter Körper.

Von W. Kramer.

Gemäß einer Bemerkung in der „Geometrie der Lage" von Reye[1]) erscheinen „einem Fische alle über Wasser befindlichen Gegenstände affin verwandelt, z. B. eine Kugel als Ellipsoid, ein Würfel als schiefes Parallelepipedon". Bekanntlich trifft diese Behauptung im allgemeinen nicht zu, sondern ist nur unter gewissen sehr weitgehenden Einschränkungen angenähert richtig. Um dies möglichst augenfällig zu zeigen, photographierte Verfasser in Wasser eingetauchte Gegenstände und von unter Wasser in Luft befindliche Gegenstände. Zwei von diesen Aufnahmen scheinen allgemeineres Interesse zu haben und seien deshalb vorgelegt.

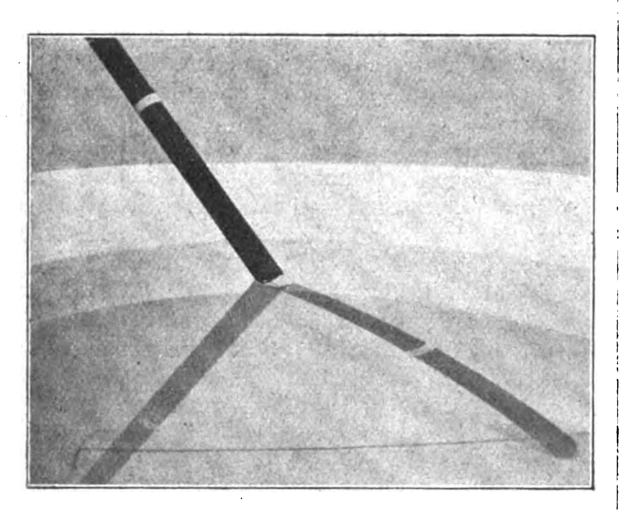


Bild 1.

Die erste Photographie (Bild 1) zeigt einen schräg in Wasser eingetauchten Stab mit Marken in gleichen Abständen, der parallel zur Bildebene aufgestellt ist. Diese Stellung scheint gegenüber der üblichen Darstellung dieser Bildverzerrung in den Lehrbüchern, wobei der Stab mit dem Auge in der Zeichnungsebene angenommen wird, den Vorzug zu verdienen; denn bei jenen Abbildungen kann das Auge wohl eine Verkürzung des Stabes beobachten, die Verzerrung selbst aber, vor allem den „Knick", auf den in der Regel hingewiesen wird, gar nicht wahrnehmen.

Wird schon an dieser Aufnahme deutlich, daß von affiner Verwandlung nicht die Rede ist, so ist die zweite Photographie (Bild 2) in dieser Hinsicht noch lehrreicher, insofern sie zeigt, daß die Verzerrungen so stark werden können, daß eine Kreislinie im Bilde einen Doppelpunkt erhält. Das Objekt war in diesem Falle ein System dreier zueinander senkrechter Kreise mit eingespannten gemeinsamen Durchmessern[1]). Die beste Einstellung zur Erzielung dieser Aufnahme des fraglichen Kreises ergibt sich aus folgender Rechnung.

Vom Punkte P im Medium I gelange ein Lichtstrahl über den Punkt B in der Grenzebene ins Auge A im Medium II (vgl. Figur). Wir vergleichen damit einen Lichtstrahl, der von einem Peripheriepunkte P_1 eines kleinen zu BP senkrechten Kreises vom Radius ε über B_1 in der Grenzebene nach A gelangt. Der Radius PP_1 sei um den Winkel u gegen die positive y-Achse des Achsensystems, auf welches wir das System gemäß der Figur beziehen,

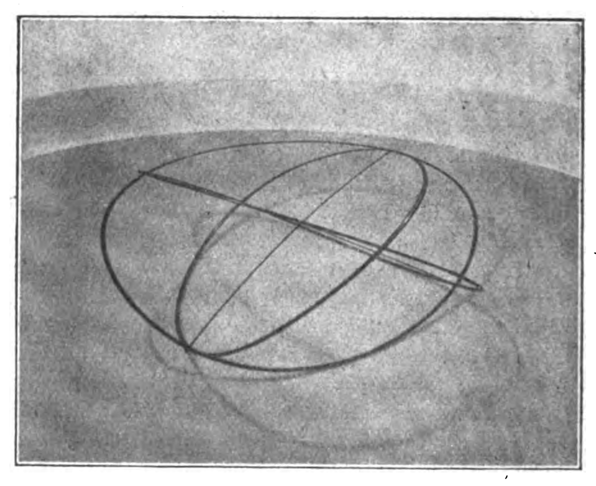


Bild 2.

gedreht. Die Einfalls- bzw. Brechungswinkel seien α, α_1, β, β_1, es sei der Brechungsexponent n.

$$AB = a,\ AB_1 = a_1,\ BP = r,\ B_1P_1 = r_1,\ BOB_1 = \varphi,$$

der Koordinatenanfangspunkt liege in O. Die Koordinaten von P und P_1 sind dann

$$x = a \sin\alpha + r \sin\beta,\ y = 0\ ,\ z = r\cos\beta,$$
$$x_1 = \cos\varphi\,(a_1 \sin\alpha_1 + r_1 \sin\beta_1),$$
$$y_1 = \sin\varphi\,(a_1 \sin\alpha_1 + r_1 \sin\beta_1),\ z_1 = r_1 \cos\beta_1,$$

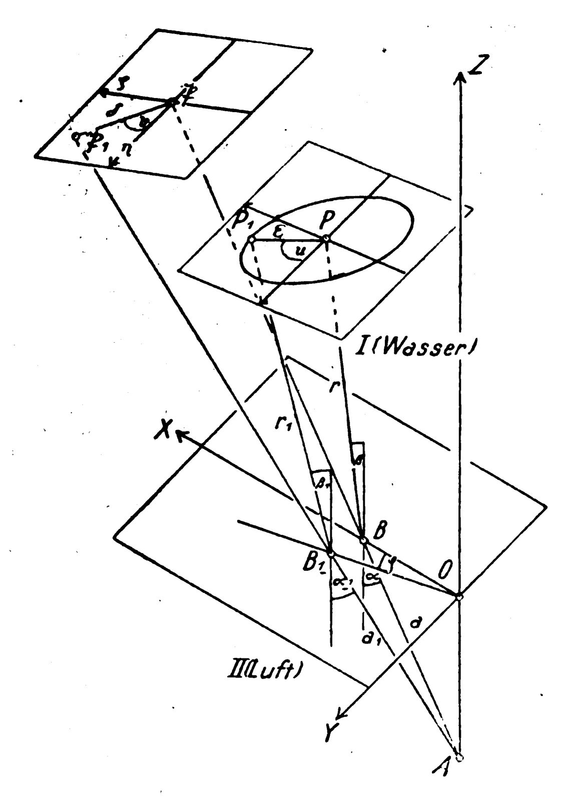
und es bestehen die Beziehungen

$$x_1 = x + \varepsilon \sin u \cos\beta,\ y_1 = \varepsilon \cos u,\ z_1 = z - \varepsilon \sin u \sin\beta,\ \sin\alpha_1 = n \sin\beta_1,\ a_1 \cos\alpha_1 = a \cos\alpha.$$

Nimmt man ε als kleine Größe an, deren Potenzen vernachlässigt werden können, so

1) Vgl. Geometrie der Lage, Zweite Abteilung, vierte Aufgabe des Anhangs.

1) Es wurde dem Verf. freundlichst von Herrn Prof. Scheffers zur Verfügung gestellt.



wird auch φ entsprechend klein. Setzt man $\alpha_1 = \alpha + \Delta\alpha$ usw. und entwickelt in den angegebenen Gleichungen bis zu Gliedern, die von der der ersten Ordnung klein sind, so ergibt sich

$$\varphi = \frac{\varepsilon \cos u}{a \sin \alpha + r \sin \beta}, \quad \Delta\alpha = \frac{\varepsilon \sin u}{a\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{r \cos\alpha}{n \cos\beta}}.$$

Senkrecht zum Lichtstrahl AB legen wir im Punkte $\mathfrak{P}$ eine Bildtafel und führen in dieser ein rechtwinkliges Achsensystem in η, ζ mit dem Anfangspunkt $\mathfrak{P}$ ein, dessen η-Achse parallel zur y-Achse gerichtet ist. Dem Punkte P_1 entspricht der Bildpunkt $\mathfrak{P}_1$ mit dem Radiusvektor δ und dem Polarwinkel v. Bestimmen wir rückwärts aus δ und v die Werte von φ und $\Delta\alpha$, so handelt es sich um genau die gleiche Rechnung wie oben nur für den Sonderfall $n = 1$. Wird $A\mathfrak{P}$ noch gleich $\mathfrak{a}$ gesetzt, so ist demnach

$$\varphi = \frac{\delta \cos v}{\mathfrak{a} \sin \alpha}, \quad \Delta\alpha = \frac{\delta \sin v}{\mathfrak{a}}.$$

Durch Vergleich der beiden Werte für φ und $\Delta\alpha$ folgt

$$\delta \cos v = \varepsilon \cos u \frac{\mathfrak{a}}{a + \dfrac{r}{n}},$$

$$\delta \sin v = \varepsilon \sin u \frac{\mathfrak{a}}{a\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{r\cos\alpha}{n\cos\beta}},$$

$$\operatorname{tg} v = \operatorname{tg} u \frac{a + \dfrac{r}{n}}{a\dfrac{\cos\beta}{\cos\alpha} + \dfrac{r\cos\alpha}{n\cos\beta}}.$$

Parallele Linienelemente ε in verschiedenen Punkten P, P', P'' usw. von BP haben demnach im allgemeinen verschiedene Bilder. Nur für u, u', u'' gleich 0^0, 90^0, 180^0 usw., werden auch die zugehörigen Werte v, v', v'' einander gleich und ebenso groß wie die bezüglichen Werte der u. Für sehr nahe an der Grenzfläche gelegene Linienelemente (r nahe 0) wird

$$\operatorname{tg} v_0 = \frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \operatorname{tg} u,$$

für weit entfernte Linienelemente (r nahe ∞)

$$\operatorname{tg} v_\infty = \frac{\cos\beta}{\cos\alpha} \operatorname{tg} u.$$

In dem besonders einfachen Fall $u = 45^0$ ist demnach

$$v_0 + v_\infty = 90^0.$$

Wir wenden diese Ergebnisse auf die Abbildung eines beliebig großen Kreises an, für den der Lichtstrahl BP mit einem Durchmesser zusammenfällt. Die Bilder der an den Endpunkten dieses Durchmessers gelegenen Bogenelemente werden durch unsere Berechnung bestimmt. Abgesehen von den Sonderfällen, daß der Kreis in der Einfallsebene liegt oder senkrecht dazu steht, schneiden sich diese Bilder. Da das Bild des Kreises aber eine geschlossene Kurve werden muß, so ergibt sich sein Bild in der Form einer liegenden 8, wie das Photogramm es erkennen läßt.

Bemerkt sei noch, daß das Bild des oben betrachteten kleinen Kreises vom Radius ε eine Ellipse wird. In der Tat ist die Gleichung der Bildkurve, wie leicht zu übersehen,

$$\frac{\eta^2}{(\varepsilon\mathfrak{B})^2} + \frac{\zeta^2}{(\varepsilon\mathfrak{C})^2} = 1,$$

worin $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ Abkürzungen für die Koeffizienten von $\varepsilon \cos u$ und $\varepsilon \sin u$ in den obigen Formeln sind. Sonach trifft auf diese Abbildung die Reyesche Bemerkung zu. Allerdings ist hier auch die notwendige Voraussetzung für die Affinität, die Beschränkung auf dünne Strahlenbüschel und einen schmalen Abbildungsraum erfüllt.

(Eingegangen 31. Dezember 1919.)

BESPRECHUNGEN.

V. Kohlschütter, Nebel, Rauch und Staub. Vortrag, gehalten auf der Naturf. Ges. zu Bern. Bern, Max Drechsel 1918. 36 S.

Der vorliegende Vortrag zerfällt in drei Abschnitte. In dem ersten werden die charakteristischen Eigenschaften von Nebel, Rauch und Staub als disperse Systeme und ihre Teilchengröße geschildert; darauf werden die wichtigsten sie beherrschenden Gesetze, z. B. das Stokessche Gesetz, ferner ihre Ionisierung und das Wachsen der Teilchen infolge verschiedener Oberflächenspannung besprochen. Im zweiten Abschnitt werden die Formen behandelt, welche diese Gebilde im großen annehmen und die Bedeutung geschildert, welche ihnen bei speziellen technischen Prozessen, z. B. bei der Erzeugung des Steinkohlengases, bei der Rußbildung usw. zukommt. Im dritten geht der Verf. ein auf die behördlichen Maßregeln, welche gegen die Rauchplage angeordnet, und auf die verschiedenen Verfahren, welche zu ihrer Beseitigung getroffen worden sind. Der Vortrag ist leicht verständlich und gibt eine gute Übersicht dieses wichtigen Gegenstands. Gerhard Schmidt.

Dr. Richard Hennig, Unser Wetter. Eine Einführung in die Klimatologie Deutschlands an der Hand von Wetterkarten. (Aus Natur u. Geisteswelt. Bd. 349). 8°. 118 S. m. 48 Abbildungen. 6.—10. Tausend. Leipzig, B. G. Teubner. 1919. M. 1.50.

Der Inhalt dieses kleinen Werkchens geht nicht darauf aus zu einer Wetterprognose anzuleiten oder Regeln für die Beobachtung der Wetterlage den Lesern nahezulegen, sondern bringt die Schilderung einer großen Anzahl von typischen Witterungszuständen, wie sie unter bestimmten gegebenen Verhältnissen in den einzelnen Jahreszeiten einzutreten pflegen. Diese Betrachtungen werden sehr wirkungsvoll unterstützt und veranschaulicht durch kleine Kärtchen, welche den jeweiligen Zustand der Atmosphäre durch Isobaren und Temperaturangaben darstellen. Diese Art der Schilderung der verschiedenen Umstände, die im allgemeinen und für eine bestimmte Gegend gewisse Wetterlagen zustande kommen läßt, ist ganz besonders geeignet die Aufmerksamkeit der Laien zu schärfen und in eine auch die Voraussagungen der Wetterdienststellen entsprechend beurteilende Richtung zu lenken. L. Ambronn.

Tagesereignisse.

Die deutsche Zentralstelle für Erdbebenforschung, die sich früher in Straßburg i. Els. befand, hat seit Mai vorigen Jahres ihren Sitz nach Jena (Sternwarte) verlegt. Wie bisher, so hofft sie auch jetzt wieder auf rege Unterstützung von seiten weitester Bevölkerungskreise durch Sammeln und Zusendung von Erdbebennachrichten. Erwünscht ist zunächst die Beobachtung jedes Erdbebens, auch der schwächsten Erschütterung, nach Ort, Zeit und sämtlichen irgendwie wahrnehmbaren Wirkungen. Auch diesbezügliche Ausschnitte aus den Lokalblättern sind von Wert. Da ferner die Chronik aller in Deutschland aufgetretenen Erdbeben für die Zeit bis einschließlich des verflossenen Jahrhunderts noch manche Lücken aufweist, so wendet sich die Zentralstelle an alle diejenigen, die Gelegenheit haben alte Chroniken, Kirchenbücher, Zeitschriften und sonstige Werke einzusehen, mit der Bitte, etwa aufgefundene Notizen über stattgehabte Erdbeben abschriftlich mit Quellenangabe hierher mitzuteilen. Durch diese meist kleine Mühe können noch manche verborgenen Tatsachen ans Tageslicht gebracht werden, da erfahrungsgemäß gerade Ortschroniken und Kirchenbücher in dieser Hinsicht wichtige, aber nur wenigen zugängliche Fundgruben bilden. Für jede, auch die bescheidenste Mitteilung darf der Einsender auf den Dank der Zentralstelle rechnen. Wenn sie auf den ersten Blick auch noch so unbedeutend erscheinen mag, so kann sie doch das wichtige fehlende Glied einer Kette sein. Unter Umständen ist es schon von Bedeutung zu erfahren, daß in diesem oder jenem Ort überhaupt schon einmal ein Erdbeben verspürt worden ist. Ganz besonders wertvoll sind Erdbebennachrichten aus Nord-, Mittel-, Ost- und Südost-Deutschland, weil diese Gegenden nur recht selten von Erderschütterungen betroffen zu werden pflegen und deshalb, zum Teil mit Unrecht, als erdbebenlos angesehen werden.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der ord. Professor der Physik an der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin Dr. Erich Regener in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Stuttgart.

Berufen: Der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Max Born zum ord. Professor der Experimentalphysik an die Universität Göttingen.

Auszeichnungen: Der ord. Professor der Experimentalphysik an der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich Dr. Peter Debye und der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität München Geheimer Hofrat Dr. Arnold Sommerfeld wurden zu korrespondierenden Mitgliedern der physikalisch-mathematischen Klasse der Preußischen Akademie der Wissenschaften ernannt. Die Königl. Dänische Gesellschaft der Wissenschaft wählte zu auswärtigen Mitgliedern in ihrer naturwissenschaftlich-mathematischen Klasse den Professor für theoretische Physik am Kaiser-Wilhelm-Institut in Berlin Dr. Albert Einstein, den ord. Professor für theoretische Physik an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Max Planck, den ord. Professor für Experimentalphysik an der Universität Erlangen Geh. Hofrat Dr. Eilhard Wiedemann und den ord. Professor für allgemeine und Experimentalchemie an der Universität München Dr. Richard Willstätter.

Vom Lehramt zurück: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Graz Dr. Viktor v. Dantscher, der ord. Professor der technischen Mechanik an der Technischen Hochschule München Geheimer Hofrat Dr. August Foeppl (mit Abschluß des Sommersemesters).

Gestorben: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Heidelberg Geheimer Hofrat Dr. Moritz Cantor, der Professor für Physik am Gymnasium Wolfenbüttel Geh. Hofrat Dr. Julius Elster.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 10. 15. Mai 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 12 am 5. Juni 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Untersuchungen über die sichtbare blaugraue Brennfleckstrahlung an der Lilienfeldröhre.

Von J. E. Lilienfeld und Franz Rother.

Mit Tafel I.

I. Einleitung.

§ 1. Der eine von uns hat noch nicht ganz vor Jahresfrist das vom Brennfleck ausgestrahlte sichtbare, graublaue Licht spektral untersucht [„Bericht"[1]), § 27]. Es ergab sich dabei ein kontinuierliches Spektrum, welches große Ähnlichkeit mit demjenigen eines Temperaturstrahlers hatte. Die verhältnismäßig große Intensität der kurzwelligen Bestandteile des Spektrums wies auf das Bestehen einer außerordentlich hohen Temperatur hin. Im Anschluß an diese Feststellung wurde die Ansicht ausgesprochen, daß die sichtbare Brennfleckstrahlung von der über der Metallfläche gelegenen Elektronenwolke herrührt, welche als von den eigentlichen Kathodenstrahlen in lebhafte Temperaturbewegung versetzt zu denken ist. Das Bild wurde noch dahin näher ausgebaut, daß die der Temperaturbewegung unterworfenen Elektronen der im Brennflecke bestehenden Doppelschicht angehören. So wurde der Gedanke nahegelegt, daß unter dem Einflusse der in der Doppelschicht bestehenden mächtigen Felder die Strahlung in einen Polarisationszustand („Bericht", § 28) versetzt werden müsse.

Dies war für uns der Anlaß, die sichtbare Brennfleckstrahlung auf ihren Polarisationszustand hin zu untersuchen. Das im folgenden mitzuteilende, die Polarisationserscheinung betreffende Material dürfte genügen, um ein weitgehend abgeschlossenes Urteil über diese Erscheinung zu begründen.

Hand in Hand mit der Untersuchung des Polarisationszustands war auch das Spektrum der Strahlung Gegenstand eines fortgesetzten Studiums. Es bestand ursprünglich die Absicht, die Lage des Intensitätsmaximums im Spektrum aufzusuchen, Vergleiche der Intensitätsverteilung anzustellen und so die Höhe der mutmaßlichen Temperatur abzuschätzen. In dieser Richtung kann die Untersuchung noch keinesfalls als abgeschlossen betrachtet werden. Nichtsdestoweniger werden im folgenden einige Spektrogramme mitgeteilt, hauptsächlich deshalb, weil das von dem einen von uns ursprünglich veröffentlichte Spektrogramm („Bericht", Tafel I) auf einer gewöhnlichen blauempfindlichen Platte aufgenommen war, so daß die für das Auge sichtbare rote Strahlung auf dem Bilde nicht mit zum Vorschein kam. Auch sonst ist gegenwärtig mit einer sorgfältiger durchgebildeten photographischen Technik gearbeitet worden, so daß es von allgemeinem Interesse sein dürfte, hier die im wesentlichen das ursprüngliche Ergebnis bestätigenden Aufnahmen wiedergegeben zu sehen. Die Spektraluntersuchung des blaugrauen Lichtes wird von dem einen von uns in der Richtung fortgesetzt, eine Abschätzung der mutmaßlichen Temperatur sowie die Ausdehnung des Spektrums zu ermitteln.

II. Röhre und Apparatur.

§ 2. Die Untersuchungen wurden an einer besonders für diesen Zweck gebauten Lilienfeld-Röhre („Bericht", Kapitel I, II und III) ausgeführt, deren Brennfleck wesentlich breiter und verwaschener war als derjenige einer normalen Röhre. Diese Wahl des Brennflecks

1) Im folgenden werden die Lilienfeldschen, in verschiedenen Zeitschriften verteilten und zum Teil schwer zugänglichen Arbeiten nicht als solche zitiert, sondern es wird auf den zusammenfassenden, im „Jahrbuch der Radioaktivität und Elektronik" 16. Bd., Heft 2 erschienenen Bericht „Die Hochvakuum-Röntgenröhren" zurückgegriffen. Man wird die Originalarbeiten in diesem Berichte genannt finden.

wurde getroffen, weil bei den gewöhnlichen, scharf ringförmigen Brennflecken es nicht gut möglich war, ein in einer erheblichen Breite gleichmäßig geschwärztes Spektrum zu erhalten, vielmehr die eigenartigen, aus zwei parallel verlaufenden schmalen Streifen bestehenden Spektren resultierten, wie dies die erste von dem einen von uns veröffentlichte Aufnahme zeigt. Gleichzeitig kann diese erste Aufnahme als Beweis dafür angesehen werden, daß am Aussehen des Spektrums durch die abgeänderte Form des Brennflecks nichts Merkliches verändert wurde. Das Gleiche gilt für die Polarisationserscheinung, die von uns an zahlreichen normalen Röhren untersucht wurde, bevor wir die endgültigen Aufnahmen an der gleichen, besonderen Röhre herstellten, und zwar war der Grund dafür, daß für beide Zwecke die nämliche Röhre beibehalten wurde, hauptsächlich der, daß bei normalen Röhren das Licht von der Glühlampe nicht in dem gleichen Maße von der Antikathode weggeblendet ist, wie das bei dieser besonderen Röhre mit voller Absicht geschah, indem zwischen Glühlampe und Lochkathode ein breiter an dem Halter des Glühlampendrahtes befestigter Metallschirm angeordnet war.

§ 3. Zum Betrieb der Röhre wurde pulsierende Gleichspannung verwendet, welche mit Hilfe eines mechanischen rotierenden Gleichrichters aus gewöhnlicher technischer Wechselspannung von 50 Perioden in der Sekunde erzeugt wurde. Die Röhrenschaltung war die bekannte Zweigwiderstandsschaltung („Bericht", S. 122, Fig. 4). Es wurde absichtlich nicht mit sehr hohen Spannungen gearbeitet; die Parallelschlagweite zwischen Spitzen betrug in keinem Falle mehr als 90 mm. Das geschah im Hinblick darauf, daß die Aufgabe vorlag, die sichtbare Strahlung von der Röntgenstrahlung zu trennen. Diese Aufgabe ist um so leichter zu lösen, je weniger durchdringungsfähig die Röntgenstrahlung ist. Eine auffallende Änderung des Effekts mit zunehmender Spannung wurde nicht beobachtet. Die Milliampèrebelastung der Röhre betrug zwischen 4 und 20 Milliampère und wird im folgenden von Fall zu Fall genannt werden.

§ 4. Bei einem derartig weichen Röhrenbetrieb war es nicht nötig, die Aussiebung der sichtbaren Strahlung von der Röntgenstrahlung durch Spiegelung der ersteren an einem total reflektierenden Prisma, wie das von dem einen von uns ursprünglich ausgeführt wurde, zu bewirken. Es konnte vielmehr in gerader Durchsicht gearbeitet werden unter Dazwischenschaltung eines in einer großen 2 mm dicken Bleiwand angeordneten Bleiglasfilters von 15 mm Dicke. Die optischen Apparate wurden, soweit es sich nötig erwies — besonders die Holzteile und die Plattenkassetten — noch einmal besonders in 1 mm starkes Bleiblech eingewickelt. Die auf diese Art erreichte Abschirmung der Röntgenstrahlung war so vollkommen, daß selbst bei der höchsten vorkommenden Expositionszeit von drei Stunden eine merkliche Plattenschwärzung nicht entstand, wenn das sichtbare Licht mit Hilfe einer dünnen Pappscheibe weggeschattet war.

III. Die Untersuchung des Polarisationszustands.

a) Die optische Anordnung.

§ 5. Die subjektive Betrachtung des Brennflecks durch einen Nicol ist naturgemäß der einfachste Weg, um den Polarisationszustand zu untersuchen. Eine solche Betrachtung bildete in der Tat den Anfang unserer Untersuchungen und ergab — wie der eine von uns bereits mitgeteilt hat („Bericht", § 28) — das Vorhandensein eines dadurch definierten Polarisationszustands, daß der elektrische Vektor parallel zur Brennfleckfläche schwingt, wobei ein sehr ausgeprägtes Energiemaximum der Schwingung im Schnitt der Symmetrieebene mit dem Antikathodenspiegel liegt — vorausgesetzt, daß in der Röhre, wie üblich, der Antikathodenspiegel ungefähr unter 45° gegen den Kathodenstrahlengang geneigt ist. Das Licht wird in der geeigneten Stellung vom Nicol derartig weitgehend weggelöscht, daß die übrigbleibende Helligkeit an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegt, so daß in erster Annäherung vom Vorhandensein einer beinahe vollkommenen Polarisation gesprochen werden konnte.

§ 6. Die im folgenden zu beschreibende Anordnung verfolgt nun den Zweck, den so subjektiv festgestellten Effekt objektiv auf photographischem Wege festzuhalten. Ferner die Frage zu klären, ob das erwähnte, in der Symmetrieebene der Röhre liegende Maximum der Schwingungsenergie so ausgeprägt ist, daß das Vorhandensein einer linearen Polarisation behauptet werden darf — oder ob elliptisch polarisiertes Licht vorliegt. Schließlich, ob der erwähnte, an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegende Anteil des vom Nicol nicht ausgelöschten Lichtes von einer Zerstreuung im Nicol herrührt — oder ob er natürliches bzw. anders polarisiertes Licht darstellt.

Dementsprechend erhielt die optische Anordnung die folgende, aus Fig. 1 zu entnehmende Gestalt. Benutzt wurde ein Voigtsches Polarisationsspektrometer, von dessen Kollimator *Co* der Nicol entfernt war. Auf die im Brennpunkte des Kollimatorobjektivs

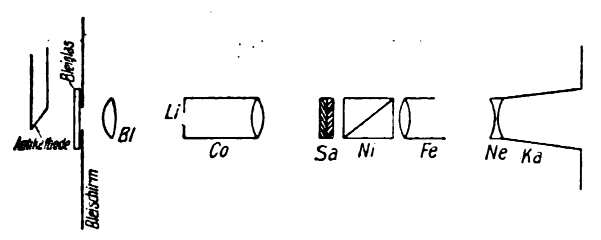


Fig. 1.

befindliche Lochblende *Bl* wurde mittels einer Linse *Li* ein Bild des sichtbaren Brennflecks entworfen. Vor das Beobachtungsfernrohr *Fe* war ein Nicol *Ni*, und vor diesen eine Savartsche Platte *Sa* geschaltet, welche für sich allein und auch mit dem Nicol zusammen gedreht werden konnte, so daß eine Einstellung gegen den Hauptschnitt des Nicols möglich war. Trifft nun polarisiertes Licht auf diese Anordnung, so müssen bei einer Drehung die dabei im Gesichtsfeld auftretenden isochromatischen Streifen vollkommen verschwinden, wenn das auftreffende Licht rein linear polarisiert ist. Bei dem geringsten Anteil von elliptisch polarisiertem Licht bleiben jedoch die Streifen bestehen. Um die Erscheinungen photographisch festhalten zu können, wurde das Okular des mit dem Analysator verbundenen Beobachtungsfernrohrs entfernt und an seine Stelle eine kleine photographische Kamera *Ka* gebracht. Zwecks Erzielung von Aufnahmen in geeigneter Größe wurde zwischen Fernrohrobjektiv und Aufnahmekamera ein optisches Negativsystem *Ne* eingeschaltet; es erwies sich als ausreichend, dazu eine einfache Bikonkavlinse aus dem Okular eines Galileifernrohrs zu benutzen. Die zu photographierende Erscheinung war in jedem Falle lichtstark genug, um mit einer Lupe scharf in die Plattenebene eingestellt werden zu können.

b) Die Versuchsergebnisse.

Mit der beschriebenen Anordnung wurden zwei Aufgaben gelöst.

§ 7. Es wurde erstens die Savartsche Platte entfernt und bei auf Helligkeitsmaximum eingestelltem Nicol je eine Aufnahme mit 9 Minuten Expositionszeit gemacht, die eine unter einem Blickwinkel von etwa 45° auf die Antikathodenplatte, die andere bei annähernd streifender Inzidenz in der Profilstellung der Röhre unter einem Blickwinkel von etwa 15°. Die Aufnahmen sind in der Tafel mit den Nummern I und II wiedergegeben. Hierauf wurde in beiden Fällen der Nicol auf Helligkeitsminimum eingestellt. So wurden bei der gleichen Expositionszeit von 9 Minuten die Bilder III und IV erhalten. In Übereinstimmung mit der am Anfang dieses Abschnitts beschriebenen subjektiven Betrachtung des Brennflecks erkennt man, daß im Auslöschungsfalle die übrig bleibende Helligkeit außerordentlich gering ist und innerhalb der Expositionszeiten auch für die Platte an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegt.

Wir möchten es nicht unterlassen, dabei auf Folgendes aufmerksam zu machen. Es gelingt nur in ganz seltenen Fällen, den Antikathodenspiegel vollständig sauber zu erhalten. Meistens befinden sich auf ihm einige winzig kleine Staubpartikel, welche in den Gang der Kathodenstrahlen gebracht, hell weiß aufleuchten. Solche Partikel waren — wenn auch in geringer Anzahl — bei den bereits beschriebenen, aber auch bei den weiter unten zu beschreibenden Aufnahmen vorhanden. Selbstverständlich ist das von den auf Weißglut erhitzten Staubteilchen ausgesandte Licht natürliches, unpolarisiertes, und wird in keiner Stellung des Nicols weggelöscht. Die Punkte treten also infolge Kontrastwirkung in dem Falle, in welchem alles übrige Licht von den Nicols ausgelöscht wurde (Fig. 4), bedeutend deutlicher auf den Bildern hervor als in dem Falle, in welchem die durch die graublaue Strahlung verursachte Schwärzung darüber gelagert ist (Fig. 2).

§ 8. Die besprochenen vier Bilder beweisen, daß das untersuchte Licht so gut wie restlos polarisiert ist. Daraus, daß die Auslöschung eintritt, wenn die Polarisationsebene des Nicols parallel zur Röhrenachse steht, folgt, daß der elektrische Vektor parallel zur Brennfleckebene schwingt, und zwar unabhängig davon, welchen Winkel die Brennfleckebene mit dem Kathodenstrahlenbündel einschließt, denn dieser ist durch die willkürliche Abschrägung des Antikathodenkopfes gegeben. Es darf nicht außer acht gelassen werden, daß dieser Winkel nur dann, mathematisch gesprochen, streng definiert wäre, wenn das Kathodenstrahlenbündel ein mathematisch streng paralleles und die Brennspiegelfläche mathematisch streng eine Ebene wäre. Beides ist nun sicher nicht der Fall. Insofern kann die geringe, in der Auslöschstellung übrig bleibende Helligkeit mindestens zum Teil auf die Unebenheit der zwar glänzenden, aber nicht auf Hochspiegelglanz polierten Antikathodenplatte zurückgeführt werden. In der Tat hatten wir beim Vergleiche verschieden gut polierter Antikathodenplatten sehr den Eindruck, als ob der sich nicht auslöschenlassende Teil des Lichtes um so geringer würde, auf je höheren Spiegelglanz die Platte poliert ist. Es ist aber sehr schwer, hierüber eine abschließende Beobachtung zu machen, weil die Hochglanzpoli-

tur der Platte schon im Pumpprozeß etwas leidet. Es sei denn, daß man bei der Beobachtung des Lichtes andere Stellen der Antikathodenplatte benutzt, als die ursprünglich beim Pumpen von den Kathodenstrahlen getroffenen.

Aus der außerordentlich geringen, sich nicht auslöschenlassenden restlichen Helligkeit läßt sich eine Schätzung der unteren Grenze für die Dicke der leuchtenden Schicht ableiten. Nimmt man an, daß die Rauheit des Spiegels durch Unebenheiten von der Größenordnung von 500 $\mu\mu$ bedingt ist, so folgt, daß die leuchtende Schicht mindestens von der nächsten Größenordnung sein muß, also zum mindesten nach tausendstel Millimetern Dicke zu schätzen ist. Das sei aber hier ausdrücklich nur mit Vorbehalt als eine Schätzungs m ö g l i c h k e i t erwähnt.

§ 9. Die besprochenen Aufnahmen sagen noch nichts darüber aus, ob das Licht elliptisch oder linear polarisiert ist. Es war nun die z w e i t e, mit dem beschriebenen Apparat zu lösende Aufgabe, darüber eine Entscheidung zu fällen. Zu diesem Zwecke wurde vor den Nicol, wie beschrieben, eine S a v a r t sche Platte geschaltet. Es wurden wieder Aufnahmen unter einem Blickwinkel von etwa 45°, sowie Aufnahmen unter streifender Inzidenz hergestellt. Die Bilder sind unter V bis X auf Tafel I wiedergegeben, und zwar zeigt Bild V den Brennfleck im Streifenoptimum, Bild VI dieselbe Aufnahme, jedoch im Streifenminimum. Man erkennt, daß die Streifen restlos verschwunden sind. Analog sind die Bilder VII bis X in Profilstellung der Röhre, jedoch unter verschieden streifender Inzidenz aufgenommen. Es war dabei der Blickwinkel von Bild VII und VIII etwa 20°, der von Bild IX und X etwa 10°. Auch hier verschwinden im Streifenminimum die Streifen restlos. Die Expositionszeiten waren in allen Fällen gleich — 9 Minuten.

Man wolle beachten, daß sämtliche Aufnahmen an wie üblich unter 45° abgeschrägten Antikathoden angestellt wurden. Um die Untersuchung endgültig abzuschließen, hätte noch eine Aufnahme an einem Rohre gemacht werden müssen, bei welchem die Antikathode so nahe, wie das sich praktisch verwirklichen läßt, senkrecht zum Kathodenstrahlengange steht, da sich für diesen Fall die Art der Polarisation nicht mit Sicherheit aus dem bisherigen Versuchsmaterial ableiten läßt. Eine dafür geeignete Röhre soll demnächst hergestellt werden, wonach die Versuche nachgetragen werden sollen.

§ 10. Ergibt sich nun aus den ersten vier Aufnahmen I bis IV überhaupt eine Polarisation des sichtbaren Brennflecklichtes parallel zur Brennfleckebene, so folgt aus den Aufnahmen V bis X, daß die Schwingung des elektrischen Vektors noch in einem höheren Sinne geordnet ist, und zwar so, daß keine andere Schwingungsrichtung vorliegt, als einzig und allein die zur Schnittlinie der Symmetrieebene der Röhre mit der Antikathodenplatte parallele, — a l s o e i n e v ö l l i g l i n e a r e P o l a r i s a t i o n.

§ 11. Hinsichtlich der photographischen Technik sei darauf hingewiesen, daß aufs sorgfältigste auf das Einhalten genau gleicher Bedingungen geachtet wurde. Um ferner zu zeigen, daß das sonstige, etwa von der Glühlampe der Lilienfeldröhre herrührende Licht nicht in einem merklichen Maße auf die Platten eingewirkt hatte, wurde noch Aufnahme XI und XII hergestellt bei vollbeheizter Glühlampe, aber ohne daß die Entladung durch die Röhre eingeleitet worden wäre, und zwar befand sich bei Aufnahme XI die Optik in der Stellung des Streifenminimums, bei Aufnahme XII in der Stellung des Streifenoptimums. Die Belichtungszeit für diese beiden Aufnahmen betrug unter sonst völlig gleichen Umständen je 30 Minuten. — Für alle bisher beschriebenen Aufnahmen wurden H a u f f - U l t r a - R a p i d - Platten benutzt; die Entwicklungszeit betrug 6½ Minuten in Methol-Hydrochinon-Entwickler.

IV. D i e s p e k t r a l e U n t e r s u c h u n g.

§ 12. Die spektrale Untersuchung wurde so ausgeführt, daß an Stelle des in Fig. 1 schematisch angegebenen V o i g t schen Polarisationsphotometers ein lichtstarker S t e i n h e i l scher Spektrograph mit R u t h e r f o r d - Prisma so gesetzt wurde, daß der Brennfleck sich auf dem Spalte abbildete.

Es war wegen der eigenartigen Gestalt des Brennfleckes am vorteilhaftesten, die Röhre in Profil zu stellen und die Antikathode bei streifender Inzidenz anzuvisieren. So sind bei weitem die meisten Aufnahmen gemacht worden, von denen drei in den Figuren XIII, XIV, XVI wiedergegeben sind. Die Aufnahme XIII enthält das Spektrum eines — wie in der Einleitung erwähnt — besonders für Spektraluntersuchung hergestellten Rohres mit verbreitertem Brennfleck, welches durch günstigen Zufall so sauber ausgefallen war, daß auf der Antikathodenplatte leuchtende Pünktchen nicht vorhanden waren. Als orientierendes Vergleichsspektrum ist darüber dasjenige eines Heliumrohres abgebildet, welches auf der gleichen Platte durch Verschieben der Kassette parallel

zur Spaltrichtung erhalten wurde. In der gleichen Weise wurde das Spektrum Fig. XIV, welches durch ein leuchtendes Pünktchen an der Antikathode etwas entstellt ist nebst einem orientierenden Heliumspektrum und zwei Vergleichsspektren erhalten, und zwar sind die Vergleichsspektren diejenigen des Metallfadens einer Glühlampe, dessen Temperatur 1950° (mit dem Wannerschen Pyrometer bestimmt) war. Das erste, weniger durchexponierte Vergleichsspektrum ist so hergestellt, daß die Schwärzung im Rot-Orange ungefähr denselben Betrag hat wie diejenige des gleichen Gebiets im Brennfleckspektrum. Das zweite Vergleichsspektrum ist 2 1/2 mal länger exponiert. Der Vergleich ergibt, daß bei gleichem Schwärzungsbetrage im Rot-Orange das Brennfleckspektrum mit ungefähr gleichbleibendem Schwärzungsbetrage bis an diejenige kurzwellige Grenze reicht, welche unter Anwendung der beschriebenen Hilfsmittel zugänglich war, hingegen das Spektrum des Metallfadens kurz jenseits der blaugrünen Empfindlichkeitslücke der Platte mit einer ganz geringen Helligkeit abbricht. Bei dem 2 1/2 mal länger exponierten Metallfadenspektrum ist vom kurzwelligen Teil mehr zu sehen, jedoch bei weitem nicht soviel wie an der Brennfleckaufnahme, obwohl bei der letzteren Metallfadenaufnahme das Rot-Orange bereits erheblich gedeckter erscheint als bei der Brennfleckaufnahme.

Auf der Aufnahme XIV sieht man einen schwachen Längsstreifen, welcher im Grünblauen anfangend ins Kurzwellige hineinläuft. Dieser dürfte von einem fluoreszierenden, auf der Antikathode befindlichen Stäubchen herrühren, wie sie während des Herstellungsverfahrens der Röhre vom Lötmittel oder anderen angewandten Chemikalien manchmal zurückgelassen zu werden pflegen. Der kräftigere Streifen, welcher durch das ganze Spektrum durchläuft, aber im Vergleiche zum eigentlichen Brennfleckspektrum nach dem kurzwelligen Ende außerordentlich viel stärker abklingt, rührt von einem im Brennfleck stark erhitzten und intensiv weiß strahlenden Staubteilchen her.

Außer den beschriebenen, bei streifender Inzidenz aufgenommenen Spektren sind noch welche unter einem Blickwinkel von 45° auf die Antikathode aufgenommen worden, man vergleiche Fig. 1. Ein derartiges Spektrum ist bereits von einem von uns früher („Bericht", Tafel I) veröffentlicht worden. Da aber die damaligen Aufnahmen in Ermangelung rotempfindlicher Platten auf blauempfindlichen hergestellt waren und demgemäß der langwellige Teil an ihnen nicht sichtbar war, mag hier die Aufnahme nachgetragen werden. Die Fig. XV zeigt außer einem orientierenden Heliumspektrum zwei Brennfleckaufnahmen, zwischen welche ein Metallfadenspektrum eingefügt ist, welches wieder im Rot-Orange sehr viel intensiver gedeckt ist und trotzdem nach dem kurzwelligen Ende zu bedeutend schneller abklingt als die Brennfleckspektren.

§ 13. Die bisher in diesem Paragraphen besprochenen Spektralaufnahmen sind auf in der Emulsion mit Pinacyanol sensibilisierten Platten der Firma Perutz in München hergestellt. Die Aufnahmen zeigen das diesem Sensibilisator charakteristische Sensibilisierungsmaximum im Rot. Man erkennt, daß nach den langen Wellen zu das Spektrum der Brennfleckstrahlung jedenfalls nicht durch eine Eigenart des Spektrums, sondern durch die Abklingungsgrenze der Sensibilisierungsbande beschränkt erscheint.

Hinsichtlich der sowohl dem Brennflecklicht als auch dem Metallfadenspektrum gemeinsamen Lücke im Blaugrünen ist zu erwähnen, daß sie mit der in diesem Gebiete vorhandenen Sensibilisierungslücke zusammenfällt. Zwecks Ausfüllung dieser Lücke wurden Versuche mit anders sensibilisierten, beispielsweise mit gelbgrünempfindlichen, sogenannten orthochromatischen Platten ausgeführt. Diese Versuchsaufnahmen ergaben aber keine wesentlich anderen Bilder — weil auch diese Platten eine ähnliche Lücke aufweisen, — so daß von einer Wiedergabe der Bilder hier abgesehen wurde.

Nicht unberücksichtigt bleiben darf die durch die dem Röntgenröhrenglas eigene, sich im Laufe des Betriebes einstellende blauviolette Färbung verursachte Filterwirkung. Da aber die diesbezügliche Absorptionsbande gerade in die Sensibilisierungslücke der rotempfindlichen Platte fällt, darf von der Erörterung dieser Fehlerquelle abgesehen werden, wie ein Vergleich zwischen den Aufnahmen XIII und XIV zeigt, von denen die erste an einer intensiv gefärbten, letztere an einer noch wenig gebrauchten, ungefärbten Röhre gemacht ist.

§ 14. Zusammenfassend kann über die Spektralaufnahmen gesagt werden, daß das Auffallendste an ihnen erstens das temperaturähnliche, kontinuierliche Aussehen des Spektrums, zweitens aber die bei den benutzten Hilfsmitteln nach dem kurzwelligen zu unbegrenzt erscheinende, auf eine außerordentlich hohe Temperatur hinweisende Schwärzungsintensität ist.

V. Brennfleckgestalt.

§ 15. Nicht unmittelbar zum Thema ge-

hörend, aber doch von Interesse ist es, die Brennfleckform mit Hilfe des sichtbaren Brennflecklichts aufzunehmen. Und zwar deshalb, weil gegenüber Lochkameraaufnahmen der Röntgenstrahlung eine aus naheliegenden Gründen korrektere Abbildung zu erwarten ist. Wir haben Aufnahmen unter ungefähr 45° Blickrichtung gemacht, die eine — (leider infolge glühender Stäubchen unsauber geratene) — mit 28 mm Schlagweite (Fig. XVI) und 15 Milliamp., die andere mit 54 mm Schlagweite (Fig. XVII) und 12 Milliamp. Entsprechend den geringen Schlagweiten ist bei beiden Aufnahmen die Röhre als außerordentlich weich eingestellt zu bezeichnen. Es ist recht beachtenswert, daß der elliptisch abgebildete Brennfleck bei weicher Einstellung kleiner, bei harter größer ist, die Ellipsen aber einander ähnlich bleiben. Das entspricht dem Bilde, daß die in der konischen Bohrung der Kathode konvergent nach der Antikathode zu gerichteten Elektronen bei wachsendem elektrostatischen, von der Antikathode herrührenden Felde so beeinflußt werden, daß sie um so paralleler verlaufen, je höhere Spannung anliegt. Ferner ist gegenüber von anderer Seite aufgestellter Behauptung von Interesse darauf hinzuweisen, daß der Brennfleck durchaus symmetrisch auch bei den geringsten Spannungen ist, insbesondere, daß selbst dann der kleine zentrale Ring nicht weniger genau in der Mitte sitzt als bei höheren Spannungen.

VI. Eine Überlegung allgemeinerer Art.

§ 16. Wie bereits in der Einleitung erwähnt wurde, ist von dem Einen von uns („Bericht", § 27) aus den spektralen Beobachtungen darauf geschlossen worden, daß das graublaue Brennflecklicht von einer Schwingung derjenigen Elektronen herrührt, welche in Form einer Wolke der Metallfläche des Antikathodenspiegels vorgelagert sind. Diese Elektronen werden durch den aufprallenden Kathodenstrahl in eine lebhafte Bewegung versetzt, bei welcher die Energie temperaturähnlich über die einzelnen Elektronen verteilt ist. Dementsprechend müssen in dem Elektronenschwarm sämtliche Geschwindigkeiten vertreten sein von ganz geringen anfangend bis zu denjenigen, welche der Geschwindigkeit der primären Kathodenstrahlen gleichkommt. Ein solcher Bewegungszustand bleibt naturgemäß nicht auf die dem Metall vorgelagerte Elektronenschicht beschränkt („Bericht", § 29), sondern er greift auch auf innerhalb des Metalls befindliche Elektronen über, und zwar um so tiefer, je größer die Geschwindigkeit der primären Kathodenstrahlen ist. Die sichtbare, blaugraue Brennfleckstrahlung rührt aber offenbar nur von demjenigen Teile der in Bewegung befindlichen Elektronen her, welche der Antikathode vorgelagert sind, da ja sichtbares Licht aus größeren Tiefen im Metall nicht hervordringt. Anders ist es mit der Röntgenstrahlung, welche auch aus tieferen Metallschichten zur Wahrnehmung gelangt.

In der Tat: wenn man sich der von dem Einen von uns vertretenen Auffassung („Bericht", § 29) anschließt, daß zum mindesten ein Teil des kontinuierlichen Röntgenspektrums die Fortsetzung des sichtbaren Spektrums darstellt und in gleicher Weise wie das blaugraue Brennflecklicht seitens der innerhalb der von den Kathodenstrahlen erregten Schicht schwingenden Elektronen ausgesandt wird, so darf nicht unbeachtet bleiben, daß für diese Betrachtung die Schicht in zwei Gebiete zu verteilen ist.

Erstens in dasjenige der dem Metall vorgelagerten Elektronen. In diesem Gebiete spielen sich die Bewegungen hauptsächlich unter dem Einfluß der dem Antikathodenspiegel im Raum vorgelagerten Kraftfelder ab, ohne daß eine erhebliche Störung infolge von Zusammenstößen mit Atomen der Antikathode in Frage käme. Dadurch wird es verständlich, daß ein in so hohem Grade geordneter Bewegungszustand hervorgebracht wird, wie er gedacht werden muß, damit linear polarisiertes Licht entstehe. In diesem Zusammenhange erscheint es nicht unwahrscheinlich, daß die im besprochenen Schichtgebiet erzeugte Röntgenstrahlung bei näherer Untersuchung sich mindestens als zu einem erheblichen Teil ähnlich polarisiert erweisen wird, wie das für das graublaue Licht angegeben wurde[1]).

Dem zweiten Gebiet der von den Kathodenstrahlen erregten Elektronenschicht aber, — welches tiefer im Metall sich befindet und von welchem aus demzufolge kein sichtbares Licht, sondern ausschließlich Röntgenstrahlung zur Wahrnehmung gelangen kann — dürfte ein in ähnlich hohem Grade geordneter Be-

1) In der bisherigen Literatur mitgeteilte Beobachtungen über den Polarisationszustand der Röntgenstrahlung widersprechen nicht der Annahme, daß ein Teil der Strahlung in der nämlichen Weise polarisiert ist, wie das für die blaugraue Brennfleckstrahlung gefunden wurde. Denn die durch die Schnittlinie der Symmetrieebene des Rohres mit dem Antikathodenspiegel gegebene Schwingungsrichtung weist eine erhebliche Komponente auch in derjenigen Richtung auf, in welcher das Vorhandensein einer Polarisation der Röntgenstrahlung seitens anderer Autoren behauptet wird, nämlich eine Komponente parallel zu dem primären Kathodenstrahlenbündel.

wegungszustand nicht mehr zukommen, weil hier der Raum von Metallatomen erfüllt ist. Es ist deshalb anzunehmen, daß die in diesem Gebiet ausgestrahlte Röntgenstrahlung sich als zu einem Teil oder gar nicht polarisiert erweisen wird.

§ 17. Die Tatsache selbst, daß die die graublaue Strahlung emittierende Schwingung parallel zur Brennfleckebene erfolgt, darf sehr wohl überraschend genannt werden. Sie ist von dem einen von uns im Zusammenhang mit verschiedenen anderen Erscheinungen, so auch mit den Fluoreszenzerscheinungen, dahin gedeutet worden, daß der Schwingungsvorgang innerhalb der als dem Brennfleck in kleinsten Dimensionen vorgelagert zu denkenden Doppelschicht sich abspielend aufzufassen ist. Die Elektronen bewegen sich gemäß dieser Vorstellung zwischen zwei positiven Schichtbelegen, von denen der eine längs der Oberfläche des Antikathodenmetalls, der andere auf einer dem Brennfleck vorgelagerten Fläche angeordnet ist (vgl. „Bericht", § 28, besonders Fig. 20).

Daß aber bei schräg zum Kathodenstrahl geneigter Antikathode nicht beliebige, zur Brennfleckebene parallele Schwingungsrichtungen vorkommen, vielmehr die Schwingung so gut wie ausschließlich in der Symmetrieebene der Röhre stattfindet, macht noch eine besondere Annahme erforderlich, dergestalt, daß die Resultate der auf die Elektronen ausgeübten Kräfte in die beobachtete Schwingungsrichtung fällt. Eine mögliche Vorstellung ist die, daß das allgemeine, in der Röhre bestehende Feld die Struktur der Doppelschicht in entsprechender Weise beeinflußt. Das Bestehen linearer Polarisation kann aber andererseits — unter Umständen auch ohne auf die Doppelschicht einzugehen — in Zusammenhang damit gebracht werden, daß eine erhebliche Geschwindigkeitskomponente der im Brennfleck aufprallenden Elektronen in die tatsächliche Schwingungsrichtung des lichtemittierenden Vorgangs fällt, während senkrecht dazu eine zur Brennfleckebene parallele Komponente nicht vorhanden ist. Wir möchten es vor der Hand dem Ergebnis fernerer Studien vorbehalten, welche der zwei Vorstellungen dem tatsächlichen Sachverhalt besser entspricht oder ob sie beide sich zu einem einheitlichen Bilde vereinigen lassen werden.

§ 18. Zum Schluß seien noch einige Worte über denjenigen Anteil der Strahlung gesagt, welcher unpolarisiert erscheint, seiner Intensität nach aber freilich an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegt. Das Vorhandensein eines solchen Anteils ist zweier verschiedener Deutungen fähig. Die eine mögliche Annahme ist die, daß selbst in dem idealen Falle, in welchem der Antikathodenspiegel eine mathematische Ebene wäre und die Kathodenstrahlen streng parallel zur Symmetrieebene der Röhre verliefen, ein ganz geringer Anteil des ausgestrahlten Lichtes unpolarisiert wäre. Diese Annahme würde in dem gegebenen Bilde dahin zu deuten sein, daß ein geringer Teil der Energie der linear geordneten Schwingungsbewegung des gedachten Elektronenschwarms sich einer ungeordneten Bewegung mitteilt. — Die andere mögliche Annahme ist aber die, daß in dem oben gekennzeichneten Idealfalle der mathematisch genau ebenen Brennfleckfläche und der parallelen Kathodenstrahlführung das Licht restlos polarisiert erscheinen würde, daß also das Experiment einen geringen Rest unpolarisierten Lichtes deshalb zeigt, weil — wie §§ 7 und 8 des näheren ausgeführt wurde — der Antikathodenspiegel gewisse Rauhigkeiten besitzt und weil die Kathodenstrahlelektronen immerhin nicht streng parallele Bahnen beschreiben. Auch hier beabsichtigen wir nicht, eine Entscheidung zwischen den beiden Annahmen zu treffen, besonders weil selbst im Falle des Zurechtbestehens der ersten Annahme ein Anteil der unpolarisierten Strahlung ursächlich mit den zur zweiten Annahme angeführten Gründen zusammenhängen kann.

VIII. Zusammenfassung.

Es wurden an der blaugrauen Brennfleckstrahlung Untersuchungen ausgeführt, zum Zweck der Feststellung ihrer Polarisation und ihres Spektrums. Benutzt wurden Lilienfeldröhren mit besonders breitem Brennfleck und annähernd unter 45° zur Kathodenstrahlenrichtung geneigten Antikathode bei weicher Schaltung (bis zu 90 mm Äquivalentschlagweite).

Die Polarisationsuntersuchung ergab, daß die Strahlung bis auf einen geringen, an der Grenze der Wahrnehmbarkeit liegenden Rest derartig linear polarisiert ist, daß der elektrische Vektor parallel zur Brennfleckebene in der Schnittlinie dieser Ebene mit der Symmetrieebene der Röhre liegt.

Die spektrale Untersuchung ergab ein kontinuierliches, temperaturähnliches Spektrum, dessen Grenzen nach beiden Seiten durch nichts anderes als durch die zur Beobachtung angewandten Hilfsmittel und Methoden bedingt sind. Besonders auffallend ist, daß die Intensität des kurzwelligen Spektrumteils im Verhältnis zu dem langwelligen Teil ganz außerordentlich viel größer ist als bei andern be-

kannten Lichtquellen, so daß der mutmaßlichen Temperatur eine außerordentliche Höhe beigelegt werden muß, zu deren Bestimmung die Untersuchung von dem einen von uns fortgesetzt wird.

Das graublaue Brennflecklicht wird ursächlich auf die Schwingung der dem Metall vorgelagerten, durch die Kathodenstrahlen erregten Elektronenschicht zurückgeführt und der Zusammenhang des Vorgangs mit tiefer im Metall gelegenen Elektronen und auch mit der Röntgenstrahlung dahin gedeutet, daß mindestens ein Teil des kontinuierlichen Röntgenspektrums eine Fortsetzung des Spektrums der sichtbaren Strahlung darstellen dürfte. Auch einige andere Überlegungen allgemeiner Natur werden an diese Auffassung geknüpft. So der Zusammenhang der Polarisation mit der Doppelschicht im Brennfleck u. a. m.

Als nicht unmittelbar mit dem Gegenstand der Untersuchung zusammenhängendes, aber doch interessantes Ergebnis, wird die Tatsache mitgeteilt, daß die Durchmesser der Brennfleckellipse der Lilienfeldröhre mit steigender Spannung wachsen, die Ellipse sich aber ähnlich bleibt.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, 26. Januar 1920.

(Eingegangen 29. Januar 1920.)

Ausschaltung der Ergodenhypothese in der physikalischen Statistik II.

Brownsche Bewegung als Beispiel.

Von R. v. Mises.

Zu den im ersten Teil dieser Note (diese Zeitschr. **21**, 225, 1920) gegebenen „Allgemeinen Betrachtungen" wird im folgenden als Beispiel die Theorie der Brownschen Bewegung kurz dargestellt. Dabei handelt es sich nur darum, die Übergänge, die sonst durch stillschweigende Einführung einer Ergodenhypothese gewonnen werden, durch logisch einwandfreie Überlegungen zu ersetzen.

1. Das erste Ausgangs-Kollektiv und seine Ableitungen. (Virtuelle und Raumgesamtheit.) Wir gehen von folgendem einfachen Modell der Brownschen Bewegung aus. In einem parallelepipedisch abgegrenzten Teil des dreidimensionalen Raumes seien die Punkte, deren Koordinaten ganze Vielfache einer Einheit a sind, als „Standorte" der einzelnen Partikelchen ausgezeichnet. Zu Zeiten, die ganze Vielfache einer Zeiteinheit τ sind, sollen die Teilchen, deren Gesamtzahl n ist und die als untereinander völlig gleich angesehen werden, sich ausschließlich in den N Punkten jenes Punktgitters befinden. Sowohl a als τ stellen wir uns außerordentlich klein vor gegenüber den Längen und Zeiten, die den kleinsten, bisher beobachteten entsprechen.

Das erste Ausgangs-Kollektiv, das wir ins Auge fassen, habe zum Element ein einzelnes Teilchen, oder genauer die Beobachtung der Lage eines Teilchens zu einem bestimmten ausgezeichneten Zeitpunkt. Merkmal des Elements sei die zwischen 1 und N gelegene Zahl, die den Standort des Teilchens angibt. Die Verteilung innerhalb dieses Kollektivs nehmen wir als gleichförmig an, d. h. wir erklären: 1. Die Wahrscheinlichkeit für ein einzelnes Teilchen, sich zu einer feststehenden Zeit in einem beliebigen der N Gitterpunkte aufzuhalten, ist — laut Annahme — gleich $1:N$. Einer Erklärung bedarf hier der Begriff der „feststehenden Zeit", der von der Art der Beobachtung abhängt. Gemeint kann natürlich nur sein, daß innerhalb jeder Einzelbeobachtung der Zeitpunkt feststeht, also z. B.: man denkt sich alle Teilchen in irgendeiner mechanischen Weise durcheinander gemengt und unmittelbar darauf ($t = 0$) die Lage des betreffenden Teilchens beobachtet, dann in gleicher Weise gemengt und wieder beobachtet usf.; wenn dieses Verfahren unbeschränkt oft wiederholt wird, soll die relative Häufigkeit jedes einzelnen Standortes sich für ein bestimmtes Teilchen dem Wert $1:N$ nähern.

Aus diesem Ausgangs-Kollektiv, oder eigentlich aus n derartigen, völlig gleichen, Kollektivs leiten wir ein neues wie folgt ab. Element sei jetzt die (der eben beschriebenen analoge) Beobachtung einer Gruppe von n Partikelchen hinsichtlich ihrer Standorte zur festgesetzten Zeit $t = 0$, und Merkmal die Zahl x der Teilchen, die sich gerade in einem bestimmten der N Standorte, z. B. im Nullpunkt des Koordinatensystems, aufhalten. Man gelangt zu diesem Kollektiv durch die Operation der „n-fachen Verbindung", die als Element schon das von uns gewünschte, als Merkmal aber die Gesamtheit der n Lagenangaben aller Teilchen aufweist, und durch darauf folgende „Mischung", die alle jene Merkmale zusammenwirft, die gleiches x besitzen. Jeder der N^n Aufstellungsmöglichkeiten kommt innerhalb der „Verbindung" dieselbe Wahrscheinlichkeit N^{-n} zu, und um die Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ für unser Kollektiv zu erhalten, müssen wir so viele N^{-n} zusammennehmen, als verschiedene Aufstellungen bei glei-

chem x vorhanden sind. So entsteht die bekannte (Bernoullische) Formel:

$$w_n(x) = \binom{n}{x}(N-1)^{n-x}N^{-n} = $$
$$= \binom{n}{x}\left(\frac{1}{N}\right)^x\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-x}. \quad (1)$$

Wenn n und N große Zahlen werden, aber derart, daß $n:N=\nu$ und auch x endlich bleiben, so kann man (1) auch vereinfachen:

$$w_n(x) = \frac{1}{x!}\left(\frac{n}{N}\right)^x\left(1-\frac{1}{N}\right)^{N\nu}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{N}}\;\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{N}}\cdots\cdots\frac{1-\frac{x-1}{n}}{1-\frac{1}{N}}\right]\sim\frac{\nu^x e^{-\nu}}{x!}, \quad (2)$$

da die x Brüche in der eckigen Klammer sich sehr wenig von der Einheit unterscheiden. Wir haben also für die Verteilung innerhalb des jetzt betrachteten Kollektivs den Satz: 2. Die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Teilchenzahl x in einem bestimmten Punkt des Gitters zu einer feststehenden Zeit ist $w_n(x)$ nach Gleichung (1), bzw. bei großem n und N, aber endlichem ν und x, nach Gleichung (2). Die Prüfung dieses Satzes im Gedankenexperiment hat wieder in der Weise zu erfolgen, daß vor jeder der unendlich vielen Beobachtungen die Teilchen irgendwie durcheinander gemengt werden. Das hier betrachtete Kollektiv entspricht ungefähr dem, was man bisher die „virtuelle Gesamtheit" der Teilchen zu nennen pflegte.

Wir betrachten nun ein drittes Kollektiv, das ebenso wie das zweite aus dem oben eingeführten Ausgangs-Kollektiv hervorgeht und das ungefähr der bisherigen „Raumgesamtheit" entspricht. Man gelangt hierzu, wenn man die bereits erwähnte „n-fache Verbindung" des Ausgangs-Kollektivs einer anderen „Mischung" unterwirft. Wir wollen jetzt alle jene Aufstellungen der n Teilchen zusammenwerfen, bei denen die feste Teilchenzahl x an genau $z = Ny$ Punkten auftritt. Gefragt ist also nach der von x abhängigen Wahrscheinlichkeit $f_n(y; x)$ dafür, daß innerhalb einer Aufstellung der n Teilchen genau x-fach besetzte Punkte gerade in der relativen Anzahl y vorhanden sind. Die vollständige Berechnung der Funktion f_n mit der unabhängig Veränderlichen y und dem Parameter x wäre zu langwierig und für unsere Zwecke ohne Interesse. Wir begnügen uns damit, den „Mittelwert" a und die „Streuung" s^2 der Verteilung f_n zu ermitteln, die durch die zweite und dritte der folgenden Gleichungen

$$\sum_y f_n(y;x) = 1, \qquad \sum_y y f_n(y;x) = a(x),$$
$$\sum_y (y-a)^2 f_n(y;x) = \sum_y y^2 f_n(y;x) - a^2 = s^2(x) \quad (3)$$

definiert werden, während die erste aus dem Begriff der Wahrscheinlichkeit folgt; die Summen sind über sämtliche mögliche Werte von y zu erstrecken. Aus der Kenntnis von a und s^2 werden wir alle für uns notwendigen Resultate gewinnen.

Um den Mittelwert a zu berechnen, denken wir uns zunächst x aus den n Teilchen herausgehoben, was auf $\binom{n}{x}$ verschiedene Arten möglich ist, dann für sie eine unter den N verfügbaren Stellen ausgewählt, was auf N Weisen geschehen kann, und schließlich die übrigen $n-x$ Teilchen auf die übrigen $N-1$-Plätze verteilt, wofür es $(N-1)^{n-x}$ Ausführungsarten gibt. In der Anzahl $\binom{n}{x}N(N-1)^{n-x}$ sind alle Aufstellungen mit wenigstens einer x-fach besetzten Stelle enthalten, es sind aber dabei solche Aufstellungen, die nicht eine, sondern z solcher Stellen aufweisen, nicht einmal, sondern eben z-mal gezählt. Man hat somit

$$\sum_y z f_n(y;x) = \binom{n}{x}N(N-1)^{n-x}N^{-n},$$

da, wie oben erwähnt, die Wahrscheinlichkeit jeder Aufstellung N^{-n} ist; daher mit $z = Ny$:

$$a(x) = \sum_y y f_n(y;x) = \binom{n}{x}(N-1)^{n-x}N^{-n} = w_n(x) \quad (4)$$

nach Gleichung (1). Um die Streuung s^2 zu finden, gehen wir ganz analog vor: Wir wählen zunächst $2x$ von den n Teilchen, was auf $\binom{n}{2x}$ Arten möglich ist, zerlegen sie zu je x in zwei Gruppen, was $\binom{2x}{x}$ Möglichkeiten ergibt, stellen diese auf eine der $\frac{1}{2}N(N-1)$ möglichen Weisen auf zwei unter den N Plätzen auf und verteilen schließlich die übrigen $n-2x$ Teilchen auf die noch freien $N-2$ Plätze, was in $(N-2)^{n-2x}$ verschiedenen Arten ausgeführt werden kann. In der durch das Produkt dieser vier Faktoren gegebenen Anzahl sind alle Aufstellungen mit mindestens zwei x-fach besetzten Plätzen enthalten, und zwar jene mit $z > 2$ solchen Plätzen

gerade $\frac{1}{2} z(z-1)$mal. Wir haben also die Gleichung

$$\frac{1}{2}\sum_y z(z-1) f_n(y;x) =$$

$$= \binom{n}{2x}\binom{2x}{x} \frac{1}{2} N(N-1)(N-2)^{n-2x} N^{-n},$$

aus der sich mit $z = Ny$ unter Berücksichtigung von (3) ergibt:

$$s^2(x) = \frac{1}{N^2}\left[\sum_y z f_n(y;x) + \sum_y z(z-1) f_n(y;x)\right] - a^2$$

$$= \frac{a}{N} + \left(1-\frac{1}{N}\right)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n \frac{(N-2)^{-2x} n!}{(n-2x)!\,x!\,x!}$$

$$\left[1 - \frac{\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n-2x-1}}{\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-2x}} \cdot \frac{n!\,(n-2x)!}{(n-x)!\,(n-x)!}\right].$$

Da der Ausdruck in der eckigen Klammer sich bei großem N als negativ erweist, nämlich ungefähr gleich

$$1 - \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-x+1)}{(n-x)(n-x-1)\cdots(n-2x+1)} < 0,$$

während s^2 selbst notwendig positiv sein muß, haben wir in

$$s^2(x) < \frac{a}{N} = \frac{w_n(x)}{N} \tag{5}$$

den Ausdruck dafür, daß die Streuung mit wachsendem N unbeschränkt gegen Null abnimmt, daß sich also die Verteilung $f_n(y;x)$ an der Stelle ihres Mittelwertes, d. h. für $y = w_n(x)$, mehr und mehr verdichtet. Wir drücken dies in dem Satz aus: 3. *Es ist bei großem N mit erdrückender Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß die verhältnismäßige Anzahl der Stellen, an denen sich gerade x Teilchen befinden, sehr nahe bei $w_n(x)$ liegt, wobei für $w_n(x)$ der Wert (1), ev. bei großem n, aber endlichen ν, x der Wert (2) zu setzen ist.* Auch hier ist vor jeder Beobachtung einer Anzahl Ny von Stellen mit x Teilchen eine Mischung der gesamten Emulsion vorgenommen zu denken.

Es ist zu beachten, daß in unserer Ableitung nirgends etwa die Folge der N Teilchenzahlen x, die den einzelnen Gitterpunkten entsprechen, als die den Elementen eines Kollektivs zugeordneten Merkmale aufgefaßt wurden; die Forderung der „Regellosigkeit" ist bei dieser Zahlenfolge nicht erfüllt.

Die übliche Darstellung des hier besprochenen Sachverhaltes schwankt zwischen der Auffassung, wonach die Aussagen 2 und 3 überhaupt nicht unterschieden werden, und jener, wonach 2 und 3 unabhängige Eigenschaften einer „virtuellen" bzw. einer „räumlichen" Gesamtheit bedeuten.

2. *Das zweite Ausgangs-Kollektiv und seine Ableitungen.* (Zeitgesamtheit.) Wir wählen jetzt als Grundlage der weiteren Betrachtungen folgendes Kollektiv. Element sei die Beobachtung eines Teilchens zu Beginn und zu Ende einer Zeitspanne τ, Merkmal die Lagenänderung in dieser Zeit, also die Angabe der drei Koordinaten des neuen Standortes bezogen auf den ursprünglichen. Nach der oben getroffenen Festsetzung läßt sich dieses Merkmal stets durch drei ganze Zahlen $\varkappa$, λ, μ ausdrücken. Über die diesem Kollektiv zugehörige Verteilung setzen wir nur voraus, daß die Wahrscheinlichkeiten $p_{\varkappa\lambda\mu}$ in bezug auf die Vorzeichen der $\varkappa$, λ, μ Symmetrie besitzen und daß die drei „Streuungs-Komponenten" untereinander gleich und von null verschieden sind, also

$$\sum_{\varkappa\lambda\mu} p_{\varkappa\lambda\mu} = 1, \quad \sum_\varkappa \varkappa p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_\lambda \lambda p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_\mu \mu p_{\varkappa\lambda\mu} = 0$$

$$\sum_\varkappa \varkappa^2 p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_\lambda \lambda^2 p_{\varkappa\lambda\mu} = \sum_\mu \mu^2 p_{\varkappa\lambda\mu} = r^2 \pm 0. \tag{6}$$

Schließlich sollen nach jeder der drei Koordinatenrichtungen wenigstens zwei Verschiebungen, die sich nur um eine Einheit unterscheiden, möglich sein, was z. B. erfüllt ist, wenn außer p_{000} auch p_{001}, p_{010} und p_{100} nicht verschwinden.

Die Gleichungen (6) bringen zum Ausdruck, daß keine der drei Koordinatenrichtungen vor den anderen bevorzugt ist, wie es etwa durch den Einfluß einer äußeren Kraft bedingt sein könnte. Einer Ergänzung bedarf die Festsetzung über die $p_{\varkappa\lambda\mu}$ noch hinsichtlich des Verhaltens an den Grenzen. Wir nehmen entweder an, daß die Grenzen soweit entfernt seien, daß sie für alle unsere Fragen ohne Bedeutung bleiben, oder wir denken uns jedes Teilchen, wenn es die begrenzende Wand erreicht, an dieser reflektiert und so den Punkten außerhalb unseres Bereiches bestimmte innere Punkte zugeordnet. Bei der letzteren Annahme wird, wie bekannt, der Einfluß etwaiger zu Beginn der Beobachtung außerhalb der Grenzen liegender Teilchen auf das Innere richtig beurteilt. Jedenfalls können wir in der einen oder anderen Weise die Werte der $p_{\varkappa\lambda\mu}$ von der Anfangslage des Teilchens unabhängig ansehen und sonach feststellen: 1'. *Die Verschiebung eines Teilchens im Zeitraum τ um die Strecken $\varkappa\alpha$, $\lambda\alpha$, $\mu\alpha$ in den drei Koordinatenrichtungen besitzt — laut Annahme — die Wahrscheinlichkeit $p_{\varkappa\lambda\mu}$, für die (6) gilt.*

Durch „Verbindung" von m Kollektivs, die alle dem eben besprochenen gleich sind, entsteht ein neues, dessen Element die Beobachtung eines Teilchens durch m aufeinander-

folgende Zeitspannen und dessen Merkmal die Angabe der $3m$, die m Lagenänderungen charakterisierenden Zahlen $x_1, \lambda_1, \mu_1, x_2 \cdots\cdots \mu_m$ bildet. Wir vollziehen an dem Ergebnis dieser Verbindung eine „Mischung", indem wir alle jene Merkmale zusammenwerfen, die gleiche Summe der $x_1 + x_2 + \cdots x_m = x$, $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots \lambda_m = \lambda$ und $\mu_1 + \mu_2 + \cdots\cdots \mu_m = \mu$ ergeben, und bezeichnen die zugehörige Wahrscheinlichkeit einer Verschiebung $x\alpha, \lambda\alpha, \mu\alpha$ mit $v_m(x, \lambda, \mu)$. Nach dem „ersten Fundamentalsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung" wird unter den für die $p_{x\lambda\mu}$ gemachten Voraussetzungen, bei großem m:[1])

$$v_m(x, \lambda, \mu) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi r^2 m)^3}} e^{-\frac{x^2+\lambda^2+\mu^2}{2r^2 m}} \tag{7}$$

Die genaue Form dieser Funktion ist übrigens für uns nicht weiter von Bedeutung, wichtig ist nur: 2'. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Teilchen in m aufeinanderfolgenden Zeitspannen die Lagenänderung $x\alpha, \lambda\alpha, \mu\alpha$ erfährt, wird durch eine Funktion $v_m(x, \lambda, \mu)$ dargestellt, die sich bei großem m so verhält wie der Ausdruck (7). Die Nachprüfung dieses Satzes muß man sich so denken, daß zuerst alle Teilchen durcheinandergemengt, dann zu Beginn und zu Ende des Zeitraumes $m\tau$ die Lagen des hervorgehobenen Teilchens beobachtet werden; dann wird wieder künstlich gemengt und beobachtet usf. in infinitum.

Wir gehen nun zu zwei Kollektivs über, die durch verschiedene „Mischungen" aus einer und derselben „Verbindung" entstehen. Seien wieder, wie früher, die einzelnen Standorte der Teilchen durchlaufend mit den Ziffern 1 bis N bezeichnet und es sei eine „Aufstellung" von n Teilchen durch Angabe der auf die einzelnen Standorte entfallenden Teilchenzahlen $n_1, n_2, \cdots\cdots n_N$ gegeben. Zur Abkürzung schreiben wir für diese N Zahlen, deren Summe n ist, auch $\mathfrak{n}$ (Vektor mit den Komponenten $n_1, n_2 \cdots n_N$). Element eines Kollektivs sei nun zunächst die Beobachtung der n Teilchen zu Beginn und zu Ende der Zeit τ. Jedem der möglichen Systeme von Lagenänderungen entspricht als Wahrscheinlichkeit ein bestimmtes Produkt von n Faktoren $p_{x\lambda\mu}$. Wird aber als Merkmal nur die neue „Aufstellung" $\mathfrak{n}'$, die durch die N Anzahlen n_1', $n_2' \cdots\cdots n'_N$ gegeben ist, betrachtet, so hat man eine von $\mathfrak{n}'$ und $\mathfrak{n}''$ abhängige Funktion $V(\mathfrak{n}'; \mathfrak{n})$ als Wahrscheinlichkeit für den Übergang von $\mathfrak{n}$ zu $\mathfrak{n}'$, gleich einer Summe gewisser jener Produkte. Verbindet man nun m Kollektivs dieser Art, so erhält man als Wahrscheinlichkeit für die Aufeinanderfolge der Zustände $\mathfrak{n}, \mathfrak{n}', \mathfrak{n}'' \cdots\cdots \mathfrak{n}^{(m)}$ das Produkt $V(\mathfrak{n}'; \mathfrak{n}) V(\mathfrak{n}''; \mathfrak{n}') \cdots V(\mathfrak{n}^{(m)}; \mathfrak{n}^{(m-1)})$. Uns interessieren nur zwei Mischungen aus diesem Kollektiv.

Einmal werfen wir alle jene Folgen von m Aufstellungen zusammen, bei denen am Schluß, d. i. nach der Zeit $m\tau$, sich in einem bestimmten Standort gerade x Teilchen befinden, also so, daß etwa $n_1^{(m)} = x$. Um die zugehörige Wahrscheinlichkeit $f_{n\,m}(x)$ zu finden, müßten wir eigentlich die Summe aller Produkte $V(\mathfrak{n}'; \mathfrak{n}) \cdots\cdots V(\mathfrak{n}^{(m)}; \mathfrak{n}^{(m-1)})$ bei festgehaltenen $n_1, n_2 \cdots\cdots n_N$ und $n_1^{(m)} = x$ bilden. Man gelangt aber zu demselben Resultat, wenn man bedenkt, daß eine der fraglichen Schlußaufstellungen nur dadurch zustande kommen kann, daß von den n_ι Teilchen, die zu Anfang die Koordinaten $x_\iota\alpha, \lambda_\iota\alpha, \mu_\iota\alpha$ gehabt haben mögen, gerade z_ι die Verschiebung $(x_1 - x_\iota)\alpha$, $(\lambda_1 - \lambda_\iota)\alpha$, $(\mu_1 - \mu_\iota)\alpha$ erfahren, wobei $z_1 + z_2 + \cdots z_N = x$ ist. Setzen wir $x_1 = \lambda_1 = \mu_1 = 0$, betrachten also die Teilchenzahl x im Anfangspunkt des Koordinatensystems, und schreiben wir für $v_m(x_\iota, \lambda_\iota, \mu_\iota)$ kurz v_ι, so muß $f_{n,m}(x)$ der Koeffizient von t^x in der Entwicklung des Produktes

$$\prod_{\iota=1}^{N} (1 - v_\iota + t v_\iota)^{n_\iota} \tag{8}$$

sein. Denn dieser Koeffizient umfaßt alle Produkte von der Form $v_\iota^{z_\iota}(1 - v_\iota)^{n_\iota - z_\iota}$ mit der Bedingung $z_1 + z_2 + \cdots z_N = x$, jedes Produkt mit dem Zahlenfaktor versehen, der den verschiedenen Auswahlmöglichkeiten von z_ι Teilchen unter n_ι entspricht.

Es ist nicht schwer, die Koeffizienten $f_{n\,m}(x)$ von (8) zu berechnen, wenn man voraussetzt, daß n groß wird, dabei aber

$$\nu = \sum_{\iota=1}^{N} v_\iota n_\iota \tag{9}$$

endlich bleibt, so daß alle v_ι als kleine Brüche anzusehen sind. Vor allem wird

$$f_{n,m}(0) = \prod (1 - v_\iota)^{n_\iota} =$$
$$= e^{-\sum n_\iota \ln(1 - v_\iota)} \sim e^{-\sum n_\iota v_\iota} = e^{-\nu}, \tag{10}$$

wenn man die höheren Potenzen der v_ι vernachlässigt. Weiter hat man für endliches x:

$$f_{n,m}(x) =$$
$$= f_{n,m}(0) \sum_{\alpha_1=1}^{n} \cdots\cdots \sum_{\alpha_x=1}^{n} \frac{v_{\alpha_1} v_{\alpha_2} \cdots\cdots v_{\alpha_x}}{(1 - v_{\alpha_1})(1 - v_{\alpha_2}) \cdots\cdots (1 - v_{\alpha_x})}$$
$$\sim \frac{1}{x!} e^{-\nu} \left[\sum_{\iota=1}^{n} \frac{v_\iota}{1 - v_\iota} \right]^x \sim \frac{e^{-\nu} \nu^x}{x!}, \tag{10'}$$

1) Vgl. meine „Fundamentalsätze" l. c. S. 24 und insbesondere S. 68 ff.

wobei die Summierung von 1 bis n so zu verstehen ist, daß jedes v_ι genau n_ι-mal in Rechnung gestellt wird (indem man sich [8] als Produkt von n-Faktoren ausgeschrieben denkt). Daß aber der durch (9) definierte Ausdruck ν bei großem m in den oben verwendeten Wert $\nu = n : N$ übergeht, sieht man so ein: Wenn m sehr groß wird, geht das Verhältnis zweier v_ι-Werte für die Punkte $\varkappa$, λ, μ und $\varkappa'$, λ', μ' nach (7)

$$e^{-\frac{(\varkappa^2-\varkappa'^2)+(\lambda^2-\lambda'^2)+(\mu^2-\mu'^2)}{2m\tau^2}}$$

infolge des Nenners im Exponenten mehr und mehr gegen 1. Es werden also die N Werte v_ι allmählich einander gleich, und somit gleich

$$1 : N, \text{ daher } \nu = \frac{1}{N}(n_1 + n_2 + \cdots n_N) = n : N.$$

Das Bemerkenswerteste an diesem Resultat ist die Unabhängigkeit des $f_{n,m}(x)$ von der Anfangsaufstellung. Wir fassen es dahin zusammen: 3'. Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß n Teilchen von einem beliebigen Anfangszustand aus, im Verlaufe der Zeit $m\tau$, in einen Zustand übergehen, bei dem an einer bestimmten Stelle sich gerade x Teilchen befinden, hat bei großem m und n denselben Wert $w_n(x)$, der in (2) als Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Teilchenzahl x in einem Punkte gefunden wurde. Man erkennt, daß nur das allgemeine Verhalten von (7) bei großem m von Einfluß auf dieses Ergebnis war. — Der Unterschied in der Bedeutung von $f_{n,m}(x)$ und $w_n(x)$ wird einleuchtend, wenn man sich vorstellt, daß die Aussage des Satzes 3' eine unendliche Folge von Beobachtungen der bestimmten Zeitdauer $m\tau$, nach jedesmal vorausgegangener Durchmengung der Teilchen (und Abwarten einer bestimmten Anfangsaufstellung) voraussetzt, während für Satz 2 lediglich die Beobachtung eines Augenblicks nach der Durchmengung in Betracht kommt.

Die zweite „Mischung", die wir in der Folge von m Aufstellungen der n Teilchen vornehmen, besteht darin, daß wir alle jene Folgen zusammenwerfen, bei denen die Teilchenzahl x im Nullpunkt gerade my-mal auftritt. Doch wollen wir, um wieder großen rechnerischen Schwierigkeiten aus dem Wege zu gehen, jetzt annehmen, daß zwischen je zwei beobachteten Aufstellungen nicht eine Zeitspanne τ liegt, sondern deren m', wobei m' groß genug sei, um die Anwendung des eben abgeleiteten Satzes 3' zu gestatten. Wir haben dann sehr einfach für den Übergang von einer Aufstellung zur nächsten, unabhängig von m' und unabhängig vom Ausgangszustand, die Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$ einzuführen. Nach bekannten Regeln der Kombinatorik ist somit die Wahrscheinlichkeit $F_{n,m}(y;x)$ für ein my-maliges Auftreten der Zahl x der Koeffizient von t^{my} in der Entwicklung der m-ten Potenz

$$[1 - w_n(x) + t w_n(x)]^m$$

also gleich

$$F_{n,m}(y;x) = \binom{m}{my} w_n^{my}(x)\,[1 - w_n(x)]^{n-my} \tag{11}$$

Diese Verteilung hat, wie bekannt[1]), den Mittelwert $w_n(x)$ und die Streuung $2w_n(x)[1-w_n(x)] : m$. Die Streuung geht daher mit wachsendem m gegen Null, d. h. die Verteilung verdichtet sich mehr und mehr an der Stelle $y = w_n(x)$ und man hat das Resultat: 4'. Es ist bei großem m und n mit erdrückender Wahrscheinlichkeit zu erwarten, daß in einer Aufeinanderfolge von m (genügend voneinander entfernten) Aufstellungen die Anzahl x von Teilchen in einem festen Punkt mit der verhältnismäßigen Häufigkeit $w_n(x)$ von Gleichung (1) bzw. (2) auftritt. Man kann sich hinterher von der Beschränkung, daß die Beobachtungszeiten weit auseinander liegen müssen, befreien, wenn man bedenkt, daß jeder Zwischenzeitpunkt zum Ausgang einer Aufeinanderfolge, die die gleiche relative Häufigkeit ergibt, gewählt werden kann.

Damit ist die Reihe der Sätze abgeschlossen, durch welche die einwandfreie Anwendung des Wahrscheinlichkeitsbegriffes in der Theorie der Brownschen Bewegung begründet wird.

3. Beziehungen zum mechanischen Ansatz und zur bisherigen Behandlungsweise. Wir wollen uns zunächst davon überzeugen, daß kein Widerspruch zwischen den vorstehend abgeleiteten Ergebnissen und dem, wozu die Differentialgleichungen der Bewegung führen, besteht. In bekannter Weise setzt man für ein Teilchen von der Masse m, das einem linear mit der Geschwindigkeit wachsenden Zähigkeitswiderstand und eine „Störungskraft" S unterworfen ist:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -f\frac{dx}{dt} + S. \tag{12}$$

Wird beiderseits mit x multipliziert, dann von 0 bis t unter der Anfangsbedingung $x=0$ für $t=0$ integriert, so erhält man, wenn der Querstrich das über den Zeitraum t erstreckte Zeitmittel bezeichnet:

$$\frac{m}{2t}\frac{d(x^2)}{dt} + \frac{f}{2t}x^2 = \overline{Sx} + \frac{m}{2}\overline{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2} \tag{13}$$

1) Sie ist nämlich nichts anderes als die Verteilung des Bernoullischen Gesetzes.

Nun pflegt man zu sagen[1]), für $t = \infty$ sei das Zeitmittel der lebendigen Kraft nach den Grundsätzen der statistischen Mechanik gleich kT (T = absolute Temperatur, k = Gaskonstante durch $2 \times$ Avogadrosche Zahl) und das Zeitmittel von Sx gleich Null zu setzen. Dann besagt die Gleichung (13) für die Größe

$$u = x^2 - \frac{2kT}{f}\left(t - \frac{m}{f}\right)$$

daß $u:t$ mit wachsendem t gegen Null gehen muß (weil für genügend große t das Vorzeichen von $du:dt$ dem von u entgegengesetzt wird, sobald nicht $u:t$ an sich schon verschwindend klein), also

$$\lim_{t=\infty} \frac{x^2}{t} = \frac{2kT}{f}. \qquad (14)$$

Diese bestimmte Aussage über den Ablauf der Bewegung eines Teilchens wäre tatsächlich ein Widerspruch gegen unsern Satz 2', wonach über die Verschiebung zu jeder Zeit eine Wahrscheinlichkeitsaussage gemacht werden kann: Wenn jedes Teilchen sich nach (14) bewegen müßte, so könnte man nicht von einer Wahrscheinlichkeit dafür sprechen, daß ein Teilchen nach sehr langer Zeit z. B. an seinem Ausgangspunkt zu finden ist. Dieser Widerspruch rührt aber nur her von einer falschen Anwendung der Statistik bei der Ableitung von (14). Nur die Ergodenhypothese, die wir eben ablehnen, führt zu der Aussage, daß der zeitliche Mittelwert der lebendigen Kraft beim wirklichen Bewegungsablauf eines Teilchens kT sein muß. Die rationelle Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie wir sie hier vertreten, führt allein zu dem Satz: Wenn man ein Teilchen unendlich oft, nach jedesmal vorhergegangener Durchmengung der ganzen Emulsion, durch eine Zeit t betrachtet, dann wird im Durchschnitt der Fälle jener Mittelwert und damit (14) bestehen. Denn nach Analogie zu unserem Satz 4' gilt hier die Behauptung, daß in der erdrückenden Mehrheit der Fälle jeder Wert, dessen die lebendige Kraft fähig ist, mit einer zeitlichen Häufigkeit auftritt, die seiner Wahrscheinlichkeit, errechnet aus dem ersten Ausgangs-Kollektiv, gleich kommt; daher muß das Zeitmittel im Durchschnitt der unendlich viel Fälle gleich dem „virtuellen" Durchschnitt sein. Dieselbe Beziehung besteht auch für den Mittelwert $\overline{Sx}$. Somit läßt sich aus dem mechanischen Ansatz (12) überhaupt nicht (14) ableiten, sondern nur

$$\lim_{t=\infty} \frac{\sum x^2 v(x)}{t} = \frac{2kT}{f}, \qquad (15)$$

wo $v(x)$ die Wahrscheinlichkeit einer Verschiebung von der Größe x bedeutet und die Summe über alle möglichen x-Werte zu erstrecken ist. Diese Gleichung aber steht in vollkommener Übereinstimmung mit (7). Reduziert man nämlich (7) auf den Fall eindimensionaler Bewegung und setzt man $x = x\alpha$, $t = m\tau$ ein, so erhält man für $v(x)$

$$v(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi r^2 m}} e^{-\frac{x^2}{2r^2\alpha^2 m}}$$

und daraus, bei genügend großem m:

$$\sum x^2 v(x) = r^2\alpha^2 m = \frac{r^2\alpha^2}{\tau} t,$$

womit (15) tatsächlich erfüllt wird, wenn man

$$\frac{r^2\alpha^2}{\tau} = \frac{2kT}{f} \qquad (16)$$

annimmt. Der „mechanische Ansatz" liefert also keineswegs ein Ergebnis, das mit dem der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Konkurrenz tritt, sondern legt nur den Zusammenhang zwischen den die Ausgangsverteilungen bestimmenden Größen r, α, τ und physikalischen Variablen fest. Dies ist die Rolle, die den physikalischen Gesetzen auf jedem Gebiet der physikalischen Statistik zufällt.

Es mag noch schließlich eine Bemerkung über das Verhältnis der hier vorliegenden Betrachtungen zu den wahrscheinlichkeits-theoretischen Untersuchungen über die Brownsche Bewegung von v. Smoluchowski u. a. Platz finden. Man pflegt bei diesen Untersuchungen von einem „optisch isolierten" Bereich innerhalb der Emulsion auszugehen, der unserer Auffassung gegenüber noch sehr viele „Standorte" umfaßt, aber doch nicht mehr, als daß die auf ihn entfallende Durchschnittszahl ν klein genug ist, um eine Anwendung der Näherung (2) zu rechtfertigen. Es entspricht dann der üblichen, auf einer stillschweigend eingeführten „Ergodenhypothese" beruhenden Anschauung, daß zwischen der Wahrscheinlichkeit $w_n(x)$, dann der räumlichen und endlich der zeitlichen Häufigkeit des Auftretens einer Teilchenzahl x nicht unterschieden wird. Hier greifen unsere Sätze 3 und 4' ein, die also nur eine prinzipielle Lücke der Theorie beseitigen, an ihrem Fortgange aber nichts ändern — abgesehen davon, daß sie den Ergebnissen eine

1) Z. B. Ph. Frank, Sitzungsber. Ak. Wien 124 (1915), Abt. IIa S. 1173—1186. Wenn man, wie es Langevin bei seiner ursprünglichen Herleitung (C. R. Paris 146 [1908], S. 530) getan hat, von vornherein nur von räumlicher Mittelwertbildung ausgeht, so hat man prinzipiell den gleichen Widerspruch wie den im Text nachgewiesenen. Auch eine Aussage über das tatsächliche Verhalten des Durchschnittes der einmal vorhandenen Teilchen ist unvereinbar mit Wahrscheinlichkeitsannahmen.

widerspruchsfreie Fassung zu geben ermöglichen. Es sind aber noch weiter erhebliche Schwierigkeiten mathematischer Natur in der Durchführung des exakten Ansatzes zu überwinden, wenn man die in kurz aufeinanderfolgenden Zeiten eintretenden Schwankungen verfolgen will. Hier müßte, wie oben angedeutet, die ganze Reihe der durch je N Zahlen gegebenen „Aufstellungen" $\mathfrak{x}, \mathfrak{x}', \mathfrak{x}'' \cdots\cdots$ betrachtet werden, da nur bei großem m, d. h. bei langen Zeitintervallen, die Wahrscheinlichkeiten vom Vorzustand unabhängig ausfallen. Es ist die wesentliche Leistung Smoluchowskis, daß er diese schwierige, vielleicht zurzeit kaum durchführbare Rechnung durch einen einfachen Näherungsweg ersetzt hat, indem er eine gewisse „summarische" Wahrscheinlichkeit P für den Eintritt eines Teilchens aus der Umgebung in das optisch abgegrenzte Gebiet definiert und verwendet[1]). In dieser praktischen Hinsicht spielt also die Smoluchowskische Theorie der Schwankungen oder der „Wahrscheinlichkeits-Nachwirkung" der von uns angedeuteten gegenüber eine ähnliche Rolle, wie etwa die Verwendung der Telegraphengleichung gegenüber dem Ansatz der Maxwellschen Theorie u. dgl. Es tut dem hohen Werte der Smoluchowskischen Arbeiten keinen Abbruch, wenn im vorstehenden versucht worden ist, die Grundlinien einer etwas umfassenderen, von gewissen Widersprüchen befreiten Theorie zu skizzieren, die jene Ansätze von etwas weiterer Warte zu übersehen gestattet.

1) Vgl. insbes. Sitzungsber. Akad. Wien Abt. IIa, **123**, 2381—2409, 1914; **124**, 263—276, 1915 und 339 bis 368.

(Eingegangen 18. Dezember 1919.)

Die physiologische Erklärung des „Tellermondes".

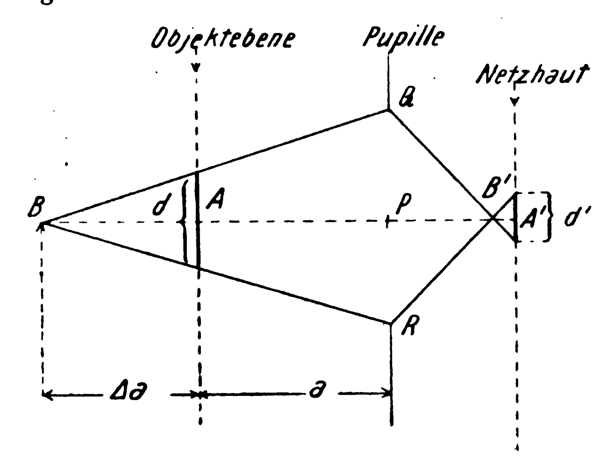
Von Georg Jaeckel.

Die im Briefkasten der Physikalischen Zeitschrift[1]) aufgeworfene Frage: Wie groß ist der Mond? veranlaßt mich, eine vorläufige Mitteilung über einen Teil meiner Arbeit über die physiologischen Grundlagen der Beurteilung der Größe und Entfernung von irdischen Objekten und Himmelskörpern herauszugeben, der sich speziell mit dieser Frage beschäftigt und sich gerade auf das angegebene Experiment stützt, daß die Mondgröße sich durch Vorhalten einer Blende vor das Auge zu verringern scheint. In dieser Arbeit wird nämlich gezeigt, daß die viel umstrittene Frage nach der Referenzfläche der Himmelskörper sich notwendig aus den rein physikalisch-physiologischen Grundlagen der optischen Abbildung im menschlichen Auge ergibt, und daß die Bezugsentfernung der Gestirne sich aus dem Pupillendurchmesser und dem Auflösungsvermögen des Auges berechnen läßt. Diese Referenzfläche ist nämlich nichts anderes als diejenige Entfernung, bei welcher infolge der Netzhautstruktur eine Unterscheidung von der Einstellung auf Unendlich beginnt.

1) Diese Zeitschr. **21**, 168, 1920.

Die Bedingung, daß zwei Punkte A und B gleichzeitig scharf gesehen werden, ist, daß bei Einstellen der Augenlinse auf Punkt A der Punkt B nicht merklich unscharf abgebildet wird, d. h. daß der Durchmesser des vom Punkte B herrührenden Zerstreuungskreises nicht größer sein darf als der Abstand zweier Netzhautelemente; denn erst in diesem Fall kann das Auge die Unschärfe feststellen.

Zur näheren Erläuterung diene die folgende Figur:



Punkt A und B liegen auf der Augenachse. Das Auge sei auf Punkt A eingestellt, der infolgedessen in dem Punkte A' der Netzhaut abgebildet wird; P sei der Mittelpunkt, $QR = p$ die Öffnung der Augenpupille; senkrecht zur Augenachse steht im Punkte A die Objektebene, im Punkte A' die Bildebene. Der entferntere Punkt B bildet sich in B' vor der Netzhaut ab; der abbildende Strahlenkegel gibt auf der Objektebene den Zerstreuungskreis mit dem Durchmesser d, auf der Netzhaut den Zerstreuungskreis mit dem Durchmesser d'.

Ist nun der Durchmesser dieses Zerstreuungkreises kleiner als der Abstand zweier Netzhautelemente, dann macht das Auge keinen Unterschied mehr in der Tiefenwahrnehmung zwischen den beiden Punkten A und B. Unbewußt versetzen wir die Himmelskörper, über

deren wirkliche Entfernung wir aus der direkten Sinneswahrnehmung nicht unterrichtet sind, in die geringste, mit den sonstigen Beobachtungen verträgliche endliche Entfernung; und deswegen ist diejenige endliche Entfernung, bei der das Auge die Zerstreuungskreise der im Unendlichen liegenden Punkte zu bemerken anfängt, die sogenannte „Referenzfläche" der Himmelskörper. Die zahlenmäßige Berechnung der Referenzfläche auf Grund dieser Annahme ergibt eine vollkommene Übereinstimmung mit dem bekannten Werte von ungefähr 20 m.

Besonders einfach können wir den Zusammenhang zwischen der Tiefenschärfe und den optischen Konstanten des Auges erhalten, wenn wir bedenken, daß der Zerstreuungskreis auf der Netzhaut ein Abbild des Zerstreuungskreises auf der Objektebene ist. Da das Auge zwei Punkte erst voneinander trennen kann, wenn ihr Winkelabstand größer als 35″ ist, so kann das Auge eine Unschärfe von B auch nur bemerken, wenn der Durchmesser d ihm unter einem Winkel erscheint, der größer als 35″ ist. Setzen wir

Objektabstand	$AP = a$,
Merkbarer Tiefenunterschied	$BA = \Delta a$,
Pupillendurchmesser	$QR = p$,

so ergibt sich daraus die wichtige Beziehung:

$$\frac{d}{a} = \frac{35}{60 \cdot 60 \cdot 57{,}3} = \frac{1}{\beta}, \text{ wo } \beta = 5{,}9 \cdot 10^3. \quad (1)$$

Andererseits folgt nach dem Strahlensatz:

$$\frac{d}{p} = \frac{a}{a + \Delta a}. \quad (2)$$

Die Elimination von d liefert:

$$\frac{a}{\beta \cdot p} = \frac{a}{a + \Delta a},$$

$$\Delta a = \frac{a^2}{\beta \cdot p - a}. \quad (3)$$

Diese Formel gibt die Tiefenschärfe bei monokularem Sehen an und wird allgemein mit ziemlicher Genauigkeit durch die Wundtschen Versuche[1]) bestätigt, wie an anderer Stelle gezeigt werden soll. Hier interessiert nur der Grenzfall, daß der Punkt B im Unendlichen, der Punkt A in endlicher Entfernung liegt, wo also $\Delta a = \infty$ werden soll; das ist nur möglich, wenn:

$$a = \beta \cdot p. \quad (4)$$

Anschaulicher kann man das Resultat in diesem Spezialfall erhalten, wenn man aus der Figur entnimmt, daß

$$\text{für } BP = \infty; \; d = p$$

wird, d. h. also der Zerstreuungskreis in der Objektebene so groß wie die Pupille selbst wird. Gleichung (4) folgt dann schon aus Gleichung (1) und a erhält damit eine sehr anschauliche Bedeutung: es ist die Entfernung, in welcher die Augenpupille des Beobachters für einen zweiten Beobachter mit gleicher Sehschärfe vom flächenhaften zum punktförmigen Aussehen übergeht.

Die Zahlenwerte für den Abstand der Referenzfläche sind:

$a = 12$ m	für Pupillendurchmesser	$p = 2$ mm
$a = 18$ „	„ „	$p = 3$ „
$a = 24$ „	„ „	$p = 4$ „

usw.

und (bei nächtlicher Beobachtung der Gestirne):
$a = 47$ m für Pupillendurchmesser $p = 8$ mm.
Die Werte für a liegen also vollkommen in der Größenordnung des erwarteten Abstandes der Referenzfläche der Himmelskörper.

Und je nachdem wir nun den Mond, der stets unter demselben Sehwinkel von 31″ (= 0,009 in Bogenmaß) erscheint, in einer Entfernung von 12, 18, 24 oder 47 m vermuten, schreiben wir ihm die Größe eines Tellers von 11, 16, 21 oder 42 cm Durchmesser zu, da wir unbewußt den Sehwinkel mit der geschätzten Entfernung multiplizieren.

Eine notwendige Folge der soeben entwickelten Theorie ist, daß sich der Radius a der Referenzfläche und somit auch die scheinbare Größe der Himmelskörper mit dem Pupillendurchmesser ändern muß. Das ist ja auch ganz einleuchtend, denn: die Abblendung der Linse steigert die Tiefenschärfe (wie ja auch aus der Photographie allgemein bekannt ist); wir können deswegen bei verengerter Pupille den Mond mit stärker gewölbter Augenlinse scharf sehen; und, da wir mangels sonstiger Anhaltspunkte die Entfernung hochstehender Himmelskörper nur nach der Akkommodation beurteilen können, so vermuten wir den Mond in geringerer Entfernung und halten ihn infolgedessen für kleiner.

Die Versuche von Stroobant[1]) und die von Herrn Stefan Meyer beschriebenen Experimente entsprechen vollkommen den Erwartungen; ich habe selbst seit mehreren Monaten an einer Reihe von Versuchspersonen ähnliche Versuche gemacht, habe sie bei Voll-

1) Vgl. Helmholtz, Physiologische Optik, 3. Aufl., 3, 245, 246, 1910.

1) Stroobant fand, daß in einem dunklen Zimmer der Durchmesser einer von hinten gleichmäßig beleuchteten, ölgetränkten Papierscheibe sich um 3/10 verkleinerte, wenn das Auge plötzlich durch eine Lampe erhellt wird, und die Pupille sich kontrahiert (Bulletin de l'Acad. Royale de Belgique, 3. Serie 8, 719, 1884 und 10, 315, 1885).

mond plötzlich enge Blenden vor das Auge halten lassen; sie waren sämtlich überrascht von dem augenscheinlichen „Kleinerwerden“ des Mondes. — Gegen die Beweiskraft dieser Versuche könnte man einwenden, daß die scheinbare Verkleinerung des Mondes durch den Fortfall der Irradiation erklärt wird; aber das auch von Herrn Meyer erwähnte Fortbestehen der Erscheinung, wenn der Mond am hellen Tageshimmel steht, widerlegt diesen Einwand.

Den gegen meine Theorie vielleicht noch möglichen Einwand, daß es ein Abschätzen der Entfernung nach der Akkommodation allein nicht gibt, möchte ich dadurch zurückweisen, daß es nach den Feststellungen von Wundt zwar keine genaue direkte Entfernungsschätzung nach der Akkommodation gibt, wohl aber eine Wahrnehmung von Entfernungsunterschieden; ausführlicher werde ich darauf an anderer Stelle eingehen.

Die scheinbare Vergrößerung der Gestirne in der Nähe des Horizonts kann zum Teil durch die Veränderung des Pupillendurchmessers erklärt werden; ebenso einige Versuche, die für die Blickrichtungstheorie zu sprechen scheinen, die sich aber in vielen Fällen durch ein teilweises Abblenden der Augenpupille durch Teile der Augenumgebung bei ungünstigen Blickrichtungen erklären lassen. — Vor allem aber scheint mir für die Richtigkeit der Theorie die Tatsache zu sprechen, daß sich nach ihr die Größe des Tellermondes aus den optischen Konstanten des Auges berechnen läßt.

Berlin, Physikalisches Institut der Landwirtschaftlichen Hochschule, 8. April 1920.

(Eingegangen 12. April 1920.)

Schallgeber und Schallempfänger. III.

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Wir haben in früheren Arbeiten[1]) eine Theorie elektromagnetisch erregter Schallgeber und Schallempfänger, bei denen die elektromagnetische Wirkung durch Vibrieren eines Eisenankers gegenüber einem Elektromagneten erzeugt wird, und wie sie beispielsweise in gewöhnlichen Telephonen vorliegen, gegeben, indem wir die mechanisch-akustischen Vorgänge elektrisch gedeutet und durch elektrische Größen gedanklich ersetzt haben. Diese Art von Schallapparaten haben wir elektromechanische Transformatoren genannt. In der vorliegenden Arbeit wollen wir auf ähnliche Weise Schallgeber und in einer späteren Abhandlung Schallempfänger behandeln, deren Erregung bzw. Abbremsung durch eine in einem konstanten Magnetfeld schwingende Spule erfolgt. Für diese Art elektromagnetisch erregter Schallapparate ist im besonderen bereits der Name des „elektrodynamischen Telephons“ vorgeschlagen worden; wir wollen sie allgemeiner „Spulen-Schallgeber bzw. -empfänger“ nennen.

1) Diese Zeitschr., **20**, 104 u. 245, 1919.

Der Spulen-Schallgeber.

I. Der elektrische Ersatzkreis.

Die einfachste Ausführungsform eines durch eine Spule erregten Schallapparates ist in Fig. 1 dargestellt. Es ist M die Membran, die

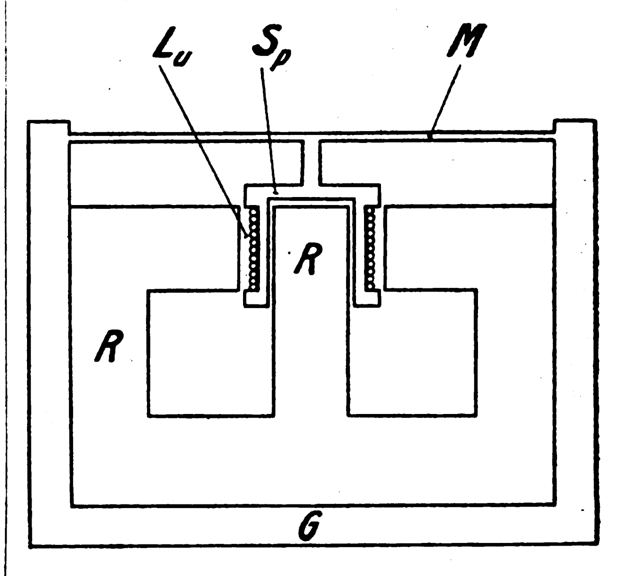


Fig. 1.

an das schallübertragende Medium angrenzt und G ein Gehäuse, an dem außer dieser Membran ein ringförmiger Magnet R befestigt ist. In dem von einem magnetischen Kraftlinienfelde durchsetzten Luftspalt Lu befindet sich eine Spule Sp, die starr an der Membran befestigt ist. Führt man ihren beiden Enden elektrischen Wechselstrom zu, so vollführt sie Schwingungen, die vermittelst der Membran auf das Medium übertragen werden. Erregt man diesen Schallgeber mit konstanter Stromstärke, d. h. konstanter Kraft bei veränderlicher Frequenz, so beschreibt ein zwischen Maschine und Apparat geschaltetes Wattmeter eine Resonanzkurve, ähnlich wie in den früheren Arbeiten für den magnetischen Schallgeber näher erläutert ist. Die auftretenden Verluste sind im Gegensatz zum elektro-mechanischen Transformator im wesentlichen Spulenverluste und nur zum ganz

geringen Teil Eisenverluste. Denn trotzdem in der Spule *Sp* Wechselstrom fließt, ist für die Wirkung dieses Schallgebers kein wechselndes Magnetfeld im Eisen notwendig. Es könnte im Gegenteil nur schädlich wirken, indem es die Verluste erhöht. Man wird, um es nach Möglichkeit zu unterdrücken, den Magneten aus Volleisen bauen und auf die Magnetpole Kurzschlußwicklungen legen. Trotzdem wird eine, wenn auch geringe Selbstinduktion übrigbleiben, die im wesentlichen von den Kraftlinien herrührt, die sich innerhalb des Luftspaltes schließen. — Bei der Aufstellung des Diagramms und bei der Herleitung der Beziehungen zwischen den elektrischen und mechanischen Größen wollen wir nur den hiervon herrührenden Selbstinduktionskoeffizienten berücksichtigen und das Eisen frei von Wechselfeldern annehmen.

Wir stellen uns ähnlich wie beim elektromechanischen Transformator die Aufgabe, den mechanisch-akustischen Arbeitsvorgang der schwingenden Spule im Zusammenhange mit Membran und Medium durch rein elektrische Vorgänge zu ersetzen. Mit anderen Worten: Wir suchen eine elektrische Anordnung, die wir so substituieren können, daß es einem Beobachter nicht möglich wäre zu entscheiden, ob er den Apparat mit der schwingenden Spule oder den festen elektrischen Ersatzkreis vor sich hat. Dieser Beobachter soll mit allen möglichen Meßinstrumenten ausgerüstet sein, kann die Maschine bezüglich Frequenz und Erregung variieren und alle erdenklichen Messungen an den Klemmen der zum Apparat führenden Zuleitungen vornehmen. Der einzuführende Ersatzkreis soll dann so beschaffen sein, daß er keine Abweichung der Angaben der Meßinstrumente hervorruft und es daher dem Beobachter unmöglich macht, einen Unterschied zwischen Ersatzkreis und Spulenbewegung zu konstatieren. Wenn dies erreicht ist, wird für die Ableitung und Aufstellung des Diagramms und der Gesetze des Spulenschallgebers der elektrische Arbeitsvorgang im elektrischen Ersatzkreis an Stelle des akustisch-mechanischen der schwingenden Spule gesetzt werden können.

Ein elektrischer Kreis, der diesen Bedingungen genügt, ist in Fig. 2 dargestellt. An die Klemmen der Maschine *Ma* ist an Stelle der Spule *Sp* der Fig. 1 ein Widerstand w_v angeschlossen, der dem Ohmschen Widerstand der Spule und etwa vorhandenem Verlustwiderstande durch restliche Selbstinduktionsfelder im Eisen entspricht, und in Serie mit diesem ein Widerstand w_s, der den Arbeitswiderstand der Spulenbewegung darstellt. Gleichfalls in Serie mit diesem Widerstande liegt eine Selbst-

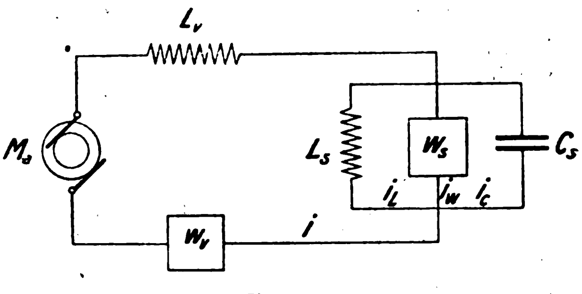


Fig. 2.

induktion L_v, die der etwa vorhandenen freien Selbstinduktion der Spule *Sp* entspricht. Parallel zum Widerstande w_s liegen eine Selbstinduktion L_s und ein Kondensator C_s, die verlustlos und für die Resonanzfrequenz ω_R aufeinander abgestimmt sein sollen. Sie entsprechen der Membranelastizität und der Schwingungsmasse und stehen mit dieser Festsetzung im Gegensatz zu der gewöhnlichen Bezeichnungsweise, in der das elektrische Analogon einer mechanischen Masse eine Selbstinduktion und dasjenige einer Elastizität eine Kapazität ist. Vergleichen wir aber den von uns aufgestellten elektrischen Ersatzkreis und die mechanisch schwingende Spule miteinander, so finden wir, daß die Schwingungsenergie im Ersatzkreise in der Kapazität in Form von Ladungsenergie steckt, wenn sie gleichzeitig in dem mechanischen Schwingungssystem ihr Maximum in kinetischer Form erreicht hat, und daß sie im Ersatzkreis in magnetischer Feldenergie in der Selbstinduktion enthalten ist, wenn ihr mechanisches Äquivalent seinen größten potentiellen Wert erreicht hat. Wir erkennen dies am einfachsten, wenn wir den Fall der Resonanz betrachten, in dem mechanische Geschwindigkeit und mechanische Kraft gleichphasig sein müssen. Der mechanischen Kraft gleichphasig und gleichwertig ist stets die elektrische Stromstärke i. Erreicht also die mechanische Geschwindigkeit ihr Maximum, so ist dasselbe im Resonanzfalle auch für den Strom i_w und die Spannung am Ersatzkreise und damit für die Energie auf dem Kondensator der Fall, d. h. mechanische Masse und elektrische Kapazität entsprechen einander.

Die Größen L_s, C_s und w_s des elektrischen Ersatzkreises sind konstant, solange der Apparat akustisch-mechanisch nicht geändert wird und solange das feste Magnetfeld im Luftraum konstant ist. Ändert sich in diesen Verhältnissen etwas, d. h. wird der Apparat zum Beispiel in ein anderes Schallmedium versetzt, so haben wir auch eine Änderung mit den entsprechenden elektrischen Größen L_s, C_s und w_s vorzunehmen.

Die Widerstände w_s und w_v sind durch den Begriff des mechanischen Wirkungsgrades η miteinander verknüpft, und zwar ist

$$\eta = \frac{w_s}{w_s + w_v}.$$

Denken wir uns den Strom i konstant gehalten, d. h. den Apparat mit konstanter Kraft erregt, so ist der Fall der festgebremsten Spule d. h. der mechanischen Leistung Null, gegeben durch $w_s = 0$ und $\eta = 0$, während das andere Extrem der stark schwingenden Spule im schallweichen Medium[1]) durch sehr großes w_s und einen Wirkungsgrad η nahezu gleich 1 dargestellt wird.

Bei sehr großen Verstimmungen unterhalb der Resonanzfrequenz wird der Arbeitswiderstand w_s durch die Selbstinduktion L_s kurz geschlossen, während oberhalb die Kapazität C_s allmählich den ganzen Strom i übernimmt, der bei dem Vorgang als konstant angenommen wird, da das Verhalten des Apparates bei Erregung mit konstanter Kraft diskutiert werden soll. Beim Durchlaufen der Resonanzkurve von den tiefsten bis zu den höchsten Frequenzen über die Resonanzfrequenz hinweg, nimmt die aus w_s, L_s und C_s bestehende Kombination die Werte 0, w_s, 0 an. Die elektrische Spannung an dieser Widerstandskombination ist proportional und ein Maß für die mechanische Amplitude, wie die elektrische Gesamtstromstärke ein Maß für die erregende Kraft ist.

Im allgemeinen zerlegt sich der Strom i in einen Wattstrom $i \cos \varphi_s$, der den Widerstand w_s durchfließt, und in einen wattlosen Strom $i \sin \varphi_s$, der die Differenz des Selbstinduktions- und Kapazitätsstromes ist. Nennen wir die drei Ströme i_w, i_L und i_C und ist φ_s der Winkel zwischen Strom i und der gemeinsamen Spannung e_s an Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{i_L - i_C}{i_w} = \left(\frac{1}{\omega L_s} - \omega C_s\right) w_s.$$

Führen wir die Resonanzfrequenz ω_R und die Verstimmung x durch die Beziehung

$$\frac{\omega_R}{\omega} = 1 + x$$

ein und beschränken uns auf die Nähe der Resonanz, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{w_s}{\omega_R L_s} \cdot 2x.$$

Da die Dämpfung

$$\mathfrak{d}_s = \pi \cdot \frac{\omega_R L_s}{w_s}$$

ist, so ist

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{2 \pi x}{\mathfrak{d}_s}.$$

Für Frequenzen unterhalb der Resonanz, d. h. positive x, ist φ_s positiv, und es tritt zur Wirkung des Widerstandes w_s ein Selbstinduktionseinfluß, für Frequenzen oberhalb dagegen ein Kapazitätseinfluß, während in der Resonanz sich die Wirkungen von L_s und C_s aufheben, und der Kreis sich wie ein reiner Ohmscher Widerstand verhält.

Die Gleichung für die Dämpfung kann man auch schreiben

$$\mathfrak{d}_s = \pi \cdot \frac{1 - \eta}{\eta} \quad \frac{\omega_R L_s}{w_v}.$$

Da für einen Apparat w_v, ω_R und L_s Konstante sind, so ergibt sich, daß, wie beim elektromechanischen Transformator, der Ausdruck

$$\frac{\eta \, \mathfrak{d}_s}{1 - \eta} = K$$

eine Apparat-Konstante darstellt, die zur Beurteilung der Güte eines Apparates, bei Untersuchungen in verschiedenen Medien, und, wie sich in einer späteren Arbeit zeigen wird, auch bei der Darstellung der Empfängereigenschaften mit Vorteil Verwendung findet.

II. Das Diagramm.

Das Spannungsdiagramm des in Fig. 2 dargestellten elektrischen Kreises hat die Gestalt der Fig. 3. Es stellt DE die Richtung des Stromes i und nach Richtung und Größe die bei konstant gehaltenem Strome i unveränderliche Spannung e_v am Widerstande w_v dar. Man errichtet in D eine Senkrechte, macht

$$OD = i \omega L_v,$$

so daß OD die Spannung an der Selbstinduktion L_v ist. Der Punkt O ist infolgedessen kein fester Punkt im Diagramm, sondern schwankt von seiner für die Resonanz gültigen Lage auf der Strecke OD proportional zu ω hin und her. Er nähert sich D für tiefere Frequenzen und entfernt sich für höhere. Beschränken wir uns auf die Nähe der Resonanz, so kann man ihn praktisch als feststehend ansehen, wie sich später auch durch Betrachtung der Fig. 5 zeigen wird, in der dieser Veränderung Rechnung getragen ist. Die Strecke ED verlängert man bis B, sodaß

$$\frac{BE}{ED} = \frac{\eta}{1 - \eta}$$

ist. Beschreibt man zu EB als Durchmesser einen Kreis, so ist dieser Kreis der geometrische

1) Diese Zeitschr. **17**, 601, 1916 u. **20**, 104, 1919.

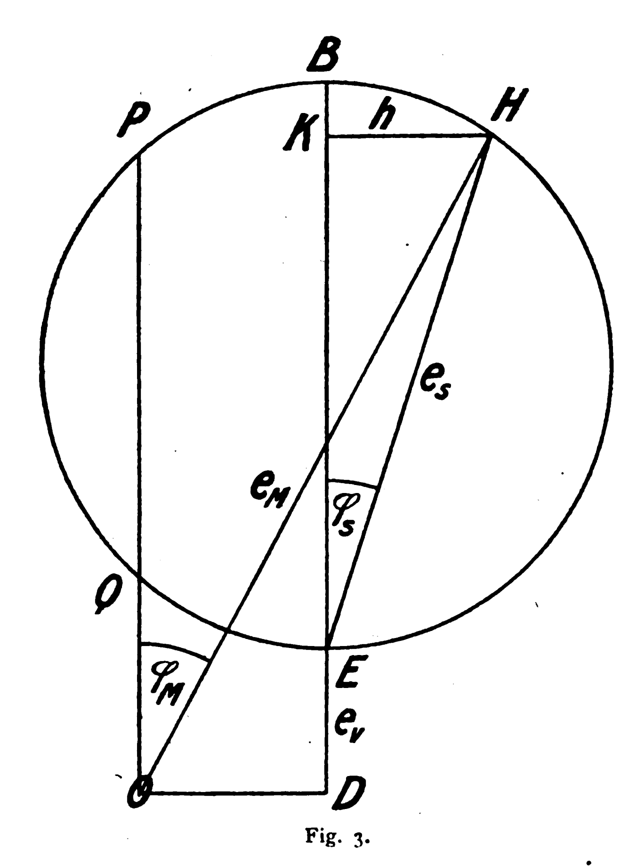


Fig. 3.

Ort für die Endpunkte aller Spannungen e_s am Widerstande w_s bzw. e_M an der Maschine. Trägt man den Verstimmungswinkel φ_s in E an EB an — positiv nach rechts, negativ nach links — so stellt EH nach Richtung und Größe den Wert von e_s dar. Fällt man nämlich das Lot $HK = h$, so ist

$$EH = \frac{h}{\sin\varphi_s}$$

und

$$h = \frac{\eta}{1-\eta}\, e_v \sin\varphi_s \cos\varphi_s$$

und daher

$$EH = \frac{\eta}{1-\eta}\, e_v \cos\varphi_s.$$

Da nun, wie aus der früheren Betrachtung und Fig. 2 folgt

$$e_s = i_s\, w_s = i \cos\varphi_s \frac{\eta}{1-\eta} w_s,$$

d. h.

$$e_s = \frac{\eta}{1-\eta}\, e_v \cos\varphi_s$$

ist, so ergibt sich die Richtigkeit der obigen Behauptung, daß $EH = e_s$ ist.

Den Wert e_M für die Maschinenspannung findet man nach Richtung und Größe in der Strecke OH und die Phasenverschiebung φ_M zwischen e_M und i als Winkel zwischen OH und der im Punkte O zu BD gezogenen Parallele PO, da e_M aus e_s hervorgeht, indem man in Richtung des Stromes die Spannung $e_v = DE$ und senkrecht zur Stromrichtung die Spannung $i\omega L_v = OD$ addiert.

Aus dem Diagramm erkennt man, daß der Spulenschallgeber als Selbstinduktion, reiner Ohmscher Widerstand oder Kapazität wirken kann. Liegt der Punkt H auf dem zur Geraden OQP rechts liegenden Kreisbogen, so haben wir Nacheilung des Stromes gegen die Maschinenspannung und damit Selbstinduktionswirkung, auf dem zu OQP links liegenden Kreisbogen Voreilung und damit Kapazitätswirkung, während in den beiden Punkten P und Q nur rein Ohmsche Wirkung übrigbleibt. Hierbei entsprechen Lagen des Punktes H auf dem zu BE' rechts liegenden Halbkreise Frequenzen unterhalb der Resonanz und links oberhalb, während der Punkt B dem Resonanzpunkt und der Punkt E den Frequenzen 0 und ∞ entspricht.

Ist die freie Selbstinduktion vernachlässigbar klein, so rückt der Punkt O in den Punkt D und die Punkte P und Q in die Punkte B und E und wir finden, daß der Sender in Resonanz eine rein Ohmsche Belastung darstellt, während unterhalb derselben eine Selbstinduktionswirkung und oberhalb eine Kapazitätswirkung hinzutritt.

III. Beziehung zwischen dem Watt- bzw. wattlosen Widerstand, dem Wirkungsgrad und dem Verlustwiderstand.

Aus dem Diagramm kann man ohne weiteres den wattlosen Widerstand entnehmen, den die Maschinenspannung überwinden muß. Es ist

$$\frac{e_M}{i}\sin\varphi_M = \frac{h + i\omega L_v}{i}$$

$$= \frac{\eta}{1-\eta}\, w_v \sin\varphi_s \cos\varphi_s + \omega L_v.$$

Der mit φ_s veränderliche Teil dieses Ausdruckes hat seinen größten bzw. kleinsten Wert für $\varphi_s = \pm 45^0$, d. h. für Verstimmungen

$$\pm x = \frac{\mathfrak{d}_s}{2\pi}.$$

Der Wattwiderstand ergibt sich aus dem Diagramm zu

$$\frac{e_M}{i}\cos\varphi_M = \frac{e_v + \frac{h}{\operatorname{tg}\varphi_s}}{i}$$

$$= \left(1 + \frac{\eta}{1-\eta} \cos^2 \varphi_s\right) w_v$$

$$= w_v + \frac{\eta}{1-\eta} \cdot w_v \cdot \cos^2 \varphi_s$$

$$= w_v + w_s \cos^2 \varphi_s.$$

Für Resonanz wird dieser Ausdruck gleich $w_v + w_s$ und für sehr große Verstimmungen, d. h. bei praktisch ruhender Spule gleich w_v.

Diese Ausdrücke für die Widerstände sind auf Grund des vorstehend beschriebenen Diagramms abgeleitet, das seine Entstehung einer Methode verdankt, mechanisch-akustische Arbeitsvorgänge elektrisch zu deuten und durch äquivalente elektrische Größen zu ersetzen. Es wird daher von Interesse sein, festzustellen, daß auf direktem Wege dieselben Werte erhalten werden können.

IV. Theoretische Berechnung des Watt- und wattlosen Widerstandes.

Nennen wir die gesamte Schwingungsmasse der Spule Sp in Fig. 1 einschließlich Membran und Mediummasse m, die Elastizität der Membran c, den Dämpfungsfaktor $\delta = \frac{b}{2m}$ und die mechanische Amplitude y, so lautet in den bekannten Bezeichnungen die Kräftegleichung

$$m\ddot{y} + b\dot{y} + \frac{y}{c} = BlJ \sin \omega t,$$

wenn B die konstante Induktion im Luftspalt, l die Gesamt-Drahtlänge auf der Spule und

$$i = J \sin \omega t$$

der die Spule durchfließende Wechselstrom ist. Die bekannte Lösung dieser Differentialgleichung für die kontinuierliche Schwingung außerhalb der Ein- und Ausschaltvorgänge ist

$$y = \omega y_0 \sin (\omega t + \varphi_s)$$

wobei y_0 die Maximalamplitude bei der Verstimmung φ_s ist, und diese Verstimmung durch die Gleichung bestimmt wird

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{\frac{1}{c} - m\omega^2}{\omega b}.$$

Der Winkel φ_s ist die Phase zwischen Kraft und Geschwindigkeit, und zwar bedeutet z. B. ein positives φ_s, daß die Geschwindigkeit der Kraft vorauseilt, d. h. eine Erregung unterhalb der Resonanzfrequenz. Die in der Spule durch die Bewegung im Kraftlinienfelde B induzierte Spannung ist, abgesehen vom Vorzeichen,

$$e = Bl\dot{y}.$$

Wie man aus der allgemeinen Theorie der Schwingungsgleichung findet, ist

$$\omega y_0 = \frac{BlJ}{b} \cos \varphi_s$$

und daher

$$e = Bl \cdot \frac{BlJ}{b} \cdot \cos \varphi_s \sin (\omega t + \varphi_s).$$

Zwischen Strom i und Spannung e herrscht also die Phasenverschiebung φ_s. Mithin sind die beiden Komponenten der Spannung

$$E \sin \varphi_s = \frac{(Bl)^2}{b} J \sin \varphi_s \cos \varphi_s$$

$$E \cos \varphi_s = \frac{(Bl)^2}{b} J \cos^2 \varphi_s.$$

Bezeichnen wir mit E_R den Wert von E für Resonanz, so ist, da in Resonanz $\varphi_s = 0$, d. h. Spannung und Strom in Phase sind

$$E_R = \frac{(Bl)^2}{b} J.$$

Zu dieser Gegenspannung, die durch die Bewegung der Spule im Kraftfelde hervorgerufen wird und der Gegenspannung eines Motors entspricht, tritt noch eine Verlustspannung

$$E_v = w_v J$$

in Phase mit J und daher auch mit E_R; sie entspricht dem Ohmschen Spannungsabfall im Anker eines Motors.

Wir haben früher den Wirkungsgrad als das Verhältnis des mechanisch-akustischen Arbeitswiderstandes zu diesem + Verlustwiderstand bezeichnet. Statt der Widerstände können wir auch die zugehörigen Spannungen setzen und erhalten

$$\eta = \frac{E_R}{E_R + E_v}$$

oder nach Einsetzung der Werte für E_R und E_v

$$\eta = \frac{\frac{(Bl)^2}{b}}{\frac{(Bl)^2}{b} + w_v}$$

und hieraus

$$\frac{(Bl)^2}{b} = \frac{\eta}{1-\eta} w_v.$$

Dies in die Werte für den wattlosen bzw. Wattwiderstand eingesetzt, ergibt

$$\frac{E}{J} \sin \varphi_s = \frac{\eta}{1-\eta} w_v \sin \varphi_s \cos \varphi_s$$

$$\frac{E}{J} \cos \varphi_s = \frac{\eta}{1-\eta} w_v \cos^2 \varphi_s.$$

Diese Ausdrücke stellen nur die durch die reine Spulenschwingung hervorgerufenen Wirkungen dar. Durch Addition von ωL_v bzw.

w_v erhält man die Widerstandskomponenten des wahren Apparates, wobei der Winkel φ_s zwischen E und J auf der linken Seite der Gleichungen in φ_{II} übergeht. Eine Vergleichung mit den aus dem Diagramm abgeleiteten Formeln zeigt, daß beide Wege zu dem gleichen Resultate geführt haben. Rückwärts kann diese Übereinstimmung die Richtigkeit der Hilfskonstruktion des Ersatzkreises und des aufgestellten Diagramms erweisen.

V. Versuchsresultate.

Wir entnehmen unserem zahlreichen Beobachtungsmaterial die Daten für einen Apparat und wollen an Hand der Resultate zeigen, daß Theorie und Experiment in guter Übereinstimmung sind.

Die Messungen erfolgten nicht mit Wattmeter, Voltmeter und Ampèremeter, wie dies bei der Aufnahme der Resonanzkurve des elektromechanischen Transformators[1]) geschah, sondern durch direkte Messung des Watt- und wattlosen Widerstandes in der Brücke. Um nicht wiederholt zwischen positiven und negativen Phasenverschiebungen zu wechseln, und um die Ungenauigkeiten der Brückenmessung des wattlosen Widerstandes bei kleinen Phasenwinkeln zu vermeiden, war eine feste Selbstinduktion dem Apparat vorgeschaltet, die so bemessen war, daß auch bei der größten Kapazitätswirkung noch resultierende selbstinduktive Belastung übrigblieb. Von den gemessenen Werten wurden dann der Watt- und wattlose Widerstand der vorgeschalteten Selbstinduktion abgezogen und so die entsprechenden Widerstände des Apparates gefunden.

In Fig. 4 gilt als Abszisse die prozentuale

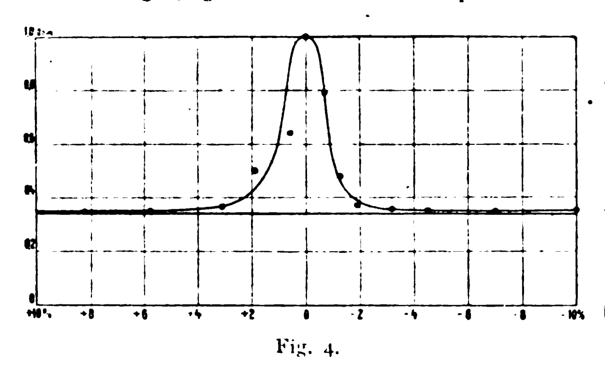


Fig. 4.

Verstimmung positiv nach links und unterhalb der Resonanz, negativ nach rechts und oberhalb der Resonanz, während als Ordinate die beobachteten Werte des Wattwiderstandes als Punkte, durch Kreise markiert, eingetragen sind, wobei der Maßstab so gewählt ist, daß dem Resonanzpunkt der Widerstand 1 Ohm entspricht. Die verbindende Kurve stellt gleichzeitig auch die Leistungskurve dar, wenn wir uns den Apparat mit konstanter Stromstärke erregt denken. Durch Anlegen der Verlustlinie an die Resonanzkurve findet man in dem Ordinatenverhältnis im Resonanzpunkt den Wirkungsgrad zu $\eta = 0{,}66$. Der Ordinatenabschnitt zwischen Verlustlinie und Resonanzkurve ist der Verlustwiderstand $w_v = 0{,}34$ Ohm, während der Ordinatenabschnitt zwischen Verlustlinie und Resonanzkurve in Resonanz der mechanische Arbeitswiderstand $w_s = 0{,}66$ Ohm ist. Denken wir uns diesen Ordinatenabschnitt halbiert und im Halbierungspunkte die Breite der Resonanzkurve gemessen, so finden wir hieraus die Dämpfung zu $\mathfrak{d}_s = 0{,}054$.

Aus diesen Werten von η, w_v und $\mathfrak{d}_s$ ist nun entsprechend der oben mitgeteilten Formel der wattlose Widerstand des Apparates berechnet und als Kurve in Fig. 5 abhängig von x,

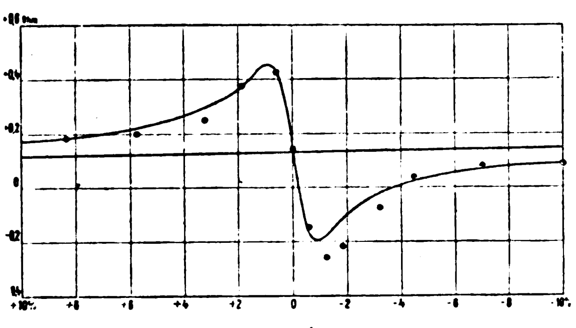


Fig. 5.

d. h. der prozentualen Verstimmung aufgetragen. Er beschreibt die ihm charakteristische v-Kurve und ist im allgemeinen positiv, d. h. der Apparat wirkt als Selbstinduktion, und nimmt nur von etwa 0,2 bis 4 Proz. Verstimmung oberhalb der Resonanz negative Werte an, so daß der Apparat auf diesem Gebiet eine kapazitive Wirkung hat. Bei Abwesenheit jeder freien Selbstinduktion L_v müßte diese Kurve symmetrisch zur Nullinie sein. Der wattlose Widerstand der freien Selbstinduktion ist bei Resonanzfrequenz ω_R für diesen Apparat bei festgebremster Spule bestimmt zu $\omega_R L_v = 0{,}13$ Ohm und als Gerade ansteigend mit ω in der Fig. 5 gleichfalls eingetragen. Wie man erkennt, ist die v-Kurve zu dieser Geraden doppelt gespiegelt und nähert sich ihr asymptotisch für sehr kleine und sehr große Verstimmungen. Es entspricht dies Verhalten vollständig der abgeleiteten Formel für den wattlosen Widerstand des Apparates. Die für die einzelnen Beobachtungspunkte bei frei schwingender Spule ge-

1) Diese Zeitschr. **20**, 104, 1919.

messenen Werte des wattlosen Widerstandes sind in Fig. 5 als Punkte, durch Kreise markiert, eingetragen und zeigen, daß die direkt gemessenen Werte mit denen aus η, w_v und $\mathfrak{d}_s$ berechneten hinreichend übereinstimmen.

Der untersuchte Apparat besaß, wie bereits eingangs allgemein ausgeführt, Kurzschlußwicklungen auf den Magnetpolen. Trotzdem ist noch eine Rest-Selbstinduktion übriggeblieben, die wohl hauptsächlich von den Kraftlinien, die sich in Luft schließen, herrührt. Läßt man die Kurzschlußwicklungen fort, d. h. Felder im Eisen der Magnetpole zu, so tritt, wie sich experimentell nachweisen läßt, eine Unsymmetrie der Kurven ein. Es verringern sich in der Kurve des wattlosen Widerstandes die Werte der selbstinduktiven Wirkung unterhalb der Resonanz, während sich diejenigen der kapazitiven Wirkung oberhalb vergrößern. Eine Andeutung hierfür läßt sich bereits in den durch Beobachtung gewonnenen Punkten der Fig. 5 erkennen. Die Differenz des wattlosen Widerstandes zwischen größter Selbstinduktions- und größter Kapazitätswirkung bleibt hierbei aber nahezu dieselbe. Gleichzeitig beobachtet man bei fehlenden Kurzschlußwicklungen eine Unsymmetrie der Kurve des Wattwiderstandes. Es vergrößern sich die Werte unterhalb der Resonanz und verringern sich oberhalb. Bei Verwendung von Kurzschlußwicklungen aber sind die Kurven symmetrisch und entsprechen den Gesetzen, die wir nach der Ersatzkreismethode und aus dem zugehörigen Diagramm abgeleitet haben, und bestätigen, ebenso wie die früher mitgeteilte direkte Ableitung, die Brauchbarkeit und Richtigkeit der zugrunde liegenden Methode.

Zusammenfassung.

Im Vorstehenden ist die von uns bereits früher angegebene Methode, elektromechanische Schwingungsprobleme durch Einführung von elektrischen Ersatzkreisen für die mechanischen Schwingungsvorgänge rein elektrisch zu behandeln, auf Schallgeber angewandt worden, bei denen die Erregung durch eine in einem konstanten Magnetfeld schwingende Spule erfolgt. Wir haben die Theorie und Wirkungsweise solcher Apparate gegeben, das Diagramm aufgestellt und die Gesetze für das Verhalten als Schallgeber abgeleitet. Insbesondere ist gezeigt, wie der Watt- und wattlose Widerstand von wenigen Konstanten abhängt und berechnet werden kann, und daß die Versuchsresultate mit der Theorie in Übereinstimmung sind.

Kiel, im November 1919.

(Eingegangen 31. Dezember 1919.)

Zur Messung der Radiumemanation in Quellwässern.

Von H. Greinacher.

Die üblichen Fontaktoskope[1]) bzw. Fontaktometer[2]) bestehen im wesentlichen aus einem Elektroskop und einem Blechgefäß, das zur Aufnahme des Quellwassers, und zugleich als Ionisierungsgefäß dient. Nachdem eine abgemessene Menge Wasser in die Blechkanne eingebracht ist, wird die Emanation durch Schütteln ausgetrieben, worauf man die Ionisierung der Luft über dem Wasser mittels des aufgesetzten Elektroskops mißt. Um genaue Resultate zu bekommen, ist dafür zu sorgen, daß der Ionisierungsraum stets gleiche Größe hat, da nur dann die elektrostatische Kapazität des Meßsystems und der Duanesche Korrektionsfaktor[3]) (Absorption der Strahlung in den Gefäßwänden) konstant bleiben, d. h. die Wassermenge sollte stets dieselbe sein. Um sich hiervon möglichst unabhängig zu machen, wird das Ionisierungsgefäß gewöhnlich ziemlich groß (10 bis 15 Liter) genommen. Man hat dann auch noch den Vorteil, daß fast alle Emanation aus dem Wasser ausgeschüttelt wird. Nimmt man z. B. 1 Liter Wasser bei einem 10-Liter-Gefäß, so beträgt die Korrektur infolge der im Wasser verbleibenden Emanation nur noch etwa 2,5 Proz. Die Veränderlichkeit des Absorptionskoeffizienten der Emanation mit der Temperatur kommt dann praktisch nicht mehr in Betracht. Die Berechnung wird daher beim Schüttelverfahren auch in dieser Hinsicht einfacher als beim Zirkulationsverfahren[4]). Der Apparat hat aber einen für Reisezwecke ziemlich ins Gewicht fallenden Nachteil: Er ist zu umfangreich und schwer.

Um dem abzuhelfen, haben Kohlrausch und Loewenthal sich mit den handlicheren 2-Liter-Kannen begnügt und haben diesen überdies, wohl der bequemeren Verpackungsfähigkeit wegen, viereckige Form gegeben. Es ist aber klar, daß sie sich damit verschiedener, die Genauigkeit bedingenden Faktoren begeben. Geht man nur bis zu einer $^1/_2$-Liter-Füllung, so sind schon Kapazität und Duanescher Faktor wesentlich geändert. Letzterer ist überhaupt bei der viereckigen Form unbekannt und nicht nach der Formel $f = \frac{1}{1 - 0{,}517\, a/r}$ zu berech-

1) C. Engler u. H. Sieveking, diese Zeitschr. **6**, 700, 1905.

2) H. Mache u. St. Meyer, diese Zeitschr. **10**, 860, 1909.

3) W. Duane u. A. Laborde, C. R. **150**, 1421, 1910.

4) H. W. Schmidt, diese Zeitschr. **6**, 561, 1905.



nen. Auch ist die Berechnung der Resultate komplizierter, da nun der Absorptionskoeffizient, der mit der Temperatur variabel ist, in sie eingeht.

Im folgenden sei nun ein Verfahren beschrieben, das diese Übelstände vermeidet und doch erlaubt, kleine, leicht mitzuführende Gefäße zu verwenden, und das zudem die maximale Meßempfindlichkeit gewährleistet. Haben wir ein gegebenes Gefäß vom Volumen V Liter mit V_2 Liter Wasser beschickt, so verteilt sich beim Schütteln die Emanation zwischen dem Luftvolumen V_1 und dem Wasservolumen V_2 entsprechend dem Absorptionskoeffizienten α. Bezeichnen wir die Dichte der Emanation in der Luft mit s, so ist die Emanationsmenge E_1 in V_1 und von E_2 in V_2 gegeben durch

$$E_1 = V_1 s$$

und (1)

$$E_2 = V_2 s \alpha.$$

Die gesamte ins Gefäß eingeführte Emanationsmenge ist proportional V_2. Also

$$E = E_1 + E_2 = k V_2. \quad (2)$$

Gemessen soll, wie bei dem bisherigen Verfahren, E_1 werden. Um jedoch einen konstanten Ionisierungsraum zu haben, wird das ausgeschüttelte Wasser vor der Messung abgelassen. Inaktive Außenluft fließt dann nach. Ein Verlust von Emanation ist dabei nicht zu befürchten.

Es läßt sich nun ohne weiteres einsehen, daß die Emanationsmenge E_1 für ein bestimmtes Wasservolumen V_2 einen Maximalwert erreicht. Denn, nehmen wir die beiden extremen Werte $V_2 = 0$ und $V_2 = V$, so ist in beiden Fällen die ausgeschüttelte Emanation $E_1 = 0$. Sie muß also bei einem zwischenliegenden Werte einen Maximalwert annehmen. Es soll nun das zu verwendende Wasservolumen V_2 und der Maximalwert E_1 (im Verhältnis zur eingeführten Emanation E) berechnet werden.

Beziehung (2) wird unter Verwendung von (1)

$$E = s(V_1 + \alpha V_2) = k V_2. \quad (3)$$

Entnimmt man hieraus s und setzt dieses in (1) ein, so erhält man

$$E_1 = \frac{k V_1 V_2}{V_1 + \alpha V_2}. \quad (4)$$

Da E_1 ein Maximum sein soll, setzen wir $\frac{dE_1}{dV_2} = 0$, wobei wir berücksichtigen, daß

$$V_1 = V - V_2 \text{ und } dV_1 = -dV_2.$$

Man erhält

$$(V_1 + \alpha V_2)(-V_2 + V_1) - V_1 V_2 (-1 + \alpha) = 0,$$

woraus schließlich folgt

$$\frac{V_1}{V_2} = \sqrt{\alpha}. \quad (5)$$

Die Volumina müssen also nach $\sqrt{\alpha}$ geteilt werden. Wie leicht einzusehen, ist das gleichbedeutend mit

$$\frac{V_2}{V} = \frac{1}{1 + \sqrt{\alpha}}. \quad (5a)$$

Setzt man Beziehung (5) in (4) ein, so erhält man den Maximalwert von E_1.
Man erhält

$$E_1 = \frac{E}{1 + \sqrt{\alpha}}. \quad (6$$

Uns interessieren die Mache-Einheiten, die im Liter Quellwasser enthalten sind. Die gesuchte Größe $\frac{E}{V_2}$ folgt unmittelbar aus (6) und (5a) zu

$$X = \frac{E}{V_2} = \frac{E_1 V}{V_2^2}. \quad (7)$$

Das Verfahren ist nun ohne weiteres einleuchtend. Man füllt die Blechkanne bis zu einer Höhe mit Wasser, die im Verhältnis $\frac{V_2}{V}$ steht, was nach (5a) aus dem bekannten Absorptionskoeffizienten zu berechnen ist. Man läßt das Wasser nach Ausschütteln ab und mißt die in der Kanne verbleibende Emanationsmenge E_1. Nach (7) findet man dann durch Multiplikation mit $\frac{V}{V_2^2}$ die Mache-Einheiten pro Liter Quellwasser.

Die Faktoren in (5a) und (7) wären dabei ein für allemal zu berechnen, wenn der Absorptionskoeffizient eine konstante Größe wäre. Leider hängt er aber stark von der Temperatur ab. Da wir ihn jedoch für alle in Betracht kommenden Temperaturen genügend genau kennen[1]), so läßt sich das Verfahren ohne wesentliche Komplikation anwenden. Man muß nur für jede Temperatur die passende Füllung nehmen, was in folgender Weise ohne Rechnung ausgeführt werden kann. Man bringt in der Kanne einen vertikalen Schlitz an, der mit einem Glasfenster zugekittet wird. Es läßt sich hierdurch die Höhe der Wasserfüllung beurteilen. Zu beiden Seiten des Schlitzes befinde sich eine Teilung. Die zur Linken sei z. B. mit Celsiusgraden (etwa 0^0 bis 40^0). versehen und gebe an, wie hoch das Wasser bei der betreffenden Temperatur eingefüllt werden muß. Schwankt die Temperatur des Quellwassers zwischen 4^0 und 40^0, so ist die

1) Siehe etwa die Tabelle in St. Meyer und E. v. Schweidler, Radioaktivität, 326, 1916.

Wasserhöhe ca. 0,6 bis 0,7 der Gefäßhöhe, obschon α zwischen etwa 0,45 bis 0,15 schwankt. Der Schlitz für das Wassermanometer braucht also nicht besonders lang zu sein. Die Teilung auf der rechten Seite kann direkt $\frac{V}{V_2^2}$ angeben. Sowohl die erste als die zweite Teilung wird ein für allemal nach den Formeln (5a) und (7) berechnet[1]). Bei den eigentlichen Messungen reduziert sich dann die ganze Berechnung auf die Multiplikation mit der Zahl auf der Teilung rechts. Ist das Gefäß zylindrisch, so kann auch der Duanesche Faktor genau angegeben werden. Zweckmäßig ist Dichtung nach Art des Fontaktometers von Mache und Meyer oder Hammer[2]) sowie die Anbringung zweier Hähne: Der obere zum Lufteinlassen, der untere zum Wasserauslassen. Die Ausschüttelung von Quellgasen, insbesondere CO_2 stört hier nicht. Die nötige Vergrößerung des Luftvolumens gewinnt man ungezwungen beim Auslaufenlassen des Wassers.

Das neue Verfahren hat ferner noch den Vorteil, die maximale Empfindlichkeit zu geben. Denn, man mißt den größtmöglichen Ionisierungsstrom, der sich in einem gegebenen Schüttelgefäß mit einer gegebenen Wassersorte erzielen läßt. Ein Fehler beim Einfüllen des Wasserquantums V_2 hat einen verhältnismäßig geringen Einfluß. Ist doch die Veränderung von E_1 mit V_2 in seiner Eigenschaft als Maximalwert sehr gering. Es könnte immerhin scheinen, daß ein fehlerhafter Wert von V_2 das Resultat wegen des Faktors $\frac{V}{V_2^2}$ quadratisch beeinflusse. Dem ist aber nicht so, da man die Emanationsmenge E_1 eigentlich aus (6) berechnet und dann erst diesen Wert durch das eingefüllte Wasservolumen V_2 dividiert. Die Genauigkeit des nach (7) gefundenen Wertes für X hängt also von der Genauigkeit, mit der sowohl α als das eingefüllte Wasservolumen V_2 bekannt sind, ab. Ein Fehler von α hat einen ziemlich kleinen Einfluß; auch geht ein Fehler in der Wasserfüllung nur linear in das Resultat ein.

Ein Nachteil des Verfahrens könnte darin erblickt werden, daß die vorgeschriebene Menge des zu verwendenden Wassers eine Beschränkung des Messbereichs bedingt. Kann man doch nach den bisherigen Verfahren je nach der Stärke der Quelle kleinere oder größere Wassermengen nehmen. In der Tat sind nach dem geschilderten Verfahren z. B. 2-Liter-Kannen sehr gut für schwache, aber nicht für sehr starke Aktivitäten geeignet. Doch hindert einen ja nun nichts, neben einer solchen Kanne nun auch noch ein kleines Gefäß zu verwenden. Geeignet dürften hierfür etwa die Dimensionen sein: Höhe 12,5 cm, Durchmesser 6,7 cm (Inhalt 0,44 Liter), da für diese Ausführung der Duanesche Faktor bestimmt ist (l. c.).

Als Fehlerquelle käme bei dem Verfahren etwa in Betracht, daß während des Ausfließens des ausgeschüttelten Wassers noch Emanation an die Luft der Kanne abgegeben werden könnte. Es ist jedoch anzunehmen, daß beim ruhigen Abfließen des Wassers kein Emanationsaustausch mehr stattfindet. Inwieweit aber ein solcher Einfluß noch wirksam sein kann, werden erst besondere Versuche zeigen müssen.

Zürich, Physikalisches Institut der Universität, Dezember 1919.

(Eingegangen 18. Dezember 1919.)

Ein Versuch zur Demonstration des Rayleighschen Gesetzes.

Von Franz Rother.

Betrachtet man bei einem Dreifarbennegativ die rote Teilaufnahme, so zeigt sich bekanntlich, daß dieses Teilbild im Gegensatz zu den beiden anderen die größte Ferndeutlichkeit besitzt. Die in Dunst gehüllte Ferne läßt viel mehr Einzelheiten erkennen, während die blaue und bis zu einem gewissen Grade auch noch die grüne Teilaufnahme in der Ferne den blauen Dunst und nicht die von ihm überlagerten Gegenstände wiedergibt. Diese Tatsache führte dazu, Aufnahmen aus der Luft, bei denen ähnliche Umstände in Erscheinung treten, für bestimmte Zwecke mit rotempfindlichen Platten unter Benutzung eines möglichst strengen Orange- oder besser Rotfilters auszuführen, um nicht den die Erdoberfläche überlagernden Dunst, sondern nach Möglichkeit die darunterliegenden Gegenstände zu photographieren. Da jede rotempfindliche Platte eine noch immer weit überwiegende Blauempfindlichkeit besitzt, muß natürlich das vom Dunst ausgehende blaue Licht durch ein Filter von seiner Wirkung ausgeschaltet werden.

Die Begründung für die geschilderten Erscheinungen gibt uns das Rayleighsche Gesetz, nach dem die Komponenten des weißen Lichtes beim Durchgang durch trübe Medien der Intensität nach umgekehrt proportional zur vierten Potenz der Wellenlänge zerstreut wer-

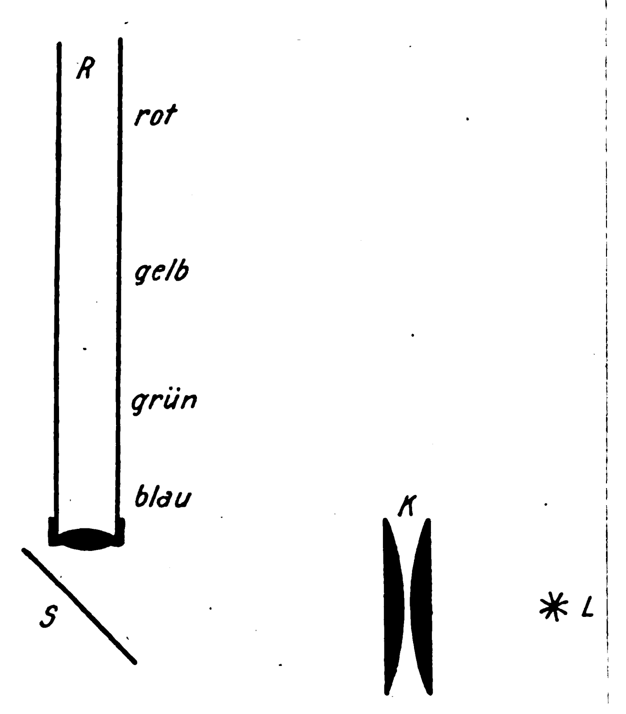
1) Statt der zweiten Teilung kann auch direkt die Tabelle verwendet werden, welche $\frac{V}{V_2^2}$ für die verschiedenen Temperaturen angibt.

2) W. Hammer, diese Zeitschr. 13, 943, 1912.

den. Als Folgerung ergeben sich die oben geschilderten Beobachtungen ebenso wie uns ja auch die auf- und untergehende Sonne zeigt, daß beim Durchlaufen dicker Schichten trüber Medien von weißem Licht nur noch die langwelligen Anteile übrig bleiben.

Dem Verfasser kam es nun darauf an, diese beim Durchgang von Licht durch trübe Medien auftretenden Erscheinungen experimentell zu zeigen. Bei dem bekannten Tyndallschen Versuch, der auf Grund der Lichtzerstreuung in trüben Medien die Entstehung des Himmelsblaues zeigt, kann man bei der gewöhnlichen Ausführungsform beobachten, daß am Grunde des Gefäßes, in dem sich die gewöhnlich benutzte Mastixemulsion befindet, ein Übergang von blauem zu grüngelbem Lichte stattfindet, ein Zeichen, daß es möglich sein muß bei entsprechender Anordnung die ganze Farbenskala des zerstreuten Lichtes zu zeigen, ohne sich nur auf die Darstellung des zerstreuten kurzwelligen Lichtes zu beschränken. Versuche haben nun ergeben, daß dies in sehr augenfälliger Weise mit folgender Anordnung möglich ist.

In der Figur bedeutet *R* ein senkrecht auf-



gestelltes, mindestens 150 cm langes Glasrohr von etwa 4 cm lichter Weite, in dessen untere Öffnung eine gute Sammellinse von kurzer Brennweite (etwa 15—20 cm) eingekittet ist. Durch einen Spiegel *S* oder ein totalreflektierendes Prisma wird in den Brennpunkt dieser Linse derjenige des Kondensors *K* einer seitlich aufgestellten Bogenlampe *L* gebracht, so daß das Glasrohr *R* von gut parallelem Lichte durchlaufen wird. Diese Anordnung gestattet das Maximum an Helligkeit anzuwenden verbunden mit sehr homogener Beleuchtung ohne störendes Nebenlicht. Füllt man nun das Rohr mit einem geeigneten trüben Medium, so sieht man sehr schön, wie zuerst von dem eindringenden weißen Lichte das Blau und dann der Reihe nach alle andern Farben bis zum Rot zerstreut werden, so daß das Rohr in seiner Längsausdehnung alle Spektralfarben zeigt. Es läßt sich auf einfache Weise zeigen, daß das aus dem oberen Ende des Rohres austretende Licht rein rot gefärbt ist. Benutzt man, wie angegeben, eine Bogenlampe als Lichtquelle, so ist die beschriebene Erscheinung sehr lichtstark.

Es kommt darauf an, das trübe Medium möglichst zweckentsprechend herzustellen, dann kann man erreichen, daß die Blaukomponente des benutzten Lichtes schon auf einer sehr kurzen Strecke im Medium vollkommen zerstreut wird. Benutzt man wie beim Tyndallversuch alkoholische Mastixlösung, die in Wasser eingegossen wird, so muß man darauf achten, keine zu groben Teilchen zu erhalten, was gewöhnlich passiert, wenn man eine relativ konzentrierte Mastixlösung in Wasser gießt. Bei vorstehendem Versuch wurde so verfahren, daß man 2 g Mastix in 50 ccm absol. Alkohol löste, diese Lösung in 500 ccm Alkohol goß und diese stark verdünnte Lösung erst in Wasser so, daß das Gesamtvolumen durch die angegebene Dimensionierung des Rohres bestimmt war. Man hat es jedenfalls so in der Hand, verschiedene Teilchengrößen zu erzielen, je nach der Alkoholmenge in die man die Vorratslösung gießt. Die zweckentsprechende Mischung kann man sich nach den gemachten Angaben in jedem Falle selbst ausprobieren.

Der Versuch kann noch dahin abgeändert werden, daß man durch zwischengeschaltete Filter die mittleren Wellenlängen des benutzten Lichtes wegnimmt und nur die kurz- und langwelligen Strahlen zur Wirkung gelangen läßt, also etwa Blauviolett und Rot. Man sieht dann im unteren Teile des Rohres die Mischfarbe und im oberen das reine Rot.

Geeignete Gelatinefilter sind[1]):

1. Rose bengale 0,5, Säurerhodamin 2,0, oder
2. Kristallviolett 0,3, Kupfersulfat 0,1.

Natürlich können die Farbstoffe auch gelöst in Küvetten benutzt werden, falls man

1) Siehe von Hübl, Die photographischen Lichtfilter. W. Knapp, Halle a. S.



nicht überhaupt vorzieht, die Enden eines lichtstarken Spektrums zu einer Mischfarbe zu vereinigen.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, Dezember 1919.

(Eingegangen 24. Dezember 1919.)

Bemerkung zu einer Abhandlung des Herrn Waetzmann.

Von E. Budde.

Im fünften Heft des laufenden Jahrganges dieser Zeitschrift hat Herr Waetzmann[1]) einen Aufsatz „Theoretisches über den Schalldruck“ veröffentlicht, der sich zum großen Teil mit meiner Stellungnahme zu seinen und anderer Autoren früheren Arbeiten über Schalldruck und Kombinationstöne beschäftigt. Wollte ich alle die Punkte, bezüglich deren ich mit ihm nicht übereinstimme, klar legen und die Gründe für meine abweichende Ansicht deutlich auseinandersetzen, so müßte ich seine ganze Darlegung analysieren und das würde noch erheblich mehr Raum beanspruchen als Herrn Waetzmanns Arbeit selbst. Ich trage Bedenken, die Leser dieser Zeitschrift mit einer so umfangreichen Erwiderung zu behelligen, zumal da es sich um Fragen handelt, deren wissenschaftliche Bedeutung nicht eben tief geht und da meines Erachtens für die meisten Leser eine eingehende Widerlegung kaum erforderlich sein wird. Ich begnüge mich also, damit mein Schweigen nicht als Zustimmung ausgelegt werde, mit der Erklärung, daß ich mit den l. c. von Herrn Waetzmann aufgestellten Behauptungen keineswegs einverstanden bin.

1) E. Waetzmann, diese Zeitschr. 21, 122, 1920.

(Eingegangen 15. April 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der „supraleitende Zustand“ von Metallen.

Von C. A. Crommelin*).

Heute abend ist es meine Absicht, Ihre Gedanken auf eine Reihe von Untersuchungen über den Widerstand von Metallen zu lenken, die in dem Leidener kryogenen Laboratorium von Professor Kamerlingh Onnes bei Temperaturen ausgeführt sind, die lediglich mit flüssigem Helium herzustellen sind und die zu der auch für die Elektronentheorie der Metalle so bedeutsamen Entdeckung des sogenannten supraleitenden Zustandes verschiedener Metalle geführt haben. Zunächst möge eine kurze Besprechung der Experimente folgen, die als Grundlage dieser Untersuchungen gedient haben.

Daß in der Zeit, in der einige Laboratorien bereits flüssige Gase herzustellen vermochten, eine so fundamentale und für die Praxis und Theorie höchst wichtige Größe wie der elektrische Widerstand bald Gegenstand von Messungen bei tiefen Temperaturen wurde, liegt auf der Hand. Bereits ins Jahr 1885 fällt eine ziemlich umständliche Untersuchung von Cailletet und Bouty[1]), die indessen nicht weiter ging als bis -123^0, eine Temperatur, die sich ohne viel Mühe mit flüssigem Äthylen herstellen läßt. Erst als es gelang, flüssige Luft zu bereiten, konnte man weiter gehen. Holborn und Wien[2]) und Holborn[3]) allein haben als erste den Widerstand von einem reinen Platindraht bei 0^0 bis -190^0 genau mit dem Wasserstoffthermometer verglichen in der Absicht, mittels solcher Messungen tiefe Temperaturen genau bestimmen zu können, was ihnen und späteren Forschern ausgezeichnet gelungen ist, so daß augenblicklich das Platinwiderstandsthermometer als sekundäres Thermometer für tiefe Temperaturen am meisten geeignet zu halten ist. Zwar hatten v. Wroblewski[4]) und Olszewski[5]) bereits vor ihnen Versuche in derselben Richtung angestellt, doch ohne großen Erfolg, namentlich weil ihre Temperaturbäder nicht konstant und ihre Temperaturmessungen mangelhaft waren. Erst durch die oben genannten Messungen von Holborn und Wien, weiter die von Travers und Gwyer[6]) und namentlich die Untersuchungen in dem Leidener Laboratorium von Kamerlingh Onnes und seinen Mitarbeitern Meilink[7]), Clay[8]) und Holst[9]) ist das Platinwiderstandsthermometer zu einem Präzisionsinstrument von hohem Wert gelangt.

Doch nicht allein den praktischen Gesichtspunkt verfolgte man bei diesen Untersuchungen; auch für die Theorie, insbesondere die Elektronentheorie der Metalle, erwartete man viel von den Resultaten. Hatte man doch bei verschiedenen Gelegenheiten gemerkt, daß die Änderung des Widerstandes mit der Temperatur

*) Vortrag, gehalten vor der Physikalischen Gesellschaft zu Leiden am 13. Februar 1919. Dieser Vortrag ist schon erschienen im „Chemisch Weekblad“ 1919 und wird hier abgedruckt mit Genehmigung der Redaktion dieser Zeitschrift.

bei tiefen Temperaturen eine ganz andere war, als bei hohen. Häufig, z. B. bei Platin, nahm der Temperaturkoeffizient stark ab mit der Temperatur, zuweilen fand man einen Wendepunkt in der Kurve, die den Widerstand als Funktion der Temperatur darstellte. Natürlicherweise erhob sich die Frage, wie sich der Widerstand in unmittelbarer Nähe des absoluten Nullpunktes verhielt.

Lord Kelvin[10]) war bereits 1902 im Sinne der Elektronentheorie der Metalle also von der Vorstellung aus, daß die Elektronen sich wie Gasmoleküle zwischen den Metallatomen bewegen sollten, zu dem Schluß gekommen, der Widerstand müsse beim absoluten Nullpunkt unendlich groß werden. Der Dissoziationsgrad der Elektronen sollte nämlich beim absoluten Nullpunkt Null sein, d. h. die freien Elektronen, soweit sie noch vorhanden waren, sollten ihre Beweglichkeit verlieren. Kamerlingh Onnes sprach von einer Kondensation oder einem Festfrieren der Elektronen.

Es war inzwischen noch nicht geglückt, diese Theorie experimentell zu bestätigen. Das Minimum, das man in der Widerstandskurve erwartete, war selbst bei Temperaturen von flüssigem Wasserstoff (-253^0 bis -259^0) nicht gefunden.

Da gelang es am 10. Juli 1908 Kamerlingh Onnes, Helium zu verflüssigen und er eröffnete so der Forschung ein ganz neues Temperaturgebiet in unmittelbarer Nähe des absoluten Nullpunktes.

He siedet unter Atmosphärendruck bei einer Temperatur von ungefähr -269^0 C und unter einem Druck von 3 mm *Hg* bei $-271{,}5^0$*). Unter den vielen Messungen, die in den folgenden Jahren auf diesem Gebiet in dem Leidener Laboratorium ausgeführt sind, nehmen die betreffs des Widerstandes von Metallen und Legierungen eine bedeutende Stelle ein. Hierauf beziehen sich unsere folgenden Betrachtungen.

Die ersten Messungen[11]) betrafen einen reinen Platindraht von 0,1 mm Dicke, dessen Widerstand bereits bei den tiefsten Temperaturen des flüssigen Wasserstoffs mit dem Wasserstoffthermometer verglichen war und den man nun weiter bei *He*-Temperaturen untersuchen wollte. Der Draht war auf einen Glaszylinder gewickelt, seine Enden waren in das Glas eingeschmolzen und an lange *Cu*-Drähte gelötet, die mit einer Wheatstoneschen Brücke verbunden waren.

Eine Durchschnittszeichnung des Bades, das unmittelbar mit dem Heliumverflüssiger verbunden war, findet man hiervor abgebildet**).

*) Im folgenden sollen die Heliumtemperaturen in Graden der absoluten Skala angegeben werden. (K. = Kelvin.)

**) S. Fig. 1. Wir müssen jedoch im Auge behalten, daß diese Zeichnung sich auf später zu besprechende Versuche bezieht und nicht auf die ersten Messungen an *Pt*. Es sind im Laufe der Zeit nämlich verschiedene Konstruktionen im Gebrauch gewesen. Die Figur ist Comm. Nr. 123 entlehnt. Die Klischees der meisten Figuren sind mir von Prof. Kamerlingh Onnes zur Verfügung gestellt, wofür ich ihm an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank ausspreche.

Nachdem das komprimierte gasförmige *He* eine Anzahl Spiralen (gestrichelt dargestellt) durchlaufen hat und darin erst durch flüssige Luft, dann durch flüssigen Wasserstoff abgekühlt ist, kommt es schließlich bei der 4 faltig gewundenen Spirale *A*, die in einem Expansionshahn endigt. Hier wird es flüssig und strömt in den unter dem Hahn gelegenen Raum (in dem sich das *He* Thermometer Nb_1 befindet, das durch die Kapillare Nb_2 mit dem Barometerrohr Nb_3 verbunden ist), fließt durch das Vakuumrohr *Eah* in den eigentlichen Helium-Kryostat; dieser besteht aus dem Vakuumgefäß S_7, das das flüssige *He* und die hineingetauchten Apparate enthält; es ist zwecks Wärmeisolation von den Vakuumgläsern Eb'', Ec'' umgeben, die mit flüssigem Wasserstoff bzw. flüssiger Luft gefüllt sind, außerdem umgibt alle ein gewöhnliches Glas mit Alkohol. Der untere Teil des Heliumglases ist unversilbert, während in der Versilberung von den beiden umhüllenden Gefäßen unversilberte Spalten ausgespart sind. In dem Falle, der in der Fig. 1 dargestellt ist, enthält der Kryostat ein *He*-Thermometer Th_3'', einen Goldwiderstand ΩAu (nämlich einen Golddraht auf einer Glasröhre), einen *Hg*-Widerstand ΩHg und einen Klappenrührer *Sb*, dessen Einzelheiten in der besonderen Figur neben dem Kryostaten wiedergegeben sind. Dieser Rührer sorgte für eine gute Zirkulation der Flüssigkeit, so daß die Temperatur oben und unten in dem Bade vollständig dieselbe war; vor allem beim Arbeiten unter geringerem Druck ist dieser Rührer unentbehrlich, weil sonst infolge des hydrostatischen Druckes große Temperaturverschiedenheiten oben und unten in dem Bad auftreten.

Die Ergebnisse dieser ersten Messungen waren in hohem Maße überraschend, wie aus vorstehender Tabelle deutlich hervorgeht.

Absolute Temperatur		$\frac{W_t}{W_0}$
273,09 *K*		1 —
20,2	flüssiger H_2	0,0171
14,2		1,0135
4,3	flüssiges *He*	0,0119
2,3		0,0119
1,5		0,0119

W_t = gemessener Widerstand
W_0 = Widerstand bei 0^0 C.

Somit keine Spur von dem nach Kelvin zu erwartenden Minimum, sondern im Gegenteil von $4{,}3^0$ *K* ab, also in dem ganzen *He*-Gebiet ein sehr geringer und vollkommen konstanter Widerstand.

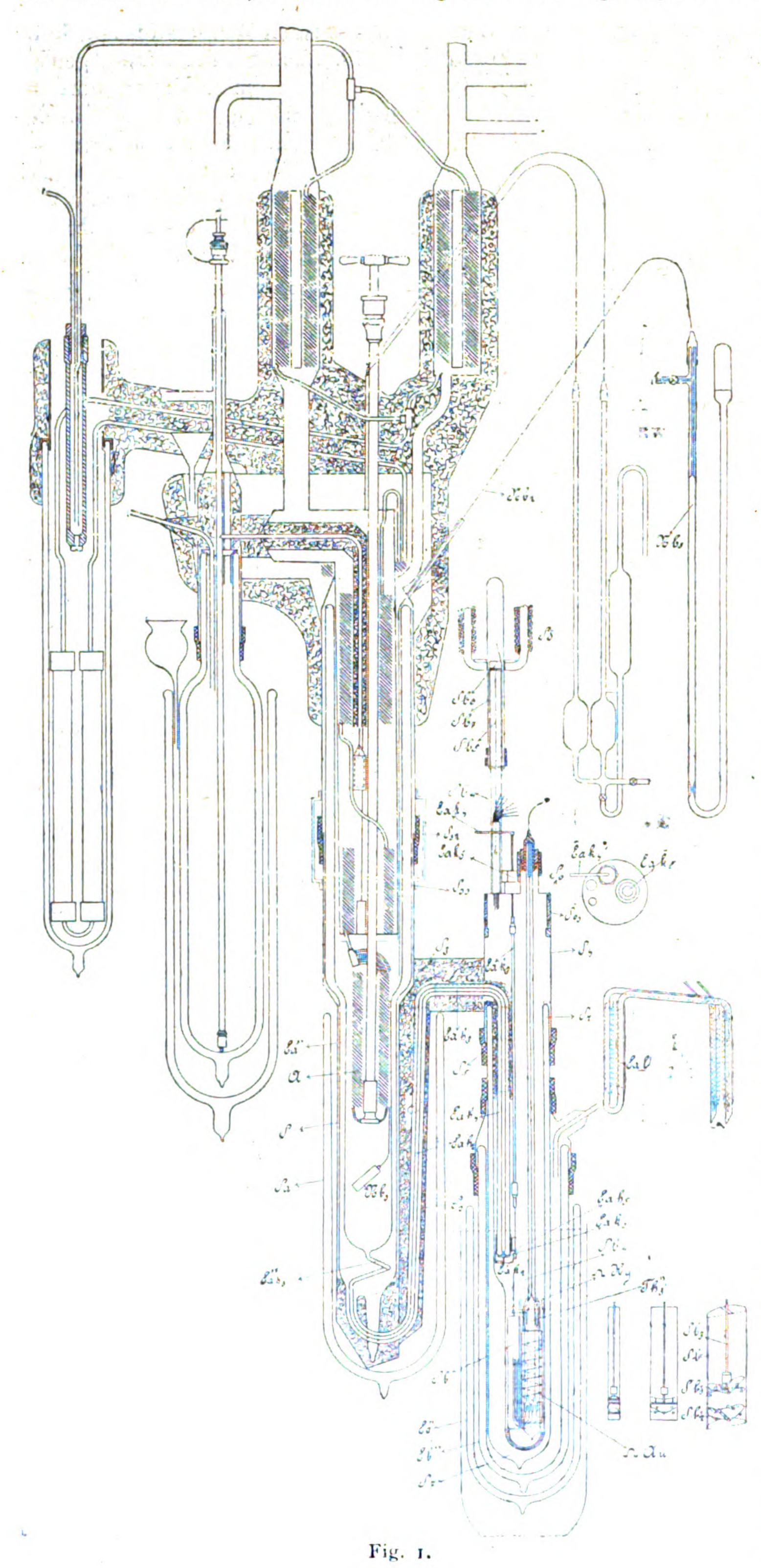


Fig. 1.

Um dieses ganz unerwartete Resultat zu erklären, bemerkte Kamerlingh Onnes, daß ein Metall wie *Pt*, dessen Drähte in der bekannten Weise gezogen waren, nie vollkommen rein sein kann und der restierende konstante Widerstand wohl die Folge sein könnte von der Anwesenheit einer äußerst geringen Menge Verunreinigung. Beim absoluten Nullpunkt würde der Widerstand des reinen Metalles Null sein. Um diese Hypothese näher zu untersuchen, wurden die in flüssigem Wasserstoff gemessenen Goldwiderstände[8b]) graphisch nach dem Heliumgebiet extrapoliert und diese Extrapolationen machten es sehr wahrscheinlich, daß in der Tat der Restwiderstand einer Verunreinigung zuzuschreiben war.

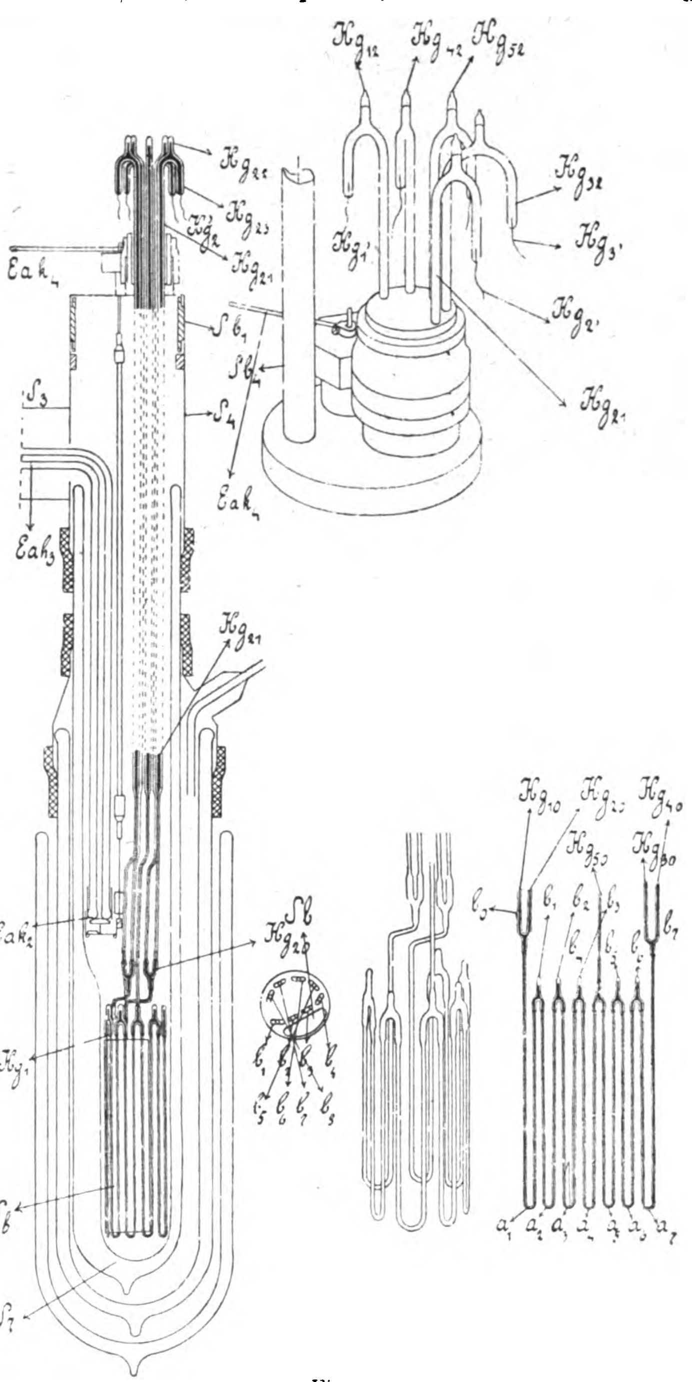
Später wurde die Berechtigung dieser Extrapolationen durch Messungen bei *He*-Temperaturen bestätigt[12]). Wie aus Fig. 6 deutlich hervorgeht, zeigen die Widerstände von *Au* einen dem Gehalt an Verunreinigung entsprechenden restierenden Widerstand. Auf Grund hiervon konnte man die Hypothese aufstellen, daß der Widerstand von reinem *Pt* und reinem *Au* bei *He*-Temperaturen wenig, vielleicht gar nicht von Null verschieden ist.

Wie vorläufig der Charakter dieser Untersuchungen auch war, man gewann doch aus ihnen die Überzeugung, daß die Theorie von Kelvin, von der oben gesprochen wurde und die jahrelang Führerin bei den Untersuchungen zu Leiden gewesen war, aufgegeben werden mußte. Daß vor einem ∞ Werden des Widerstandes nicht die Rede sein konnte, ging in überzeugender Weise aus den Experimenten hervor. Augenblicklich war es natürlich nicht möglich, eine befriedigende Theorie dieser neuen Erscheinung aufzustellen, das experimentelle Material war dazu vollkommen ungenügend; indessen Kamerlingh Onnes[11]) publizierte bereits in

derselben Abhandlung, in der die ersten Versuche beschrieben waren, eine halb empirische, halb theoretische Formel, mittels derer es ihm gelang, seine Ergebnisse mit Hilfe der Planckschen Quantentheorie zu erklären. Wir kommen hierauf später zurück, wollen daher vorläufig erst unsere Gedanken auf die weiteren experimentellen Resultate lenken.

Die folgenden Untersuchungen zeigten die Tendenz, die Hypothese vom Nullwerden des Widerstandes eines absolnt reinen Metalles experimentell zu prüfen; jedoch leider sind gezogene Metalldrähte nie so rein zu erhalten, wie es für diese Untersuchung erforderlich war, weil sie infolge ihrer Herstellung stets etwas verunreinigt sind. Im Quecksilber fand man jedoch ein Material, das durch Destillation ins Vakuum in viel reinerem Zustand zu erhalten war, daher wurde dieses Material für die weiteren Untersuchungen benutzt. Das Herstellen eines hierfür geeigneten *Hg*-Widerstandes war technisch ganz besonders schwierig. Das Quecksilber, das in ein zickzackförmig gebogenes Kapillarrohr von 0,005 mm² Querschnitt gebracht wurde, sollte beim Gefrieren ohne Zweifel hier und da voneinander gerissen werden (da *Hg* sich beim Gefrieren zusammenzieht), wenn hiergegen keine besonderen Maßregeln ergriffen wurden. Diese bestanden darin, daß man kleine *Hg*-Reservoire an dem oberen Ende der zickzackförmig gebogenen Kapillare anbrachte (siehe Fig. 2). Wurde nun der *Hg*-Draht von unten nach oben langsam abgekühlt, dann konnten die *Hg*-Reservoire bei der Kontraktion von *Hg* Material supplieren und so verhindern, daß der *Hg*-Draht zerriß. Auf diese Weise glückte es dann schließlich — ich brauche wohl kaum zu sagen nach vielen vergeblichen Bemühungen — *Hg*-Widerstände von genügender Größe (z. B. 172,7 Ohm bei 0° C) zu konstruieren, die vollkommen den Erwartungen entsprachen. (Fig. 2.)

Die große Mühe und ausharrende Arbeit, die diese Konstruktion erforderlich machte, sollte jedoch ihren Lohn finden. Man fand den Widerstand bei Heliumtemperaturen unmeßbar klein. Das Merkwürdigste war jedoch, daß er dicht bei 4,2° *K* plötzlich von einem noch meßbaren Betrage ganz diskontinuierlich bis zu einem Werte herunterging, der praktisch = 0 war; die Temperatur, bei der diese Erscheinung auftritt, wurde die Sprungtemperatur genannt. (Siehe Fig. 3.) Dies ist in kurzen Worten das Ergebnis einer ausgedehnten und schwierigen Reihe von Messungen.


Fig. 2.

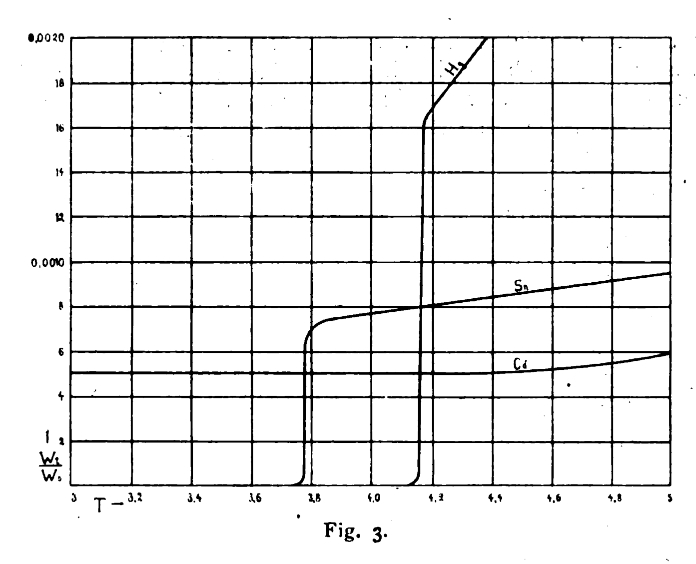


Fig. 3.

Eine Bestimmung des Widerstandes unterhalb $4{,}2^0$ *K* war nicht mehr möglich, indessen konnte festgestellt werden, daß bei $2^0{,}45$ *R*

$$\frac{W_T}{W_0} < 2 \times 10^{-10}$$

war.

Bald drängten sich nun allerlei Fragen auf: ob in dem „supraleitenden" Zustand, wie ihn Kamerlingh Onnes nannte, der Widerstand wirklich = 0, oder bloß sehr klein war, ob man eigentlich noch von einem Widerstand sprechen könnte und ob das Ohmsche Gesetz in dem supraleitenden Zustand noch gelten würde. Zur Beantwortung dieser Fragen wurden nun die weiteren Experimente angestellt[15]). Ich betone gleich, daß es noch nicht geglückt ist, eine befriedigende Antwort auf obige Fragen zu geben, doch traten bei den Experimenten Erscheinungen auf, die die Einsicht in das Wesen des supraleitenden Zustandes merklich aufklärten. Als man versuchte, durch den supraleitenden *Hg*-Draht einen möglichst starken Strom hindurch zu schicken, um eine eventuelle Wärmeentwicklung zu untersuchen, zeigte sich, daß bei einem jeden *Hg*-Draht und bei einem bestimmten *Hg*-Draht auch wieder bei einer jeden Temperatur von einem „Schwellenwert" des Stromes gesprochen werden kann. Unterhalb des Schwellenwertes war von einer Wärmeentwicklung nichts zu bemerken, man konnte bei einigen Drähten die Stromdichte von $1200 \frac{\text{Ampère}}{\text{mm}^2}$ verwenden, ohne daß zwischen den Enden des Drahtes von einer Potentialdifferenz etwas zu spüren war. Oberhalb des Schwellenwertes entwickelt sich jedoch plötzlich Wärme und der Draht verliert die Eigenschaften als Supraleiter. Ob man es hier mit der gewöhnlichen Jouleschen Wärme zu tun hat, die durch den auch im supraleitenden Zustande eventuell vorhandenen kleinen Widerstand oder mit einer Jouleschen Wärme, die sich lokal wegen unreiner oder inhomogener Stellen am Draht entwickelt, konnte nicht mit Sicherheit festgestellt werden. Indessen ergab es sich, daß die Wärme nicht von den Zuleitungsdrähten stammte. Kamerlingh Onnes meinte, die schlechten Stellen seien wohl die Ursache der Wärmeentwicklung. Einige Bedenken hiergegen liegen wohl in dem regelmäßigen Auftreten der Erscheinung. Den in dem supraleitenden Zustand übrigbleibenden Widerstand, mag er nun herrühren von schlechten Stellen oder nicht, nennt Kamerlingh Onnes den „mikroresiduellen Widerstand". Man nahm außerdem noch wahr, daß der Schwellenwert mit der Temperatur abnahm und daß die Sprungtemperatur etwas mit der Stromstärke variierte, nämlich stets etwas tiefer lag bei größeren Stromstärken, was wahrscheinlich in der gewöhnlichen Wärmeentwicklung seine Erklärung findet*).

Zum Schluß wurde festgestellt, daß oberhalb der Sprungtemperatur das Ohmsche Gesetz gilt.

Ich muß hier natürlich viele Einzelheiten dieser sehr ausgedehnten und subtilen Messungen mit Stillschweigen übergehen. Doch möchte ich mit einem Wort auf ein sehr merkwürdiges Ergebnis hinweisen. Nimmt man die Ursache des mikroresiduellen Widerstandes von *Hg* in

*) Siehe Fig. 4 und 5. Die Ordinaten stellen den Quotienten der Potentialdifferenz in Mikrovolt und die Stromstärke (in 0,004 A) dar, die Abszissen die Abweichung der Temperatur in 1000stel Graden vom Siedepunkt des Heliums vor $4^0{,}25$ *K* aus.

Verunreinigungen an, so sollte man nach Analogie der oben wahrgenommenen Erscheinungen an Gold zu dem Schluß kommen, daß das reine *Hg* an Unreinheiten nur 1 Millionstel enthält von dem, was reines Gold enthält und es ist schwierig, dies anzunehmen. Messungen an *Hg*, das vorsätzlich mit *Au* und *Cd* stark verunreinigt war, führten zu dem überraschenden Resultat, daß auch dieses sehr verunreinigte *Hg* supraleitend wurde.

Wir wollen hiermit von den Untersuchungen an *Hg* absehen und jetzt die an zwei anderen supraleitenden Metallen mitteilen, nämlich *Pb* und *Sn*[15]). *Sn* wurde im Vakuum geschmolzen

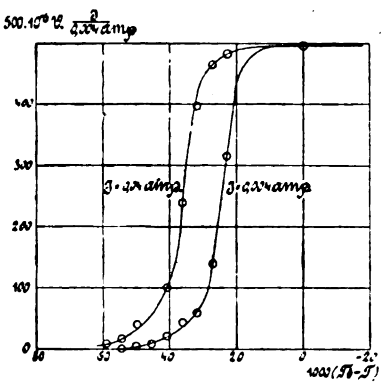


Fig. 4.

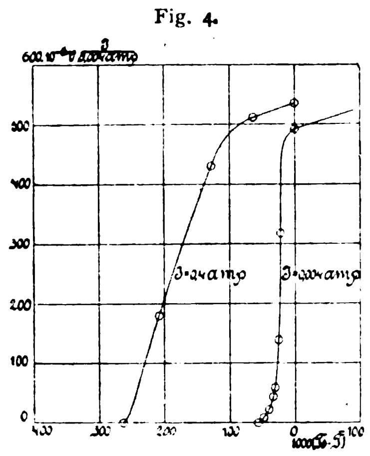


Fig. 5.

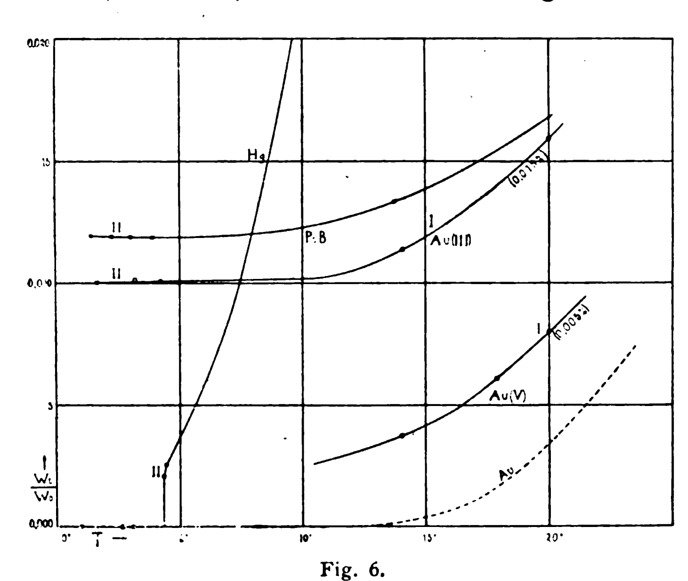


Fig. 6.

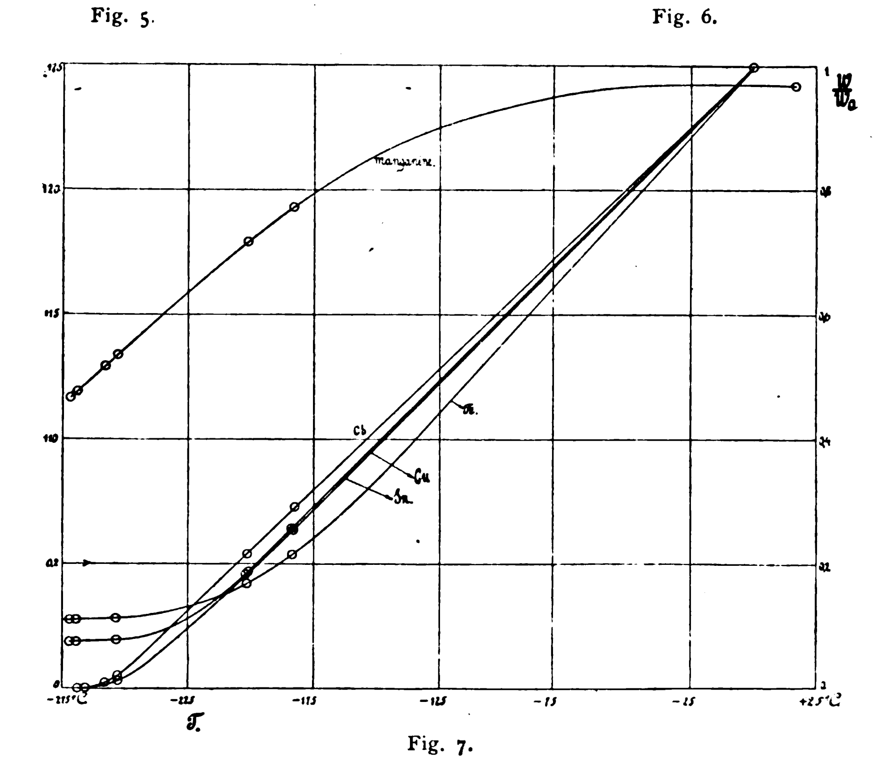


Fig. 7.

und dann in eine gläserne Kapillare gegossen. Man fand, daß es bei Heliumtemperaturen supraleitend wurde und der Sprungpunkt bei 3,78° *K* lag, also tiefer lag als der von *Hg*. Der Sprungpunkt von *Pb* scheint viel höher zu liegen; noch gewöhnlich leitend bei Wasserstofftemperaturen, konnte er bei Heliumtemperaturen allein in dem supraleitenden Zustand beobachtet werden, der Sprungpunkt lag zu hoch, um im flüssigen *He* bestimmt werden zu können (vermutlich bei 6° *K*). Dann wurde außerdem eine amalgamierte Zinnfolie untersucht. Der Sprungpunkt lag bei 4,29° *K*. Ich bemerke hierbei, daß amalgamiertes Zinn bei höherer Temperatur supraleitend wurde als seine Bestandteile. Außer Quecksilber, Blei und Zinn wurden noch einige andere Metalle untersucht, um zu entscheiden, ob es vielleicht ein Metall gäbe, dessen Widerstand in flüssigem Helium einen geeigneten Temperaturkoeffizienten besäße und das als Widerstandsthermometer zu verwenden wäre[20]). Diese Untersuchung trug einen ganz orientierenden Charakter und ergab, daß Eisen, Kadmium und Kupfer in flüssigem Helium einen konstanten Widerstand zeigten (wahrscheinlich aufzufassen als Restwiderstände wie bei Gold und Platin), daß dagegen die Legierungen Konstantan und Manganin einen geeigneten Temperaturkoeffizienten des Widerstandes zeigten und so für die Konstruktion von Widerstandsthermometern in Betracht kamen.

(Fortsetzung folgt.)

Das Verhältnis des mittleren Fehlers des arithmetischen Mittels zu dessen wahrem Fehler bei der Ausgleichungsrechnung nach der Methode der kleinsten Quadrate.

Von Heinrich Vater[1]).

Berichtigung.

Auf S. 217, Spalte 2, 14. Zeile lies richtig: Es wird daher in solchem Fall auch die Formel des mittleren Fehlers des mittleren Fehlers gegenstandslos.

1) Diese Zeitschr. **21**, 216, 1920.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule München Dr. Ing. Adolf Schlötzer für Geodäsie, an der Universität Hamburg Dr. Chr. Jensen für kosmische Physik und Dr. J. Nielsen für reine und angewandte Mathematik, an der Universität Berlin Dr. Max Bergmann für Chemie, an der Universität Jena Dr. Erwin Schrödinger (bisher an der Universität Wien) für Physik, an der Universität Königsberg Dr. Erich Kretzschmann für theoretische Physik.

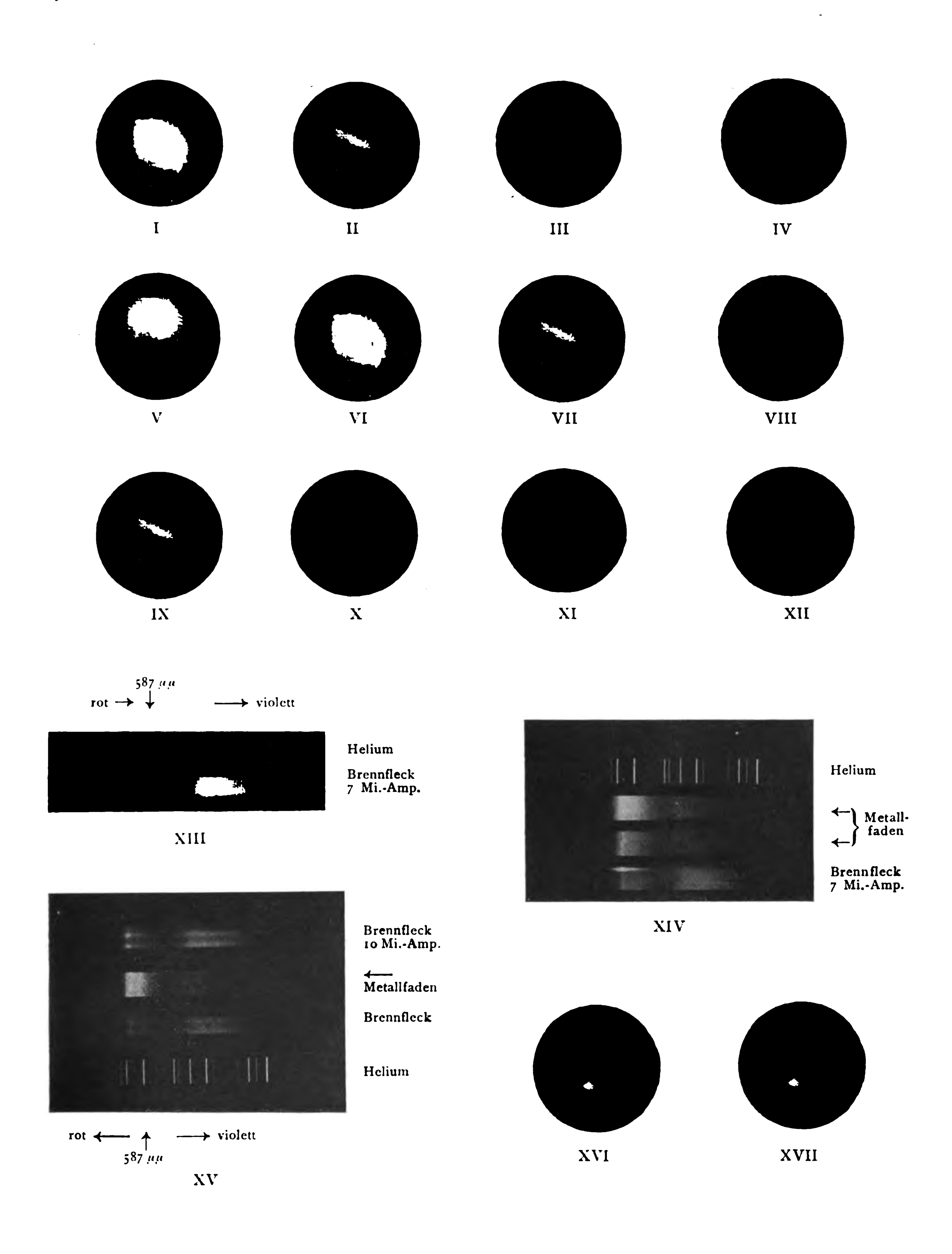
Ernannt: Arthur R. Ling zum Professor der Chemie an der Universität Birmingham, das Mitglied des Kaiser-Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie und Elektrochemie Professor Dr. Kerschbaum zum Leiter des Versuchslaboratoriums der C. P. Goerz' Photochemische Werke in Berlin-Zehlendorf, der ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule und Universität Breslau Dr. Ernst Steinitz in gleicher Eigenschaft an die Universität Kiel, der Direktor der Veifa-Werke in Aschaffenburg-Frankfurt a. M. Dr. Friedrich Dessauer zum ord. Honorarprofessor an der Universität Frankfurt a. M., der Privatdozent für angewandte und reine Mathematik an der Universität Halle Dr. Richard Grammel zum ord. Professor für technische Mechanik und Thermodynamik an der Technischen Hochschule Stuttgart, der Vorsteher der chemischen Abteilung am Hygienischen Institut der Universität Frankfurt a. o. Professor Dr. Joseph Tillmanns zum ord. Professor für Chemie der Nahrungs- und Genußmittel an derselben Universität, der a. o. Professor an der Universität Leipzig Dr. Erich Marx zum planmäßigen a. o. Professor für Radiophysik an derselben Hochschule, der Observator am Astrophysikalischen Observatorium zu Potsdam Professor Dr. Wilhelm Münch zum Hauptobservator und der wissenschaftliche Mitarbeiter Dr. Arnold Kohlschütter zum Observator an diesem Institut, der Adjunkt an der Montanistischen Hochschule in Leoben Dr. Hans Flechner zum a. o. Professor für allgemeine und analytische Chemie ebenda, Dr. P. Krais, Vorstand der chemisch-physikalischen Abteilung am Deutschen Forschungsinstitut für Textilindustrie in Dresden, zum Professor, der a. o. Professor an der deutschen Universität Prag Dr. Alfred Kirpal zum ord. Professor der Chemie ebenda, der Direktor des Kaiser-Wilhelm-Instituts für physikalische Chemie und Elektrochemie in Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Fritz Haber zum ord. Professor für anorganische und Experimentalchemie an der Universität Berlin (als Nachfolger Emil Fischers und unter Beibehaltung seiner jetzigen Stellung).

Berufen: Der Privatdozent an der Eidg. Technischen Hochschule und an der Universität Zürich Dr. Mieczyslow Wolfke zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Warschau.

Ehrung: Professor Albert Einstein in Berlin erhielt neben seiner Tätigkeit als lesendes Mitglied an der Akademie der Wissenschaften in Berlin und als Leiter des Instituts für Physik an der Kaiser-Wilhelm-Akademie eine Ehrenprofessur an der Reichsuniversität in Leiden.

Gestorben: Der a. o. Professor für allgemeine und technische Chemie an der Technischen Hochschule Braunschweig Dr. Joachim Biehringer, der Professor für angewandte Chemie an der Universität Sheffield Lucius T. O. Shea, der Direktor der Hartmann & Braun-A.-G. in Frankfurt a. M. Dr. Franz Braun, der frühere ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Graz Hofrat Dr. Leopold Pfaundler, der frühere ord. Professor der Astronomie an der Universität Christiania und Direktor des Universitätsobservatoriums Dr. Hans Geelmuyden, der Observator am Astronomischen Recheninstitut in Berlin Professor Dr. Adolf Berberich, der ord. Professor für Chemie an der Universität Pittsburg Dr. F. C. Phillips.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



J. E. Lilienfeld u. F. Rother, Untersuchungen über die sichtbare, blaugraue Brennfleckstrahlung an der Lilienfeldröhre.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 11. 1. Juni 1920. 21. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 13 am 24. Juni 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Atombau und Kristallsymmetrie.

Von Hans Thirring.

Die Untersuchungen von Born und Landé über die Berechnung der Kompressibilität regulärer Kristalle aus der Gittertheorie[1]) führten zu dem gewichtigen Schlusse, daß die Atome der Elemente (mit Ausnahme der paar ersten im periodischen System) keine ebenen Elektronenanordnungen sein können, sondern vielmehr räumliche Gebilde seien. Auch A. Smekal gelangt durch Überlegungen auf dem Gebiete der Röntgenspektren[2]) zu der Folgerung, „daß die Elektronenringvorstellung allgemein entweder überhaupt unzulässig ist, oder doch solange als man neben den elektrostatischen Wirkungen nicht auch noch die magnetischen berücksichtigt".

Zugunsten einer räumlichen Anordnung der Elektronen im Atom sprechen nun auch, wie schon Born angedeutet hat, die Erscheinungen der Kristallsymmetrie. A. Johnsen[3]) hat auf Grund der Schoenfließschen Strukturtheorie eine Tabelle zusammengestellt, aus der man die Minimalsymmetrie der Atome für eine Reihe von Kristallen ablesen kann, deren Raumgitter durch die Röntgenanalyse festgestellt sind. Für die C-Atome des Diamanten ergibt sich daraus beispielsweise regulär tetraedrische Symmetrie. Nun haftet aber, wie es dem Verfasser scheint, den Überlegungen von Johnsen noch der Mangel an, daß er zwischen Punktgitter und Atomgitter (welche Begriffe gleich weiter unten eingeführt werden) keine Unterscheidung trifft. Infolgedessen ordnet er den Atomgittern von röntgenoskopisch analysierten Kristallen jene Raumgruppen zu, die zu dem betreffenden Punktgitter gehören und gelangt dadurch u. a. zu dem Resultat, daß die Minimalsymmetrie der Na- und Cl-Atome im Steinsalz regulär holoedrisch sein müsse. Das ist nun nicht richtig, denn wie schon Crehore[1]) gezeigt hat, läßt sich ein $NaCl$-Gitter mit holoedrischer Symmetrie u. a. auch aus ebenen Ringatomen aufbauen. In der Tat kann man unter Zugrundelegung der Schoenfließschen Raumgruppe $\mathfrak{D}_h^4$ eine Atomanordnung bilden, die dem Braggschen $NaCl$-Gitter entspricht und holoedrisch ist, wobei aber die Atome beider Gattungen bloß die Symmetrie $D^h{}_3$ (das ist die Symmetrie eines ebenen gleichseitigen Dreieckes) besitzen. Es soll daher im folgenden eine Methode entwickelt werden, nach der unter Berücksichtigung aller Möglichkeiten, die mit dem Befunde der Röntgenanalyse vereinbar sind, Rückschlüsse auf die Atomstruktur gezogen werden können.

Wir wollen an die Spitze unserer Untersuchungen einige Begriffsbestimmungen setzen, die sich für das folgende als nützlich erweisen werden. Zunächst sei erinnert an die Bravaissche Definition der Raumgitter als Orte der Schnittpunkte von drei Scharen paralleler äquidistanter Ebenen. Wir wollen mit Born die Raumgitter nach dieser Definition als einfache Raumgitter bezeichnen und unter Raumgitter schlechtweg eine Anordnung verstehen, die durch eine Ineinanderstellung beliebig vieler gleichartiger oder ungleichartiger einfacher Gitter entsteht. Die meisten auf dem Wege der Röntgenanalyse gefundenen Kristallgitter sind nicht einfach.

Hinsichtlich der Symmetrieverhältnisse wollen wir nun zwischen Punktgittern und Atomgittern unterscheiden. Unter ersteren verstehen wir Raumgitter, die mit mathematischen Punkten oder (was für die Symmetrie auf dasselbe hinausläuft) mit Kugeln besetzt sind. Atomgitter sind hingegen Raumgitter, die mit Atomen bestimmter Symmetrie und bestimmter Orientierung besetzt sind. Zu jedem Atomgitter gibt es ein und nur ein zugehöriges Punktgitter, das entsteht, wenn man die Atome durch Punkte ersetzt.

1) Verh. d. D. Phys. Ges. **20**, 210, 1918.
2) Sitzungsber. d. Wiener Akad. d. Wissensch. **128**, 4. Heft, 1919.
3) Diese Zeitschr. **16**, 269, 1915.

1) Phil. Mag. Vol. XXIX, 6. ser., 750, 1915.

Umgekehrt kann man jedoch jedem Punktgitter unendlich viele Atomgitter zuordnen. Jedes Raumgitter kann man bekanntlich in parallelepipedische Elementarbereiche zerlegen, aus deren Wiederholung man sich das ganze Gitter hervorgegangen denken kann. Der Elementarbereich eines Atomgitters muß nun mit dem des zugehörigen Punktgitters durchaus nicht identisch sein, da nämlich zwei äquivalente Punkte des Gitters zwar mit gleichen, aber nicht mit gleich orientierten Atomen besetzt sein müssen. Ein einfaches Beispiel: Der Elementarbereich des bekannten Braggschen $NaCl$-Gitters ist ein Würfel mit der Kantenlänge $\delta = 5{,}63 \cdot 10^{-8}$ cm. Geht man also längs einer Würfelkante weiter, so trifft man im Abstande δ aufeinanderfolgende gleiche Atome. Die Röntgenanalyse gibt aber keinen Anhaltspunkt dafür, daß diese Atome auch gleich orientiert seien, denn die Intensität der Spiegelungen an den einzelnen Netzebenen des Kristalls hängt nur von der Zahl der Elektronen im Atom, aber nicht von dessen Orientierung ab. Es ist daher von vornherein ohne weiteres möglich, daß erst jedes zweite, dritte ...... Atom in dieser Reihe wieder die gleiche Orientierung hat. Die Kante des Elementarwürfels für das Atomgitter ist nun nicht wie beim Punktgitter der Abstand zweier nächster gleicher Atome, sondern der zweier nächster gleicher und gleich orientierter Atome. Wir bezeichnen im folgenden stets die Kantenlänge des Elementarwürfels des Punktgitters mit δ und jene des Atomgitters mit a. Es muß dann, wie leicht ersichtlich, die Beziehung

$$a = n\delta \qquad n = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

gelten.

Wenn die Zahl der Atome im Elementarbereich des Punktgitters Z ist, so enthält der Elementarbereich des Atomgitters $n^3 Z$ Atome. Man wird Anordnungen, bei denen diese Zahl sehr groß ist, wohl als unwahrscheinlich ansehen müssen.

Die Resultate der Braggschen Röntgenanalyse geben uns das Punktgitter, aber nicht das Atomgitter eines Kristalls; daraus erklärt es sich, daß man z. B. für KCl ein Gitter erhält, das einer anderen Symmetrieklasse angehört als der Sylvin-Kristall.

Die Symmetrie des Atomgitters ist abhängig von der Symmetrie des Punktgitters und von der Symmetrie und den Orientierungen der Atome, mit denen man das Gitter besetzt. Hat man es insbesondere mit einem einfachen Raumgitter zu tun und sind alle Atome parallel orientiert, so ist die Symmetriegruppe des Atomgitters die größte gemeinsame Untergruppe der Symmetriegruppen des Punktgitters und der Atome. Hat man es hingegen mit keinem einfachen Raumgitter zu tun und sind die Atome nicht parallel orientiert, so läßt sich die Symmetriegruppe des Atomgitters nicht ohne weiteres angeben; sie ist sogar durch Punktgitter und Atom noch gar nicht eindeutig bestimmt, da man durch verschiedene Wahl der Orientierungen und des Faktors n noch zu ganz verschiedenen Symmetrien kommen kann. In allen Fällen ist aber die Symmetriegruppe des Atomgitters eine Untergruppe jener des Punktgitters.

Das Ziel der folgenden Untersuchungen ist es nun, nachzusehen, ob man von einem (durch die Röntgenanalyse) gegebenen Punktgitter und von einer bestimmten supponierten Atomsymmetrie ausgehend ein Atomgitter mit der am Kristall makroskopisch beobachteten Symmetrie aufbauen kann. Das Mittel zu derartigen Untersuchungen bildet die Schoenfließsche Strukturtheorie, die neuerdings durch gute Darstellungen leicht zugänglich gemacht wurde[1]). Auf Grund dieser Theorie lassen sich die angestrebten Untersuchungen methodisch folgendermaßen durchführen: Von den 230 Schoenfließschen Raumgruppen kommen für den Aufbau des Atomgitters eines Kristalls von vornherein nur jene in Betracht, die zur Symmetrieklasse dieses Kristalls gehören. Von diesen werden weiter noch jene ausgeschieden, die Operationen enthalten, welche für das gegebene Punktgitter keine Deckoperationen sind; auf diese Weise bleibt dann meist bloß eine beschränkte Zahl von Raumgruppen zur näheren Untersuchung übrig.

Wir wollen eine dieser Raumgruppen mit γ bezeichnen, es sei γ_τ die in ihr enthaltene Translationsgruppe. Die Raumgruppe des vorgegebenen Punktgitters sei Γ; die zugehörige Translationsgruppe Γ_τ. Es ist dann nach dem oben Gesagten γ eine Untergruppe von Γ, ferner ist γ_τ eine Untergruppe von Γ_τ. Im Falle $n = 1$ ist

$$\gamma_\tau = \Gamma_\tau.$$

Will man nun mittelst der Raumgruppe γ ein Atomgitter mit vorgegebenem zugehörigen Punktgitter aufbauen, so geschieht das in der Weise, daß man an irgendeiner Stelle im Gerüste der Symmetrieelemente von γ ein Atom (Ausgangsatom) in bestimmter Orientierung einsetzt und es allen Operationen von γ unterwirft. Im Falle $n = 1$ entstehen dann schon alle übrigen gleichartigen Atome des Gitters aus diesem einen Ausgangsatom; bei $n > 1$

1) W. Voigt, diese Zeitschr. **19**, 237, 331, 357, 446, 1918; P. Niggli, Geometrische Kristallographie des Diskontinuums, Leipzig 1918.

kommt man hingegen im allgemeinen mit einem Ausgangsatom nicht aus, sondern muß mehrere nehmen. Natürlich wird nicht bei jeder beliebigen Lage des Ausgangsatoms ein Atomgitter entstehen, für welches das vorgegebene Punktgitter das zugehörige ist. Ausgangspunkte, für welche das der Fall ist, wollen wir als zulässige Ausgangspunkte bezeichnen. Die Orte sämtlicher Atomzentren gehen aus dem Ausgangspunkt hervor, wenn man ihn allen Operationen der Gruppe Γ unterwirft. Durch keinen der so entstandenen Punkte darf ein Symmetrieelement gehen, das mit der Symmetrie des supponierten Atomes unvereinbar wäre, sonst ist der Aufbau unter Zugrundelegung der Gruppe γ unmöglich. Ein Beispiel: Wenn es bei einer bestimmten Raumgruppe γ hinsichtlich des vorgegebenen Punktgitters nur solche zulässige Ausgangspunkte gibt, durch die dreizählige Achsen hindurchgehen, das supponierte Atom jedoch keine dreizähligen Achsen besitzt, dann kommt die Raumgruppe γ für den Aufbau überhaupt nicht in Betracht.

Ist hingegen die eben erwähnte Bedingung erfüllt, so kann man mittelst γ stets Atomgitter aufbauen, die das vorgegebene zugehörige Punktgitter haben und die vorgegebene Symmetrie besitzen. Aber auch dann können noch (worauf schon Johnsen l. c. hinweist) Fälle eintreten, wo man das resultierende Atomgitter vom chemisch-physikalischen Standpunkt aus ablehnen wird. Nehmen wir z. B. an, es ließe sich mittelst einer Raumgruppe γ ein KCl-Atomgitter aufbauen, wobei sich herausstellt, daß man sämtliche K-Atome unterbringt, wenn man in zwei bestimmte Ausgangspunkte A und B je ein Ausgangsatom setzt und sämtliche Deckoperationen von γ ausführt. Durch diese Operationen sollen aus A, $a - 1$ weitere Gitterpunkte und aus B, $b - 1$ weitere Gitterpunkte pro Elementarbereich entstehen, wobei natürlich $a + b = n^3 Z$ nämlich gleich der Zahl aller K-Atome im Elementarwürfel des Atomgitters sein muß. (Man bezeichnet die ganzen Zahlen a und b als die Zähligkeiten der Punktlagen A und B.) Ist nun $a \neq b$, so treten die K-Atome des KCl-Gitters in zwei Gruppen verschiedener Zähligkeit auf. Man wird aber wohl, solange keine Gegenbeweise vorliegen, annehmen, daß im KCl-Kristalle keines der K- oder Cl-Atome vor einem anderen ausgezeichnet ist. Wir werden also auch die Fälle ausschalten, wo man auf ungleichzählige Atomlagen für Atome desselben Elementes einer binären Verbindung vom Typ KCl geführt wird.

A. Diamant.

Das Braggsche Diamantgitter besteht bekanntlich aus zwei ineinandergestellten flächenzentrierten Würfelgittern, die um $^1/_4$ der Würfeldiagonale gegeneinander verschoben sind. Fig. 1

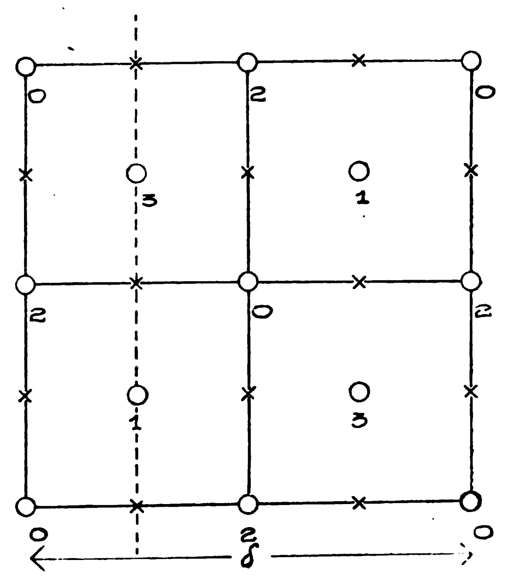


Fig. 1.

gibt die Aufsicht des Elementarwürfels; die den einzelnen Punkten beigefügten Zahlen geben mit $\delta/4$ multipliziert ihre z-Koordinate an. Über die Symmetrieelemente des Punktgitters wäre folgendes zu sagen: Das Gitter besitzt keine 4 zähligen Drehachsen, wohl aber 4 zählige Schraubenachsen, die an den mit $\times$ bezeichneten Punkten die Zeichenebene durchstoßen; die gestrichelte Linie zeigt eine in der Zeichenebene $z = 0$ verlaufende 4 zählige Schraubenachse. Ferner sind alle Geraden, die parallel zu einer Würfelkante durch Gitterpunkte gehen, 2 zählige Drehachsen; hingegen gibt es keine solchen Achsen, die nicht durch einen Gitterpunkt gehen. Durch Betrachtung eines räumlichen Modelles des Diamantgitters kann man sich weiterhin leicht davon überzeugen, daß parallel den Würfeldiagonalen 3 zählige Drehachsen laufen, aber von diesen gibt es ebenfalls keine, die nicht durch einen Gitterpunkt geht.

Das als ebenes Ringsystem angenommene C-Atom hat nur eine einzige mehr als zweizählige Achse, nämlich die durch den Kern gehende Senkrechte zur Bahnebene. Da nun, wie eben auseinandergesetzt, die den Würfeldiagonalen parallelen 3 zähligen Achsen durch Gitterpunkte hindurchlaufen, so ergibt sich, daß die Atomachsen in der Richtung dieser Diagonalen liegen müssen oder mit anderen Worten, daß die Ebenen der Elektronenbahnen parallel den Oktaederflächen des Kristalls liegen müssen. Ein so gestelltes Atom hat keine zur Würfel-

kante parallelen 2- oder 4 zähligen Drehachsen, folglich können im Atomgitter keine derartigen Achsen vorkommen, die durch einen Gitterpunkt gehen. Da aber andererseits das Punktgitter selbst keine solchen Achsen hat, die nicht durch einen Gitterpunkt gehen, so darf es überhaupt keine geben. Das Atomgitter des aus Ringatomen bestehenden Diamanten kann also keine zu den Würfelkanten parallele Drehachsen, sondern nur Schraubenachsen dieser Richtung enthalten.

Für den Aufbau des Diamanten aus Elektronenringatomen scheiden daher von den 36 Schoenfließschen Raumgruppen, die zum regulären System gehören, alle jene von vornherein aus, die 2- oder 4 zählige Drehachsen parallel den Würfelkanten besitzen. Was dann noch übrig bleibt, erkennt man am raschesten durch einen Blick auf die im zitierten Voigtschen Referat enthaltenen figürlichen Darstellungen der Raumgruppen; es sind das die Raumgruppen Nr. 57, 57α, 64 und 65 in der Voigtschen Bezeichnung oder $\mathfrak{T}^4$, $\mathfrak{T}_h^6$, $\mathfrak{O}^6$ und $\mathfrak{O}^7$ nach Schoenfließ.

Nun gehört die Raumgruppe $\mathfrak{T}^4$ zur tetartoedrischen (tetraedrisch-pentagondodekaedrischen) Klasse des regulären Systems, $\mathfrak{T}_h^6$ zur paramorphhemiedrischen (Dyakisdodekaedrischen) Klasse und $\mathfrak{O}^6$ und $\mathfrak{O}^7$ zur enantiomorph-hemiedrischen (pentagonikositetraedrischen) Klasse. Der Diamant gehört aber sicher nicht in eine von diesen Klassen des regulären Systems, sondern ist entweder holoedrisch (dies sogar mit großer Wahrscheinlichkeit) oder hemimorph-hemiedrisch (hexakistetraedisch).

Die vorstehenden einfachen Überlegungen beweisen also bereits, daß ein Aufbau des Diamanten aus ebenen Ringatomen unmöglich ist. Atome mit gekreuzten Elektronenringsystemen besitzen noch geringere Symmetrie und kommen daher erst recht nicht in Betracht.

Mit Atomen, die Tetraedersymmetrie besitzen, läßt sich hingegen der Aufbau ohne weiteres durchführen. Jedenfalls muß man die Tetraeder so in das Gitter stellen, daß ihre dreizähligen Achsen den Raumdiagonalen des Würfelgitters parallel sind. Es gibt zwei verschiedene solche Stellungen; sie gehen durch Drehung um 90° um eine durch den Mittelpunkt laufende, den Würfelkanten parallele Gerade hervor. Denkt man sich nun das Punktgitter des Diamanten bestehend aus zwei ineinandergestellten flächenzentrierten Würfelgittern, so kann man entweder die beiden Teilgitter mit parallel orientierten Tetraedern oder das eine mit Tetraedern in der einen Stellung und das andere mit Tetraedern in der zweiten Stellung besetzen. Im ersten Falle entsteht ein regulär hemimorphes, im zweiten Falle ein regulär holoedrisches Atomgitter. Damit sind die beiden möglichen Alternativen für den Diamanten erledigt.

B. Sylvin.

Beim Sylvin, KCl weicht bekanntlich die Symmetrie des Kristalls von der des Punktgitters ab, indem diese holoedrisch, jene dagegen regulär enantiomorph ist. Um diese Diskrepanz zu erklären, nahm Bragg[1]) an, daß die tatsächliche Atomanordnung von der von ihm angegegebenen ein wenig abweiche, so zwar, daß diese Abweichungen bei der Röntgenanalyse, deren Genauigkeit ja noch nicht sehr groß ist, unbemerkt bleiben, den Symmetriecharakter des Kristalls jedoch beeinflussen können. Auf Grund dieser Hypothese wäre man dann in der Lage, etwa auch mit der Vorstellung kugelsymmetrischer Atome Hemiedrien zu erklären; wir wollen der Vollständigkeit halber auch diese Möglichkeit in den Kreis unserer Betrachtungen ziehen und sie gleichzeitig mit der Erklärung der Hemiedrie durch achsialsymmetrische Atome untersuchen. In der Tat läßt sich dieser von Bragg möglich gehaltene Fall als Unterfall des achsialsymmetrischen Atomes behandeln, wenn man sich folgendes vor Augen hält: Die K- und Cl-Atome sollen nach Bragg nicht in den Würfelecken selbst sitzen, sondern gewisse, ein wenig davon abweichende Stellungen haben. Denkt man sich nun von jeder Würfelecke einen Vektor zum zugehörigen Atom gezogen, so hat dieses aus Verbindungsvektor und Kugelatom bestehende Gebilde den Charakter eines polaren Vektors und es läuft sich, was die Symmetrie anlangt, auf dasselbe hinaus, ob man kugelsymmetrische Atome in den nicht in der Würfelecke liegenden Endpunkt dieses Vektors setzt, oder von vornherein ein Atom mit polarer achsialer Symmetrie in die Würfelecke selbst setzt. Wir können also die Möglichkeit der Erklärung der Hemiedrie des Sylvins durch zylindersymmetrische Atome mit der von Bragg gegebenen auf einmal abtun, wenn wir unsere Untersuchungen auf Atome mit polarer und mit nicht polarer Achse erstrecken[2]).

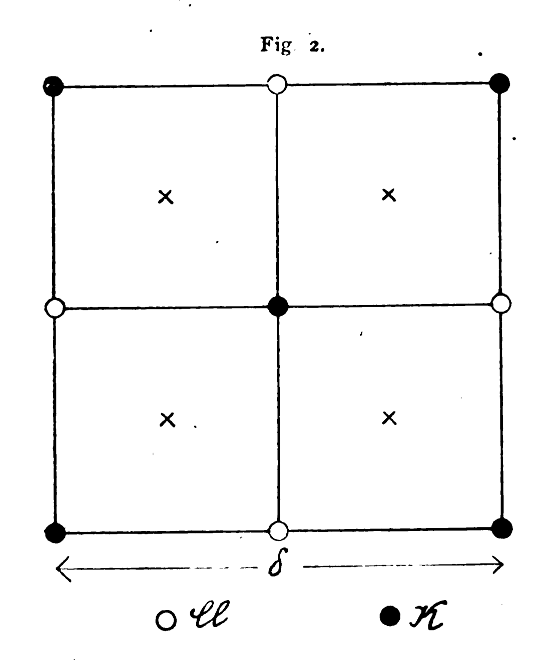
Wir beginnen wieder mit der Besprechung der Symmetrieelemente des Punktgitters des KCl. Bekanntlich können sich Schraubenachsen gleicher Zähligkeit noch durch die Translations-

1) W. H. Bragg, X-Rays and Crystal Structure. London 1915, S. 158.

2) Im zweiten Bande des eben zitierten ausgezeichneten Werkes von P. Niggli, der leider dem Verf. erst nach Niederschreiben dieses Artikels zugänglich wurde, ist ebenfalls diese Möglichkeit (für $n = 2$) behandelt und durch Figuren erläutert worden (S. 441—451). Die hier gegebene Darstellung ist etwas allgemeiner.

komponente der Schraubung unterscheiden. Sei m die Zähligkeit der Achse und a der Wert der primitiven Decktranslation des Gitters in der Richtung dieser Achse, so bezeichnen wir mit Voigt Achsen, bei denen eine Drehung um $\frac{2\pi}{m}$ verbunden mit einer Translation um den Betrag $p\frac{a}{m}$ in der Achsenrichtung eine Deckoperation darstellt, mit $\mathfrak{A}(m, p)$. Bei vierzähligen Achsen gibt es insbesondere die Gattungen: $\mathfrak{A}(4,2)$, $\mathfrak{A}(4, \pm 1)$ und $\mathfrak{A}(4,0)$; die letzteren sind reine Drehachsen. Eine $\mathfrak{A}(4,2)$-Achse ist immer gleichzeitig eine $\mathfrak{A}(2,0)$-Achse. Das in Fig. 2 dargestellte Braggsche Punktgitter des KCl enthält nun $\mathfrak{A}(4,2)$- und $\mathfrak{A}(4,0)$-Achsen in allen drei Koordinatenrichtungen. Von den zur Z-Achse parallel laufenden (zur Zeichenebene senkrecht stehenden) sind diejenigen, die durch die Gitterpunkte gehen, $\mathfrak{A}(4,0)$-Achsen; die $\mathfrak{A}(4,2)$-Achsen gehen durch die mit einem $\times$ bezeichneten Punkte. Betrachten wir den in

Fig. 2.



●A

𝔄(2,0)

●B

Fig. 3

Fig. 2 in der Aufsicht dargestellten Würfel als den n ten Teilbereich des Elementarwürfels eines Atomgitters, so können die durch die Gitterpunkte gehenden Achsen auch $\mathfrak{A}(4,2)$-Achsen sein, wenn n geradzahlig ist und $\mathfrak{A}(4,1)$-Achsen, wenn n durch 4 teilbar ist. Dagegen können die durch die $\times$-Punkte laufenden Geraden $\mathfrak{A}(4,2)$-Achsen bei ungeradem n sein und $\mathfrak{A}(4,1)$-Achsen, wenn n gerade, aber durch 4 nicht teilbar ist. Man erkennt die Richtigkeit dieser Behauptungen, wenn man (am besten mit Hilfe eines räumlichen Modelles) die entsprechenden Schraubungen für verschiedene Werte von n ausführt; für solche n-Werte, die die hier gestellten Bedingungen nicht erfüllen; tritt entweder überhaupt keine Deckung ein oder es werden die K- und Cl-Atome miteinander vertauscht.

Außerdem sind für das Punktgitter alle Geraden, die in der Richtung einer Würfeldiagonale durch einen Gitterpunkt laufen, dreizählige Drehachsen $\mathfrak{A}(3,0)$, hingegen gibt es keine solchen Achsen, die nicht durch einen Gitterpunkt gehen.

Daraus folgt nun wieder wie im Falle des Diamanten, daß die Atomachsen parallel den Würfeldiagonalen liegen müssen, und daraus weiter, daß durch die Atome (Gitterpunkte) keine zwei- oder vierzähligen Drehachsen parallel den Würfelkanten gehen können. Da nun das Punktgitter keine $\mathfrak{A}(4,0)$-Achsen hat, die nicht durch einen Gitterpunkt gehen, können vierzählige Drehachsen überhaupt nicht vorkommen und von den zur kubisch-enantiomorphen Klasse gehörigen Raumgruppen kommen für uns nur jene in Betracht, die keine solchen Achsen enthalten. Es sind dies die Nummern 61—65 der Voigtschen Liste (Sch. $\mathfrak{O}^8$, $\mathfrak{O}^4$, $\mathfrak{T}^2$, $\mathfrak{O}^6$ und $\mathfrak{T}^7$).

Bei diesen Raumgruppen ist nun einzeln zu untersuchen, ob es zulässige Ausgangspunkte gibt, deren Symmetriebedingungen mit der Atomsymmetrie vereinbar sind. Man kann zunächst zeigen, daß entweder alle Schraubenachsen durch Atome gehen, oder alle durch die mit $\times$ bezeichneten Punkte der Fig. 2 gehen. Denn bei den genannten Raumgruppen bilden die Durchstoßungspunkte einer Schar von parallelen vierzähligen Schraubenachsen mit einer dazu senkrechten Ebene ein quadratisches Netz. Ein solches Netz erhielte man aus Fig. 2, wenn alle durch Gitterpunkte gehenden und alle durch $\times$-Punkte gehenden Geraden vierzählige Schraubenachsen wären. Das ist aber unmöglich, weil dann der Elementarwürfel des Atomgitters kleiner als jener des Punktgitters, also $n < 1$ wäre, was ausgeschlossen ist. Wenn aber nur einzelne von den durch die Gitterpunkte und durch die $\times$-Punkte laufenden Geraden vierzählige

Schraubenachsen wären, dann lieferten ihre Durchstoßungspunkte mit der Zeichenebene kein quadratisches Netz. Es gibt also nur die beiden Alternativen, Fall α: es gibt Atome, die auf Schraubenachsen liegen, und Fall β: die einer Schraubenachse am nächsten liegenden Atome haben den Abstand $\frac{\delta}{4}\sqrt{2}$ von ihr und liegen in der gleichen (110)-Ebene wie sie. Wir wollen in beiden Fällen ein einer Schraubenachse am nächsten liegendes Atom als Ausgangsatom benützen. Je nachdem nun ob die in der betreffenden Raumgruppe vorhandenen Schraubenachsen $\mathfrak{A}(4,1)$- oder $\mathfrak{A}(4,2)$-Achsen sind, ergeben sich für den Faktor n nach dem oben Gesagten die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Bedingungen:

	Fall α Atome auf Achsen	Fall β Atome nicht auf Achsen
$\mathfrak{A}(4,1)$-Achsen:	$n = 4q$	$n = 4q + 2$
$\mathfrak{A}(4,2)$-Achsen:	$n = 2q$	$n = 2q + 1$

q bedeutet dabei eine ganze Zahl.

Es läßt sich weiter zeigen, daß der Fall α bei jenen Raumgruppen nicht vorkommen kann, bei denen die vierzähligen Schraubenachsen durch zweizählige Drehachsen rechtwinklig geschnitten werden, da kein Atom mit einer solchen zweizähligen Drehachse in einer gemeinsamen (100)-Ebene liegen kann. Beweis: Es sei die in Fig. 3 gezeichnete Gerade eine zu einer Würfelkante parallele zweizählige Drehachse; die Zeichenebene eine (100)-Ebene. Dann wird durch sie einem beliebig gelegten Ausgangsatom A ein gleichartiges Atom B zugeordnet. Die Strecke AB muß dann gleich der Gitterkonstanten δ oder einem ganzzahligen Vielfachen davon sein. Also

$$AB = r\delta \qquad \text{mit } r = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots,$$

Die Strecke zwischen A und B ist nun in gleichen Abständen abwechselnd mit Atomen der einen und der anderen Gattung (K und Cl) besetzt. Falls also r eine gerade Zahl ist, fällt ein Atom der gleichen Gattung wie A und B in die zweizählige Drehachse; falls r ungerade ist, ein Atom der anderen Gattung. Da aber, wie früher gezeigt, die Atome überhaupt nicht in zweizählige Drehachsen fallen können, ist die Unmöglichkeit des Falles α für jene Raumgruppen, bei denen die vierzähligen Achsen von zweizähligen, parallel den Würfelkanten laufenden Drehachsen geschnitten werden, nachgewiesen.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich nun im einzelnen folgendes:

1. Atome mit nichtpolaren Achsen.

a) Nr. 61, (Sch. $\mathfrak{O}^8$):

Diese Raumgruppen enthalten $\mathfrak{A}(4,1)$-Achsen mit rechtwinkelig schneidenden $\mathfrak{A}(2,0)$-Achsen, die den Würfelkanten parallel laufen. Nach dem eben Gesagten kommt daher hier nur der Fall β mit $n = 2, 6, 10 \ldots\ldots$ in Betracht. Mit diesen Werten von n wird man aber stets auf ungleichzählige Atomlagen geführt, was gemäß der am Schlusse der Einleitung getroffenen Vereinbarung auszuschließen ist.

b) Nr. 62, (Sch. $\mathfrak{O}^4$):

Aus dem gleichen Grund wie bei $\mathfrak{O}^8$ ist hier nur der Fall β mit $n = 2, 6, 10 \ldots\ldots$ möglich. Für $n = 2$ gibt es nur solche zulässige Lagen des Ausgangspunktes, durch die eine dreizählige Achse hindurchgeht. Das ist mit der Atomsymmetrie wohl vereinbar; die Orientierung des Ausgangsatomes ist aber dadurch eindeutig festgelegt, man wird also zwangsläufig zu einer ganz bestimmten Anordnung geführt, und zwar ist das gerade die von Crehore angegebene holoedrische. Mit $n = 2$ kann man also kein dem Braggschen KCl-Punktgitter entsprechendes Atomgitter bauen, das nur die zu $\mathfrak{O}^4$ gehörigen Symmetrieelemente allein besitzt; es resultiert vielmehr eine Anordnung, die zur Obergruppe $\mathfrak{O}_h^8$ gehört.

Mit $n = 6, 10 \ldots.$ entstehen wieder ungleichzählige Atomlagen.

c) Nr. 63, (Sch. $\mathfrak{O}^2$):

Die hier vorkommenden $\mathfrak{A}(4,2)$-Achsen sind, wie früher bemerkt, gleichzeitig $\mathfrak{A}(2,0)$-Achsen; auf ihnen können die Ringatome nicht liegen (s. o.), daher nur Fall β mit $n = 1, 3, 5 \ldots.$ Mit $n = 1$ resultiert wie bei $\mathfrak{O}^4$, $n = 2$ Holoedrie; $n = 3, 5 \ldots.$ führt auf ungleichzählige Atomlagen.

d) Nr. 64, 65, (Sch. $\mathfrak{O}^6$, $\mathfrak{O}^7$):

Diese Raumgruppen enthalten keine zweizähligen Drehachsen in der Richtung der Würfelkanten, also sind von vornherein die Fälle α mit $n = 4, 8, 12 \ldots.$ und β mit $n = 2, 6, 10 \ldots.$ möglich. Man wird aber in beiden Fällen stets auf ungleichzählige Atomlagen geführt.

Wenn man also verlangt, daß alle K- und Cl-Atome in untereinander gleichwertigen Lagen im Gitter auftreten, ist es unmöglich mit nichtpolaren achsialsymmetrischen Atomen ein regulär enantiomorphes KCl-Gitter aufzubauen.

2. Atome mit polaren Achsen.

Die Raumgruppen Nr. 61, 64, 65, ($\mathfrak{O}^8, \mathfrak{O}^6, \mathfrak{O}^7$) führten schon bei nichtpolaren Achsen für alle erlaubten n-Werte auf ungleichzählige Atomlagen; daran ändert auch die Polarität der

Achsen nichts, also fallen diese Gruppen von vornherein weg. Es bleibt übrig:

a) Nr. 62, ($\mathfrak{O}^4$):

Fall β. Mit $n = 2$ läßt sich das gewünschte Atomgitter aufbauen, jedoch darf nur die eine Atomgattung (K oder Cl) polare Achsen haben, da durch die zulässigen Ausgangspunkte der anderen Atomgattung zweizählige Querachsen in der Richtung der Flächendiagonalen des Würfels laufen.

b) Nr. 63, ($\mathfrak{O}^2$):

Hier kann wegen des Vorhandenseins zweizähliger Querachsen, die durch alle zulässigen Ausgangspunkte gehen, keine der beiden Atomgattungen eine polare Achse haben.

Zusammenfassend kann man also sagen, daß sich ein Atomgitter mit der Symmetrie des Sylvinkristalls aus Atomen mit achsialer Symmetrie überhaupt nicht und aus Atomen mit polarer Achse mit $n = 2$ konstruiteren läßt. Der von Bragg vorgeschlagene Ausweg bezüglich der Erklärung der Hemiedrie des KCl ist also wohl gangbar, soweit nur Symmetriefragen ins Spiel kommen. Konstruiert man sich aber andererseits ein solches Gitter, bei dem die Atome der einen Gattung in der Richtung der Würfeldiagonalen ein wenig verschoben sind (mit Nr. 62 und $n = 2$), so sieht man, daß die auf ein solches Atom wirkenden Kräfte, die von den Nachbaratomen ausgehen, sich nicht das Gleichgewicht halten können. Der Braggsche Ausweg scheint also aus dynamischen Rücksichten abgelehnt werden zu müssen.

Es soll nun schließlich noch die Frage erörtert werden, wie sich die am Sylvin beobachtete Symmetrie mit dem von Born und Landé[1]) vorgeschlagenen Atommodell in Einklang bringen läßt. Diesem kubischen Atommodell liegt folgende Idee zugrunde: Die äußere Schale des Elektronensystems des Atoms besteht aus 8 Elektronen, die auf Bahnen umlaufen, welche durch die Deckoperationen der Würfelgruppe in sich, bzw. ineinander übergeführt werden. Ein einfaches Beispiel für solche Bahnen ist die folgende Anordnung: Man denke sich um die 8 Ecken eines Würfels Kreise gezogen, welche diese Ecken als Mittelpunkte enthalten und in Ebenen liegen, die auf den zugehörigen Würfeldiagonalen senkrecht stehen. Die Elektronen laufen auf diesen Kreisen synchron um, und zwar so, daß in jedem Moment ihre Koordinaten die folgenden Werte haben:

$$\begin{array}{llll} x, y, z, & -x, -y, -z, & -x, y, -z, & x, -y, z, \\ x, -y, -z, & -x, y, z, & -x, -y, z, & x, y, -z, \end{array}$$

1) Landé, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 1, 644, 653, 1919.

Das von einem solchen Atom erzeugte elektrostatische Feld hat im Zeitmittel Würfelsymmetrie, das magnetische Feld hingegen Tetraedersymmetrie, wie man leicht einsieht, wenn man bedenkt, daß vom Kern aus betrachtet zwei diametral gegenüberliegende Atome in entgegengesetztem Sinne umlaufen. Das Landésche Atommodell hat man also als ein Würfelatom zu betrachten, wenn man voraussetzt, daß für die Symmetrieeigenschaften eines Kristalls nur die elektrostatischen Kräfte des Atoms eine Rolle spielen, als ein Tetraederatom hingegen, wenn man annimmt, daß auch die magnetischen mit ins Spiel kommen.

Mit Hilfe der im vorstehenden angewendeten Methode ist es nun leicht, die möglichen Symmetrien von Atomgittern festzustellen, welche das Braggsche KCl-Gitter als Punktgitter enthalten und aus Würfel- oder Tetraederatomen zusammengesetzt sind. Man muß dabei nur beachten, daß auf jeden Fall, damit überhaupt ein reguläres Atomgitter zustande kommt, die dreizähligen Achsen der Würfel oder Tetraeder mit jenen des Punktgitters zusammenfallen müssen. Ferner sind bei allen Raumgruppen Nr. 61—65 von vornherein beide Fälle α und β möglich, da bei Würfel- oder Tetraederatomen die früher gegen das Vorkommen des Falles α bei den Raumgruppen 61, 62 und 63 geltend gemachten Gegengründe wegfallen.

Man gelangt zu folgenden Resultaten:

1. Wenn beide Atome Würfelsymmetrie besitzen, entstehen nur holoëdrische Atomgitter.
2. Wenn beide Atome Tetraedersymmetrie besitzen, können (auch bei beliebigem n) weder holoedrische noch enantiomorphe, sondern nur hemimorphe Atomgitter entstehen.
3. Wenn die eine Atomgattung Würfel- und die andere Tetraedersymmetrie besitzt, läßt sich mit $n = 2$ ein enantiomorphes Atomgitter aufbauen[1]); holoedrische entstehen auf keinen Fall.

Es handelt sich nun darum, diese Feststellungen mit der Tatsache in Einklang zu bringen, daß $NaCl$ holoedrisch kristallisiert, die anderen Alkalihalogenide hingegen (soweit ihre Zuordnung zu einer bestimmten Kristallklasse überhaupt mit Sicherheit festgestellt ist) kubisch enantiomorph sind.

Geht man von der Voraussetzung aus, daß das Landésche Atommodell richtig ist, so wird man wohl folgende Schlüsse zu ziehen haben: Der Unterschied zwischen den Symmetrien des Steinsalzkristalls und der übrigen Alkalihalogenide ist nur ein gradueller insofern, als die

1) Z. B. mittelst der Raumgruppe $\mathfrak{O}^2$.

Abweichungen von der Holoedrie bei ersterem unmerkbar klein, bei den letzteren jedoch deutlich erkennbar sind. Diese Abweichungen werden verursacht durch die vom Alkaliatom erzeugten magnetischen Kräfte, die beim *Na* noch sehr schwach sind, beim *K* hingegen einen merklichen Einfluß auf die Kristallsymmetrie ausüben. Die magnetischen Kräfte des Halogenatoms müssen auch bei den höheren Gliedern der Reihe sehr schwach sein, sonst müßten die entsprechenden Kristalle in die kubisch-hemimorphe (hexakistetraedrische) Klasse gehören.

Eingehendere experimentelle Untersuchungen über die Symmetrieeigenschaften der Alkalihalogenide wären daher für die Frage des Atombaus sehr wertvoll.

Zusammenfassung.

Da die Intensität der Reflexionen von Röntgenstrahlen an den Netzebenen eines Kristalls nur von der Zahl der Elektronen pro Flächeneinheit, nicht aber von der Orientierung der Atome abhängt, muß mit der Möglichkeit gerechnet werden, daß die Kantenlänge des Elementarwürfels des Atomgitters ein ganzzahliges Vielfaches jener des zugehörigen Punktgitters ist, das man als Ergebnis der Röntgenanalyse für den betreffenden Kristall erhält. Der Faktor, der diese Vielfachheit angibt, werde n genannt. Unter Berücksichtigung dieser Möglichkeit ergibt sich aus Symmetriebetrachtungen folgendes:

1. Das Kohlenstoffatom kann keine Zylindersymmetrie besitzen, ist also kein ebenes Bohrsches Elektronenringsystem. Auch Systeme mit gekreuzten Elektronenringen können mit der Symmetrie des Diamanten nicht in Einklang gebracht werden, hingegen ist dies für die von Landé angegebene Anordnung mit Tetraedersymmetrie der Elektronenbahnen der Fall.

2. Die von Bragg für die Hemiedrie des *KCl* gegebene Erklärung, wonach die Atome nicht genau in den Würfelecken, bzw. Flächenmitten sitzen, sondern etwas davon abweichende Stellungen haben, führt auf ganz bestimmte Anordnungen mit $n = 2$, die keine Gleichgewichtszustände sein können, weshalb diese Erklärung wohl abzulehnen ist.

3. Aus achsialsymmetrischen Atomen (ebenen Ringmodellen) läßt sich kein *KCl*-Gitter mit regulär enantiomorpher Symmetrie aufbauen, solange man an der Annahme festhält, daß kein *K*- oder *Cl*-Atom vor einem anderen *K*- bzw. *Cl*-Atom ausgezeichnet sei.

4. Mit dem von Landé angegebenen Atommodell läßt sich die Hemiedrie des *KCl* mit $n > 2$ erklären, wenn man annimmt, daß die vom *K*-Atom erzeugten magnetischen Kräfte für die Symmetrieeigenschaften des Kristalls eine Rolle spielen.

5. Aus der Holoedrie des *NaCl* folgt andererseits, daß diese magnetischen Kräfte der Alkaliatome in den Vertikalreihen des periodischen Systems zunehmen, derart, daß sie beim *Na* noch unmerklich sind und erst beim Kalium einen Einfluß auf die Kristallsymmetrie ausüben können.

Meinem Freunde T. Rella, der mich während der Arbeit auf einige Versehen aufmerksam machte, schulde ich herzlichen Dank.

Wien, Institut für theoretische Physik der Universität.

(Eingegangen 23. Dezember 1919.)

Neue Apparate zur Strahlungsmessung.

Von W. Voege.

Die im folgenden beschriebenen Apparate zur Strahlungsmessung beruhen auf der Anwendung einer neuen Art von Thermoelementen, welche im Laufe des Krieges durch Zusammenarbeit des Verf. mit der Firma C. Zeiß entstanden sind, als es sich darum handelte, ein vom Verf. angegebenes Verfahren der Nachrichtenübertragung durch unsichtbare Wärmestrahlen für die Praxis brauchbar zu gestalten. Da die Elemente zur Verstärkung der Wirksamkeit im Brennpunkt eines Parabolspiegels angeordnet werden mußten, da ferner die Morsezeichen mit normaler optischer Telegraphiergeschwindigkeit zu übertragen waren, so hatten die Elemente eine Reihe von Bedingungen zu erfüllen, welchen die bisher bekannten Thermoelemente nicht genügten. Diese Bedingungen waren: 1. Hohe thermoelektrische Kraft bei möglichst kleinem inneren Widerstand. 2. Volle Ausnutzung der im Brennpunkte des Spiegels entstehenden Wärmemenge. 3. Geringe Trägheit. 4. Widerstandsfähigkeit gegen mechanische Erschütterungen.

Auch die zunächst versuchten Vakuum-Strahlungsmesser des Verf.[1]) erwiesen sich für den vorliegenden Zweck als ungeeignet. Denn wenn bei diesen auch hohe Empfindlichkeit und große Haltbarkeit vorhanden sind, so vermochten sie doch die Bedingungen 2. und 3. in keiner Weise zu erfüllen. Die hohe Empfindlichkeit wird bei den Strahlungsmessern erreicht durch Hintereinanderschaltung einer Reihe von Eisen-Konstantan-Elementen sowie durch Einschluß

1) Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. 5, 287, 1913.

Tabelle I.

Art des Elements		Ausschlag		
		in Luft α	im Vakuum β	$f = \beta/\alpha$
Drahtkreuz, elektrisch geheizt	Drähte von 0,02 mm Durchmesser. Lötstelle punktförmig ungeschwärzt	$1{,}1^0$	52^0	47,2
Strahlungsmesser, 4 Eisenkonstantanelemente in Serie	Drähte von 0,03 mm Durchmesser. Lötstelle punktförmig ungeschwärzt	$1{,}5^0$	36^0	24
1 Wismuteisenelement	Auffangefläche von ca. 2 qmm blank	2^0	$31{,}5^0$	15,7
1 Wismuteisenelement	Auffangefläche von ca. 2 qmm geschwärzt	$4{,}5^0$	43^0	9,5
1 Wismuteisenelement	Auffangefläche von ca. 5 qmm geschwärzt	$4{,}5^0$	29^0	6,4

dieser Elemente ins Vakuum — beides Mittel, welche hier versagen mußten.

Die Unterbringung einer Reihe von Thermoelementen auf einer Fläche von nur 1—2 qmm, welche bei sphärisch gut korrigierten Parabolspiegeln, wie solche für Scheinwerferzwecke benutzt werden, in Frage kommt, bereitet praktisch sehr große Schwierigkeiten. Ganz abgesehen davon, daß die volle Ausnutzung der Strahlungsenergie auf diese Weise unmöglich ist. Der Einschluß ins Vakuum erhöht zwar die Empfindlichkeit, er vergrößert aber gleichzeitig die Trägheit der Elemente beträchtlich. Übrigens hängt der Grad der Empfindlichkeitssteigerung der Elemente im Vakuum sehr wesentlich von der Beschaffenheit der einzelnen Elemente ab. Vereinzelte Angaben über den Einfluß des Vakuums, wie man sie zuweilen in der Literatur findet, lassen keine allgemeinen Schlüsse zu; es kommt vielmehr in jedem Falle darauf an, in welchem Verhältnis der Verlust durch Luftleitung, der ja durch Evakuieren des Gefäßes beseitigt wird, zu den übrigen Verlusten durch Ausstrahlung und metallische Wärmeableitung steht.

Die obenstehende Zusammenstellung (Tab. I) der Empfindlichkeitssteigerung für verschieden gestaltete Elemente zeigt deutlich, wie sehr die Art des Elements hier eine Rolle spielt; sie gestattet auch einen Schluß darauf hin, welche Verbesserung bei gegebenem Element durch Einschluß desselben ins Vakuum zu erwarten ist. Die Tabelle läßt ferner erkennen, daß man bei elektrisch geheizten Drahtkreuzen[1]), wie solche zur Messung schwacher Wechselströme benutzt werden, durch Verwendung von Materialien von höherer Thermokraft als Eisenkonstantan, also z. B. durch Benutzung der bekannten Hutchins Legierungen[1]) keinen Vorteil zu erwarten hat, wenn es nicht gleichzeitig gelingt, diese Legierungen in ebenso dünnen Drähten herzustellen wie Eisen und Konstantan. Ein aus Eisen und Wismutdrähten von 0,06 mm Durchmesser hergestelltes Element hatte z. B. in Luft eine etwa 5 mal so hohe Thermokraft als ein ähnliches Element aus Eisenkonstantan, im Vakuum kehrte sich das Verhältnis der Ausschläge dagegen um, weil eben das Vakuum beim Eisenkonstantanelement wesentlich wirksamer ist als bei dem dickeren Eisenwismutelement. Ganz ähnlich liegen die Verhältnisse beim Vakuumbolometer. Warburg, Leithäuser und Johansen[2]) geben an, daß das Vakuum um so mehr ausmacht, je schmäler der Bolometerstreifen ist, sie finden bei einer Breite der Streifen von 0,195 mm eine Empfindlichkeitssteigerung von 4,9, bei einer Breite von 0,4 mm eine solche von 3,7.

In vorliegendem Falle konnte es sich nach allem nur um ein einziges hochempfindliches Element handeln, dessen wirksame Auffangfläche dem Durchmesser des Bildes der Lichtquelle im Brennpunkt des Spiegels entspricht. Der Einschluß desselben in das Vakuum wurde von vornherein aufgegeben, da einerseits eine wesentliche Empfindlichkeitssteigerung dieses flächenförmigen Elements nicht zu erwarten war und da andererseits mit einer ganz unzulässigen Trägheitszunahme gerechnet werden mußte. Nach langen Versuchen ist es der Firma Zeiß dank der

1) E. T. Z. **20**, 467, 1906 u. diese Zeitschr. **14**, 498, 1913.

1) Hutchins Am. J. Science **48**, 226, 1894.
2) Warburg, Leithäuser u. Johansen, Über das Vakuumbolometer, Ann. d. Phys. **24**, 25, 1907.

Tabelle II.

Art des Elements	Auffangefläche	Widerstand	Galvanometerausschlag mit Glasplatte	Galvanometerausschlag ohne Glasplatte	Zeit bis zum Endausschlag des Saitengalvanometers	Bemerkungen
Strahlungsmesser. 4 Eisenkonstantanelemente im Vakuum. Glasglocke. Elemente punktförmig	0,5 qmm	20 Ohm	70°	(109°)	15,5 Sek.	Elemente im Vakuum
Zeiß-Wismuteisenelement im Vakuum. Glasglocke	4 qmm	0,5 Ohm	105°	(164°)	9,4 Sek.	
Zeiß-Element Nr. 3 im Vakuum. Glasglocke	3,5 qmm	0,95 Ohm	380°	(594°)	21 Sek.	
Zeiß-Spezialelement Nr. 2. Flußspatplatte ohne Kugelspiegel	4 qmm	2,8 Ohm	(45°)	70,5°	2 Sek.	Element für besonders geringe Trägheit
Zeiß-Spezialelement Nr. 2. Flußspatplatte. Mit einstellbarem Kugelspiegel	4 qmm	2,8 Ohm	(310°)	484°	2 Sek.	Kugelspiegel auf Max. der Wirkung eingestellt
Zeiß-Element Nr. 1. Flußspatplatte. Kugelspiegel fest	4 qmm	1,5 Ohm	(151°)	236°	5 Sek.	
1 Eisenkonstantanelement ohne Platte u. ohne Spiegel	0,7 qmm	0,2 Ohm	(4,5°)	7,5°	7 Sek.	
Rubenssäule mit 20 Eisenkonstantanelementen. Ohne Konus	14 qmm	5,2 Ohm	(47,3°)	74°	7,2 Sek.	
Rubenssäule mit 20 Eisenkonstantanelementen. Mit innerem Konus	14 qmm	5,2 Ohm	(64°)	100°	7,2 Sek.	

unermüdlichen Tätigkeit des Herrn Mechaniker Mechau gelungen, ein Thermoelement zu bauen, welches die nötige Festigkeit besitzt und welches auch genügend trägheitslos hergestellt werden kann. Dieses Thermoelement besitzt eine 6–8 mal größere Thermokraft wie das Thermoelement aus Eisenkonstantan. Die Elemente haben einen inneren Widerstand von 1 bis 3 Ohm, ihre Auffangefläche ist geschwärzt. Erhöht wird die Strahlungsempfindlichkeit noch wesentlich durch Anbringung eines kleinen metallisch reflektierenden Kugelspiegels hinter dem Element. Das Element ist vor diesem Spiegel etwas exzentrisch angeordnet, so daß diejenigen Strahlen, welche das Element nicht direkt treffen, durch den Spiegel gesammelt und auf die Rückseite des Elements konzentriert werden[1]). Dieser Kugelspiegel wirkt natürlich verschieden stark je nach dem Abstand und der Größe des strahlenden Körpers und der daraus resultierenden Größe des Bildes im Spiegel. In günstigen Fällen, wenn das Bild des Strahlers im Brennpunkte des großen Auffangspiegels wesentlich größer ist als die Oberfläche des Thermoelements, wird durch diesen Kugelspiegel eine 6–7fache Empfindlichkeitssteigerung erreicht.

Die Tabelle II ermöglicht einen Vergleich zwischen den neuen Zeißelementen mit bekannten zum Teil vom Verf. selbst hergestellten Thermoelementen und Elementkombinationen. Die Elemente wurden sämtlich in gleichem Abstand von 1 m durch eine Nernstlampe (110 V. 0,25 Amp.) ohne Glasglocke bestrahlt und der entstehende Thermostrom immer mit demselben Galvanometer von Hartmann & Braun (Widerst. = 5 Ohm $1^0 = 2 \times 10^{-8}$ Amp.) gemessen. Da die Elemente durchweg einen sehr geringen Widerstand haben, so ist das Galvanometer mit seinem kleinen Eigenwiderstand diesen angepaßt.

Die angegebenen Zahlen sind auf die bekannte Strahlung der Hefner-Lampe zurückzuführen durch die im Vorversuch festgestellte Beziehung: $\frac{\text{Hefnerlampe}}{\text{Nernstlampe}} = 0{,}21$.

Die umgerechneten, nicht gemessenen Zahlen sind durch Einklammern kenntlich gemacht.

1) D. R.-G.-M 676237/42i vom 25. Okt. 1917.

Die zur Kennzeichnung der Trägheit der Elemente angegebenen Sekundenzahlen sind in der Weise erhalten, daß die Zeit vom Beginn der Bestrahlung bis zum Endausschlag eines Saitengalvanometers, dessen Einstellungsdauer gegenüber der Trägheit der Elemente verschwindend klein ist, mit der Stoppuhr beobachtet wurde. Die der Abkühlung des Elements entsprechende Zeit bis zum Rückgang des Ausschlags auf 0 nach Aufhebung der Bestrahlung fiel durchweg 1 bis 2 Sekunden größer aus.

Bezüglich der Empfindlichkeit steht das Zeißelement Nr. 3 im Vakuum mit einem Ausschlag von 594⁰ — für den Fall, daß die Glasglocke etwa mit einem Steinsalzfenster versehen wäre — weitaus oben an, dabei hat es auch einen sehr kleinen Widerstand von nur ·1 Ohm. Die Trägheit dagegen ist hier außerordentlich groß, erst nach 21 Sek. erreicht das Saitengalvanometer seinen Endausschlag! Für Telegraphierzwecke ist dieses Element trotz seiner hohen Empfindlichkeit natürlich ungeeignet, hierfür kommt vielmehr nur das Zeißelement Nr. 2 in Frage, bei welchem es gelungen ist, die Trägheit auf 2 bis 3 Sekunden zu reduzieren. Die Empfindlichkeit dieses Spezialelements beträgt ohne Kugelspiegel nur den achten Teil des Vakuumelements; mit gut eingestelltem Kugelspiegel ließ sich der Ausschlag — wie die Tabelle zeigt — aber wieder auf 484⁰ erhöhen. Der Kugelspiegel wird zum Thermoelement je nach der Anwendung des Thermoelements mit oder ohne Auffangspiegel so angeordnet, daß das Thermoelement entweder im Krümmungsmittelpunkt oder im Brennpunkt des Kugelspiegels sitzt. Ein normales Element (Nr. 1) mit festem Kugelspiegel und mit geschwärzter Auffangfläche von nur 4 qmm gibt einen Ausschlag von 236⁰, es ist also der Rubenssäule[1]) mit 20 Eisenkonstantanelementen, 14 qmm Auffangfläche und innerem Konus noch bedeutend überlegen (236⁰ : 100⁰), ganz abgesehen von dem Vorteil der kleineren Oberfläche. Der Vorteil der kleinen Auffangfläche macht sich natürlich besonders dann geltend, wenn das Element im Hohlspiegel verwendet werden soll, aber auch wenn man die Strahlung durch eine Linse oder einen Trichter auf das Element konzentrieren will, ist eine kleine Fläche Bedingung für den Erfolg.

Wie ich früher an anderer Stelle[2]) ausgeführt habe, läßt sich durch einen passend geformten metallisch reflektierenden Auffangetrichter die Empfindlichkeit eines Strahlungsmessers ganz bedeutend steigern, ohne daß teure Linsen aus Flußspat oder Steinsalz oder ein metallischer Hohlspiegel erforderlich werden. Bei diesen Strahlungsmessern mit vier in gegenseitigem Abstand von 2 mm angeordneten punktförmigen Elementen erreicht man mit Hilfe eines solchen Trichters den 10- bis 20fachen, bei den neuen Zeißelementen infolge ihrer kleinen Oberfläche leicht den 100fachen Ausschlag. Bei der Rubenssäule hat der zugehörige Konus natürlich nur einen viel geringeren Einfluß. Die Strahlung der Nernstlampe in 4 m Abstand ergab bei der Rubenssäule mit Konus einen Ausschlag von 6⁰, bei dem Zeißelement Nr. 1 mit Trichter von 7 cm Seitenlänge einen Ausschlag von über 400⁰!

Aus der Tabelle II geht weiter hervor, daß alle Elemente im Vakuum an großer Trägheit leiden, daß im übrigen geringe Trägheit und hohe Empfindlichkeit schwer miteinander zu vereinen sind. Je nach dem Verwendungszweck ist daher ein besonderes Element zu verwenden. Für die meisten Zwecke dürfte eine Einstellungsdauer von 5 Sek., wie bei dem Element Nr. 1, völlig genügen, da die Galvanometer selbst meist eine Schwingungsdauer von mindestens 5 Sek. besitzen. Interessant ist, daß man Trägheit und Empfindlichkeit auch durch eine der Rückseite des Elementes genäherte oder entfernte Metallscheibe beeinflussen kann. Z. B. wurde bei demselben Element ohne Hintergrund $\alpha = 190^0$ und eine Einstellungsdauer von 8,5 Sek. gemessen, mit metallischem Hintergrund dagegen $\alpha = 152^0$ und 6,0 Sek. Die in kleinem Abstand vom Elemente befindliche Metallscheibe wirkt also in dem Sinne, daß das Element bei derselben Strahlung nur eine geringere Temperatur annehmen kann, daß dafür aber der Gleichgewichtszustand zwischen zugeführter und abgeleiteter Wärme schneller erreicht wird.

Von Bedeutung ist noch die Abschlußscheibe der Elemente. Wenn man mit den Apparaten im Laboratorium in ruhiger Luft auch ohne Abdeckscheibe arbeiten kann, so ist dieselbe doch zum Schutz der Elemente gegen Beschädigung sowie gegen Luftströmungen im allgemeinen nicht zu entbehren. In Frage kommen Glas, Flußspat, Steinsalz und Glimmer. Glas ist für längere Wellenlängen überhaupt nicht durchlässig, Flußspat ist durchlässig bis etwa 8 μ, Steinsalz bis zu 12 μ. Steinsalz ist in dieser Hinsicht also am besten, aber leider in feuchter Luft wenig beständig. Die Firma Zeiß liefert zu dem Thermoelement Steinsalzplatten[1]), welche mit einer geeigneten Lackschicht überzogen gegen Lufteinflüsse haltbar gemacht sind. Wie aus der Tabelle III hervorgeht, welche die Aus-

1) Rubens, Eine neue Thermosäule, Zeitschr. f. Instrumentenk. **18**, 65, 1898.

2) Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. **5**, 287, 1913.

1) D. R.-G.-M. 660887 74d vom 25. Nov. 1916.

schläge bei demselben Element mit verschiedenen Abschlußplatten bei verschiedenen Temperaturen des strahlenden Körpers wiedergibt, absorbiert diese Lackschicht bei Temperaturen von ca. 100° C, bei denen das Maximum der Strahlung zwischen 7 und 8 μ liegt, fast ebensoviel wie die 4 mm starke Steinsalzplatte selbst. Bei höheren Temperaturen fällt der Einfluß der Lackschicht dagegen mehr und mehr fort. Im Laboratorium haben sich derartig überzogene Steinsalzplatten sehr gut gehalten, im Freien aber ist die Haltbarkeit in feuchter Luft auch nur von beschränkter Dauer. Hier kommt eigentlich nur Flußspat in Frage, denn Glimmer ist auch in dünnster Schicht weniger durchlässig, auch schützt solche dünne Glimmerschicht infolge zu guter Wärmeleitfähigkeit nicht genügend gegen Luftströmungen, deren Temperatur von derjenigen des Elements abweicht. Wie Tabelle III zeigt, erhöht die Abschlußplatte die Empfindlichkeit der Elemente ein wenig, da der Verlust durch Luftströmung vermindert wird; infolgedessen ergeben sich mit Steinsalzplatte bei Strahlern höherer Temperatur sogar etwas größere Ausschläge als ohne Platte. Wird die Platte in größerem Abstand vor das Element geschaltet, so überwiegt sofort wieder der Verlust durch Absorption und die Ausschläge werden kleiner als 100°.

Tabelle III.

Element Nr. 1	Temperatur des Strahlers: 100° C	500° C	1200° C	2300° C
Ohne Platte	100	100	100	100
Mit Steinsalz 4 mm stark .	84	98,5	102	103,5
Mit Steinsalz lackiert 4 mm	67,5	86,5	92,5	96,5
Mit Flußspat 2 mm . . .	54,0	83,0	94,0	98,0
Mit Glimmer 0,04 mm . .	44,0	68,7	85,0	92,0
Mit Glas 1,3 mm	2,1	9,9	33,0	70,3

Die Fig. 1 und 2 zeigen die Ausführungsform, welche die Firma Zeiß ihren Elementen gegeben hat. Die Elemente sind in einem festen Metallgehäuse untergebracht, das, mit einem Zapfen von 13,5 mm Durchmesser versehen, leicht in jedem Stativ befestigt werden kann. Man erkennt in Fig. 2 den Kugelspiegel mit dem davor sitzenden Thermoelement. Ein neben dem Element sichtbarer Metalleinsatz gestattet, das Element mit auswechselbaren Abschlußscheiben aus Glas, Flußspat und lackiertem Steinsalz zu benutzen. Auf Wunsch wird ferner ein leicht zu befestigender Auffangetrichter nach Angabe des Verf. mitgeliefert.

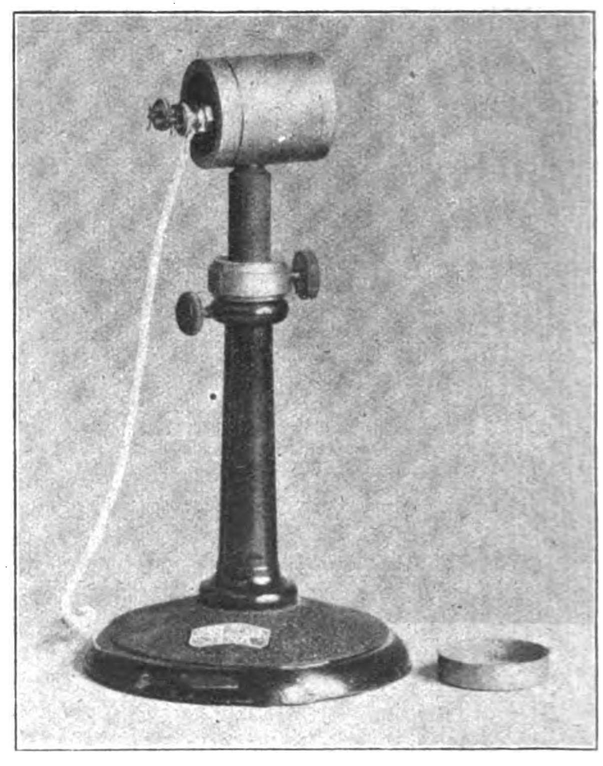


Fig. 1.

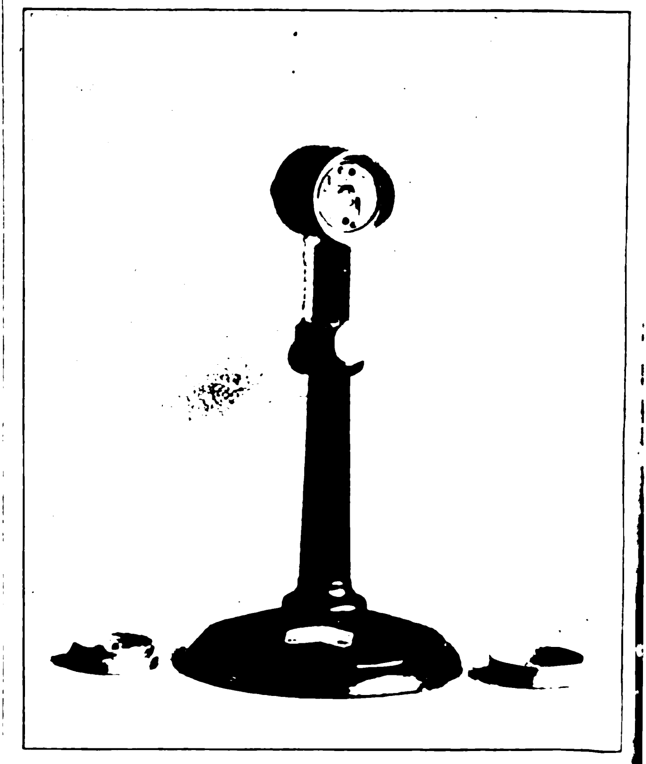


Fig. 2.

Fig. 3 zeigt einen handlichen von der Firma Zeiß für Herrn Prof. Jensen in Hamburg hergestellten Apparat für meteorologische, astronomische und ähnliche Beobachtungen, bei denen eine erheblich höhere Empfindlichkeit gewünscht wird. Das Element befindet sich hier im Brennpunkt eines vorn versilberten und farblos lackierten Parabolspiegels von 25 cm Durchmesser und 15 cm Brennweite. Das Spiegelgehäuse ist in horizontaler und vertikaler Richtung leicht verstellbar, es ist mit einem Handgriff zum Tragen, einem sich durch Federdruck öffnenden zweiteiligen Metalldeckel sowie mit den zum Element führenden isolierten Anschlußklemmen versehen. Das in Fig. 3 sichtbare Element im evakuierten Glasgehäuse ist bei Untersuchungen mit Strahlen



Fig. 3.

längerer Wellenlänge durch das normale Element mit Kugelspiegel und Flußspatscheibe zu ersetzen.

Mit dem in der Fig. 3 sichtbaren Zeigergalvanometer von Siemens & Halske (1,5 Ohm $1^0 = 1 \cdot 10^{-5}$ Amp.) erhielt ich, wenn der Apparat auf eine in 20 m Abstand befindliche Hefnerlampe gerichtet wurde, einen Ausschlag von 1^0; einen ungefähr gleich großen Ausschlag erzeugte der blaue Nordhimmel im September morgens 10 Uhr. Gemessen mit dem erwähnten Spiegelgalvanometer von H. & B. (5 Ohm $1^0 = 2 \cdot 10^{-8}$ Amp.) würde 1 HK in 1000 m Entfernung noch einen eben meßbaren Ausschlag von $0,4^0$ geben, während diese Strahlung mit dem Panzergalvanometer von Siemens & Halske (2 Spulen à 5 Ohm) bei einem Ausschlag von ca. 10^0 noch sicher gemessen werden könnte.

Zur weiteren Beurteilung der erreichbaren Empfindlichkeit diene eine Messung der Mondstrahlung, die ich am 10. September d. J. abends 10 Uhr bei klarem Himmel in Hamburg ausführte. Der Mond war nicht mehr voll (Mondalter 17 Tage), er stand etwa 25^0 über dem Horizont, befand sich also noch im Dunstkreis der Großstadt, trotzdem erzeugte seine Strahlung einen Ausschlag von 300 Skalenteilen des H- & B-Galvanometers. Beim Vorschalten einer Glasscheibe ging dieser auf 265^0 zurück. Würde man alle Möglichkeiten zur Empfindlichkeitssteigerung ausnützen — Anwendung des Panzer-

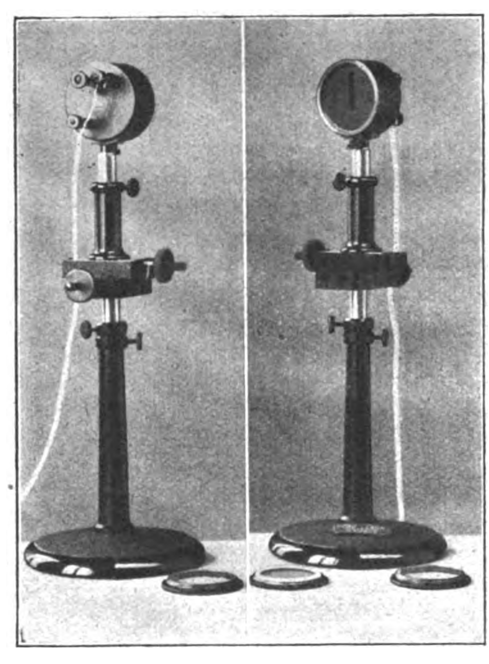


Fig. 4. Fig. 5.

galvanometers, Anbringung der Skala in größerem Abstand, Anwendung eines Auffangespiegels von 100 cm Durchmesser —, so würde man schätzungsweise noch den millionsten Teil der Vollmondstrahlung messen können. Das neue Element dürfte sich also in Verbindung mit einem größeren Parabolspiegel hervorragend zu Strahlungsmessungen auf astronomischem Gebiete eignen.

Um die Elemente auch für Spektraluntersuchungen brauchbar zu gestalten, wurde auf Veranlassung des Verf. eine Linear-Thermosäule aus 10 Einzelelementen, deren Lötstellen in einer Geraden von 18 mm Länge angeordnet sind, von Zeiß hergestellt. Die Fig. 4, 5 und 6 zeigen das Äußere dieser Säule. Das die Elemente enthaltende starke Metallgehäuse wird entweder durch eine aufschraubbare Platte aus Glas oder lackiertem Steinsalz abgeschlossen, doch kann die

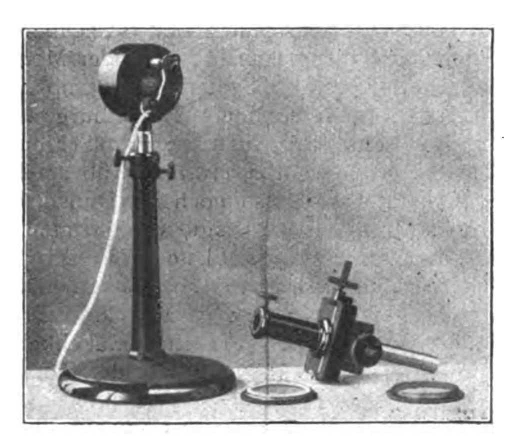


Fig. 6.

Säule auch ohne Abschlußscheibe verwendet werden. Wie aus den Abbildungen zu ersehen, ist die Säule auf dem zugehörigen Stativ in der Höhe, Seite und Tiefe leicht zu verstellen. Zur Seiten- und Tiefenbewegung dient ein Kreuzschlitten, der die feinsten Verschiebungen im Spektrum vorzunehmen gestattet. Unmittelbar vor den Elementen befindet sich ein von außen durch eine Schraube verstellbarer Spalt, mit welchem jede gewünschte Weite zwischen 0 und 2,5 mm einzustellen ist. Mit Hilfe einer ebenfalls in Fig. 4 und 6 sichtbaren Einstellupe von 5 facher Vergrößerung lassen sich die Spektrallinien im sichtbaren Gebiet beobachten und so die Spaltweite und die Stellung der Säule im Spektrum genau kontrollieren.

Die Größe der Galvanometerausschläge ist natürlich von der Spaltweite abhängig. In welchem Maße, zeigt die gestrichelte Kurve in Fig 7. In dieser Figur sind die Ausschläge in

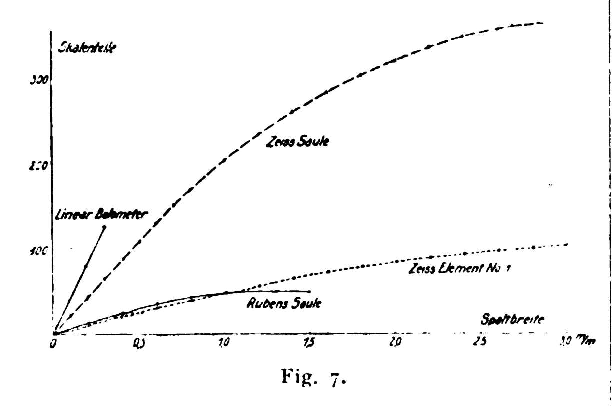


Fig. 7.

Abhängigkeit von der Spaltweite für die Zeiß- und die Rubens-Säule aufgetragen. Bis zur Spaltweite von 0,8 mm sind die Ausschläge der Spaltweite bei der Zeiß-Säule genau proportional, von da ab nimmt die Empfindlichkeit langsamer zu, weil die Auffangeflächen nach dem Rande zu weniger wirksam werden. Ähnlich liegen die Verhältnisse bei der Rubens-Säule, doch läßt die geringe Größe der Ausschläge bei engem Spalt keine genauen Ablesungen zu. Als Anzeigeinstrument diente bei diesen Versuchen immer das Spiegelgalvanometer von S. & H. mit 40 Ohm Widerstand und der Empfindlichkeit von $1^0 = 6 \cdot 10^{-9}$ Amp. In Fig. 7 sind ferner die entsprechenden Werte für das einfache Zeiß-Element Nr. 1 mit Kugelspiegel eingetragen, die letzte Kurve endlich gilt für das noch näher zu beschreibende Linear-Bolometer des Verf. bei 30 Milliamp. Heizstrom. Das einfache Element Nr. 1 entspricht also ziemlich der Rubens-Säule, doch ist zu bemerken, daß dieses Element nur einen Teil der Höhe des der Rubens-Säule angepaßten Spektrums ausnutzt. Wenn es möglich ist, die Apparatur in dem Sinne umzuändern, daß das Spektrum kürzer und dabei in gleichem Maße intensiver wird, so muß man mit dem einfachen Element noch erheblich mehr erreichen. Ein Versuch mit dem Rubensschen Ultrarot-Spektrometer bestätigte dies vollkommen, ein einziges der neuen Elemente leistet in diesem Fall fast 3 mal soviel wie die 20 Eisenkonstantanelemente der Rubens-Säule. Für Demonstrationszwecke wird man natürlich ein großes Spektrum vorziehen und das Element bzw. die Säule mit einem Auffangetrichter verwenden. Auf diese Weise lassen sich im blauen und violetten Teil des Spektrums noch sehr brauchbare Ausschläge erzielen.

Um einen Vergleich der Zeiß-Säule mit einem Linear-Bolometer ausführen zu können, konstruierte der Verf. auf Grund der früher bei Zeiß mit Spiralbolometern gemachten Erfahrungen ein solches, das sich bei großer Einfachheit gut bewährt hat. Es besteht im wesentlichen aus zwei ähnlichen nebeneinander angeordneten Eisenspiralen von 15 mm Länge und 0,3 mm Durchmesser, von denen die eine bestrahlt, die andere durch ein Blech gegen die Strahlung geschützt wird[1]). Die Spiralen verdanke ich Herrn Dr. Mayer, der mir dieselben im Glühlampenwerk von Siemens & Halske aus Eisendraht von 0,015 mm Durchmesser auf einen Dorn von 0,3 mm wickeln ließ. Die geschwärzten Spiralen sind vor einem weißen Hintergrund[2]) in einem schwach evakuierten Glasgefäß mit Steinsalzfenster untergebracht, sie haben jede einen Widerstand von ca. 100 Ohm und werden mit zwei Konstantanwiderständen in bekannter Weise zu einer Brücke vereinigt. Die zulässige Heizstromstärke beträgt etwa

1) D. R.-G.-M. Zeiß 660895/74d vom 25. Nov. 1916.
2) D. R.-G.-M. Zeiß 668414/74b vom 17. Juli 1917.

Tabelle IV.

Art des Strahlungsmessers		Wirksame Auffange-fläche	Widerstand	Strahlungs-quelle	Heizstrom beim Bolometer	Ausschlag am Spiegel-galvanometer 50 Ω 1° = 6·10⁻⁸ Amp.
Zeiß-Säule mit 10 Elementen	Spalt ganz geöffnet Spalt 0,3 mm weit Spalt 0,1 mm weit	40 qmm 5,2 „ 1,6 „	38 Ohm	Kohlefaden-lampe 16 K in 2 m Ab-stand	— — —	49° 8,7° 2,6°
Steinsalzfenster	Spalt ganz geöffnet	40 qmm	38 Ohm	Hefnerlampe in 1 m Ab-stand	—	20°
Linear-Bolometer (Voege) 1 Zweig der Brücke bestrahlt Steinsalzfenster	Breite der Spirale = 0.3 mm	4,5 qmm	100 Ohm	Kohlefaden-lampe 16 K in 2 m Ab-stand	10 Milliamp. 20 „ 30 „	4,7° 10° 19°
Flächenbolometer nach Seddig	im Vakuum Flußspatplatte 2 Zweige bestrahlt	625 qmm	jeder Zweig 30 Ohm	Kohlefaden-lampe 16 K in 2 m Ab-stand	20 Milliamp. 30 „	75° 150°
Flächenbolometer nach Lummer-Kurlbaum	in Luft 2 Zweige bestrahlt	768 qmm	jeder Zweig 60 Ohm	3—4 Kohle-faden in 1 m Abstand entspr. 9—16 K in 2 m	6 Milliamp.	61°
Linear-Bolometer nach Rubens	Eisenstreifen von 0,6 mm Breite 1 Zweig bestrahlt	nicht angegeben	3 Ohm	umgerechnet für 16 K Kohle-fadenlampe in 2 m Ab-stand	nicht angegeben	ca. 15,7°
Linear-Bolometer nach Rubens	Platinstreifen von 0,09 mm Breite 1 Zweig bestrahlt	nicht angegeben	80 Ohm	umgerechnet für 16 K Kohle-fadenlampe in 2 m Ab-stand	nicht angegeben	ca. 3,2°

30 Milliamp., bei höheren Stromwerten wird die Ruhelage des Galvanometerzeigers unsicher.

In der Tabelle IV sind die mit diesem Bolometer, die mit der Zeiß-Säule und die mit einem Seddig-Bolometer gemessenen Werte eingetragen. Daneben sind die der Literatur entnommenen Zahlenwerte für einige andere Bolometer entsprechend umgerechnet zusammengestellt. Als Strahlungsquelle diente bei diesem Versuch eine Kohlefadenlampe von 16 HK im Abstand von 2 m, ein besonderer Spalt vor dem Strahlungsmesser war nicht vorhanden. Benutzt wurde das Spiegelgalvanometer von S. & H. mit 50 Ohm Widerstand.

Mit der Zeiß-Säule erhält man nach Tabelle IV bei 0,3 mm Spaltöffnung einen Ausschlag von 8,7°, mit dem Linear-Bolometer des Verf., dessen Breite ebenfalls 0,3 mm beträgt, bei 20 Milliamp. Heizstrom 10°, bei 30 Milliamp. 19°, doch beginnt hier die Ruhelage schon unsicher zu werden. Die Empfindlichkeit ist bei beiden Apparaten also von derselben Größenordnung, dabei ist die Schaltung bei der Thermosäule natürlich wesentlich einfacher, die Ruhelage besser und das Arbeiten unvergleichlich viel angenehmer. Ähnliche Ausschläge würde man bei der gewählten Versuchsanordnung mit den von Rubens angegebenen Linear-Bolometern[1]) erhalten, nämlich bei einem Platinstreifen von 0,09 mm Breite etwa 3,2°, bei einem 0,6 mm breiten Eisenstreifen 15,7°.

Bei ganz geöffnetem Spalt, d. h. bei einer Auffangefläche von 40 qmm, war die Zeiß-Säule mit einem Flächenbolometer zu vergleichen.

Dieser Vergleich wurde ausgeführt mit einem Flächenbolometer nach Prof. Seddig, das mir von der Inspektion des Torpedowesens in Kiel zur Verfügung gestellt war. Das Instrument hat eine Auffangefläche von ca. 490 qmm, gebildet durch zwei hintereinanderliegende Streifensysteme. Jeder Streifen ist 2 mm breit, und zwar füllt der hinten liegende Streifen immer die Lücke zwischen zwei vorderen aus. Das Gehäuse ist evakuiert und durch eine Flußspatplatte von 25 mm Durchmesser abgeschlossen.

---

1) Rubens, „Über Dispersion ultraroter Strahlen", Wied. Ann. 45, 242, 1892.

Bei 20 Milliamp. Heizstrom erhielt ich 75°, und bei 30 Milliamp. 150° Ausschlag, wobei der Lichtzeiger aber seine Ruhelage schon sehr stark veränderte. Trotz der 10mal so großen Fläche gibt dies Bolometer also nur den doppelten Ausschlag wie die Zeiß-Säule. Eine ähnliche Empfindlichkeit weist das von Lummer und Kurlbaum[1]) beschriebene Flächenbolometer auf, bei welchem ebenfalls zwei Zweige mit insgesamt 768 qmm Fläche bestrahlt werden.

Zusammenfassend kann man sagen, daß die Zeißelemente bezüglich Empfindlichkeit, Trägheitslosigkeit und Haltbarkeit einen bedeutenden Fortschritt darstellen und daß die mit diesen Elementen ausgestattete Thermosäule den besten Linear- und Flächenbolometern gleichwertig ist. In Verbindung mit dem Parabolspiegel liefern die Elemente einen Strahlungsmesser höchster Empfindlichkeit und denkbar größter Einfachheit.

Die beschriebenen Apparate sind von der Firma C. Zeiß in Jena, Abtlg. Astro, zu beziehen.

1) Lummer u. Kurlbaum, Herstellung eines Flächenbolometers, Zeitschr. f. Instrumentenk. **12**, 81, 1892.

Hamburg, Physikal. Staatslaboratorium.

(Eingegangen 16. Dezember 1919.)

Bemerkungen bezüglich der Theorie des Glimmstroms.

Von Ragnar Holm.

In der letzten Zeit wurden verschiedene Beobachtungen veröffentlicht, die für die Theorie des Glimmstroms sehr wertvoll sind. Die betreffenden Forscher diskutieren zwar selber ihre Beobachtungen. Es dürfte aber angebracht sein das Material von einem etwas verschiedenen Standpunkt zu betrachten.

1. Zuerst erwähne ich die hochinteressanten Intensitätsmessungen an Glimmsaumspektren, die von Seeliger und Pommerrenig veröffentlicht worden sind[1]). Diese zeigen (unter anderem) wesentlich deutlicher als meine früheren Beobachtungen, daß die Balmerlinien des H_2 und die negativen Banden des N_2 beim Übergang vom Hittorfschen Dunkelraum zum negativen Glimmlicht einen sehr bzw. ziemlich sanften Intensitätsanstieg erfahren, während die Viellinien des H_2 und die positiven Banden des N_2 einen sehr schroffen Anstieg erfahren. Ich habe früher darauf hingewiesen, daß der schroffe Anstieg der letzten, der auch in den von mir hergestellten künstlichen Dunkelräumen auftritt[1]), nicht ohne neue Hypothesen erklärlich ist. Seeliger behauptet, neue Hypothesen seien nicht notwendig. Er sucht diese Behauptung mit Formeln[2]) zu stützen. Dabei führt er zweckmäßige Bezeichnungen ein. Ich werde jetzt zeigen, wie mein Beweis mit Seeligers Bezeichnungen genauer auseinandergesetzt aussieht und hoffe, daß wir dadurch zur Einigkeit gelangen.

1) R. Seeliger u. E. Pommerrenig, Ann. d. Phys. **59**, 589, 1919.

Bezeichnungen (hauptsächlich nach Seeliger):

V_0 = Potentialgradient in der Entfernung ξ von der Kathode;

V_1 = Anregungspotential eines Spektrums. Bei diesem Energiewert möge die Anregungsfunktion plötzlich von 0 zu f emporsteigen. Sie bleibt konstant $= f$ zwischen V_1 und $V_2 = V_1 + \triangle V$, bei welchem Energiewert sie plötzlich wieder $= 0$ wird. $\frac{\triangle V}{V_1}$ sei klein. Eine so beschaffene Anregungsfunktion ist nach der Seeligerschen Überlegung besonders geeignet einen schroffen Intensitätsanstieg im Glimmsaum zu veranlassen[3]);

$V' = \frac{V_1 + V_2}{2} = V_1 + \frac{1}{2}\triangle V$;

i = Ionisation nahe vor der Ebene ξ;

I = Intensität des betreffenden Spektrums in der Ebene ξ;

L = freie Weglänge eines Elektrons;

Es gilt laut Seeligers Gleichung 3 (Seite 629) innerhalb der Schicht ξ bis $\xi + \triangle\xi$:

$$I \sim \frac{i f \triangle V}{V_0 L} \cdot e^{-\frac{V'}{V_0 L}}, \text{ d. h.}$$

$$I \sim \frac{i}{V_0} \cdot e^{-\frac{V'}{V_0 L}}. \qquad (1)$$

Zu dieser Formel bemerken wir: Sie gilt zunächst für den Fall, daß der Gradient V_0 innerhalb des Integrationsgebietes der Seeligerschen Gleichung (2) konstant ist. Ist er das nicht, so hat man als V_0 ein gewisses Mittel zu gebrauchen, welches für eine so große Strecke $\triangle_1\xi$ zu berechnen ist, daß $V_0 \triangle_1 \xi$ mindestens gleich der Ionisierungsspannung wird.

Bei wachsender Entfernung von der Kathode wächst $\frac{i}{V_0}$, während $e^{-\frac{V'}{V_0 L}}$ abnimmt. I wächst

1) Vgl. R. Holm u. Thea Krüger, diese Zeitschr. **20**, 1, 1919.

2) R. Seeliger, Ann. d. Phys. **59**, 613, 1919.

3) Wenn diese Anregungsfunktion die Fähigkeit besäße, den unten erwähnten schroffen Intensitätsanstieg gewisser Spektren am Glimmsaum zu erklären, so wäre es offenbar leicht andere f-Funktionen anzugeben, welche einen allmählicheren Intensitätsanstieg ergeben.

also langsamer als $\frac{i}{V_0}$. Die letztgenannte Größe betrachten wir in einem Fall, wo der Übergang zum Glimmsaum sich innerhalb $\triangle\xi = \frac{L}{5}$ vollzieht. Auf dieser Strecke nimmt i höchstens um 15—20 Proz. zu[1]).

Gleichzeitig kann $\frac{1}{V_0}$ um noch weniger für Hundert zunehmen. Schon der örtliche Gradient ändert sich, nach Skinners Messungen zu beurteilen, innerhalb einer Strecke $\frac{L}{5}$ am Glimmsaum meistens um weniger[2]) als 20 Proz. Das Mittel V_0, das keine plötzliche Änderung erfahren kann, muß sich noch sicherer langsam ändern. Innerhalb der betreffenden Strecke kann aber[3]) die Intensität der Viellinien des H_2 und der positiven Banden des N_2 (um nicht von den Ozonbanden zu reden) um mehrere 100 Proz. zunehmen.

Also: Die nach (1) berechnete Größe I kann den Zuwachs der betreffenden Intensität nicht erklären. Man muß zu neuen Hypothesen greifen. Die Diskussion hat sich darum zu drehen, wie diese gestaltet werden müssen.

Zunächst kommen in Frage zwei Hypothesen, die ich selber geprüft habe. Einmal versuchte ich folgende Hypothese E: I solle proportional $\varphi(i)$ sein, wo $\varphi(i)$ schneller als i wächst. Die Ursache dazu sollte eine gegenseitige Beeinflussung der Spektrumsträger sein. Weil ich mir damals keine passende physikalische Vorstellung von dieser Beeinflussung machen konnte, habe ich diese erste Hypothese wieder verworfen[4]). Mein damaliger Haupteinwand gegen die Hypothese E war: Die bei einem Stoß emittierte Strahlung würde von so vielen umgebenden Molekülen absorbiert werden, daß die Beeinflussung eines einzelnen keine wesentliche Rolle spielen könne. Bekanntlich kann ein ganz ähnlicher „Einwand" gegen die Möglichkeit gewisser, jedoch mit Sicherheit beobachteter lichtelektrischer Effekte erhoben werden, d. h. der betreffende Einwand ist tatsächlich hinfällig — allerdings aus vorläufig unerklärten Gründen. Demnach ist es zulässig, jene Hypothese E nochmals zu probieren. Ich komme darauf zurück. Zunächst soll meine zweite Hypothese, ich nenne sie die Hypothese 5[5]), etwas diskutiert werden. Nach ihr wird das „Kleben" der Elektronen an Molekülen und damit zum größten Teil die Wiedervereinigung in genügend kräftigen Feldern verhindert. Gleichzeitig werden Spektren, die gerade bei der Wiedervereinigung emittiert werden, im entsprechenden Maß ausgelöscht.

Gegen diese Hypothese 5 macht Seeliger Einwände. Zuerst behauptet er, daß nach ihr die auslöschbaren Spektren in starken Feldern sich gar nicht zeigen dürften, das sie immerhin tun. Diesen Einwand habe ich durch eine sehr naheliegende Zusatzhypothese schon längst entkräftet[1]). Gefährlicher für meine Hypothese ist die Bemerkung Seeligers, Brose hätte Feldstärken von 3000 bis 5000 Volt/cm im normalen Glimmsaum gemessen[2]), während nach meiner Hypothese schon bei etwa 50 bis 100 Volt/cm das Kleben verhindert werden muß. Wenn dies wirklich ein Resultat der Broseschen Messungen ist, dann muß allerdings meine Hypothese 5 fallen gelassen werden, Ich bezweifle aber vorläufig, daß die von Brose gemessenen kräftigen Felder dort existiert haben, wo der Glimmsaum mittels Wiedervereinigungsspektren hervorgebracht wurde. Brose hat sich offenbar keine Mühe gegeben, die Lage des Saumes genau zu bestimmen, und er hat nicht untersucht, welche Spektren für ihn verantwortlich waren. Hier sind weitere Beobachtungen empfehlenswert.

Fest steht, daß der plötzliche Intensitätsanstieg des Viellinienspektrums des H_2, der positiven Banden des N_2 und der Ozonbanden in gewissen Glimmsäumen (wozu auch die Randflächen meiner künstlichen Dunkelräume gehören) nach der jetzigen Vorstellung des Erregungsvorganges (also mit Hilfe der Seeligerschen Anregungsfunktion) unerklärlich sind, wenn nicht eine neue Hypothese mit herangezogen wird. Hier liegt ein recht vielversprechendes Feld für Experimente vor. Meine Hypothesen E und 5 sind dabei sicherlich wertvolle heuristische Mittel. Leider habe ich aus äußeren Gründen vorläufig keine Aussicht mich selber mit dem Thema experimentell befassen zu können.

2. Gegen meine Ähnlichkeitsgesetze[3]) wendet sich Gehlhoff[4]). Die betreffenden Ähnlichkeitsbetrachtungen gelten exakt nur unter der Voraussetzung, daß die Abhängigkeit der Wiedervereinigung vom Felde eine untergeordnete Rolle spielt. Dies trifft zu in dem der Kathode nächst-

1) Vgl. meine Tabelle, diese Zeitschr. **19**, 554, 1918.
2) Vgl. z. B. Messungen von Skinner. Man beachte, daß es hier auf den im betreffenden Fall kleinst möglichen Zuwachs von $\frac{1}{V_0}$ ankommt.
3) Vgl. z. B. die genannten Messungen von Seeliger und Pommerrenig.
4) und 5) Vgl. R. Holm, diese Zeitschr. **15**, 245, 1914, Hypothese E und **16**, 22, 1915, Hypothese 5.

1) Vgl. R. Holm, diese Zeitschr. **16**, Anfang S. 23, 1915 und **19**, S. 555, rechts oben, 1918.
2) E. Brose, Ann. d. Phys. **58**, 731, 1919.
3) R. Holm, diese Zeitschr. **15**, 289, 1914.
4) G. Gehlhoff, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 349, 1919.

liegenden Gebiet, wo die Wiedervereinigung überhaupt sehr schwach ist. Deshalb sind meine Ähnlichkeitsbetrachtungen ohne weiteres in der Theorie des Kathodenfalles verwertbar[1]). In der positiven Säule spielt aber die Wiedervereinigung eine sehr wesentliche Rolle. In dem Maße, wie sie hier vom Felde abhängig ist, müssen sich Abweichungen von meinen Ähnlichkeitsgesetzen zeigen. Nur ist zu beachten, daß ich in vielen veröffentlichten Beobachtungen an der positiven Säule eine recht weitgehende Bestätigung der betreffenden Gesetze gefunden habe[2]). Dies deutet auf eine kleine Abhängigkeit der Wiedervereinigung vom Felde in der positiven Säule, während nach einer oben erwähnten Hypothese die Abhängigkeit groß sein sollte in solchen Feldstärken, die am Glimmsaum vorkommen.

Bei der Gültigkeit der Ähnlichkeitsgesetze und bei zur Stromrichtung senkrechten Äquipotentialflächen in einem weiten Rohr muß der Weglängegradient (Bezeichnung nach Gehlhoff) unabhängig vom Druck sein. Gehlhoff hat nun (vgl. seine Kurventafel S. 353) in einem 2 cm weiten Rohr eine sehr starke Abhängigkeit des Weglängegradienten vom Druck gefunden. Er glaubt, daß diese zum größten Teil als eine Abweichung von den Ähnlichkeitsgesetzen gedeutet werden muß, welche auf der Abhängigkeit der Wiedervereinigung vom Felde beruht. Durch Vergleich mit Messungen in H_2-Füllung bin ich zu der Ansicht gekommen, daß der Gehlhoffsche experimentelle Befund doch wahrscheinlich zwei andere Hauptursachen hat: Erstens muß der Weglängegradient zunehmen, wenn das Verhältnis $\frac{\text{Weglänge}}{\text{Rohrdurchmesser}}$ wächst[3]). Zweitens wächst das Kleben und die Wiedervereinigung bei abnehmendem Druck, wenn gleichzeitig der Prozentgehalt klebriger Verunreinigung zunimmt. Obwohl Gehlhoff mit sehr reinem N_2 gearbeitet hat, ist eine bei kleinen Drucken wirksame Verunreinigung nicht ganz ausgeschlossen, denn gerade N_2 ist gegen solche Verunreinigung äußerst empfindlich, fast wie ein Edelgas. Was nun das erste anbelangt, so muß ich Gehlhoff beistimmen, als er selber es beklagt, nicht mit verschiedenen Rohrweiten gearbeitet zu haben. Der einzige Weg, um hier zu einem sicheren Resultat zu gelangen, ist nämlich mit verschieden weiten, gleichzeitig angeschlossenen Röhren und bei verschiedenen Drucken zu arbeiten. Denn nur so bekommt man die Möglichkeit den Einfluß des Verhältnisses $\frac{\text{Weglänge}}{\text{Rohrdurchmesser}}$ zu eliminieren.

1) R. Holm, diese Zeitschr. 17, 402, 1916.
2) Vgl. R. Holm, diese Zeitschr. 15, 290 u. 291, 1914.
3) Vgl. R. Holm, Hypothese E', diese Zeitschr. 15, 783, 1914 und 19, 550, 1918.

Unzweideutige, wesentliche Abweichungen von den Ähnlichkeitsgesetzen kenne ich noch keine.

3. C. A. Skinner hat neulich Berechnungen über den Kathodenfall veröffentlicht, welche sich sehr gut an dazugehörige Beobachtungen anschließen[1]). Durch die auffallend gute Übereinstimmung werden zwei wichtige Skinnersche Resultate gekräftigt, nämlich erstens die Existenz des Kathodensprunges, zweitens der Befund, daß der Potentialgradient gar keine Sonderheit im Glimmsaum aufweist[2]). Der Kathodensprung deutet auf eine kräftige positive Raumladung in nächster Nähe der Kathode. Es sei nun darauf aufmerksam gemacht, daß von einem Kathodensprung bei Broses Messungen nichts zu merken ist. Seine Feldstärkeangaben verlangen sogar im Widerspruch zu Skinners Theorie eine negative Raumladung nahe vor der Kathode. Hier gehen also die Resultate diametral auseinander.

Wenn wir nun aber vorläufig annehmen, daß die Skinnerschen Beobachtungen in der Hauptsache richtig sind, so ist doch eine Schlußfolgerung, die er zieht, unrichtig. Er glaubt den Stromwert des von der Kathode ausgehenden primären Kathodenstrahles berechnen zu können, findet aber einen Wert, den ich etwa 1000 mal zu klein schätze. Ich habe geprüft, ob man nicht unter der Voraussetzung eines stärkeren primären Kathodenstrahles, so wie ich ihn vermute, und einer so beschaffenen Ionisation, wie ich früher angenommen habe[3]), ebensogute Übereinstimmung mit Skinners Beobachtungen wie durch seine Theorie erreichen könnte. Es gelang. Ich konnte meine berechneten Kurven sogar etwas besser an die Beobachtungen anpassen als Skinner seine. Weil meine Berechnungen außerdem unseren sonstigen Kenntnissen über die Ionisation[4]) besser gerecht werden, als es die Skinnerschen tun, halte ich sie für richtiger. Es möge hier genügen das Prinzip meiner Berechnungen anzudeuten.

Ich ging davon aus[5]), daß die Raumladungen nahe der Kathode fast ausschließlich von den positiven Ionen herrühren. Die leicht

1) C. A. Skinner, Phys. Rev. 12, 143, 1918.
2) Vgl. R. Holm, diese Zeitschr. 19, Schluß der S. 553, 1918.
3) Vgl. R. Holm, diese Zeitschr. 19, 554, 1918.
4) Es handelt sich hier um die interessanten Messungen von W. Kossel (Ann. d. Phys. 37, 407, 1912) und F. Meyer (Ann. d. Phys. 45, 1, 1914), die der Amerikaner Skinner nicht zu kennen scheint.
5) J. J. Thomson hat auf die betreffende Tatsache schon längst aufmerksam gemacht.

beweglichen Elektronen halten sich ja nur sehr kurze Zeit dort auf. Wie Skinner nahm ich an, daß der Strom der positiven Ionen am Orte des Gradientenminimums die Hälfte des ganzen Stromes ausmacht. (Dort dürften die meisten Elektronen „kleben" und negative Ionen bilden, so daß die gesamte Raumladung = 0 wird.) Sowohl der dortige Stromwert wie die Variation des Stromes der positiven Ionen von Schicht zu Schicht konnte berechnet werden mit Hilfe der Ionisationsformel[1]):

$$\frac{n}{4}(1{,}33)^m,$$

wenn n die Anzahl primärer Elektronen, L die mittlere freie Elektronenweglänge und

$$mL - \frac{L}{2}$$

die Entfernung von der Kathode bedeutet. Ich teilte das Gebiet zwischen der Kathode und dem Ort des Gradientenminimums in Schichten und rechnete für jede Schicht mit folgenden Formeln, die den Skinnerschen Formeln (4) und (5) entsprechen:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 = B\cdot(x - x_0) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2$$

$$V_0 - V = \frac{2}{3}\frac{1}{B}\int_{x_0}^{x}\left(B\cdot(x-x_0) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial x}\right)^2\right)^{3/2}$$

$$B = 7{,}2\cdot 10^{12}\cdot\pi\cdot\frac{j}{u}.$$

Hier bedeutet x den Abstand in Zentimetern vom Ort des Gradientenminimums gegen die Kathode gerechnet, V Potential in Volt, x_0 Anfang einer Schicht, V_0 dortiges Potential, j mittlere Stromstärke der positiven Ionen in der betreffenden Schicht, u die spezifische Geschwindigkeit der positiven Ionen.

Wie Skinner[2]) fand ich eine Abweichung der berechneten V-Werte von den beobachteten innerhalb des Gebietes des negativen Glimmlichtes. Diese Abweichung kann offenbar entfernt werden, wenn im betreffenden Gebiet auch von negativen Ionen (klebenden Elektronen) herrührende Raumladungen, welche die positiven neutralisieren, angenommen werden[3]).

Eine Überschlagsrechnung, bei der die negative Ionenbildung in solcher Ausdehnung berücksichtigt wurde, daß die erwähnte Diskrepanz zwischen Messungen und Berechnungen für das Innere des negativen Glimmlichtes in der Hauptsache verschwand, ergab folgende Stromwerte, j, des primären Kathodenstrahles:

bei einfacher; zweifacher; vierfacher } normaler Stromdichte,
$j_1 = 0{,}06\cdot j_0;\ 0{,}08\cdot 2j_0;\ 0{,}11\cdot 4j_0$

wo j_0 die zum normalen Kathodenfall gehörige Stromdichte an der Kathodenoberfläche bedeutet.

(Eingegangen 22. Dezember 1919.)

1) Siehe R. Holm, diese Zeitschr. 19, Tabelle S. 554, 1918.
2) Vgl. Skinner, l. c. S. 148, Fig. 2.
3) Dies in Übereinstimmung mit meiner Glimmsaumtheorie nach der Hypothese E'.

Die Gesamtstrahlung der Hefnerlampe.

Von Walther Gerlach.

Öfters wiederkehrende Anfragen veranlassen mich zur Veröffentlichung folgender Notiz:

Ich habe im Jahre 1913 nach der absoluten Thermosäulenmethode die Gesamtstrahlung der Hefnerlampe in absoluten Einheiten gemessen[1]). Die Hefnerlampe wurde in der vorgeschriebenen Art gebrannt. Zur guten Definition der Gesamtstrahlung erwies es sich als notwendig, in einem gewissen Abstand zwischen Flamme und Thermosäule ein Diaphragma aufzustellen; es wurde gewählt ein Diaphragma von $14\times 50\ mm^2$ in 10 cm Abstand. Alles Weitere ist aus der genannten Veröffentlichung zu ersehen.

Nicht mitgeteilt wurde seinerzeit der Einfluß der Zimmertemperatur, des Barometerstandes und der Luftfeuchtigkeit auf die absolute Strahlung, Faktoren, welche die Lichtstrahlung recht erheblich beeinflussen. Auf eine Anfrage von Herrn E. Warburg wurden daraufhin einige Kontrollmessungen vorgenommen. Der Barometerstand schwankte zwischen 718 und 738 mm, die Temperatur des Zimmers zwischen 10 und 20°, die absolute Feuchtigkeit zwischen 6 und 10 g/cbm. Bei Messung der Gesamtstrahlung wurde eine Abhängigkeit von diesen Faktoren nicht gefunden. Wenn sie überhaupt vorhanden ist, so liegt sie innerhalb der zu $\pm 1{,}5$ Proz. anzunehmenden Fehlergrenze. Dies ist also die Grenzgenauigkeit mit der z. B. die Eichung einer Thermosäule in absolutem Maße vermittels der Hefnerlampe möglich ist.

Die Unabhängigkeit — oder geringe Abhängigkeit — der Gesamtstrahlung von der Feuchtigkeit, dem nach Liebenthal wesentlichsten Faktor bei photometrischen Messungen mit der Hefnerlampe, ist physikalisch verständlich. Der Einfluß der Feuchtigkeit auf die Hefnerlampe besteht wohl in erster Linie in einer Erniedrigung der Flammentemperatur[2]). Strahlt die Hefnerlampe

1) W. Gerlach, diese Zeitschr. 14, 577—581, 1913.
2) E. Warburg, Berl. Ber. 1918, S. 309. 21./3. 1918.

wie ein schwarzer oder grauer Körper der absoluten Temperatur von rund 1800°, so ist die Änderung der Strahlung mit der Temperatur $\frac{dJ_\lambda}{dT}$ für λ 0,5 μ etwa dreimal größer als für die Strahlung im Emissionsmaximum ($\lambda_{max} = \frac{2900}{1800} = \sim 1{,}6\,\mu$), entsprechend also die Änderung der Lichtstrahlung größer als die der Gesamtstrahlung. Nach Liebenthal[1]) nimmt die Lichtstärke der Hefnerlampe um etwa 0,7 Proz pro + 1 mm abs. Feuchtigkeit ab. Für die Gesamtstrahlung wäre also pro 1 mm abs. Feuchtigkeitsänderung eine Änderung der Gesamtstrahlung von der Größenordnung 2 Promille zu erwarten; also bei den Schwankungen von 4 mm bei meinen Messungen noch kein Prozent, und selbst bei extremen Schwankungen der Luftfeuchtigkeit von ± 5 mm eine Änderung der Gesamtstrahlungsgröße von nur etwa ± 1 Proz. Diese Differenz wird meistens innerhalb der überhaupt erreichbaren Genauigkeit liegen. Auch die Absorption der Gesamtstrahlung im Wasserdampf und Kohlesäuregehalt[1]) der Luft wird bei Eichungen in verschiedenen Abständen nicht zu berücksichtigen sein, da durch die Verbrennung in der Flamme die nächste Umgebung der Flamme so viel Wasserdampf und Kohlensäure enthält, daß schon in ihr eine fast vollständige Absorption der betr. Spektralbereiche erfolgt ist. Auch liegen im Bereich des Maximums der Hefnerlampenstrahlung nur schwächere Wasserdampfabsorptionslinien.

Zusammenfassung: Weder die Gesamtstrahlung noch die Messung der Gesamtstrahlung der Hefnerlampe wird durch wechselnden Wasserdampf- und Kohlensäuregehalt der Luft in einem bei Eichungen zu beachtenden Umfang beeinflußt.

1) Liebenthal, Prakt. Photochemie s. auch Kohlrauschs Lehrb. d. prakt. Physik.

1) W. Gerlach, Ann. d. Phys. 50, 233—244, 1916.

Elberfeld, Physikalisches Laboratorium der Farbenfabriken, vorm. Fr. Bayer & Co., 1. Januar 1920.

(Eingegangen 14. Januar 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der „supraleitende Zustand" von Metallen.

Von C. A. Crommelin.

(Fortsetzung.)

Aus all diesen Untersuchungen kann man wohl mit großer Wahrscheinlichkeit vorhersagen, daß es noch andere Metalle gibt, die den supraleitenden Zustand zeigen. Die Untersuchung von den naturgemäß nicht ganz rein zu erhaltenden Metallen dürfte jedoch außergewöhnlich schwierig sein*).

Die Experimente an Zinn und Blei und noch mehr die an den übrigen Metallen und Legierungen tragen einen etwas vorläufigen Charakter und sind lange nicht so weit fortgesetzt und so gut abgerundet wie die an Quecksilber. Doch die Ergebnisse sind von hohem Wert, was vor allem daraus hervorgeht, daß man gelernt hat, durch spritzen unter hohem Druck von mäßig erhitztem Material durch eine feine Öffnung in eine stählerne Platte oder durch Abdrehen von einem Stück Metall auf der Drehbank äußerst dünne und leicht zerbrechliche, jedoch als Windungen für Spulen brauchbare Drähte herzustellen, eine Bearbeitung, die naturgemäß mit Quecksilber unmöglich war.

Ehe ich nun die interessanten Ergebnisse, die Kamerlingh Onnes an supraleitenden Drahtspulen fand, beschreibe, möchte ich einen von ihm projektierten, jedoch noch nicht verwirklichten Versuch mitteilen. Dieser betraf die Frage nach der Intensität des magnetischen Feldes in Spulen aus supraleitenden Drähten[22]).

Man verwendet in der Praxis fast immer Elektromagnete mit eisernen Kernen, um intensive Magnetfelder zu erhalten. Dieses hat einen großen Vorteil, da man durch die Magnetisierung von Eisenkernen bei einer bestimmten Anzahl Ampèrewindungen weit größere Feldstärken erhält, als ohne solche; doch die Sättigung des Eisens setzt den Intensitäten eine Grenze, was jedoch nicht sehr wichtig ist, denn bei den scharfsinnigsten Methoden der Abkühlung von Drahtspulen (z. B. bei der Weißschen Methode) ist die Stromstärke infolge der Wärmeentwicklung nie so weit zu treiben, daß der Sättigungszustand ganz erreicht wurde.

Theoretisch ist es jedoch möglich, eine unbegrenzt große Feldstärke zu erhalten, wenn man nur eine genügende Anzahl Ampèrewindungen ohne Kerne um die Stelle wickelt,

*) Die neuesten Untersuchungen (noch nicht publiziert) haben ergeben, daß auch Thallium supraleitend wird, und daß der Sprungpunkt bei ungefähr 2°,3 K liegt.

in der man das Feld hervorrufen will. Der Gedanke, um auf diese Weise ein Feld von 100 000 Gauß mittels Drahtspulen gekühlt mit flüssiger Luft zu verwirklichen, rührt von Perrin. Bei der Ausführung eines solchen Planes läuft es darauf hinaus, die Spulen abzukühlen, muß doch die Wärme ebenso schnell abgeführt werden, als sie entsteht. Fabry, der den Gedanken von Perrin einer Untersuchung und Berechnung unterworfen hat, kommt zu dem Resultat, daß für ein Feld von 100 000 Gauß in einer Spule von *Cu*-Draht, die mit flüssiger Luft gekühlt wird, mit einer Durchbohrung von 1 cm Durchmesser, 100 KW an elektrischer Energie pro Sekunde erforderlich sein sollte. Diese 100 KW sollte eine leistungsfähige Dynamomaschine ohne Mühe oder große Kosten liefern können. Ganz anders steht es um die Frage, wieviel flüssige Luft nötig ist, um die 25 Kilogramm Kalorien, die pro Sekunde entstehen, wegzuführen. Die Menge sollte nicht weniger als 1500 Liter pro Stunde betragen. Zieht man in Betracht, daß man zur Bereitung von 1 Liter pro Stunde $^1/_2$ KW nötig hat, so kommt man zu dem Resultat, daß man siebenmal soviel Energie zur Ableitung der Wärme nötig hat wie zur Stromerzeugung. Die größte Schwierigkeit aber sollte nun darin liegen, wie eine Spule die gewaltige Menge Joule-Wärme an das flüssige Gas abgibt; aus konstruktivem Gesichtspunkt kann man dies für unmöglich halten. Und die Kosten für die Herstellung einer so komplizierten Einrichtung sollten nach Fabry ungefähr ebenso hoch sein wie die zu dem Bau eines Kriegsschiffes.

Kühlen mit flüssigem Wasserstoff bringt uns nicht weiter. Ist auch die erforderliche Anzahl Liter pro Stunde geringer, nämlich 700, so benötigt 1 Liter flüssiger Wasserstoff $1\,^1/_2$ KW, so daß man zuguterletzt noch mehr Energie nötig hat als im Falle flüssiger Luft. Ebenso wenig sollte man beim Kühlen mit flüssigem *He* weiter kommen, solange der Draht nicht supraleitend werden sollte.

Indessen tritt das Problem in eine ganz neue Phase ein, wenn man eine supraleitende Spule gebrauchte. Man würde solch eine Spule mit einer sehr großen Anzahl Ampèrewindungen von dünnem Draht und also in einem kleinen Raum herstellen können, ohne daß Joule-Wärme entwickelt werden könnte. Denn durch einen Draht von supraleitendem Quecksilber kann man einen Strom von 1200 Ampère pro mm², durch einen Draht von supraleitendem Zinn und einem solchen von 560 Ampère pro mm² senden, ohne daß der Draht seinen supraleitenden Charakter verliert.

Man hat nur dafür zu sorgen, daß keine Wärme durch Strahlung oder Leitung den Draht erreicht und daß die Stromstärke unter dem Schwellenwerte bleibt.

Eigenartig ist die Erwägung, daß man eine solche Spule ruhig auf ein nicht supraleitendes Metall wickeln kann, das dann wie ein Isolator wirkt. Man braucht kein Bedenken der Aufgabe gegenüber zu hegen, mit einer supraleitenden Spule von 30 cm Durchmesser ein Feld von 100 000 Gauß zu verwirklichen, was eine Erweiterung der Leidener Heliumeinrichtung mit verhältnismäßig geringen Kosten lösen würde.

Es ist eine seit langem bekannte Erscheinung, daß der Widerstand von einigen Metallen zunimmt, wenn man sie in ein magnetisches Feld bringt. In diesem Zusammenhange drängt sich die Frage auf, ob vielleicht ein Supraleiter unter dem Einfluß von einem magnetischen Feld normal leitend würde. Um diese Frage wenigstens vorläufig zu beantworten, machte Kamerlingh Onnes einige Versuche mit Supraleitern im Magnetfelde[17]). Spulen von äußerst dünnem Blei- und Zinndraht wurden untersucht, wenn man die Windungsfläche parallel den Kraftlinien stellte, so daß ein longitudinaler und transversaler Effekt miteinander kombiniert wurden. Bei beiden Metallen trat plötzlich ein Widerstand auf und es verlor der Draht seinen supraleitenden Charakter, wenn das Feld eine bestimmte Intensität, die für verschiedene Temperaturen nicht ganz dieselbe war, erreicht hatte. Das Anlegen des Feldes hatte also dieselbe Wirkung wie Erwärmung und man kann auch hier von einem Schwellenwert des Feldes sprechen. Die Ergebnisse der Experimente sind in den folgenden Figuren wiedergegeben*). (Fig. 8 und 9.)

Bei Blei ist der Schwellenwert + 600 Gauß, bei Zinn viel tiefer. Von Blei wurde noch der transversale und longitudinale Effekt gesondert untersucht, wobei sich zeigte, daß die Schwellenwerte für beide Effekte dieselben waren, doch daß bei stärkeren Feldern der transversale Effekt viel intensiver war als der longitudinale**).

Wir kommen nun zu der Beschreibung eines sehr merkwürdigen Experimentes, das Kamer-

*) Fig. 8 stellt den kombinierten Effekt bei Zinn, Fig. 9 den longitudinalen und transversalen Effekt an Blei dar.

**) Prof. Kamerlingh Onnes machte mich darauf aufmerksam, daß ich in bezug auf die Verwirklichung von sehr starken Magnetfeldern mittels supraleitender Drahtspulen eine veraltete Auffassung wiedergegeben habe. Der Widerstand, der durch das eigene magnetische Feld der Spule im Draht erzeugt wird, wird dieser Verwirklichung große Schwierigkeiten bereiten oder vielleicht ganz unmöglich machen. Siehe: Suppl. Nr. 35 (Nobelvortr. 1913, S. 32 Fußnote).

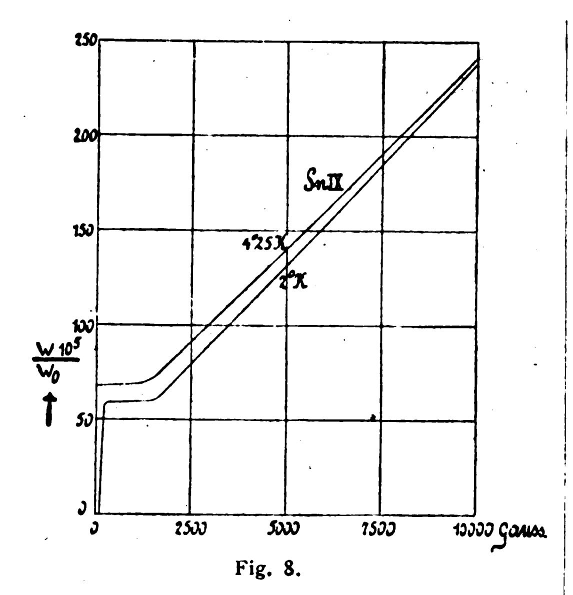


Fig. 8.

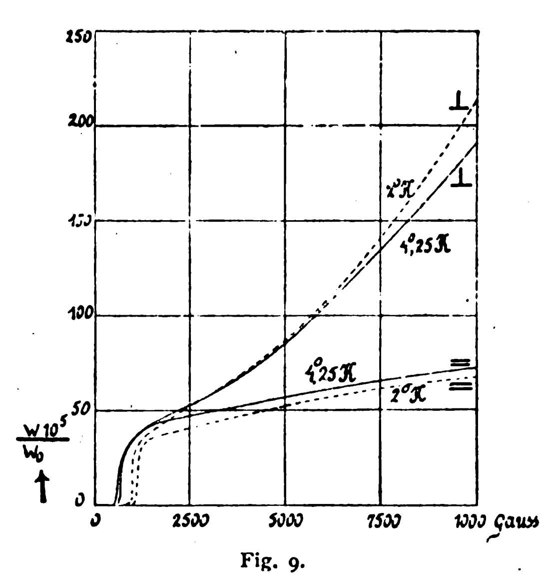


Fig. 9.

lingh Onnes machte, um die Beharrlichkeit eines Stromes in einem Supraleiter zu demonstrieren, ein Experiment, welches zwar keine neue Erscheinung gab, indessen aber so überraschend war, daß man vor kurzer Zeit sicher nicht an die Möglichkeit eines solchen Versuches gedacht hätte[18]) [19]).

Kamerlingh Onnes folgte beim Überlegen des Experimentes folgendem Gedanken: Wenn man in einer in sich geschlossenen supraleitenden Spule einen Strom erzeugt, so wird es möglich sein, daß dieser lange Zeit in ihr fließt. Denn die Relaxationszeit τ, in der die Stromstärke auf den e^{ten} Teil ihres ursprünglichen Wertes abgenommen hat, ist bekanntlich $\frac{L}{r}$, wobei L den Selbstinduktionskoeffizienten, r den Widerstand bedeutet.

Bei normal leitenden Metallen ist diese Zeit τ so klein, daß man sie experimentell fast nie wahrnehmen kann. Bei der Bleispule z. B., welche für die Experimente in flüssigem *He* gebraucht wurde, gelten die folgenden Konstanten: 1000 Windungen von $\frac{1}{70}$ mm² Querschnitt auf ein Messingrohr gewunden, das 8 cm im Querschnitt und 1,1 cm lang war, in Schichten zusammen 1,1 cm dick, besitzen bei Zimmertemperatur einen Widerstand von 734 Ω und eine Selbstinduktion von 10 Milli-Henry, daher ist die Relaxationszeit $^1/_{70000}$ Sekunde. Der mikroresiduelle Widerstand war nach Schätzung bei 1,8° K mehr als $2{,}10^{10}$ mal so klein wie bei Zimmertemperatur und die Relaxationszeit mochte also bei 1,8° K wenigstens von der Größenordnung eines Tages sein.

Das Experiment wurde nun folgendermaßen eingerichtet: Die Spule wurde in den Kryostaten gebracht und letzterer zwischen die Pole eines sehr großen Elektromagneten von Weiß, mit der Windungsfläche senkrecht zu den Kraftlinien, sodaß die Windungen ein Bündel Kraftlinien umschlossen (siehe Fig. 10). Es wurde nun ein Magnetfeld von 400 Gauß erregt und die Spule in den supraleitenden Zustand gebracht. Das Feld wurde in 10 Sekunden etwa auf

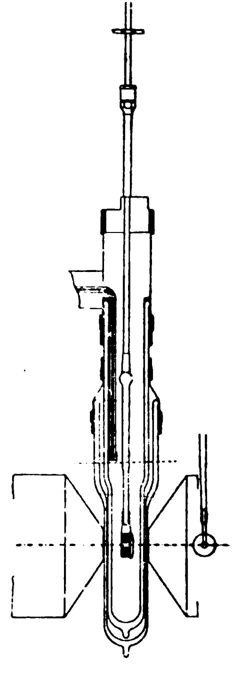


Fig. 10.

200 Gauß reduziert und darauf der Magnet in ungefähr 3 Sekunden entfernt. Die Anzahl Kraftlinien, die die Spule umfaßte, wurde somit in kurzer Zeit auf Null reduziert, wodurch in dem Draht ein Induktionsstrom erzeugt wurde. Die elektromagnetische Wirkung dieses Stromes konnte mit einer Magnetnadel wahrgenommen werden, die in kurzem Abstand von dem Kryostaten aufgestellt war. Das Erdmagnetfeld wurde mittels eines geschickt aufgestellten Stahlmagneten kompensiert. Es zeigte sich nun, daß der induzierte Strom wirklich lange Zeit floß. Genau konnte die Stromstärke in dieser Weise natürlich nicht bestimmt werden, jedoch zeigte eine einfache Überlegung, daß die Stromstärke ungefähr 0,6 Ampère betrug, somit noch unter dem Schwellenwerte 0,8 Ampère war; auch das magnetische Feld blieb unterhalb des Schwellenwertes, da sonst der Draht normal leitend geworden wäre und der Strom in kurzer Zeit verschwunden wäre.

Es versteht sich von selbst, daß man sich, wenn man zum ersten Male eine so überraschende Erscheinung vor Augen hat, eines Zweifels nicht erwehren kann, und daher das Bedürfnis empfinden wird, durch allerhand Kontrollmessungen die Rechtfertigung der Schlüsse zu bestätigen. Die Experimente sind dann auch in der verschiedensten Weise wiederholt und verifiziert. Stellte man die Spule mit ihrer Windungsfläche parallel den Kraftlinien, so verschwand der Effekt oder war nur sehr gering infolge unvollkommener Orientierung. Überschritt man den Schwellenwert der Stromstärke oder des magnetischen Feldes, so verschwand der Effekt; ebenfalls, wenn man die Spule aus dem flüssigen Helium und also in eine Temperatur oberhalb des Temperatursprunges brachte. Die Strommessung mittels der Magnetnadel wurde erheblich verbessert, so daß man auf 2 Proz. genau beobachten konnte. Diese späteren und verbesserten Versuche ergaben, daß die Stromstärke pro Stunde um weniger als 1 Proz. abnahm, woraus folgte, daß die Relaxationszeit mehr als 4 Tage betragen mußte.

Nimmt man an, daß der mikroresiduelle Widerstand dem Gesetz von Ohm gehorcht, was durchaus nicht sicher ist, so findet man für Blei, daß dieser Widerstand 0,3 bis 0,2 10^{10}mal so klein ist, wie der bei gewöhnlicher Temperatur. Man könnte noch an die Möglichlichkeit magnetischer Eigenschaften der Messingmontur denken. Denn von den magnetischen Eigenschaften der Messingmontur bei Heliumtemperatur war gar nichts bekannt, daher war die Möglichkeit, daß ein Teil des elektromagnetischen Feldes außerhalb des Kryostaten von der Montur herrührte, a priori nicht ausgeschlossen. Zur Beantwortung dieser Frage wurde ein Messingrohr von vollkommen denselben Dimensionen wie die der Montur in den Kryostaten gebracht und dem Einfluß eines magnetischen Feldes unterworfen. Es zeigte indessen keine merkliche Magnetisierung. Die wahrgenommene Erscheinung war somit zweifellos dem Bleidraht zu verdanken.

Obwohl alle diese Experimente, die quantitativ in guter Übereinstimmung mit der Berechnung standen, kaum Zweifel an der Richtigkeit der Interpretation zurückließen, überlegte Kamerlingh Onnes folgenden geistvollen Versuch, der dann jeden Zweifel ausschließen sollte. Die beiden Enden des Bleidrahtes wurden so aneinandergeschweißt, daß der Draht an dieser Stelle durch einen Haken, einem langen dünnen Stabe, der aus dem Kryostat herausragte, entzweigerissen werden konnte. Bei A und B (Fig. 11) waren zwei Drähte befestigt, die mit einem ballistischen Galvanometer verbunden waren. Es wurde nun ein Induktionsstrom in der Spule erzeugt und der Draht entzweigerissen. Der Strom mußte nun durch das Galvanometer fließen und verursachte da einen ballistischen Ausschlag; denn in demselben Augenblick, wo der Ausschlag zustande kam, wurde der Strom ausgelöscht, weil nun ein gewöhnlicher Widerstand in den Stromkreis mit eingeschaltet war. Aus dem Ausschlag ergab sich ein Strom von + 0,3 Ampère, der durch den Bleidraht geflossen war. Dieser Versuch behob jeden Zweifel an der richtigen Interpretation des außerhalb des Kryostaten wahrgenommenen elektromagnetischen Feldes.

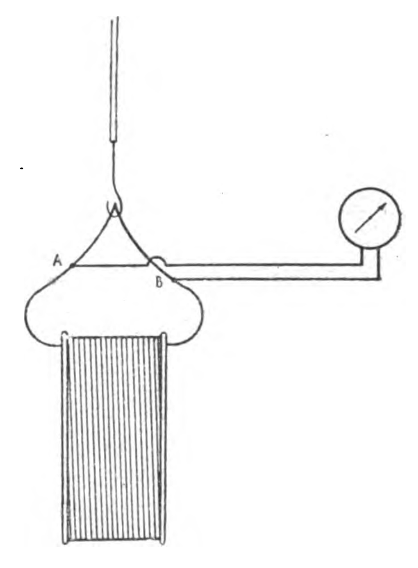


Fig. 11.

Ich möchte die Betrachtungen über diese Versuche nicht abschließen, ohne wenigstens ein paar Worte über die Beschreibung eines supraleitenden Schalters und eines damit im Zusammenhange stehenden Experimentes gesagt zu haben.

Kamerlingh Onnes konstruierte einem Gedanken von Prof. Kuenen folgend einen Stromschlüssel in der Absicht, zu untersuchen, ob ein Kontakt in einem supraleitenden Stromkreis ohne Widerstand sein könnte. In Erwägung, daß der Übergangswiderstand eines gut erhaltenen Kontaktes, wie er in Widerstandskästen vorkommt, bei gewöhnlicher Temperatur von der Größenordnung von 0,0001 Ohm oder 100000 C. G. S. ist, während die ganze Bleispule in supraleitendem Zustand einen Widerstand von etwa 37 C. G. S. Einheiten besitzt, schien die Möglichkeit eines supraleitenden Kontaktes ziemlich unwahrscheinlich zu sein. Um diese Frage zu lösen, wurde ein Stromschlüssel konstruiert und es zeigte sich bald, daß der supraleitende Kontakt ohne viel Mühe zu realisieren war. Die zwei Stücke Blei wurden mit mäßigem Druck aneinander gedrückt und gaben einen so vollkommenen Kontakt, daß von einem Übergangswiderstand nichts zu merken war und die Erscheinungen sich vollkommen so verhielten, als wären die Drähte aneinandergeschweißt. Mit Hilfe dieses originellen Stromschlüssels konnte nun der Versuch mit dem ballistischen Galvanometer in einer aus konstruktivem Gesichtspunkt vollkommener Weise wiederholt werden. Die Beschreibung dieser Versuche möchten wir jedoch unterlassen.

Erwähnen möchte ich noch einen geistvollen Gedanken von Prof. Ehrenfest, nämlich eine große Anzahl von Windungen nicht in Serie, sondern parallel zu schalten, was man dadurch verwirklichen kann, daß man einen dicken Bleiring verwendet. Der hierin induzierte Induktionsstrom müßte naturgemäß sehr intensiv werden können. Es war dies auch der Fall. Ein Strom von 320 Ampère von einer Dichte von $\frac{30 \text{ Ampère}}{\text{mm}^2}$ wurde wahrgenommen, und er blieb $^1/_2$ Stunde lang bis auf weniger als 1 Proz. konstant. Bei der Spule war die Stromdichte 49 Ampère.

Diese Induktionsströme in supraleitenden Metallen nennt Kamerlingh Onnes Nachahmungen von Ampèreströmen.

Ampère, der berühmte französische Physiker aus dem Beginn des vorigen Jahrhunderts hatte infolge seiner und Örstedts Entdeckungen die Hypothese aufgestellt, daß das Feld in der Nähe eines magnetisierten Körpers in einer großen Anzahl kleiner Kreisströme seinen Ursprung hatte, die ohne Dämpfung in oder um die Moleküle herumfließen; das Magnetisieren bestand in nichts anderem als den Parallelstellen dieser Molekularströme. Diese Hypothese machte es möglich, die Eigenschaften paramagnetischer und ferromagnetischer Körper auf die Wirkung elektrischer Ströme zurückzuführen. Die Elektronentheorie hat im Prinzip an dieser Auffassung festgehalten, allein faßte sie die Molekularströme als kreisende Elektronen auf. Schon zur Zeit Ampères machten sich Bedenken gegen diese Vorstellung geltend, da man sonst kein Beispiel ungedämpft kreisender Ströme kannte. Um so merkwürdiger mag es nun scheinen, daß die Hypothese der Molekularströme von Ampère jetzt an gewöhnlichen Metalldrähten nachgeahmt werden konnte. In Zusammenhang hiermit verdient folgendes kurz Erwähnung: 1915 gelang es Einstein und W. J. de Haas durch eine äußerst sinnvolle Einrichtung an permanenten Magneten zu zeigen, daß die Molekularströme oder kreisende Elektronen wirklich bestehen, womit also die alte Theorie von Ampère wieder zu Ehren gebracht ist.

(Schluß folgt.)

Tagesereignisse.

Der **Normungsausschuß des Vereins deutscher Firmen für Laboratoriums-Apparate** (Schriftführer Johannes Dathe, Hamburg, Burggarten 2) veröffentlicht einen ersten Bericht, welcher Vorschläge zur Normierung von Stativen enthält.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Wien Dr. Hermann Rothe zum ord. Professor der Mathematik ebenda, Professor Otto Mente zum planmäßigen Abteilungsvorsteher am photochemischen Institut der Technischen Hochschule Berlin.

Berufen: Der ord. Professor an der Deutschen Universität Prag Dr. Gerhard Kowalewski in gleicher Eigenschaft an die Technische Hochschule Dresden, der a. o. Professor an der Universität Freiburg Dr. Ernst Riesenfeld zum Abteilungsvorsteher an das physikalisch-chemische Institut der Universität Berlin.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Physik an der Universität Wien (jetzt in Jena) Dr. Erwin Schrödinger sowie den Privatdozenten an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Andreas v. Antropoff (Chemie) und Dr. Alfred Reis (physikalische Chemie und Elektrochemie) der Titel Professor.

Gestorben: Der frühere Herausgeber des Journal of the Society of Chemical Industry Watson Smith in London, der frühere Generaldirektor der Farbenfabriken vorm. Bayer & Co. in Elberfeld-Leverkusen Geh. Regierungsrat Dr. Henry T. v. Boettinger in Arensdorf (Neumark), der ord. Professor an der Universität Bologna Senatore del regno Augusto Righi, der ord. Professor der Physik und Direktor der Sternwarte der Universität Marburg Dr. Franz Richarz.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 12. 15. Juni 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 14 am 25. Juni 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Oszillographische Untersuchung von Mikrophonen für Unterwasserschallempfänger.

(Mitteilung aus dem Laboratorium der Torpedo- und Minen-Inspektion, Kiel.)

Von Paul Ludewig.

Mit Tafel II.

1. Problemstellung. Ein Unterwasserschallempfänger einfachster Form besteht aus einem festen Metallgehäuse, auf das eine Membran durch einen Ring aufgeschraubt ist. Auf der Membran sitzt in der Mitte ein Schüttelmikrophon. Treffen von außen auf den im Wasser hängenden Empfänger akustische Wellen, so gerät die Kapselmembran in Schwingungen und überträgt sie auf das Mikrophon. Das Mikrophon ist in gewöhnlicher Schaltung über einen Telephon-Transformator mit einem Telephon verbunden.

Das im Telephon abgehörte Geräusch wird bei dieser Anordnung durch die im Empfänger auftretende Eigenschwingungen stark beeinflußt. Bestehen die von außen kommenden akustischen Wellen aus einem Ton einer bestimmten Frequenz („Signalempfang"), so wird man die Eigenschwingungen des Empfängers mit dieser Frequenz in Resonanz bringen; dem steht der „Geräuschempfang" (Abhören von Schraubengeräuschen usw.) gegenüber, bei dem in den akustischen Wellen eine große Anzahl von Frequenzen enthalten sind.

Die im folgenden mitgeteilten Versuche, die im Jahre 1917 im Laboratorium der Torpedo-Inspektion, Kiel, ausgeführt worden sind, hatten den Zweck, die im Mikrophon auftretenden Eigenschwingungen experimentell zu studieren, um so für das ganze Problem der Schwingungserscheinungen im Empfänger sichere Unterlagen zu gewinnen.

2. VKU- und Simon-Mikrophon. Beim Beginn der Versuche standen zwei Mikrophone zur Verfügung.

Das sogenannte VKU-Mikrophon. (Fig. 1.) Das Mikrophon besteht aus dem Gehäuse A und der Membran B, die vom Gehäuse durch Glimmerringe isoliert ist. Am Gehäuse und an der Membran befinden sich die beiden einander gegenüberstehenden Elektroden a und b, zwischen denen die Kohlekörner liegen. An der Membran ist der Stift C befestigt, der ein Gewinde trägt und durch Mutter und Gegenmutter an der Kapselmembran befestigt wird.

Das sogenannte Simon-Mikrophon.

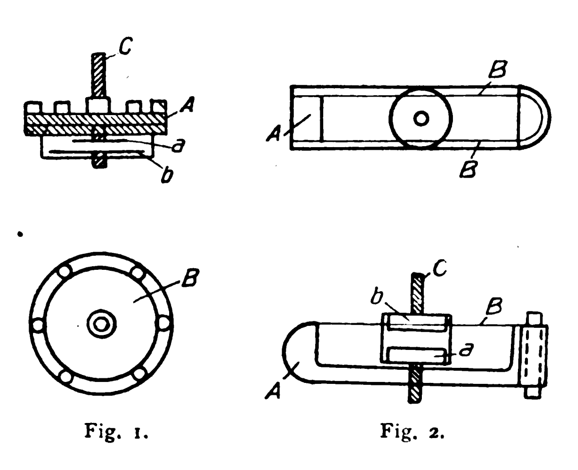


Fig. 1. Fig. 2.

(Fig. 2.) Dieses Mikrophon, das von Herrn Geheimrat H. Th. Simon, Göttingen, angegeben worden ist, besteht aus dem festen Aluminiumkörper A, auf dem die Elektrode a befestigt ist. Über dem Aluminiumträger sind 2 dünne Drähte BB gespannt, die die zweite Elektrode b tragen, Der Raum zwischen den Elektroden ist z. T. mit feinem Kohlepulver gefüllt und durch dünne Gaze abgeschlossen. Das Mikrophon wird mit dem Stift C durch Mutter und Gegenmutter an der Kapselmembran befestigt.

Beide Mikrophone stellen demnach mechanische Schwingungsgebilde dar; bei dem VKU-

Mikrophon ist das elastische Element die Mikrophonmembran, beim Simon-Mikrophon das Stahldrahtsystem.

3. Stoßerregung. Um die Schwingungserscheinungen der Mikrophone zu studieren, wurden die Mikrophone durch einen leichten Stoß in Eigenschwingungen versetzt. Der dann einsetzende Verlauf des Mikrophonstromes wurde mit einem Oszillographen registriert. Es ist unzweifelhaft, daß bei dieser mechanischen Stoßerregung eine vielmals stärkere Erschütterung des Mikrophons eintritt als bei den Erregungen, die beim praktischen Empfang von Geräuschen vorkommen. Wahrscheinlich werden beim Stoß die Kohleteilchen durch die Erschütterung sich anfangs gewaltsam umlagern und dann werden erst die feineren elastischen Wirkungen zur Geltung kommen. Es ist daher möglich, daß nicht alle Ergebnisse dieser Untersuchung auf den praktischen Betrieb mit seinen vielmals feineren Erregungen ohne weiteres zu übertragen sind. Aber es ist dennoch unzweifelhaft, daß die Methode der Stoßerregung in vieler Beziehung über die Schwingungserscheinungen der Mikrophone Aufschluß geben kann.

Für die Versuche ist es nötig, die Mikrophone so zu befestigen, wie sie im praktischen Betrieb befestigt sind, und es ist zugleich nötig, Schwingungen, die etwa durch die Haltevorrichtung verursacht werden, zu vermeiden. Es ist daher nicht angängig, das Mikrophon etwa in einer Zange zu halten und die Stoßerregung dadurch auszuführen, daß gegen die Zange ein leichter Schlag geführt wird. Die Zange führt sonst in sich Transversalschwingungen aus, die sich auf das Mikrophon übertragen und die Schwingungen des Mikrophons überdecken. Oszillogramm Nr. 118 — alle abgebildeten Oszillogramme sind nur kleine Ausschnitte aus längeren Oszillographenbändern — zeigt einen solchen komplizierten Schwingungsverlauf, wenn das Mikrophon mit einer dicken Flachzange, Oszillogramm Nr. 126 den Verlauf, wenn dasselbe Mikrophon mit einer kleinen, dünnen Flachzange gehalten wurde[1]). Es ist ferner nötig, als Verbindungsdraht für den beweglichen Teil des Mikrophons einen Draht zu nehmen, der so dünn ist, daß nicht etwa durch seine Steifigkeit parasitäre Schwingungen erzeugt werden.

Eine Anordnung, bei welcher störende Eigenschwingungen der Einspannvorrichtung vermieden werden, wurde in folgender Weise hergestellt: Ein Bleiklotz A (Fig. 3) von 6 cm Länge,

1) Die Richtung, in der der Strom die Oszillographenschleife durchfloß, ist in den beiden Oszillographen verschieden.

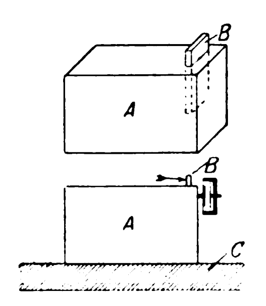


Fig. 3.

2 cm Breite und 4 cm Höhe wurde auf eine dicke Filzunterlage C aufgesetzt. In dem Bleiklotz A ist eine Messingplatte B stramm eingesetzt, und das Mikrophon ist vor der Messingplatte im Klotz genau so befestigt, wie in der Empfängerkapsel an der Kapselmembran. Wird gegen die Messingplatte in Richtung des Pfeiles ein leichter Schlag[1]) geführt, so überträgt sich diese Erschütterung durch den Bleiklotz auf das Mikrophon. Der Bleiklotz in sich ist nicht schwingungsfähig. Auch die Messingplatte B ist in ihren Eigenschwingungen durch den Bleiklotz so gedämpft, daß durch sie keine Störung eintritt. Ersetzt man nämlich die Platte durch einen dünnen, stramm eingepaßten Messingstift, so hat man genau den gleichen Schwingungsverlauf wie bei Benutzung der Messingplatte.

4. Schaltung. Bei den Versuchen wurde folgende Schaltung (Fig. 4) verwendet.

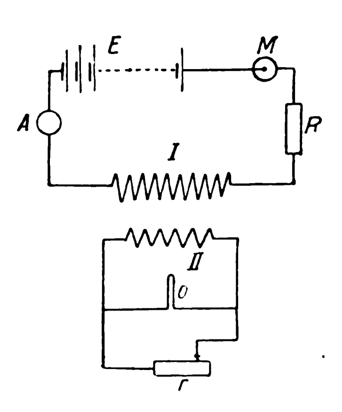


Fig. 4.

Eine Batterie E ist mit dem Mikrophon M, einem Vorschaltwiderstand R, einem Milliampèremeter A und der Wicklung I eines Telephontransformators verbunden. Die Enden der Wicklung II führen zur Oszillographenschleife

1) Die Stoßerregung wurde ausgeführt, indem mit einem dünnen Holzklöppel (kleiner Schraubenzieher mit Holzgriff) lose gegen die Messingplatte bzw. den Messingstift geklopft wurde.

o, zu der parallel der Regulierwiderstand *r* geschaltet ist. Der Widerstand *r* dient dazu, den Ausschlag des Oszillographen auf einen geeigneten Wert zu bringen. Der Transformator war ein Telephontransformator der Signalgesellschaft Kiel. Seine Wicklung I hatte 2925, die Wicklung II 555 Windungen. Für den Betrieb des Oszillographen findet also eine Transformation auf stärkeren Strom statt. Der Ausschlag am Milliampèremeter *A* betrug durchschnittlich 30 Milliampère.

Für die ersten Versuche stand zunächst ein Oszillograph Duddellscher Bauart zur Verfügung. Mit unterbrochenem Gleichstrom wurde geprüft, ob die Dämpfungsverhältnisse des Oszillographen in Ordnung waren. Oszillogramm 105 zeigt, daß dies der Fall war.

5. Oszillographische Untersuchung der VKU- und Simon-Mikrophone. Mit der beschriebenen Versuchsanordnung wurde eine Anzahl VKU- und Simon-Mikrophone unter verschiedenen Bedingungen untersucht.

a) Änderung der Stromstärke. Mit einem beliebig gewählten VKU-Mikrophon wurden Oszillogramme bei Änderung der Stromstärke von 4—40 Milliampère aufgenommen und mit dem Parallelwiderstand *r* die Empfindlichkeit des Oszillographen so geändert, daß der erste Ausschlag immer etwa dieselbe Größe besaß. Es wurden 6 Aufnahmen bei Stromstärken zwischen 5 und 50 Milliampère gemacht; die Kurven sind genau gleich. Oszillogramme 185 und 188 zeigen die Kurven bei 10 und 40 Milliampère. Die Stromstärke hat demnach keinen Einfluß auf den Schwingungsverlauf.

b) Einfluß der Klopfstärke. Wie oben erwähnt, ist es sehr wahrscheinlich, daß die Stärke der mechanischen Stoßerregung auf den Schwingungsverlauf von Einfluß ist. Die Oszillogramme 193—196 zeigen den Schwingungsverlauf bei verschiedener Klopfstärke bei demselben VKU-Mikrophon, und zwar wurde der in den Bleiklotz eingelassene Messingstift

bei Oszillogramm 193 eben berührt,
„ „ 194 lose geklopft,
„ „ 195 mittelstark geklopft,
„ „ 196 stark geklopft.

Die Empfindlichkeit des Oszillographen wurde jedesmal so geändert, daß stets etwa die gleiche Größe des Ausschlags entstand. Der Kurvenverlauf ist in diesen Oszillogrammen sehr verschieden. Bei der losen Berührung ist die Schwingung relativ sauber und es herrscht nur eine einzige Frequenz vor. Je stärker der Schlag geführt wird, desto komplizierter wird der Schwingungsverlauf, indem sich besonders im Anfang über die Grundschwingung Oberschwingungen überlagern.

Oszillogramme 197 und 200 sind Aufnahmen, die mit einem Simon-Mikrophon gemacht wurden; bei 197 ist der Stift lose berührt, bei 200 stark geschlagen.

c) Einfluß der Stellung des Simon-Mikrophons. Es beruht auf der unsymmetrischen Form des Simon-Mikrophons, daß die Stellung des Mikrophons von Einfluß auf den Schwingungsverlauf ist. Befestigt man das Simon-Mikrophon in der durch Fig. 5a dargestellten Art, so ist der Schwingungsverlauf

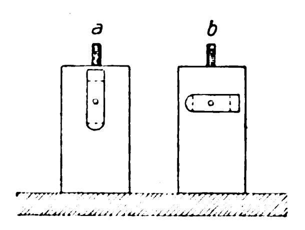


Fig. 5a u. b.

anders, als wenn es nach Fig. 5b wagrecht steht. Bei Oszillogramm 204 stand das Mikrophon senkrecht, bei Oszillogramm 207 wagrecht. In letzterem Falle tritt ein ziemlich langsamer und darüber gelagert ein sehr schneller Schwingungsverlauf auf, in ersterem Falle ist eine einzige Schwingung vorhanden, deren Frequenz einen mittleren Wert hat.

d) Einfluß der Masse des Simon-Mikrophons. Eine neue Versuchsreihe zeigte, daß, wie zu erwarten war, die Masse des Simon-Mikrophonkörpers von großem Einfluß auf die Schnelligkeit der auftretenden Schwingungen ist. Die Versuchsreihe der Oszillogramme 175, 177 und 178 zeigt das Ergebnis des Versuchs.

Oszillogr. 175 wurde ohne Zusatzgewicht
„ 177 mit einem Zusatzgewicht von 1,5 g
„ 178 „ „ „ „ 3,6 g
aufgenommen.

e) Versuch, die Schwingung des Mikrophons zu dämpfen. Um die Schwingung des VKU-Mikrophons zu dämpfen, wurde die Membran mit einer dünnen Klebwachsschicht versehen. Ferner wurden beim Simon-Mikrophon zwischen die Drähte und das Gehäuse Gummipolster verschiedener Gestalt geklemmt. Auf den Schwingungsverlauf hatten diese Maßnahmen keinen Einfluß.

f) Einfluß der Stiftlänge des VKU-Mikrophons. Ein VKU-Mikrophon wurde mit Hilfe einer Gegenmutter so an dem Bleiklotz befestigt, daß zwischen Klotz und Mikrophonmembran verschiedene Längen des Haltestiftes stehen blieben. Bei Aufnahme des Schwingungsverlaufes ergab

sich in allen diesen Fällen, daß die Frequenz der auftretenden Schwingung sehr stark von der Länge des Haltestiftes abhängig ist; die Schwingungen wurden um so langsamer, je länger der Stift war. Die Oszillogramme dieser Versuchsreihe, die besonders wichtig sind, sind in den Akten der Torpedo-Inspektion nicht mehr vorhanden.

6. Die Schwingungen um den Haltestift und die Kippschwingungen. Aus den unter 5a bis 5f mitgeteilten Versuchen und besonders aus den Ergebnissen unter e und f ergibt sich folgendes:

VKU-Mikrophon. Die Schwingungserscheinungen, die bei einem VKU-Mikrophon registriert werden, beruhen in der Hauptsache nicht auf einer Schwingung des Mikrophonkörpers gegen die Mikrophonmembran, sondern auf Transversalschwingungen des ganzen Mikrophons am Haltestift.

Simon-Mikrophon. Die Schwingungen, die bei einem Simon-Mikrophon registriert werden, beruhen gleichfalls auf einer Transversalschwingung um den Haltestift. Dazu kommen noch Kippschwingungen um die Haltedrähte hinzu, die in ihrem Charakter und ihrer Frequenz je nach der Stellung des Mikrophons verschieden sind.

Die Transversalschwingungen des VKU-Mikrophons um den Haltestift lassen sich kaum vermeiden, so lange man nach der unter 2 beschriebenen Anordnung die Mikrophonmembran mit der Empfängermembran verbindet und das Mikrophongehäuse als Gegengewicht benutzt. Es wird unter Abschnitt 7 angegeben werden, wie man das VKU-Mikrophon verwenden kann, ohne durch Transversalschwingungen gestört zu werden.

Um die parasitären Schwingungen des Simon-Mikrophons zu beseitigen, wurden verschiedene Änderungen vorgenommen, wobei in allen Fällen der Haltestift vermieden und das Mikrophon mit breitem Sitz auf die Elektrode *b* aufgesetzt wurde. Die Kippschwingungen der Drähte und die Abhängigkeit von der Stellung blieben trotzdem bestehen. An Stelle der dünnen Drähte wurde ferner gesetzt:

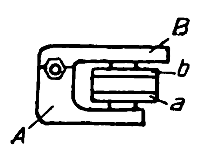
1. ein breites Bronzeband verschiedener Dicke,

2. ein breiter Glimmerstreifen verschiedener Dicke,

3. (von Herrn Geheimrat H. Th. Simon-Göttingen angegeben) ein dünnes Holzbrettchen.

In allen Fällen sind die Kippschwingungen und ihre Abhängigkeit von der Stellung des Mikrophons vorhanden. Sie sind bei 2 und 3 etwas geringer, und zwar besonders dann, wenn das Mikrophon horizontal steht. Bei Verkürzung des Aluminiumteils wurden die Schwingungen noch etwas mehr vermindert, doch waren sie auch dann noch nicht ganz verschwunden.

7. Das Torsionsmikrophon. Es wurde vom Verfasser ein Mikrophon konstruiert, bei dem die Transversalschwingungen und die andern parasitären Schwingungen vermieden sind. Auf einer Grundplatte *A* (Fig. 6), die rechtwinklig



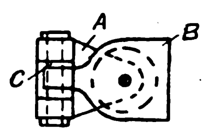


Fig. 6.

nach oben abgehoben und gabelförmig geteilt ist, sitzt zwischen den Zinken der Gabel ein Torsionsdraht *C*. (In der Skizze ist der Torsionsdraht versehentlich fortgelassen.) In seiner Mitte ist die Oberplatte des Mikrophons *B* befestigt, die gegen das Grundgestell durch Tordierung der freien Teile des Torsionsdrahtes schwingen kann. An *A* und *B* sitzen die beiden Elektroden *a* und *b*, zwischen denen sich das Kohlepulver befindet. Der seitliche Abschluß dieses Raumes geschieht, ebenso wie beim Simon-Mikrophon, durch einen dünnen Gazestreifen.

Befestigt man dieses Mikrophon an einem Haltestift (Fig. 7a), so erhält man ähnlich wie

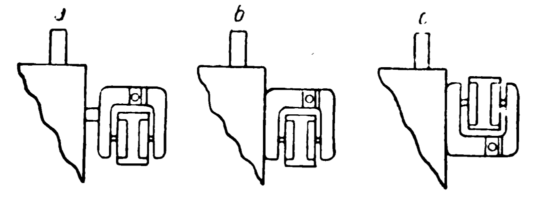


Fig. 7a, b, c.

bei den beiden andern Mikrophonen die Transversalschwingungen. Die obere Kurve in Oszillogramm 226 zeigt eine solche Aufnahme. Es treten auch hier starke Schwingungen auf, die in ihrem Verlauf und in ihren Oberschwingungen erheblich von der Stellung des Mikrophons abhängen.

Wurde das gleiche Mikrophon dagegen mit der vollen Grundplatte aufgesetzt (Fig. 7b und

c), so wurden die Kurven des Oszillogramms 227 erhalten. Die oberste Kurve zeigt den Schwingungsverlauf, wenn das Mikrophon so gestellt war, wie die Fig. 7b es angibt. Die mittlere Kurve zeigt den Kurvenverlauf, wenn der Elektrodenraum nach oben gerichtet (Fig. 7c) war. Die unterste Kurve zeigt einige schnelle Schwingungen; sie wurde erhalten, wenn das Mikrophon um 90° gegen die beiden beschriebenen Stellungen verdreht war. In dieser Stellung treten demnach wieder Kippschwingungen auf. Als Normalstellung wurde bei allen weiteren Versuchen die Anordnung nach Fig. 7b gewählt.

Bei Beginn der weiteren Versuche traf ein neuer Oszillograph (Firma Siemens & Halske) ein, der durch die bequeme Handhabung und durch die Fähigkeit, die Kurven bei genügender Lichtstärke zeitlich mehr auseinander zu ziehen, gegenüber dem Duddellschen Oszillographen wesentliche Vorteile besaß. Die Empfindlichkeit der Schleifen betrug $3 \cdot 10^{-4}$ Amp. pro 1 mm Ausschlag und die Eigenschwingung des Systems etwa 3000 pro sec. Die Dämpfung ergibt sich aus dem Oszillogramm A 45. Durch einen Nullpunktspiegel mit seinen Lichtschnitten konnte die Geschwindigkeit des Papiers bei jedem Oszillogramm genau bestimmt werden. Durch die gütige Vermittlung von Herrn Prof. Gerdien wurde der Oszillograph mit einer erhöhten Papiergeschwindigkeit (1 m/sec) versehen.

Mit dem neuen Oszillographen wurde zur Kontrolle ein Teil der früheren Versuche wiederholt und bestätigt. Oszillogramm A 81 zeigt den Kurvenverlauf eines gewöhnlichen VKU-Mikrophons, das mit dem Stift befestigt ist. Der Schwingungsverlauf entspricht seinem Charakter nach dem mit dem Duddellschen Oszillographen aufgenommenen. Die Schwingung ist nur zeitlich mehr auseinander gezogen. Die Bestimmung der Hauptfrequenz ergab 430 Perioden/sec. Sie liegt bei dem einfachen VKU-Mikrophon immer bei 400—500 pro Sekunde. Bei den Simon-Mikrophonen sind die Schwingungen so unregelmäßig und je nach der Stellung so veränderlich, daß ein Durchschnittswert kaum angegeben werden kann. Mit dem neuen Oszillographen wurde eine größere Anzahl von Torsionsmikrophonen untersucht. Während es in Oszillogramm 227 so aussieht, als ob beim Torsionsmikrophon gar keine schnellen Schwingungen mehr vorhanden seien, war es mit dem neuen Oszillographen möglich, diese Schwingungen noch auseinander zu ziehen. Das Oszillogramm A 59 gibt ein Beispiel für den Kurvenverlauf, der bei den Torsionsmikrophonen durchschnittlich auftrat. Es wurde eine Anzahl Mikrophone hergestellt bei Verwendung von Torsionsstahldrähten von 0,3—0,8 mm Dicke. Je dünner der Draht, um so langsamer ist die Schwingung. Oszillogramm A 59 zeigt die Schwingung bei Verwendung eines Torsionsstahldrahts von 0,8 mm Dicke. Die Frequenz der Schwingung ergibt sich aus dem Oszillogramm zu 1080 Perioden pro sec.

8. Das mit dem Gehäuse aufgesetzte VKU-Mikrophon. Da die gleichmäßige Herstellung der Torsionsmikrophone bei der Fabrikation gewisse Schwierigkeiten bereitete, wurde versucht, auf einem andern Wege zu ähnlich günstigen Schwingungsverhältnissen zu kommen. Dieses wurde durch Umkonstruktion des alten VKU-Mikrophons erreicht. Das Mikrophon wurde nicht mit der Membran befestigt, sondern mit dem Gehäuse aufgesetzt, und es wurde zugleich dadurch, daß für das Gehäuse Aluminium gewählt wurde, für ein geringes Gewicht Sorge getragen. Fig. 8 zeigt das Mikrophon, mit dem die im folgenden beschriebenen orientierenden Versuche ausgeführt wurden in

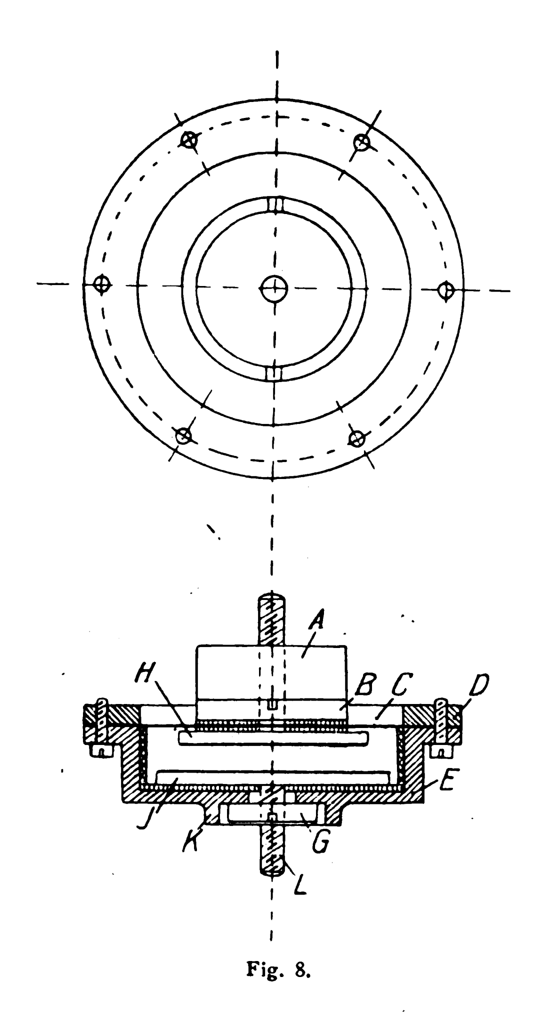


Fig. 8.

2,5 facher Vergrößerung. Das Mikrophon wird mit der Schraube *L* auf die Unterlage so weit aufgeschraubt, daß es fest auf dem Ansatz *K* aufsitzt. Über das Gehäuse *E* ist die Membran *C* gelegt, und wird mit dem Ring *D* durch Schrauben fest gespannt. Auf dem Gehäuse sitzt die eine Elektrode *I*, an der Membran die andere Elektrode *H*. Mit *H* war eine Schraube verbunden, auf die verschieden große Gegengewiehte *A* aufgeschraubt werden konnten.

Bei einer Versuchsreihe mit Veränderung der Größe des auf der Membran aufsitzenden Gegengewichts *A* wurden die Schwingungszahlen aus den Oszillogrammen genau bestimmt. Es wurden Oszillogramme aufgenommen bei Gewichten von 2 g, 1,5 g, 1,22 g, 0,9 g, 0,75 g, 0,25 g und 0 g. Die Oszillogramme A 66, A 69 und A 72 zeigen die Kurven bei den Gewichten 2 g, 0,9 g und 0 g. Durch Auszählen ergeben sich für diese 3 Aufnahmen die Werte: 900, 1200 und 1500 Perioden pro sec. Bei einem großen Gewicht kommt sehr leicht außer der schnellen Schwingung eine 5—10 mal langsamere zum Vorschein, die wahrscheinlich auf Kippschwingungen der Membran beruht. Die Versuchsreihe zeigt, daß mit kleiner werdendem Gegengewicht die Schwingungszahl wächst. Diese Abhängigkeit ist im Kurvenblatt (Fig 9) graphisch wiedergegeben.

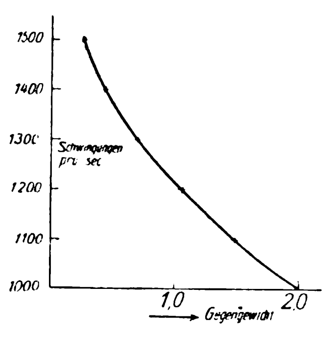


Fig. 9.

Um die Schwingungsfrequenz noch auf anderm Wege zu kontrollieren, wurde folgendermaßen verfahren. Vor das am Bleiklotz befestigte Mikrophon wurde in geringer Entfernung ein Telephon aufgestellt und das Telephon mit einem Hochfrequenzstrom beschickt, dessen Frequenz veränderlich war. Die Resonanzstellen des Telephons waren bekannt und wurden berücksichtigt. Bei Veränderung der Tourenzahl der Wechselstrommaschine wurde in gewöhnlicher Mikrophonschaltung durch Abhören die Stelle bestimmt, an der infolge der Resonanz des Mikrophons der Ton stärker wurde. Die so bestimmten Frequenzen stimmten mit den aus den Oszillogrammen errechneten gut überein.

Außer der Bestimmung der Schwingungszahlen wurde auch die Empfindlichkeit geprüft. Dies geschah in der Weise, daß auf den Bleiklotz eine Taschenuhr gelegt und das Ticken der Uhr in gewöhnlicher Mikrophonschaltung abgehört wurde. Mit einem zum Telephon parallel geschalteten Widerstand wurde auf Verschwinden des Tones eingestellt. Die neuen VKU-Mikrophone wurden in ihrer Abhängigkeit von der Größe des Belastungsgewichts geprüft, und zwar bei Verwendung von Gegengewichten von 0,25—2 g. Es ergab sich, daß sich die Empfindlichkeit nur wenig ändert; sie nimmt mit kleiner werdendem Gewicht eben bemerkbar ab.

Es wurde ferner die Empfindlichkeit der neuen Mikrophone mit der Empfindlichkeit der alten VKU-Mikrophone verglichen. Für eine größere Zahl alter und neuer VKU-Mikrophone wurde in der angegebenen Weise die Parallelohmmessung ausgeführt. Das Gegengewicht *A* war bei den neuen Mikrophonen bei diesem Versuch immer gleich Null. Im Mittel ist die Empfindlichkeit der neuen Mikrophone ohne Gegengewicht etwas geringer als die der alten VKU-Mikrophone.

Die Empfindlichkeitsprüfung ergänzt in wirksamer Weise die Untersuchung der Schwingungen mit dem Oszillographen. Beide Untersuchungen gemeinsam stellen eine Methode dar, um die Eigenschaften eines jeden Mikrophons genau festzulegen.

Mit den alten VKU-Mikrophonen, den Simon-Mikrophonen, den Torsionsmikrophonen und den neuen VKU-Mikrophonen sind eine Anzahl von Mikrophontypen mit verschiedenen Eigenschaften zur Verfügung. Die Eigenfrequenzen der Mikrophone liegen zwischen 100 und 1500. Der unterste Bereich gehört dem alten VKU-Mikrophon und die Frequenz dieser Mikrophone kann durch Veränderung der Haltestiftlänge variiert werden. Das Torsionsmikrophon überdeckt in der beschriebenen Form je nach der Dicke des Haltestifts einen mittleren Bereich; doch kann man seine Frequenz durch Veränderung der Dimensionen auch auf andere Werte bringen. Das neue VKU-Mikrophon hat je nach der Größe des Gegengewichts Frequenzen zwischen 1000 und 1500 pro sec. Beim Simon-Mikrophon treten meist eine ganze Anzahl von Schwingungen auf. Welche Type man in einem bestimmten Fall wählen wird, hängt davon ab, welche Eigenfrequenz und welche Empfindlichkeit zweckmäßig ist.

Zusammenfassung. Es wird eine Methode beschrieben, mit der es gelingt, den durch Stoßerregung eingeleiteten Schwingungsverlauf eines für Unterwasserschallempfänger bestimmten Mikrophons oszillographisch zu registrieren.

Mit dieser Methode werden die sogenannten VKU- und Simon-Mikrophone untersucht. Es stellt sich heraus, daß der Haltestift der Mikrophone zu Transversalschwingungen Anlaß gibt und daß beim Simon-Mikrophon Kippschwingungen auftreten.

Es wird ein neues Mikrophon, das sogenannte Torsionsmikrophon beschrieben, bei dem störende Nebenschwingungen nicht vorhanden sind und nur die Hauptschwingung zu finden ist. Mit einem Oszillographen mit 1 m/sec Papiergeschwindigkeit werden die Frequenzen dieser Schwingungen bestimmt.

Es wird ein verändertes VKU-Mikrophon beschrieben, das nicht mit einem Stift, sondern mit dem Gehäuse aufgesetzt wird. Auf der Membran lassen sich verschiedene Gegengewichte aufschrauben. Es werden die Frequenz und die Empfindlichkeit dieser Mikrophone in Abhängigkeit von der Größe der Gegengewichte gemessen. Empfindlichkeitsprüfung und oszillographische Untersuchung bilden zusammen eine exakte Methode, um die Eigenschaften eines Schüttelmikrophons zu bestimmen.

Freiberg i. S., Oktober 1919.

(Eingegangen 10. Januar 1920.)

Neuere Anschauungen über die chemischen Elemente und ihre Atome. II.

Von Emil Kohlweiler.

In meiner vorhergehenden Arbeit[1]) habe ich gezeigt, wie sich unter der begründeten Annahme, fast alle Grundstoffe des Chemikers seien Isotopengemische, für die isotopen Komponenten der anfänglichen Typen der 92 Elementplejaden ein genetischer bzw. konstitutioneller Zusammenhang herleiten läßt, der mit den Änderungen der unter dieser Annahme zu Mischwerten herabgesunkenen Atomgewichte in bestem Einklang steht, und der vor allem durch die jüngsten Rutherfordschen Versuche äußerst wahrscheinlich geworden ist.

Die entwickelte Isotopen- und Atombautheorie nimmt 2 Reihenpaare der Elemente an, durch die die Komponenten der geraden bzw. die Glieder der ungeraden Plätze des periodischen Systems je unter sich in Beziehung stehen, derart, daß für den Anfang des Systems die beiden folgenden Glieder jedes Reihenpaares durch Einlagerung eines *He*-Kerns in den Atomkern der vorhergehenden Isotopen entstehen. Fast alle der uns bekannten leichtesten Scheinelemente ergeben sich so als Mischung zweier wirklicher, demselben Typus zugehörigen Elemente, die sich um 2 Masseneinheiten unterscheiden, indem das Kernzentrum des einen Elements ein H_2^{++}- ($2H^+$-) Gebilde ist, während das isotope Glied hierzu ein He^{++}-Zentrum aufweist, entsprechend den beiden nullwertigen Kopfgliedern H_2 bzw. *He* der beiden Reihen.

Elektronen des Atomkerns wirken, soweit sie nicht schon am Bau der Kerne der 4 ersten abgeleiteten Elemente *Li* 6, *Li* 8, *Be* 8 und *Be* 10 beteiligt sind[1]), an der Entwicklung der 14 ersten Plejaden nicht mit, so daß für die Elemente bis zur Chlorplejade keine Alternationen in Betracht zu ziehen sind, was aus der Folge der Verbindungsgewichte der Grundstoffe des Chemikers ohne weiteres resultiert.

Für die Ermittlung der Konfiguration der primären Bausteine H_2^{++}, He^{++} und (—) in den Kernen der abgeleiteten Atome ist der Parallelismus zwischen der Zunahme der der Platznummer gleichen Kerndifferenz[2]) und der Änderung der maximalen Wertigkeit der Elemente von größter Bedeutung, wie andererseits das Fehlen dieser Korrespondenz bei höheren Gliedern des periodischen Systems auf eine von der anfänglichen abweichende Entwicklung hinweist, wie noch näher zu erörtern sein wird.

Das Zentrum jedes Atoms dürften die H_2^{++} bzw. im Fall der Uranisotope ein He^{++}-Partikelchen bilden, um welches Zentrum sich zur Bildung der abgeleiteten Atome die übrigen *He*-Kerne sowie die Kernelektronen gruppieren, wobei je 1 Elektron durch eine positive Ladung eines He^{++} kompensiert gedacht sein soll. Die nun noch übrigen positiven Elementarquanten treten, soweit möglich, zu Gruppen von je 8 Einheiten zusammen, in Anbetracht der Tatsache, daß beim normalen Entwicklungsgang, wie er durch die anfänglichen Glieder des periodischen Systems zum Ausdruck gebracht wird, stets nach einer Zunahme der Kerndifferenz um 8 Einheiten und übereinstimmend damit in der Reihe der Radioelemente nach einer bezüglich der emittierten Elektronen Mehremission von 4 α-Partikelchen chemisch und physikalisch analoge Elementtypen wiederkehren. Dies Verhalten berechtigt offenbar die Annahme, daß das Vorhandensein verschieden vieler Gruppen von je 8 positiven Elementarquanten

1) Diese Zeitschr. **21**, 203, 1920.

1) l. c.
2) Diese Zeitschr. **21**, 203, 1920.



die chemischen Analogone bedingt, wie eine gleiche Ab- bzw. Zunahme der negativen und positiven Kernquanten Isotopie bewirkt.

Die jetzt noch übrigbleibenden, also weder im Zentrum sitzenden, noch durch Kernelektronen kompensierten oder in positiven Kerngruppen untergebrachten positiven Quanten der He^{++} bestimmen den Gruppencharakter, die maximale Wertigkeit des Atoms, bzw. die durch diese Größe am prägnantesten zum Ausdruck gebrachten chemischen Gruppen-Eigenschaften. So besitzen die beiden Isotope des *Li*-Typus eine solche ungruppierte Ladung, die Komponenten der *Be*-Plejade haben deren 2, *F* 18 und *F* 20 weisen 7 solcher Ladungen auf und alle mit diesen Elementtypen im engeren Sinn analogen Typen besitzen um den innern Kernteil ebenfalls bzw. 1, 2 oder 7 ungruppierte positive Ladungen, während die ferner stehenden Analoge (z. B. *Ag*, *Cu* und *Au* für *Li*) 8 solcher ungruppierter Ladungen mehr aufzuweisen haben dürften, so daß die Zahl der ungruppierten positiven Ladungen von 0 für die Komponenten der Edelgase über 8 bei den Triadengliedern der VIII. Gruppe auf 15 für die Halogene wächst. Beim folgenden Edelgas sinkt sie wieder auf 0 unter gleichzeitiger Bildung zweier weiterer Kerngruppen, deren Zahl für alle Elemente zwischen 2 Edelgasen gleich bleibt, und für die Perioden *He* — *A*, *A* — *Kr*, *Kr* — *X*, *X* — *Nt*, *Nt* — *U* bzw. 0, 2, 4, 6 und 8 ausmacht. Die elektrochemisch stark ausgeprägten Typen der *A*-Reihen des Systems[1]) (z. B *P* bis *Ti* oder *As* bis *Zr*) sind mit 13, 14 und 15 ungruppierten Ladungen für die negativen Vertreter und mit 1, 2 und 3 für die positiven Elemente von dem stabilen, völlig indifferenten und daher vorbildlichen Bau der inerten Edelgastypen am wenigsten entfernt, weshalb sie das starke Bestreben haben, sich mit Elementen zu binden, die ihre Zahl ungruppierter positiven Ladungen zu einer durch 8 teilbaren Zahl ergänzen, so daß der nur Kerngruppen aufweisende Zustand der Edelgasatome erreicht ist. Bei den Elementen der *B*-Reihen (z. B. *V* — *Ge*) zeigen sich 5—12 ungruppierter Ladungen, woraus sich ergibt, daß die Tendenz, den Zustand der Edelgase nachzubilden, hier weniger ausgeprägt und nicht so scharf unterschieden ist wie bei den Elementen der *A*-Reihen. Betreffs weiterer Einzelheiten über chemische Bindung, elektrochemisches Verhalten der Elemente usw. möchte ich auf meine Arbeiten, die in der Zeitschrift f. phys. Chemie erscheinen werden, hinweisen, woselbst ich auch näher auf die Frage nach dem Sitz der chemischen Eigenschaften der Atome eingehen werde, zur Rechtfertigung der eingeführten Annahme, daß nicht der äußerste Teil des äußeren Elektronensystems, sondern der Kern der Atome im wesentlichen ausschlaggebend sein dürfte für die chemische Bindung und überhaupt für die chemischen Qualitäten der Materie, während das äußere Elektronensystem, das sich nach den Bohrschen Ansätzen in Ringen anordnet, deren Elektronenzahlen durch die Arbeiten von Debye[1]) und Vegard[2]) zum Teil festgelegt werden konnten, die physikalischen Qualitäten der Materie vornehmlich ausmacht. Valenzwechselerscheinungen werden ebenfalls von Außenelektronen bedingt.

Wir waren in der Lage, bis zur Chlorplejade den Mechanismus der Entwicklung der Materie bzw. den Zusammenhang der einzelnen Atomarten zu verfolgen. Um nun weiterhin auch in den Atombau der Elemente der höheren Plätze des periodischen Systems einzudringen, muß zunächst festgestellt werden, daß die Entwicklung der Materie nicht durchweg den einfachen Gang zeigt wie am Anfang des Systems und in der Reihe der Radioelemente, aus deren Verhalten vornehmlich die Schlüsse betreffs Konstitution und Zusammenhang der Atomarten gezogen wurden.

Für die Radioelemente wie für die leichtesten Elemente ist ein engster Zusammenhang zwischen der Änderung der Kerndifferenz einerseits und der Änderung der maximalen Wertigkeit andererseits zu konstatieren, woraus folgt, daß die Einblicke, die der aktive Atomzerfall uns in den Zusammenhang der Elemente gewährt, aus Analogie nur für solche Elemente ausgewertet werden dürfen, für die pro Einheit der Kerndifferenz auch die Höchstwertigkeit um eine Einheit variiert.

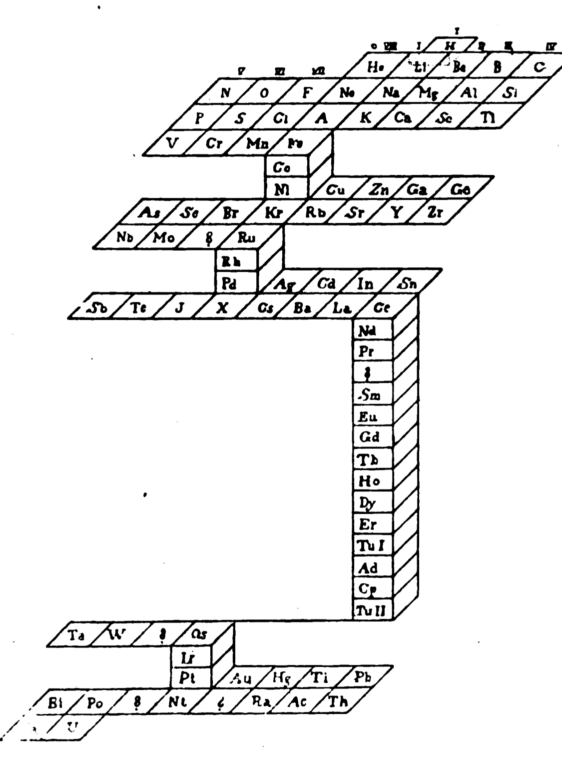
Diese Korrespondenz fehlt nun für die 3 Triaden der Gruppe VIII des Systems und für die 14 Glieder der seltenen Erden der Plätze 59—72. Die Entwicklung dieser 4 Elementkaskaden erfolgt derart, daß zwar, wie die Röntgenspektroskopie feststellen konnte, der Grundton der Elemententwicklung: Zunahme der Kerndifferenz pro Element um eine Einheit, gewahrt bleibt, daß aber die sonst und vor allem auch direkt vor und nach den Kaskaden so auffallend regelmäßige Änderung der Wertigkeit aussetzt. Hieraus wird gefolgert werden müssen, daß hier die Zunahme der Kerndifferenz nicht durch die die valenzchemisch regelmäßige Entwicklung bedingende Einlagerung von He^{++} bewirkt werden wird.

1) F. Soddy, Die Radioelemente II, 1914. Zeitschr. f. phys. Chemie **92**, 694, 1918.

1) Diese Zeitschr. **18**, 276, 1917.
2) Diese Zeitschr. **20**, 92, 1919; Verh. d. D. phys. Gesellschaft 1917, (328 u.) 344.



Wir können das erwähnte Verhalten der Elementtypen durch ihre Anordnung in einem räumlichen periodischen System zum Ausdruck bringen, dadurch, daß wir die eine Achse eines dreiachsigen Koordinatensystems als Wertigkeitsachse wählen, auf der wir die kleinen Kerndifferenz- (Verbindungsgewichts-) Änderungen bei periodisch zwischen den Werten 0 und 8 variierender Höchstwertigkeit auftragen, während wir auf den beiden anderen Achsen bzw. die großen Kerndifferenz- oder Verbindungsgewichtssprünge bei gleicher Höchstwertigkeit (Analogone) und die kleinen Wechsel der Kerndifferenz (der Verbindungsgewichte) bei gleicher Wertigkeit (Kaskadenelemente) abtragen. Wir erhalten so, wie Schema I zeigt, 5 Ebenen, in denen



Schema I.

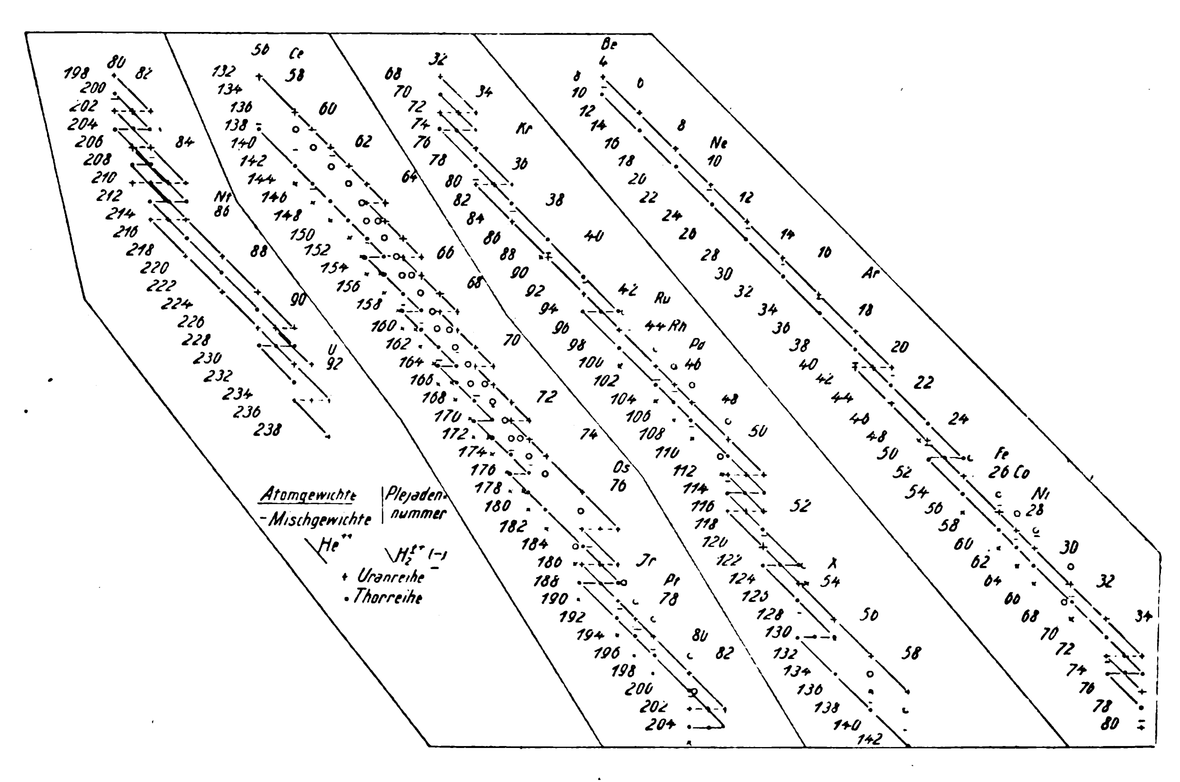
die Elementtypen mit von Platz zu Platz regelmäßig weiterschreitender Höchstwertigkeit liegen. Die Verbindungsglieder dieser Ebenen bilden die Kaskadenelemente, deren Unterbringung in den gewöhnlichen monoplanen Systemen, den Horizontalprojektionen der vorgeschlagenen räumlichen Anordnung, so große Schwierigkeit bietet.

Für die Elemente der 5 Ebenen des skizzierten Systems vollzieht sich die Entwicklung in der geschilderten Weise in 2 Reihenpaaren erst allein durch Addition von α-Partikeln hernach auch durch Einbau von Elektronen, so daß die Zahl der ungruppierten Ladungen für jedes im System folgende Element entsprechend der Wertigkeit um eine Einheit zunimmt. Pro 2 Platzeinheiten werden hierbei bei geradliniger Entwicklung der Elemente 4 Masseneinheiten verbraucht; für jede auftretende Doppelalternation werden zwecks Kompensation des durch die Einlagerung von 2 Elektronen um 2 Platzeinheiten rückläufigen Gangs in der Entwicklung 4 Extra-Masseneinheiten in Form von He^{++} verschluckt. Aus diesen Verhältnissen läßt sich offenbar unter Berücksichtigung der Änderung der Verbindungsgewichte der Plejaden eine Methode zur Ermittlung der Zahl der Alternationen beim Gang durch die 5 Ebenen unseres periodischen Systems ableiten[1]).

Die 5 Perioden der *He*-Entwicklung umfassen nach Schema I die Elementtypen *He—Fe*, *Cu—Ru*, *Ag—Ce*, *Ta—Os* und *Au—U*. Die erste Gruppe *He—Fe* erstreckt sich demnach über $(26-2)=24$ Plätze, für die bei alternationsloser Entwicklung $\frac{24}{2}\cdot 4 = 48$ Masseneinheiten verbraucht würden. Das Verbindungsgewicht der Mischung *Fe* 55,8 zeigt nun, daß diese Plejade 26 mindestens ein von He_4 sich ableitendes Uranisotop Fe_{56} enthalten muß, so daß der tatsächliche Verbrauch an Masse zwischen den Typen 2 und 26 $(56-4)=52$ Einheiten ausmacht und somit $(52-48)=4$ Einheiten mehr beträgt wie bei alternationslosem Gang. Dieses Mehr von 4 Masseneinheiten wurde nun offenbar infolge Einlagerung eines „Extra"-He^{++} verbraucht zwecks Kompensation zweier Elektronenadditionen und der dadurch bedingten rückläufigen Bewegung der Entwicklungsreihe um 2 Plätze. Die erste der 5 obigen Elementperioden zeigt somit 2 Alternationen. Aus analogen Überlegungen ergeben sich die Anzahlen der Alternationen der 4 übrigen Perioden zu 4, 6, 2 und 8, so daß fürs ganze System im *He*-Entwicklungsgang 22 Alternationen resultieren. Eine Prüfung der angegebenen Methode durch Anwendung auf die Radioelemente zwischen den Elementen Pb_{206} und U_{238} ergibt für diese $\frac{1}{2}[(238-206)-\frac{1}{2}\cdot(92-82)\cdot 4]=6$ Alternationen, was mit der Emission von 6 β-Partikelchen bei der Transformation $UI-RaG$ übereinstimmt.

Eine nähere Verfolgung der Änderung der Verbindungsgewichte von Plejade zu Plejade ermöglicht nun auch die Fixierung der Stellen, an denen die 22 *He*-Alternationen auftreten. Die Schemata II und III lassen diese Stellen erkennen. Es darf betont werden,

1) Vgl. hierüber Zeitschr. f. phys. Chemie, **94**, 513, 1920.



Schema II.

Atomgewichte
-Mischgewichte
Plejaden-
nummer
He⁺⁺
H₂⁺⁺ (–)
× Uranreihe
○ Thorreihe

Schema III.

daß, wie eine intensive Verfolgung der Verhältnisse ergibt, die Festlegung der Alternationen in den Schemata II und III keine willkürliche, sondern, vielleicht mit höchstens einer oder zwei Ausnahmen, die allein mögliche ist. Betreff die Alternationen der beiden verschiedenen Reihen, der Thor- und Uranreihe wurde berücksichtigt, daß diese teils zusammenfallen können (*ThB* bzw. *RaB*) teils durch verschiedene Gruppen erfolgen ($MsTh_1$ bzw. UX_1).

Es handelt sich nun noch darum, den genetischen Zusammenhang der Elemente der 5 Ebenen unseres Systems zu fixieren, d. h. zu ermitteln, wie die beiden Entwicklungsreihenpaare durch die Glieder der Kaskadenelemente schreiten.

Heliumkerne können, wie bereits erwähnt, aus dem Grunde nicht in Betracht kommen, da der regelmäßigen Zunahme der Kerndifferenz um eine Einheit keine regelmäßige Variation der Valenzverhältnisse parallel geht. Dagegen ändert sich, wenn wir die 3 Triaden zunächst nur ins Auge fassen, die Atommasse von Element zu Element ebenfalls um 2 Einheiten. Wir nehmen deshalb an, daß die Kerne der Verbindungsglieder der 5 *He*-Entwicklungsperioden durch Einbau von einfach positiven Wasserstoffmolekülen zustande kommen:

$$Fe\,56 + H_2^{+} = Co\,58;$$
$$Co\,58 + H_2^{+} = Ni\,60,$$
$$Ni\,60 + He^{++} = Zn\,64.$$

Da hierbei die Zahl der ungruppierten He^{++}-Ladungen dieselbe bleibt, ist es plausibel, daß die chemischen Eigenschaften sich hier nur um ein Minimum ändern. Es ist in diesem Zusammenhang äußerst interessant, darauf hinzuweisen, daß Marsden und Lantsberry beim Bombardieren von *Ni* mit *RaC*-α-Strahlen weitreichende H^{+}-Strahlen beobachtet haben[1]). Nach den Ergebnissen der N_2-Bestrahlung ist es immerhin nicht unwahrscheinlich, daß die Wasserstoffatome aus den *Ni*-Atomen stammen. Sehr beachtenswert ist außerdem die Tatsache, daß sich die Mineralien der seltenen Erden häufig als wasserstoffhaltig erwiesen haben[2]).

Des weiteren sprechen die astronomisch-spektroskopischen Untersuchungen N. Lockyers für die Theorie. „Um nur ein Beispiel anzuführen, so schließt Lockyer aus dem Verschwinden der verstärkten Eisenlinien in den heißesten Sternen und der gleichzeitigen Verstärkung der Wasserstofflinien, sowie der des Heliums und des Asteriums, daß Eisen eine Verbindung sei, an deren Bildung sich eines dieser Gase oder alle beteiligen"[1]).

In den *He*-Entwicklungsperioden beteiligen sich von Zeit zu Zeit neben He^{++} auch Elektronen an der Entwicklung. In analoger Weise ist auch der Lauf der großen H_2^{+}-Periode kein gerader, sondern weist, was aus der Änderung der Atommassen in gleicher Weise wie für die *He*-Perioden folgt, 5 Alternationen auf, bestehend in der Einlagerung von einem Elektron an 5 Stellen in der Kaskade der seltenen Erden und Kompensation durch 5 „Extra"-H_2^{+}-Ionen.

In den Schemata II und III ist der Gang des geradwertigen bzw. des ungeradwertigen Reihenpaares durch das ganze periodische System dargestellt, wie er sich unter den Annahmen einer Entwicklung der Elemente durch abwechselnde Addition von He^{++} bzw. H_2^{++} und Elektronen aus den beiden Kopfgliedern *He* und H_2 eindeutig ergibt unter Berücksichtigung der bekannten Verbindungsgewichte der Typen, die stets zwischen den Atomgewichten der Isotopen liegen müssen. Dadurch, daß bei einer Plejade die höheren und bei der ihr folgenden die leichteren Isotope stärker vertreten sein können, finden die sog. Unregelmäßigkeiten des periodischen Systems, bestehend in einem 5 maligen rückläufigen Gang der Verbindungsgewichte[2]) ihre einfache Deutung. Eventuelle Verzweigungen der Reihen, wie sie für die Radioelemente durch die Doppelstrahler *C* und die *Ac*-Reihe gegeben sind, lassen sich zurzeit nicht ermitteln. In beiden Schemata sind die Plejadenglieder, die der anderen Entwicklungsreihe, die infolge der Alternation die dargestellte Reihe kreuzt, angehören, beigezeichnet, so daß die Plejaden vollständig sind. Beide Reihenpaare können nur bis zu Platz 82 bzw. Platz 83 verfolgt werden, da die Verbindungsgewichte der höheren Isotopengemische nicht bekannt sind. Doch lassen sich dem Reihenpaar der geradwertigen Elemente die Zerfallsreihen von *U* und *Th* anschließen und Schema II zeigt, wie gut und glatt das Ende der theoretischen Entwicklungsreihe in das Ende der beiden Zerfallsreihen übergeht, eine beachtenswerte Stütze der ersteren.

Von *He* bis *U* I werden $\frac{72-2}{2}\cdot 4 = 140$ Masseneinheiten für die geradlinige He^{++}-Entwicklung, $\frac{22}{2}\cdot 4 = 44$ Masseneinheiten für He^{++}-Alternationen, $20\cdot 2 = 40$ Massenpartikelchen für den

1) Phil. Mag. **30**, 240, 1915.
2) Vgl. diese Zeitschr. **16**, 6, 1915.

1) C. Schmidt, Das period. System der chem. Elemente. S. 114 ff.
2) Zwischen den Plätzen 18 u. 19, 27 u. 28, 52 u. 53, 59 u. 60, 66 u. 67.

geraden Gang und $5 \cdot 2 = 10$ Massenteilchen für den alternierenden Gang durch die Kaskaden benötigt. Hieraus ergibt sich das Atomgewicht des *U* I zu

$$4 + 140 + 44 + 40 + 10 = 238.$$

Seine gesamte positive Ladung beträgt
$2 + \frac{1}{2}(140 + 44) + 1(40 + 10) = 144$ Einheiten, während die negative in

$$22 + \frac{1}{2} \cdot (40 + 10) + 5 = 52 \text{ Elektronen}$$

besteht, so daß die Kerndifferenz zu $144 - 52 = 92$ resultiert. Betreffs weiterer quantitativer Angaben über die Elemente der Atome darf ich auf meine Arbeit in der Zeitschr. f. phys. Chemie verweisen.

Anmerkung bei der Korrektur: Ich habe bereits in meiner letzten Arbeit erwähnt, daß Aston durch die Kanalstrahlenmethode für Chlor die beiden Isotope *Cl* 35 und *Cl* 39 fand. Außerdem stellte er folgende Isotope fest: *Ne* 20 und *Ne* 22, *Hg* 202 und *Hg* 204, *X* 128 und *X* 130, *X* 131, *X* 133 und *X* 135, sowie *Kr* 78, *Kr* 80, *Kr* 82, *Kr* 84 und *Kr* 86 und *Kr* 83. Übereinstimmend mit obigen Entwicklungen folgt hieraus zunächst, daß die ersten Plejaden des periodischen Systems wahrscheinlich durchweg nur aus 2 Isotopen bestehen (auf die schöne Bestätigung des Elementcharakters von *C* und *O* durch Rutherford bzw. Volmer und Stern verwies ich bereits in meiner letzten Arbeit), während die höheren Plejaden bedeutend größere Mannigfaltigkeit an Komponenten zeigen, und daß die nächsten Isotope ein und derselben Reihe stets um 2 Einheiten in der Atommasse differieren. Abweichend von der Theorie ist dagegen das Auftreten von ungeraden Atomgewichten. Aus einem Vergleich des die Theorie bestätigenden Falles *Ne* und des nicht übereinstimmenden Falles *Cl* dürfte gefolgert werden können, daß die gegebene Elemententwicklung ohne weiteres für die Reihe der geradwertigen Elemente stimmt (für die direkt auch ein Prüfstein in der guten Anreihung der aktiven Zerfallsschemata gegeben ist), daß dagegen für die ungeradwertigen Elemente ein *H*-Atom weiter am Atombau beteiligt sein dürfte ($Li\,6{,}94 = Li\,5\,(He^{++} + H^{+})$ und $Li\,4\,(He^{++} + H_2^{++} + H^{+})$; Addition von He^{++} gibt *B* 9 und *B* 11 usw., Alternation der leichteren Reihe zwischen *P* und *Al* führt zu *Cl* 35 und *Cl* 39). Bestätigt aus Tabelle II werden durch die Astonschen Untersuchungen die Isotopen *Ne* 20, *Ne* 22; *Hg* 202, *Hg* 204; *X* 128, *X* 130; *Kr* 80, *Kr* 82, *Kr* 84. Die weiteren geraden Isotope *Kr* 78 und *Kr* 86 dürften wohl auf Verzweigungen der Reihe zurückgeführt werden, die sich, wie schon oben bemerkt, zurzeit nicht theoretisch vorhersehen lassen.

Stuttgart, Februar 1920.

(Eingegangen 2. März 1920.)

Über unipolare Leitung an Kristallen.

(Zweite Mitteilung[1]).

Von F. Streintz und A. Wesely.

Messungen an Silberglanz.

Der große Übergangswiderstand an den Grenzflächen dieses Erzes ließ erwarten, daß auch seine Unipolarität ungewöhnlich groß sein werde. Die Beobachtung bestätigt die Vermutung. Es gelingt leicht, den Kristall in die Preßvorrichtung derart einzuspannen, daß der schwächere Strom i_{12} fast völlig verschwindet. Man hat es demnach mit einer Ventilwirkung zu tun; der als Unipolarität eingeführte Ausdruck $U = \frac{i_{21} - i_{12}}{i_{21}}$ wird nahezu 1. Brauchbare Messungen an diesem Kristall zu erhalten, schien zunächst aussichtslos. Die Entladungen zwischen den Grenzschichten gehen bei größeren Stromstärken ununterbrochen mit einer Heftigkeit vor sich, daß die Nadel eines in den Stromkreis geschalteten Weston-Voltmeters in konvulsivische Zuckungen gerät. Sie flauen auch keineswegs ab, sondern dauern stunden- und tagelang unvermindert an. Denn wenn auch der Zeiger bei der Stromrichtung i_{12} vorübergehend sich auf Null einstellt; so erfährt er in jeder Minute bald kräftigere, bald schwächere Stöße. In der Richtung i_{21} stellt er sich überhaupt nicht ein, sondern führt eine scheerende Bewegung im Gebiet von vielen Teilstrichen aus. Es konnte aber festgestellt werden, daß mit abnehmender Stromstärke die Zuckungen an Lebhaftigkeit verlieren. Bei sehr kleinen Stromstärken i_{21}, etwa unter 50 Mikroweber, verschwinden sie gänzlich, so daß mit Hilfe eines empfindlichen Spiegelgalvanometers Strommessungen vorgenommen werden können. Die ruhige Einstellung nach der stärkeren Richtung i_{21} erfolgt in zwei bis drei Minuten. Diese Richtung soll als stabile oder nomale bezeichnet werden. In der Richtung i_{12}, der labilen oder anomalen, ist der Vorgang dem an Bleiglanz und Arsenkies geschilderten ähnlich. Zunächst ist die Ablenkung gleich groß wie bei der nomalen Richtung, ja nicht selten

1) Vgl. F. Streintz u. A. Wesely, diese Zeitschr. **21**, 42, 1920. Berichtigung hierzu: S. 44, Zeile 5 v. u. $\pi_1 = \pi_2 = (Cu + O)$ usw.

sogar größer. Dann dreht sich der Spiegel zunächst langsam, später beschleunigt gegen die Ruhelage hin. Schließlich verlangsamt sich die Bewegung wieder, bis nach Ablauf von mehreren Minuten die definitive Ruhelage gewissermaßen aperiodisch erreicht ist. Dieses aperiodische Verhalten erschwert einigermaßen die Messungen. Die Unipolarität unterliegt zeitlichen Schwankungen, und zwar nimmt sie in den meisten Fällen ab. Während einer Beobachtung kommt diese Änderung in der Weise zur Geltung, daß der Spiegel, nachdem er zur Ruhe gelangt ist, eine allerdings sehr langsame, zuweilen aussetzende Drehung im Ausmaß von ein bis zwei Teilstrichen nach der entgegengesetzten Seite ausführt, mithin eine Zunahme der Stromstärke angibt. Man verfährt am besten so: Nach dem Stromschluß in der labilen Richtung wartet man zunächst das Erwachen und Erstarken der Unipolarität ab. Nach mehreren Minuten, während deren man unverwandt durch das Fernrohr blickt, erhält man die kleinste Ablenkung von der Ruhelage. Wartet man weiter, so entsteht meist eine geringe Vergrößerung des Ausschlages, die von der zeitlichen Abnahme der Unipolarität herrührt. Nun wird, um Störungen durch thermoelektrische Kräfte zu beseitigen, die Stromrichtung in sämtlichen Drahtleitungen mit Ausnahme der kurzen zum Kristall führenden Zuleitung umgekehrt und sofort nach der Einstellung beobachtet. Die beiden Minimalausschläge dienen zur Ermittlung von i_{12}. Die Beobachtungen nach der stabilen Richtung i_{21}, die wenig Zeit erfordern, werden unmittelbar angeschlossen. Hier entsteht auch allmählich eine geringe Vergrößerung der Ablenkung, da die zeitliche Abnahme der Unipolarität mit einer Abnahme des Übergangswiderstandes w_{21} verknüpft ist.

Die Messungen an Silberglanz wurden zunächst zu dem Zwecke angestellt, um zu prüfen, ob sich ähnliche Beziehungen ergeben, wie die an Bleiglanz und Arsenkies ermittelten. Es stellte sich heraus, daß sich gerade mit diesem scheinbar so widerhaarigen Erze präzisere Beobachtungen anstellen ließen. Die Unipolarität des Silberglanzes ist nämlich noch bei den schwächsten Strömen sehr ansehnlich, auch dann, wenn man den Kristall ziemlich kräftig in die Presse spannt. Erschütterungen der Umgebung rufen, und darin liegt der Vorzug des Silberglanzsystems, keine Störung hervor.

Wichtig war es zu untersuchen, welche Metalle als Zuleitungen geeignet erscheinen. An Kupferblechen verschwindet die Unipolarität fast gänzlich, wenn die Schraube angezogen wird. Aus demselben Grunde waren Bleibleche auszuschließen, wie sich dies übrigens schon bei Bleiglanz und Arsenkies herausgestellt hatte. An Platin erhält man bald sehr große Unipolarität, bald keine. Messing hat sich als geeignet erwiesen. Nur ist es nicht gleichgültig, ob die Scheibchen daraus blank poliert oder längere Zeit vor den Messungen an der Luft gelegen und vielfach berührt worden waren. Blanke Zuleitungen sind untauglich. Durch entsprechende Einstellung läßt sich an ihnen allerdings auch große Unipolarität gewinnen, die aber nicht von Dauer ist. Zunächst entwickelt sich die Unipolarität in stufenweisen Absätzen, erreicht allmählich ein Maximum, um dann ziemlich gleichmäßig langsam abzunehmen, bis nach einer Stunde und darüber nur mehr Spuren von ihr vorhanden sind. Wird der Stromkreis geöffnet und nach einigen Stunden wieder geschlossen, dann entwickelt sich die Unipolarität in derselben Weise wie vorher, um auch in gleicher Weise wieder zu verschwinden. Für die Messungen eignete sich am besten das Material, das geraume Zeit mannigfaltigen Vorversuchen gedient hatte. Dann erhält man den eingangs geschilderten geeigneten Verlauf. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die Oberflächenbeschaffenheit des Kristalls.

Die Einstellung des Systems ist am günstigsten, wenn der in der stabilen Richtung gemessene Übergangswiderstand w_{21} in einem Stromkreise, der neben einer elektromotorischen Kraft von 2 Volt 100,000 Ohm enthält, nahe an 2000 Ohm bei 18° C beträgt. Ein größeres w_{21} vergrößert die Unipolarität, macht sie aber labiler, ein kleineres führt über kurz oder lang gleichfalls zu ihrem Verschwinden. Tritt dieser Fall ein, dann sinkt w_{21} auf hundert Ohm und darunter. Auf Grund dieser Erfahrung ist es niemals leicht, aber auch nicht allzu schwierig, eine geeignete Einstellung des Systems auszumitteln.

Die Temperatur übt keinen unwesentlichen Einfluß aus, hauptsächlich wohl wegen der Änderung von w_{21} mit ihr. Wahrscheinlich hängt aber auch der Druck der Schraube davon ab. Am Morgen, im noch nicht geheizten Arbeitsraume, sind die Unipolarität und ihre Störungen am größten, im Laufe des Tages, mit Zunahme der Temperatur, sank die erstere allmählich, die letzteren verschwanden. In den späteren Abendstunden nahm die Zimmertemperatur meist ab, U stieg. Die Presse war im Hohlraum eines Kastens mit doppelten Wänden und Doppeldeckel eingeschlossen. Am Nachmittag zeigte ein aus dem Innenraum hervorragendes Thermometer nur geringe Änderungen der Temperatur (17—18°) an.

Als Stromquellen dienten Akkumulatoren. Von diesen waren einige mit Säure von verschiedener Konzentration gefüllt. Durch ihre entsprechende Koppelung konnte jede beliebige elektromotorische Kraft hergestellt werden.

Die Widerstände bestanden aus Dekaden von 10×10 bis $10 \times 100\,000$ Ohm aufwärts. Im ganzen stand also Drahtwiderstand von 1,1111 Megohm zur Verfügung. Das Drehspulengalvanometer von Siemens & Halske mit 10 000 Ohm lag im geeigneten Nebenschluß. Die elektromotorischen Kräfte wurden bei jeder Messung mit Galvanometer oder Weston-Voltmeter festgestellt. Die Kristalle bestanden aus Kreiszylindern von 4,2 mm Höhe; die Durchmesser der eben geschliffenen Grundflächen betrugen 9,8 mm. Dr. Steeg und Reuter hatten sie geliefert; sie dienten seinerzeit zur Untersuchung des Übergangswiderstandes[1]).

Mit Rücksicht auf die zeitlichen Änderungen von U wurde jede Bestimmung verglichen. Das geschah in der Weise, daß ein Akkumulator in einem Stromkreise mit 10^5 Ohm und dem Kristall vor und nach jedem eben zu ermittelnden Werte auf die durch ihn hervorgerufene Unipolarität geprüft wurde in der Annahme, daß eine etwaige Änderung innerhalb einer derartigen Meßperiode linear mit der Zeit vor sich gegangen war. Ergab es sich, daß die beiden Vergleichsmessungen um mehr als 2 Proz. voneinander abwichen, dann wurde die betreffende Beobachtung durch eine neue ersetzt. Gewöhnlich trat dieser Fall ein, wenn das System kurz vorher neu eingestellt worden war. Die jeweiligen Stromstärken i_{12} wurden sämtlich dividiert durch den Mittelwert i'_{12} zweier einschließender Messungen mit einem Akkumulator in 10^5 Ohm. Diese reduzierten Stromstärken sollen mit $\overline{i_{12}}$ bezeichnet werden. Ebenso wurde das jeweilige reduzierte Verhältnis $\overline{i_{21}/i_{12}}$ und die reduzierte Unipolarität $\overline{U}$ gewonnen. Auf die Bestimmung von Temperaturen an den Grundflächen des Kristalles mußte zunächst wegen der geringen Stromstärken verzichtet werden.

Als Stromquelle diente ein Akkumulator von 2,018 Spannung. In den Stromkreis waren der Reihe nach 10^5 Ohm, dem als Normale gewählten Widerstand, bis 10^6 Ohm geschaltet.

Die Prüfung auf die Abhängigkeit von $\overline{i_{21}/i_{12}}$ und von $\overline{U}$ ergab:

Nr.	Weber $i'_{21} \times 10^6$	Weber $i'_{12} \times 10^6$	i'_{21}/i'_{12}	U'	Ohm $R \times 10^5$	Weber $i_{21} \times 10^6$	Weber $i_{12} \times 10^6$	i_{21}/i_{12}	U_R	$\overline{i_{12}}$	$\overline{i_{21}/i_{12}}$	$\overline{U_R}$	t^0C
1	19,34	12,46	1,552	0,356	1	19,34	12,46	1,552	0,356	1,000	1,000	1,000	17,6
2	19,04	12,46	1,550	0,355	2	9,67	7,21	1,342	0,254	0,579	0,866	0,721	17,5
3	19,31	12,40	1,557	0,358	3	6,44	5,06	1,272	0,214	0,408	0,817	0,600	17,4
4	19,30	12,35	1,563	0,360	4	4,83	3,94	1,226	0,183	0,319	0,784	0,508	17,4
5	19,34	12,37	1,563	0,360	5	3,86	3,37	1,145	0,127	0,272	0,732	0,350	17,4
6	19,45	12,35	1,575	0,365	6	3,25	2,86	1,136	0,120*)	0,231*)	0,721	0,329	17,3
7	19,45	12,26	1,586	0,369	7	2,77	2,48	1,117	0,105	0,202	0,705	0,284	17,3

*) Bei den in der 6. Reihe angegebenen Ziffern scheint eine geringe Störung vorhanden gewesen zu sein.

Mit abnehmender Stromstärke sinkt auch hier die Unipolarität.

Die Temperatur fiel an dem Abend, an dem die Beobachtungen angestellt worden sind, in etwa drei Stunden, diese Zeit nehmen die Messungen in Anspruch, von $17^0,6$ auf $17^0,3$. Dementsprechend wuchs U' von 0,356 bis 0,369, da w_{21} mit Abnahme der Temperatur zunimmt.

Bei geringeren Stromstärken, von $i_{21} = 2,4 \cdot 10^{-6}$ Weber abwärts, traten Unregelmäßigkeiten auf, bei $2 \cdot 10^{-6}$ Weber war die Unipolarität erstickt. Sie blieb dann auch bei höheren Stromstärken dauernd verschwunden; w_{21} war auf 60 Ohm gesunken. Das Verschwinden von U bei sehr schwachen Strömen trat wiederholt auf. Ein plötzlicher Zusammenbruch der Unipolarität findet aber auch nicht selten bei stärkeren Strömen statt. So kann es vorkommen, daß die Messung von i_{12} noch die zu gewärtigende Unipolarität zeigt, während es sich bei der unmittelbar daran geschlossenen Bestimmung von i_{21} herausstellt, daß sie einen Wert erreicht, der von derselben Größe ist, als wenn der Kristall aus dem Stromkreise entfernt worden wäre. Kehrt man dann den Strom wieder um, dann ist $i_{12} = i_{21}$, mithin $U = 0$ geworden. Das System muß neu eingestellt werden, bis der Widerstand w_{21} wieder nahezu 2000 Ohm erreicht hat.

Ein solcher vollständiger Zusammenbruch der Unipolarität ist ein besonderes Merkmal des Silberglanzsystems. Bei Bleiglanz und Arsenkies hat es sich gezeigt, daß U zuweilen sprungweisen Änderungen unterliegt, sich dann aber wieder konstant hält. Die Ursache lag wohl in geringen, zuweilen nicht wahrnehmbaren Erschütterungen des locker zwischen den Zuleitungen gelagerten Kristalls. Ein plötzliches Verschwinden der Unipolarität ohne Druck-

1) F. Streintz, diese Zeitschr. 13, 673, 1912.

änderung war an diesen Erzen niemals zu beobachten. Der labile Zustand des Silberglanzsystems ist offenbar trotz der kräftigen Einspannung des Kristalls derart groß, daß es für ihn, abgesehen von den durch die Temperatur hervorgerufenen geringfügigen Änderungen, nur einen Sprung in den vollkommen stabilen Zustand $i_{12} = i_{21}$ gibt.

Es soll hervorgehoben werden, daß, je niedriger die Stromstärke ist, um so später das Erwachen der Unipolarität beginnt. Dieses schwere Erwachen bereitet allmählich den Zusammenbruch vor. Aus diesem Grunde wird den Beobachtungen der Reihen 5—7 eine gewisse Unsicherheit aufgeprägt. Dieses Verhalten gab Veranlassung, eine Beobachtungsreihe bei größeren Stromstärken anzustellen. Die obere Grenze der Stromstärke durfte jedoch 50 Mikroweber nicht überschreiten, da, wie schon erwähnt worden ist, darüber hinaus das Galvanometer bereits das Vorhandensein von Entladungen zwischen den Grenzschichten anzeigt. Die nächste Tabelle zeigt das Ergebnis. Die reduzierten Werte beziehen sich wieder auf dieselbe Einheit.

Nr.	$i'_{21} \times 10^6$	$i'_{12} \times 10^6$	i'_{21}/i'_{12}	U'	$R \times 10^{-5}$	$i_{21} \times 10^6$	$i_{12} \times 10^6$	i_{21}/i_{12}	U_R	$\overline{i_{12}}$	$\overline{i_{21}/i_{12}}$	$\overline{U_R}$
8	20,31	12,17	1,670	0,401	1	20,31	12,17	1,670	0,401	1,000	1,000	1,000
9	20,32	12,64	1,607	0,378	0,9	22,10	13,29	1,662	0,399	1,050	1,035	1,054
10	20,36	12,91	1,574	0,366	0,8	24,66	14,71	1,678	0,403	1,140	1,064	1,100
11	20,34	13,01	1,561	0,360	0,7	28,20	16,54	1,704	0,414	1,271	1,091	1,150
12	20,37	13,18	1,545	0,353	0,6	32,63	18,98	1,720	0,418	1,440	1,113	1,183
13	20,37	13,29	1,531	0,348	0,5	39,24	21,70	1,808	0,447	1,633	1,180	1,283
14	20,38	13,32	1,528	0,346	0,4	48,63	25,01	1,943	0,487	1,879	1,272	1,408

Die Unipolarität U' unterlag diesmal stärkeren zeitlichen Änderungen. Sie sank im Verlaufe der Messungen von 0,40 auf 0,35 herab. Die Temperatur war gestiegen.

Das Diagramm $\overline{i_{21}}$ als Abszissen, $\overline{i_{21}/i_{12}}$ als Ordinaten (Fig. 1) zeigt für sämtliche Beobach-

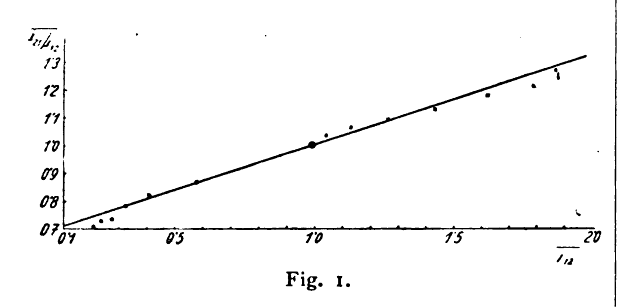


Fig. 1.

tungen 1 bis 14 den Zusammenhang zwischen beiden Größen. Die Werte der ersten Tabelle sind durch Kreischen, die der zweiten durch Kreuzchen gekennzeichnet. Schließt man die Reihen 5—7 aus, so zeigt sich Proportionalität zwischen beiden Koordinaten der Gleichung der Geraden gemäß:

$$\overline{i_{12}} = (\alpha + 1)\,\overline{i_{21}/i_{12}} - a,$$

worin

$$a = 2{,}270$$

ist.

Daraus ergibt sich für den Zusammenhang beider Stromstärken:

$$\overline{i_{12}} = -1{,}135 + \sqrt{1{,}288 + 3{,}270\,\overline{i_{21}}},$$

wenn für

$$\overline{i_{21}} = \frac{i_{21}}{i'_{21}}$$

gesetzt wird.

Der Grad der Übereinstimmung kann aus der nachstehenden Tabelle entnommen werden.

Nr.	$\overline{i_{21}}$	i_{12} beob.	i_{12} ber.
1	1,000	1,000	1,000
2	0,508	0,579	0,582
3	0,333	0,408	0,407
4	0,250	0,319	0,317
8	1,000	1,000	1,000
9	1,088	1,054	1,065
10	1,211	1,140	1,156
11	1,386	1,271	1,277
12	1,602	1,440	1,430
13	1,926	1,633	1,600
14	2,386	1,879	1,880

Die Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Zahlen übersteigen nirgends 2 Proz. Die in der zweiten Tabelle enthaltenen Werte schließen sich also vollkommen an die in der ersten an, obwohl die Ausgangswerte für U' 0,356 und 0,401 nicht unwesentlich voneinander verschieden waren.

In ebenso glänzender Weise findet sich die an Bleiglanz ermittelte Beziehung $UV = \text{Konst.}$ an Silberglanz bei elektromotorischen Kräften, die 2 Volt übersteigen, bestätigt. Die in der nächsten Tabelle angegebenen Werte enthalten in der letzten senkrechten Reihe die reduzierten Produkte $\overline{UV} = \frac{UV}{U'V'}$, worin V' die elektromotorische Kraft des Maß-Akkumulators darstellt.

Nr.	V' Volt	U'	$U'V'$	V Volt	U	UV	$\overline{UV}$	Δ vom Mittelw.
15	2,039	0,361	0,736	2,039	0,361	0,736	1,00	— 3
16	„	0,361	0,736	4,080	0,186	0,759	1,03	0
17	„	0,351	0,716	6,126	0,128	0,784	1,06	+ 3
18	„	0,335	0,683	8,168	0,0857	0,700	1,02	— 1
19	„	0,329	0,671	10,210	0,0706	0,721	1,07	+ 4
20	„	0,320	0,652	12,276	0,0542	0,665	1,02	— 1
21	„	0,312	0,637	14,350	0,0444	0,637	1,00	— 3
22	„	0,311	0,634	16,370	0,0404	0,661	1,04	+ 1
23	„	0,311	0,634	18,430	0,0352	0,649	1,02	— 1

$\overline{UV}_{\text{Mittel}} = 1{,}03$

Mit Zuziehung von Ballastwiderstand wurde die Stromstärke i_{21} mit großer Vorsicht bei allen Versuchen auf $20{,}4 \cdot 10^{-6}$ konstant erhalten. Die Temperatur war in der mehrstündigen Zeit, die zu den Beobachtungen erforderlich war, um $0{,}5^0$ C gestiegen.

Unmittelbar nach der letzten Beobachtung trat der Zusammenbruch ein. Da dieser nicht nur von V allein, sondern auch von U abhängig zu sein scheint, so läßt sich nicht feststellen, bei welchem Potential er erfolgt. Über 22 Volt war niemals Unipolarität vorhanden.

Bei geringen Potentialen muß das Produkt $\overline{UV}$ unter Eins sinken, da die Unipolarität U die Zahl 1 nicht überschreiten kann. Messungen bei geringen Potentialen ergeben:

Nr.	V' Volt	U'	$U'V'$	V Volt	U	UV	$\overline{UV}$
24	2,026	0,463	0,938	0,172	0,931	0,161	0,181
25	2,028	0,467	0,946	0,363	0,904	0,328	0,347
26	2,023	0,469	0,947	0,713	0,807	0,575	0,607
27	2,022	0,477	0,964	1,100	0,707	0,778	0,807
28	2,019	0,454	0,916	1,444	0,571	0,824	0,900

Die konstante Stromstärke betrug wieder etwas über 20 Mikroweber. Das Diagramm $V - \overline{UV}$ (Fig. 2) zeigt, daß der Wert $\overline{UV} = 1{,}03$ erst nahe bei 2 Volt erreicht wird.

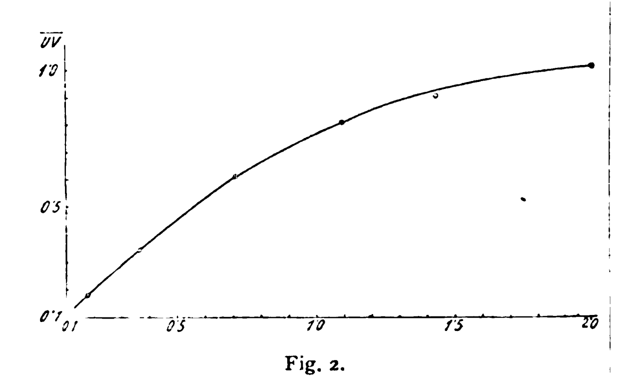


Fig. 2.

Als unipolar im wahren Sinne des Wortes müßte man das Leitvermögen bezeichnen, das nur in einer Stromrichtung entsteht, während es nach der anderen vollkommen fehlt (Ventilwirkung). Nach der gefundenen Beziehung zwischen den beiden Stromstärken erscheint es recht unwahrscheinlich, daß ein derartiger Zustand am Kristall jemals genau zu erreichen sein wird. Aus diesem Grunde dürfte es sich empfehlen, U als Strompolarität zu bezeichnen. Eine Verwechslung mit der galvanischen Polarisation steht nicht zu befürchten, da sich dieser Ausdruck, eine der restlichen Erinnerungen an Galvani, allgemein eingebürgert hat.

Ein zweiter Vorschlag geht dahin, für das Produkt $UV = W$ den Ausdruck Leistungspolarität einzuführen. $i_{21}V$ und $i_{12}V$ sind die in der Zeiteinheit im gesamten Stromkreise erzeugten Wärmen, wenn er einmal von i_{21}, einmal von i_{12} durchflossen wird. Da

$$UV = \frac{i_{21}V - i_{12}V}{i_{21}}$$

ist und i_{21} konstant erhalten wird, dürfte sich diese Bezeichnung eignen. Demnach ließe sich die Gleichung $UV =$ konst. in die Worte kleiden: Die Leistungspolarität ist unveränderlich von 2 Volt aufwärts.

Bewiesen ist der Satz für Bleiglanz und Silberglanz. Mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit kann behauptet werden, daß er auch für andere Kristalle, wenn sie polar leiten, Geltung haben wird. —

Der Übergangswiderstand w_{12} besteht aus der Summe zweier Widerstände, nämlich dem Widerstand an der „Anode" w'_{12} und dem an der „Kathode" w''_{12}. Dasselbe gilt für $w_{21} = w'_{21} + w''_{21}$ (vgl. Fig. 1 der ersten Mitteilung). Einzeln zu bestimmen sind w' und w'' nicht. Zuweilen tritt der Fall ein, daß beim Nachlassen der Einspannung sowohl w_{12} als w_{21} große Werte annehmen, ohne daß jedoch eine größere Polarität entsteht. Die Ursache liegt wohl darin, daß die Drucke an 1 und 2 gleichmäßig vermindert worden waren. Es erschien daher als nächste Aufgabe, einen der beiden Widerstände so herabzusetzen, daß er vernachlässigt werden konnte, also eine Versuchsanordnung zu treffen wie beim Kristall-

detektor, wo man gleichfalls durch elektrolytisches Verkupfern den Widerstand einer Verbindungsstelle, freilich in nicht einwandfreier Weise, zu beseitigen sucht. In viel genauerer Art als durch Verkupferung, Silberglanz läßt übrigens ein derartiges Verfahren gar nicht zu, kann der Widerstand auf einen zu vernachlässigenden Rest herabgesetzt werden, wenn man amalgamiertes Blei als Zuleitung anwendet. Zu diesem Zwecke wurde der Kristall an seinen Grundflächen sorgfältig poliert und dann sofort zwischen den Bleiblechen unter großem Drucke gepreßt. Als Widerstände in beiden Stromrichtungen, verglichen im Gefälle mit 0,1 Ohm, ergaben sich $w_{21} = 0,175$ und $w_{12} = 0,177$ Ohm. Diese Zahlen änderten sich innerhalb dreier Tage nicht. Befreit man dann den Silberglanzkristall vollständig von jeglichem Druck, so erfahren die Widerstände keine Veränderung; es fand sich $w_{21} = 0,176$ und $w_{12} = 0,178$ Ohm. Eine Spur von Polarität ist also noch immer vorhanden, da der Übergangswiderstand nicht völlig beseitigt ist. Denn für den Eigenwiderstand desselben Kristalls wurden 0,0039 Ohm ermittelt[1]). Mit Hilfe der Pinzette wird nunmehr ein Bleiblech vom Kristall losgelöst und durch Messing oder Platin ersetzt.

Das neue System zeigte zunächst, daß auch größere Stromstärken, etwa bis zu 0,004 Weber das Galvanometer durch Entladungen noch nicht in Aufruhr brachten, es zeigte weiter, daß es im vollkommen unbelasteten Zustand nahezu Ventilwirkung ($U = 0,995$) erzeugt, allein Messungen an ihm waren trotz verschiedener chemischer Angriffe auf die Messingoberfläche nicht anzustellen. Die Polarität tritt nur bei äußerst geringen Belastungen auf; in diesem Zustande fand sich bei 0,004 Weber w_{21} bei 20 Ohm. In der kürzesten Zeit war sie wieder verschwunden. An Bleiglanz herrschten dieselben Zustände, nur in etwas gemilderter Form.

Ein solches Ergebnis konnte nicht erwartet werden. Es schien doch wahrscheinlich, daß das System stabilisierter werde, wenn nur ein einseitiger Widerstand vorhanden ist. Statt dessen läßt es an Labilität nichts zu wünschen übrig! Wie ein Eisenbahnwagen erst mit einem Puffer vorne und einem hinten gesichert wird, so scheint auch hier nur durch doppelte Sicherung etwas zu erreichen sein. —

Waren also für Silberglanz die am Schlusse der ersten Mitteilung ausgesprochenen letzten Sätze bestätigt, so schien es wesentlich, auch die beiden ersten Sätze, die vom Einfluß der Temperatur handeln, daran zu prüfen. Zu diesem Zwecke mußten Ströme verwendet werden von einer Stärke, daß sie eine noch meßbare Temperaturänderung erzeugen konnten. Allerdings war mit Rücksicht auf die zu gewärtigenden heftigen Entladungserscheinungen in der anomalen Stromrichtung von vornherein auf die Ermittlung von Polaritäten zu verzichten. Es gelang festzustellen, daß auch die beiden ersten an Bleiglanz ermittelten Sätze Geltung haben. Mit Strömen von 0,1 Weber wurden diese Versuche ausgeführt. Um die an den Übergangsstellen entstehenden Temperaturen vergleichen zu können, mußte die Stromstärke mit Hilfe eines Schleifwiderstandes nach jeder Richtung gleich und möglichst konstant erhalten werden. Nach der Richtung i_{21} entstand keine Schwierigkeit, nach i_{12} dagegen gelang es auf längere Zeiten, das Voltmeter auf den bestimmten Teilstrich einspielen zu lassen, von dem als Basis die Stöße nach rechts und links erfolgten. Der Schmelz der Kristallgrundflächen hatte durch die hindurchgeleiteten Ströme an verschiedenen Stellen sichtlich gelitten; es zeigten sich kleine kariöse Veränderungen, geringe kraterartige Vertiefungen und dunkle Verfärbungen, meist am Rande.

Vielleicht war der Kristall dadurch entsprechend formiert worden, so daß noch ein Versuch gemacht werden konnte, ihn von dem einen seiner beiden Übergangswiderstände zu befreien. Der letzte Versuch in dieser Hinsicht mochte vielleicht daran gescheitert sein, daß der Kristall auch an der Grundfläche, die an die Messingscheibe zu liegen kam, blank gescheuert worden war. Nach der bereits angeführten Wahrnehmung erhält man an einer frisch polierten Fläche entweder keine oder eine äußerst labile Polarität. Es wurde daher jene Oberfläche, die für die Berührung mit der Messingscheibe bestimmt war, unverändert belassen und nur die an das amalgamierte Bleiblech zu passende poliert. Das konnte nun geschehen, nachdem es erwiesen war, daß der Übergangswiderstand an beiden Seiten als praktisch beseitigt anzusehen ist, wenn beide blanke Flächen mit Bleizuleitungen versehen worden waren.

Diese Hoffnung wurde nicht enttäuscht. Es entstand ein weit stabileres System, das manchen neuen Einblick in das Polaritätsproblem gewährte. Über die angestellten ausführlichen Versuche soll in einer nächsten Mitteilung im Zusammenhang mit Messungen in einem durch Bäder hergestellten Temperaturfelde berichtet werden.

Graz, 2. Physik. Institut der Techn. Hochschule, Weihnachten 1919.

(Eingegangen 2. Januar 1920.)

1) F. Streintz, a. a. O. S. 677.



Die Absorption in Spektrallinien im Lichte der Quantentheorie.

Von Chr. Füchtbauer.

Zur Bestimmung der für die Stärke der Absorption und für die Verbreiterung der Spektrallinien maßgebenden Größen wurde von Füchtbauer und Schell[1]) die Absorption der D-Linien des Natriums, von Füchtbauer und Hofmann[2]) diejenige der Cäsiumlinien 4555, 4593 und 3877, 3889 Å. untersucht, und zwar wurden die Absorptionskurven mit solcher Dispersion aufgenommen, daß neue Einzelheiten der Form der verbreiterten Linien hervortraten. Da damals keine befriedigende Theorie der Spektrallinien existierte, wurde, unter Anlehnung an die von Voigt gegebene Darstellung der Drudeschen Dispersionstheorie, die aus den Versuchen berechenbare, für die Stärke der Absorption maßgebende Größe als „Zahl der schwingungsfähigen Teilchen" bezeichnet. Herrn Debye verdanke ich den Rat, jene Messungen nunmehr im Sinn der Quantentheorie zu berechnen, wofür ich ihm auch an dieser Stelle herzlichst danken möchte. Im folgenden soll gezeigt werden, wie die Messungen, deren Ergebnisse natürlich von der neuen theoretischen Deutung nicht berührt werden, im Lichte der Quantentheorie aufzufassen sind, und welche neuen Konstanten der betreffenden Linien aus den Versuchen berechnet werden können.

Bei den Alkalihauptserien (Symbol $\frac{3}{2}s - mp$) bewegt sich das die Absorption veranlassende Elektron auf der natürlichen Bahn des unerregten Atoms, die durch den Term $\frac{3}{2}s$ gekennzeichnet ist. Unter der Einwirkung von solchem einfallenden Lichte, welches die Schwingungszahlen der Linie enthält, wird das Elektron nach der $m$ten Bahn geschleudert, wobei ein Energieelement $h\nu$ absorbiert wird, welches der Energiedifferenz beider Bahnen gleich ist. Wenn wir nun die absorbierte Energie durch $h\nu$ dividieren, erhalten wir die Zahl dieser Elementarprozesse. Wir berechnen also eine Zahl, welche angibt, wie oft sich bei den Atomen des betreffenden Volumens der beschriebene Elektronensprung ereignet.

Fällt im Schwingungszahlenbereich $d\nu$ die Strahlungsenergie $i\,d\nu$ pro Sekunde auf die Flächeneinheit des absorbierenden Dampfes, so wird pro Sekunde in einer Schicht von 1 cm² Querschnitt und der Dicke dx, also im Volumen dx, absorbiert die Energie

$$A_\nu d\nu = \frac{4\pi}{\lambda} n\varkappa i\,d\nu\,dx = \frac{4\pi\nu}{c} n\varkappa \cdot i\,d\nu \cdot dx. \quad (1)$$

(n Brechungsindex, $\varkappa$ Absorptionsindex, λ Wellenlänge im Vakuum.)

Da in dem sehr kleinen Bereich, in dem die Absorption der Linie merklich ist, ν als konstant zu betrachten ist, während $n\varkappa$ stark variiert, wird die gesamte innerhalb dieser verbreiterten Linie absorbierte Energie

$$A = \int A_\nu d\nu = \frac{4\pi\nu}{c} i\,dx \int_0^\infty n\varkappa\,d\nu, \quad (2)$$

demnach die Zahl der Quantensprünge pro Sekunde in der Schicht der Dicke dx, also in dx cm³

$$Z = \frac{A}{h\nu} = \frac{4\pi}{ch} i\,dx \int_0^\infty n\varkappa\,d\nu. \quad (3)$$

Andrerseits berechnet sich Z aus der gesuchten Größe P in folgender Weise: Die Wahrscheinlichkeit dafür, daß einem vom Lichte getroffenen Atom in der Sekunde der Quantensprung widerfährt, ist proportional der pro Zeiteinheit auf den cm² auffallenden[1]) Strahlungsintensität i, also gleich Pi. Ist N die Zahl solcher Atome im cm³, so beträgt in unserer Schicht von der Dicke dx und dem Querschnitt 1 die Zahl der absorbierenden Atome $N\,dx$. Also ist die Zahl unserer Quantensprünge, die sich in 1 Sekunde bei Durchstrahlung mit Licht der Intensität i in der Schicht dx ereignen:

$$Z = Pi\,N\,dx. \quad (4)$$

(3) und (4) gibt

$$P = \frac{4\pi}{chN} \int_0^\infty n\varkappa\,d\nu. \quad (5)$$

Der so definierte „Wahrscheinlichkeitsfaktor" P oder die „Häufigkeit" ist die fundamentale Größe, deren Bestimmung Aufgabe der Spektroskopie der Intensitäten ist. Die Werte der Größen P für verschiedene Linien dürften auch der passende Ausdruck für Gesetzmäßigkeiten sein, zu deren Aufstellung z. B. die Ausdehnung der für das 2. und 3. Paar der Hauptserie des Cäsiums gemachten Messungen auf weitere Linien der Serie führen wird. Diese Gesetzmäßigkeiten für P werden dann bei den Intensitäten eine ähnliche Rolle spielen wie die Serienformeln bei den Schwingungszahlen.

Die Definition für die P gilt natürlich nicht nur für die gewöhnliche Bahn des unerregten Atoms als Ausgangsbahn, sondern auch für

1) Diese Zeitschr. 14, 1164, 1913; Verh. d. D. Phys. Ges. 15, 974, 1913.
2) Ann. d. Phys. 43, 96, 1914.

1) Ebensogut hätten wir natürlich auch die Strahlungsdichte bei unsrer Definition von P verwenden können. Vgl. die Ableitung der Planckschen Formel bei A. Einstein, diese Zeitschr. 18, 121, 1917.

Ausgangsbahnen, die erst bei Erregung sich vorfinden (und auch für Bandenspektren). An die Stelle der Atomzahl N tritt nur die Zahl der Atome mit der bestimmten geänderten Bahn.

Anmerkung. Durch die Einwirkung der Nachbarmoleküle hat die Spektrallinie eine gewisse Breite erhalten, doch ist dieselbe sehr klein im Vergleich zu den Schwingungszahlen. Deshalb wird man, da ja die Intensität nicht annähernd so genau gemessen werden kann wie die Schwingungszahl, den Wahrscheinlichkeitsfaktor einer durch allerlei Einwirkungen auf die Bohrschen Bahnen ein klein wenig abgeänderten Linie, die also Starkeffekt, Verbreiterung, Zeemaneffekt oder dergl. zeigt, gleich dem der unbeeinflußten Linie setzen können. Würde das einmal nicht mehr genügen, so hätte man z. B. in unserem Falle den Wahrscheinlichkeitsfaktor P_ν als Funktion der Schwingungszahl ν im Bereich der verbreiterten Linie zu betrachten.

Berechnung von P.

Die gemessenen Absorptionskurven geben $n\varkappa$ als Funktion von ν. Wir werden also $\int n\varkappa\,d\nu$ am besten durch graphische Integration unserer Absorptionskurven erhalten. Mit einer für unseren Zweck ausreichenden Genauigkeit können wir es aber auch nach der bei Voigt[1]) stehenden Formel für $n\varkappa$ berechnen, indem wir $n\varkappa$ durch seinen beobachteten Maximalwert und die beobachtete Halbwertsbreite ν' ausdrücken[2]). Führt man nämlich in die dortige Formel (29) statt der Abkürzung ϱ den Maximalwert von $n\varkappa$ ein durch $\varrho = 2(n\varkappa)_m n_0 \nu_0 \nu'$, so wird

$$n\varkappa = (n\varkappa)_m \frac{\nu'^2}{4\mu^2 + \nu'^2}.$$

Bei Voigt und in unserer früheren Arbeit ist ν die Frequenz, hier die Schwingungszahl. Bezeichnen wir jetzt die Frequenz mit ω, so ist

$$\omega = 2\pi\nu;\ \mu = \omega - \omega_0 = 2\pi(\nu - \nu_0),$$

μ ist also die von der Frequenz ω_0 des Maximums aus gezählte Frequenz. Nunmehr wird

$$\int_0^\infty n\varkappa\,d\nu = \frac{(n\varkappa)_m}{2\pi}\int_{-2\pi\nu_0}^{\infty} \frac{\nu'^2}{4\mu_2 + \nu'^2}\,d\mu =$$

$$= \frac{(n\varkappa)_m}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\mu}{1 + \left(\frac{2\mu}{\nu'}\right)^2}.$$

Hierbei ist statt der sehr großen Zahl $-2\pi\nu_0$ als untere Grenze $-\infty$ genommen. Also mit

1) Magneto- und Elektrooptik, Leipzig 1908, § 72.

2) Wir schlagen hier meist den letzteren Weg ein, weil diese 2 Größen direkt unserer Veröffentlichung entnommen werden können. Unsere Kurven gestatten natürlich ebenso gut den ersten Weg.

$y = \frac{2\mu}{\nu'}$ wird

$$\int_0^\infty n\varkappa\,d\nu = \frac{(n\varkappa)_m\nu'}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dy}{1+y^2} = \frac{(n\varkappa)_m\nu'}{4}, \quad (6)$$

$$P = \frac{\pi(n\varkappa)_m\nu'}{chN}. \quad (7)$$

P ist also hier dem Produkt aus dem Maximalwert der die Absorption charakterisierenden Größe $n\varkappa$ und der Halbwertsbreite ν' proportional. Dieses Produkt bildet also einen vorläufig genügend genauen Ersatz des Integrals $\int n\varkappa\,d\nu$, welches nach unsrer Entwicklung eigentlich die Stärke der Absorption einer Linie ausdrückt und daher künftig der Berechnung der Serien für P zugrunde zu legen ist.

Zahlenwerte.

Im allgemeinen wird man für jede Serie nur einen Wert von P absolut zu berechnen brauchen, wozu man die Atomzahl, also hier den schwer zugänglichen Dampfdruck, nötig hat. Die Wahrscheinlichkeitsfaktoren der übrigen Linien wird man relativ zu jenem bestimmen können. Indem wir die Maximalintensität, welche bei meßbaren Dampfdrucken sonst viel zu hoch war, mittels sehr starker Verbreiterung, erzielt durch etwa 30 Atmosphären Druck, entsprechend verminderten, konnten wir die stärkere Linie des 1. ultravioletten Cäsiumpaares im Gebiet der auf meine Veranlassung von Kröner[1]) gemessenen Dampfdrucke untersuchen. Es war bei Platte 42, Nr. 8: $\lambda = 3876{,}7$ Å., $t = 233{,}25^0$; $(n\varkappa)_m = 3{,}74 \cdot 10^{-7}$; $\nu' = 84{,}36 \cdot 10^{11}$; ferner der Cäsiumdampfdruck $p' = 0{,}223$ mm, daraus die Atomzahl $N = 4{,}38 \cdot 10^{15}$, wobei die Loschmidtsche Zahl $2{,}77 \cdot 10^{19}$ gesetzt ist. Mit $h = 6{,}545 \cdot 10^{-27}$ ergibt sich schließlich $P = 1{,}15 \cdot 10^7$.

Auf der Auswertung dieser Platte, bei der infolge der außerordentlichen Breite der Linie die genauesten Werte zu erwarten sind, zeigt die Kurve der $n\varkappa$ und ν in der Tat einen vollkommen regelmäßigen Verlauf. Herr Dr. Hofmann war so liebenswürdig, nach dieser Platte das $\int_0^\infty n\varkappa\,d\nu$ graphisch auszuwerten. Es ergab sich $\int_0^\infty n\varkappa\,d\nu = 5{,}64 \cdot 10^5$. Dagegen geben obige Werte $\frac{(n\varkappa)_m\nu'}{4} = 7{,}89 \cdot 10^5$, während dieser Ausdruck nach Drude gleich $\int_0^\infty n\varkappa\,d\nu$ sein würde, (ν' Halbwertsbreite im Frequenzmaß!) Wie wir schon l. c. feststellten, weicht eben von der

1) A. Kröner, Ann. d. Phys. 40, 438, 1913.

symmetrischen Drudeschen die experimentelle Kurvenform erheblich ab. Natürlich muß letztere, wo sie wie hier genau vorliegt, zur Berechnung der P dienen. Aus obigem Wert $5{,}64 \cdot 10^6$ folgt nach (5) der Wert $P = 8{,}25 \cdot 10^6$.

Für diese Linie ist also die Aufgabe gelöst mit einer Genauigkeit, die wohl der Genauigkeit der Dampfdruckmessung entsprechen dürfte. An die Linie 3876,7 wird man daher durch relative Messungen die andern anschließen können.

Es seien noch die P für einige andere Linien absolut berechnet, obwohl hier wegen der außerordentlich weiten Extrapolation der Dampfdrucke nur die Größenordnung sicher ist. Jede Verbesserung der Dampfdruckkurve gibt genauere P-Werte.

Platte 47, Nr. 14. Cäsium $\lambda = 4593$ Å.; $t = 148{,}9^0$; $(n\varkappa)_m = 3{,}90 \cdot 10^{-7}$, $\nu' = 3{,}92 \cdot 10^{11}$. Dampfdruck extrapoliert $p' = 0{,}0036$ mm. Daraus $N = 8{,}49 \cdot 10^{13}$; schließlich $P = 2{,}88 \cdot 10^7$. Da wir l. c. gefunden hatten, daß die stärkere Linie dieses Paares 3 mal so stark ist wie die schwächere, so würde sich für die Linie 4555, die mit der vorigen vergleichbar ist, ergeben $P = 3 \cdot 2{,}88 \cdot 10^7 = 8{,}64 \cdot 10^7$, also in der Tat größer als bei 3876,7, wie es sein muß.

Platte 71, Nr. 4. Natrium 5890 Å.; $t = 174{,}3^0$; $(n\varkappa)_m = 4{,}24 \cdot 10^{-7}$; $\nu' = 3{,}46 \cdot 10^{11}$; Dampfdruck extrapoliert $p' = 10^{-4}$ mm, daraus

$$N = 2{,}22 \cdot 10^{12};$$

schließlich $P = 1{,}06 \cdot 10^9$. Aus dem Vergleich mit der vorigen Linie, die das 2. Glied der Cäsiumserie ist, erkennt man, daß die P der ersten Glieder der Hauptserien hier von gleicher Größenordnung sind. Denn die 2. Cäsiumlinie ist ca. 12 mal so schwach wie die 1. Natriumlinie, wobei jedesmal die stärkeren Linien der Paare verglichen sind. Von dieser Größenordnung (eher etwas größer) ist aber auch der Unterschied des 1. und 2. Hauptseriengliedes des nämlichen Metalles, woraus obige Folgerung fließt.

Schließlich seien noch die von mir mit dem Stufengitter nur qualitativ beobachteten Absorptionsbandenlinien des Jods berechnet, da sich immerhin aus dem Zusammenfließen benachbarter Linien das ν' und aus der Sichtbarkeit der Linien das $(n\varkappa)_m$, letzteres gleich demjenigen gut sichtbarer Linien genommen, schätzen läßt. Der Dampfdruck ist hier natürlich sicher. Es ist annähernd

$\lambda = 5461$; $(n\varkappa)_m = 3{,}5 \cdot 10^{-7}$; $\nu' = 0{,}6 \cdot 10^{11}$; $p =$ ca. 1 mm; $N = 3 \cdot 10^{16}$. Also $P = 10^4$.

Wenn auch hier nur qualitative Beobachtungen der Berechnung zugrunde liegen, so ist die Größenordnung doch bestimmt. Wir erhalten also für diese Bandenlinien einen außerordentlich viel kleinern Wahrscheinlichkeitsfaktor als für die 1. Linien der Hauptserien.

Tübingen, den 29. Januar 1920.

(Eingegangen 3. Februar 1920.)

Messungen der durchdringenden Strahlung in Kolberg.

Von K. Kähler.

Im Auftrage der Zentralstelle für Balneologie und mit Unterstützung des Preußischen Meteorologischen Instituts wurden von mir vom 1. April 1914 bis April 1915 Strahlungs- und Helligkeitsmessungen am Ostseestrand in Kolberg ausgeführt. Da ein empfindliches Fadenelektrometer für die anderen Beobachtungen notwendig war, ließ sich auch eine Messung der durchdringenden Strahlung ermöglichen. Bei der geringen Veränderlichkeit dieser Strahlung war eine Unterbrechung auf mehrere Stunden, wenn das Elektrometer seinen anderen Zwecken dienen mußte, ohne Bedenken.

Der im Herbst 1913 von Günther Tegetmeyer gelieferte Wulfsche Strahler[1]) (Nr. 3958) gehörte dem von Bergwitz und Kolhörster verbesserten Typ dieses Apparats an, wie er damals vor allem bei Ballonfahrten benutzt wurde. Der aufrecht stehende Meßzylinder, dessen Zinkwände, um nicht zu raschen Abfall zu erhalten, etwas verdickt waren, hatte einen wirksamen Meßraum von 2322 cm^2. Als Fäden dienten nicht wie sonst bestäubte Quarz-, sondern reine Platin(Wollaston-)fäden, die aber ebensowenig wie Quarz ganz frei von elastischen Nachwirkungen waren. Der Strahler besaß Temperaturkompensation und war außerdem nach dem Vorschlag von Dorno[2]) in einen mit Watte gefüllten Holzkasten eingebaut. Die Aufladung erfolgte mittelst einer magnetischen Ladevorrichtung von außen her, ebenso die Ablesung, so daß ein ruhiges und stetiges Arbeiten verbürgt war. Trotzdem traten bei den Vorversuchen in Potsdam bei stündlicher und auch noch bei zweistündlicher Ablesung Sprünge in den Werten auf, die zweifellos nicht reell waren: Die Ablesefehler überdeckten vollkommen den täglichen Gang. Es wurde deswegen auf die kürzeren Meßintervalle verzichtet und nur frühmorgens und abends abgelesen und aufgeladen.

1) C. Wulf, diese Zeitschr. 10, 152, 1909.
2) C. Dorno, diese Zeitschr. 14, 953, 1913.

Bei den Vorversuchen in Potsdam stand der Strahler zum Teil in einer englischen Hütte, etwa 2 m über dem Boden, auf der von Wald umgebenen Beobachtungswiese des Observatoriums, zum Teil in einem geräumigen Turmzimmer des Hauptgebäudes. Die Messungsreihe auf der Wiese, die sich ausschließlich auf Tagesablesungen stützt, ergab eine mittlere Trägererzeugung von 6,5 Trägern pro cm^3 und sec. Dabei ist der konstante, etwa 50mal so kleine Abfall bei abgeschlossenem Fadenraum, der gleichzeitig die Isolation nachprüft, schon abgezogen worden. Stand der Apparat statt in der englischen Hütte auf einem Steinpfeiler der Wiese 1 m über dem Boden, so erhöhte sich der Abfall auf 7,0 Träger cm^{-3} sec^{-1}. Die Messungsreihe im Turm lieferte den viel höheren Wert 9,2 Träger cm^{-3} sec^{-1}.

In Kolberg wurde Ende März 1914 der Wulfsche Strahler zunächst einige Tage in einem ziemlich engen Zimmer des Lotsenturms Kolbergermünde untergebracht. Als Mittel von 3 Tagen fand sich 9,8 Träger cm^{-3} sec^{-1}. Seit Anfang April wurde in einer englischen Hütte gemessen, die etwa 100 m östlich vom Lotsenturm auf einer erhöhten Stelle des Strandes stand. Es war beabsichtigt, hier ein Jahr hindurch zu beobachten. Nach Kriegsausbruch mußte jedoch, um das lästige, bisher von einem Gehilfen besorgte Hin- und Hertragen des Apparates zu vermeiden, im Beobachtungshäuschen weitergemessen werden, in dem die Strahlungs- und Helligkeitsmessungen vorgenommen wurden. Dieses aus Holz gebaute Häuschen befand sich etwa 20 m südlich vom Lotsenturm auf dem Fort Münde, das, im 18. Jahrhundert aus Ziegelsteinen errichtet, jetzt oben mit Erde bedeckt und mit Gras bewachsen ist. Der Strahler stand hier, etwa $1^1/_2$ m über dem Erdboden auf einer Seitenbank im Innern des Häuschens. Bereits Ende April 1914 war in einer Versuchsreihe der Wert der durchdringenden Strahlung an diesem Platze festgelegt worden. Für gute Erdung war ebenso wie auf dem Strandwall Sorge getragen. Mitte April 1915 mußten die Messungen wegen meiner militärischen Einberufung abgebrochen werden.

Mittelwerte. Das Beobachtungsmaterial zerfällt in zwei Teile, die Tages- und die Nachtwerte. Dabei überwiegen die Nachtwerte, weil tagsüber das Wulfelektrometer bisweilen zur Messung des ultravioletten Sonnenlichts verwandt werden mußte. In den Gesamtmitteln ist deswegen den Nachtwerten häufig größeres Gewicht beigelegt worden. Die kurze Anschlußreihe auf dem Fort vom April 1914 ergibt annähernd denselben Mittelwert wie die Messungen vom April 1915. Der Gesamtmittelwert der Fort-Beobachtungsreihe (August 1914 bis April 1915), 7,48 Träger cm^{-3} sec^{-1}, ist wahrscheinlich wegen der nahen Steinmassen des Forts etwas höher als der der Strandwallreihe, 7,05 Träger cm^{-3} sec^{-1}. Dabei ist der Wert für den Kolberger Strand noch etwas größer als der über dem Sandboden des Potsdamer Observatoriums gefundene.

Täglicher Gang. In der Tabelle sind die Monatsmittelwerte zusammengestellt, getrennt nach Tages- und Nachtwerten. Die Tages- und Nachtwerte unterscheiden sich in den Einzelwerten oft gar nicht, vor allem bei den Messungen auf dem Strandwall. Auf dem Fort sind während des größten Teils des Jahres die Tageswerte etwas höher und nur von Januar bis März etwas kleiner als die Nachtwerte. Dieser Befund deutet doch auf einen kleinen täglichen Gang der durchdringenden Strahlung hin, der in der wärmeren Jahreszeit seinen Höchstwert tags und den Tiefstwert nachts aufweist. Im Winter scheint die tägliche Schwankung aber umgekehrt zu sein. Es ist das zweifellos ein Einfluß der Sonnenstrahlung, bzw. der durch sie hervorgerufenen Temperatur- und Feuchtigkeitsverhältnisse des Erdbodens und der Atmosphäre. Die Registrierungen von Bergwitz[1]) in Braunschweig ergaben für den täglichen Gang in den Monaten Januar bis April ein flaches Minimum um Mittag, höhere Werte morgens und abends.

Monatsmittelwerte der durchdringenden Strahlung, Träger cm^{-3} sec^{-1}.

a) auf dem Strandwall.

Monat	Zahl der Tage*)	Tagwert	Nachtwert	Mittel
1914, April	18	7,13	7,10	7,11
Mai	26	7,06	7,02	7,04
Juni	26	7,03	7,03	7,03
Juli	25	7,12	7,08	7,10
August	19	6,93	6,98	6,96
Mittel	114	7,05	7,04	7,05

b) auf dem Fort Münde.

Monat	Zahl der Tage*)	Tagwert	Nachtwert	Mittel
1914, April	8	7,55	7,49	7,52
August	10	7,67	7,52	7,55
September	27	7,58	7,54	7,56
Oktober	23	7,64	7,51	7,56
November	29	7,53	7,49	7,51
Dezember	25	7,62	7,48	7,54
1915, Januar	31	7,40	7,45	7,43
Februar	23	7,37	7,39*	7,38*
März	25	7,30*	7,38	7,35
April	8	7,42	7,40	7,41
Mittel	209	7,51	7,46	7,48

*) bei den Nachtwerten.

1) K. Bergwitz, Elster- u. Geitel-Festschrift, S. 585, 1915.

Jährlicher Gang: Es ergibt sich auf dem Fort ein deutliches Maximum im August—September und ein Minimum im Februar—März. Auf dem Strandwall ist wieder diese offenbar ebenfalls dem Sonneneinfluß zuzuschreibende jährliche Schwankung nicht ausgeprägt. Auch bei den Fort-Messungen weichen ja April und August im Mittel wenig ab. Die Amplitude des jährlichen Ganges ist bei den Tageswerten der Monatsmittel etwa doppelt so groß als bei den Nachtwerten, 0,37 Träger cm^{-3} sec^{-1} und 0,16. Dasselbe fanden Hess und Kofler[1]) auf dem 2044 m hohen Obir: 0,53 und 0,37 Träger cm^{-3} sec^{-1} bei einem Gesamtmittelwert von 10,6. Auch der jährliche Gang auf dem Obir ist fast derselbe wie an der Küste zu Kolberg. Tageswerte Obir: max. Juli 10,84, min. März 10,40, Kolberg: max. August 7,67, min. März 7,30. Schon Mache[2]) fand bei seinen Beobachtungen in Wien höhere Werte im Sommer als im Winter. Bei der kurzen Registrierreihe von Bergwitz ergab sich eine Zunahme vom Januar zum April. Aus mehr als einjährigen Messungen, die sich nur auf die Tageswerte erstreckten, erhielt Gockel[3]) in Freiburg (Schweiz) den höchsten Wert: 12,2 im Juni, den tiefsten, 10,6 im Februar. Gockel erklärt den jährlichen Gang dadurch, daß der Anteil der Strahlung, der aus dem Erdboden stammt, infolge der Erwärmung und der geringeren Bodennässe im Sommer größer wird. In Kolberg ist auf dem Fort die Amplitude der jährlichen Schwankung fast 3mal so klein als in Freiburg. Am Strande selbst ist sie wahrscheinlich noch geringer. Sicherlich ist das auf den Einfluß des Meeres zurückzuführen, das nicht wie das Land durch Bodenatmung eine ständige Erneuerung des Emanationsgehalts in den untersten Luftschichten bewirken kann. Im Hochgebirge liegen die Bedingungen wegen des undurchlässigen Gesteinbodens und der langen Schneedecke ähnlich, so daß sich hierin wie in vielem anderen Küste und Gebirge gleichen.

Sonnenstrahlung und Bewölkung. Geht aus dem mittleren täglichen und jährlichen Gang der erhöhende Einfluß der Temperatur ganz deutlich hervor, so ist im einzelnen die Wirkung der Sonne oft gerade umgekehrt. So findet sich z. B. in der Zeit von April bis Juli 1914 auf dem Strandwall in allen 4 Monaten deutlich an insgesamt 19 ganz klaren Tagen ein um etwa 1 Proz. kleinerer Wert der durchdringenden Strahlung als im Monatsmittel, 7,00 statt 7,09. Auch auf dem Obir waren die Werte bei geringer Bewölkung kleiner als an trüben Tagen. Hess erklärt dies dadurch, daß bei bedecktem Himmel sich die Emanation in den untersten Luftschichten eher anreichert als bei wolkenlosem. Dazu mag noch kommen, daß andere Faktoren, z. B. steigender Luftdruck, die Bodenerwärmung der Sonne überdecken.

Niederschläge. Tage mit Niederschlägen ergeben bekanntlich eine Erhöhung der durchdringenden Strahlung. Auch in Kolberg trat das hervor. So erhält man für die 13 Regentage im April und Mai 1914 den Wert 7,17 gegenüber dem Monatsmittel 7,07; ebenso für 13 Regentage im Herbst 7,66 gegen 7,58. Die 14 Tage des Winters 1914/15, an denen Schnee fiel, zeigten dagegen keine Abweichung vom Mittelwert.

Luftdruck. Trennt man das Beobachtungsmaterial nach den absoluten Werten des Luftdrucks, so ergibt das kaum Unterschiede. Ebenso findet man in den Mittelwerten keinen Einfluß der Luftdruckänderungen auf die Strahlungswerte, oder sogar wie in der Zeit von April bis August 1914 eher noch größere Werte bei höherem Luftdruck. Ein Einfluß tritt erst hervor, wenn man sich auf die starken Luftdruckänderungen beschränkt. Es ist also ähnlich, wie bei der Registrierung des Emanationsgehalts der Bodenluft in Potsdam[1]), wo in den Mittelwerten beide Elemente, Emanationsgehalt und Luftdruckänderung parallel gehen, während sie in den Einzelschwankungen, vor allem den starken, entgegengesetzt sind. Legt man eine Luftdruckänderung von mindestens 4 Stunden lang 0,5 mm pro Stunde zugrunde, so trat in Kolberg nach der Registrierung eines Anäroidbarographen von September bis März 27mal stark fallendes und 30mal stark steigendes Barometer ein. Als Mittelwert der durchdringenden Strahlung bei stark fallendem Luftdruck ergibt sich 7,57, bei stark steigendem 7,42 Träger cm^{-3} sec^{-1}, also eine deutliche Erhöhung bei fallendem Barometer und umgekehrt. Auch in den meisten Einzelfällen (42 von 57) sind beide Elemente entgegengesetzt, bei fallendem Luftdruck ergibt das den Mittelwert 7,64, bei steigendem 7,40. Alle 15 Ausnahmefälle traten vom Januar bis März ein; dabei lag 11mal eine geschlossene Schneedecke über dem Land, in 3 weiteren Fällen teilweise noch Schnee in der weiteren Umgebung, so daß sich die Ausnahmen fast restlos dadurch

1) V. Hess und A. Kofler, Wiener Berichte **126**, 1394, 1917 und Meteor. Zeitschr. **35**, 157, 1918.
2) H. Mache, Wien. Ber. **119**, 61, 1910.
3) A. Gockel, diese Zeitschr. **16**, 351, 1915.

1) K. Kähler, diese Zeitschr. **15**, 27, 1914.

erklären, daß die Bodenluft am Austreten verhindert war.

Schon Mache fand bei seinen Beobachtungen in Wien denselben Einfluß der Luftdruckschwankungen, Gockel erhielt ihn in Freiburg nur in den Mittelwerten einiger Monate, nicht im einzelnen. Auf dem Obir ergab sich kein Einfluß. Das wird nicht wundernehmen, weil den größten Teil des Jahres Schnee liegt. Dagegen fanden Simpson und Wright[1]) sogar noch auf dem Ozean höhere Werte der durchdringenden Strahlung bei fallendem Barometer.

Wind. Die Windrichtung und Stärke wurde in Kolberg 3 mal täglich im Zusammenhang mit Kernzahlmessungen notiert. Ein Vergleich mit den Tageswerten der durchdringenden Strahlung ergibt kaum einen Einfluß. Man könnte vor allen Dingen an eine Einwirkung der wechselnden Land- und Seewinde denken. Eine Trennung des Materials nach diesem Gesichtspunkt ergab aber weder im Mai, wo dieser Wechsel am ausgeprägtesten war, noch im Juli und September Unterschiede. Man muß annehmen, daß die anderen Einflüsse die des Windes überdecken.

Zusammenfassung. Durch die Messungen der durchdringenden Strahlung an der pommerschen Küste ist gezeigt worden, daß die Strahlung dort sowohl einen schwachen täglichen Gang — während des größten Teils des Jahres etwas höhere Werte in den Tagesstunden — als auch einen deutlichen jährlichen Gang — Maximum im Spätsommer, Minimum im Spätwinter — aufweist. Jedoch ist die Amplitude der jährlichen Schwankung etwa 3 mal so klein als in Freiburg (Schweiz) und genau so gering wie auf dem Obir. Von den meteorologischen Einflüssen tritt außer der Erhöhung der Werte bei Regen deutlich die Einwirkung der großen Luftdruckschwankungen hervor.

1) G. C. Simpson und Wright, Proc. Roy. Soc. **85**, 175, 1911.

Potsdam, Januar 1920.

(Eingegangen 29. Januar 1920.)

Versuche zur Berührungselektrizität.

Von Alfred Coehn und Albert Lotz.

1. Um zu zeigen, daß zur Erzeugung beträchtlicher Aufladung zweier Nichtleiter keine Reibung erforderlich ist, sondern schon einmalige Berührung und Trennung ausreicht, benutzt man ein Paar von Nichtleitern, deren Dielektrizitätskonstanten weit auseinander liegen[1]). Damit die Berührung möglichst vollständig über beide genäherte Flächen hin stattfindet, verwendet man einen festen Nichtleiter, der in einen flüssigen eingetaucht wird. Um nun nach der Berührung die Trennung möglichst vollständig zu machen, werden die Stoffe so gewählt, daß der feste Stoff nach dem Herausheben aus der Flüssigkeit keine Benetzung zeigt. Allen drei Bedingungen genügen Paraffin und Wasser. Die bei ihrer Berührung auftretenden Ladungserscheinungen sind ausführlich studiert worden[2]). Hervorgehoben sei daraus, daß die Aufladung des Paraffins bei wiederholtem Eintauchen ansteigt bis zur Erreichung eines Maximums, das bei fortgesetztem Eintauchen nicht mehr verändert wird.

Zur Demonstration dient eine Metallkugel von ca. 3 cm Durchmesser, die an einem Metallstab gehalten wird. Man versieht die Kugel mit einem Paraffinüberzug durch kurzes Eintauchen in geschmolzenes — nicht überhitztes — Paraffin und befestigt sie (Fig. 1) an einem

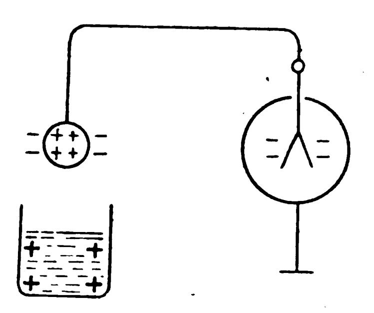


Fig. 1.

Elektroskop. Nach einmaligem Einsenken in destilliertes Wasser zeigt sie sich stark geladen. Man stellt fest, daß die Blättchen mit negativer Ladung divergieren. Die Ladungen verteilen sich wie in der Fig. 1 angegeben.

Man kann die Ladung, wie erwähnt, verstärken, indem man das Elektroskop durch kurze Berührung ableitet und die Kugel in dieser Weise mehrmals eintaucht. Hebt man nach solcher wiederholten Aufladung des Paraffins die Divergenz der Blättchen durch kurze Berührung wieder auf, so bleibt die positive Ladung der Metallkugel bestehen, da sie von der negativen des Paraffins gehalten wird. Entfernt man aber diese negative Ladung der Paraffinoberfläche durch Nähern einer kleinen Flamme, so verteilt sich die positive Ladung der Kugel über den metallischen

1) A. Coehn, Ann. d. Phys. **64**, 217, 1898; A. Coehn u. U. Raydt, ebenda **30**, 777, 1909.
2) A. Coehn u. J. Franken, Ann. d. Phys. **48**, 1005, 1915.

Leiter und das Elektroskop divergiert wieder. Diesmal aber mit positivem Ausschlag.

(Durch die Anwesenheit von Elektrolyten wird — wie in der zitierten Arbeit ausführlich dargelegt ist — der Sinn der Ladung zwischen Paraffin und Wasser umgekehrt. Es gilt dann nicht mehr das Ladungsgesetz für Dielektrika, wonach Stoffe von höherer Dielektrizitätskonstante sich positiv laden bei der Berührung mit Stoffen von kleinerer. Man kann also die beschriebenen Erscheinungen mit umgekehrtem Vorzeichen erhalten, wenn man dem Wasser etwas verdünnte Schwefelsäure zusetzt.)

2. Die gegenseitige Aufladung von Wasser und Paraffin läßt sich in einem einfachen Projektionsversuch zeigen. Eine Metallrinne mit angelötetem Metallstab wird mit Paraffin überzogen und an einem Elektroskop befestigt. Man läßt destilliertes Wasser tropfenweise auf die Rinne fallen und in ein Metallschälchen gelangen, das mit einem zweiten Elektroskop verbunden ist (Fig. 2). Beide Elektroskope zeigen

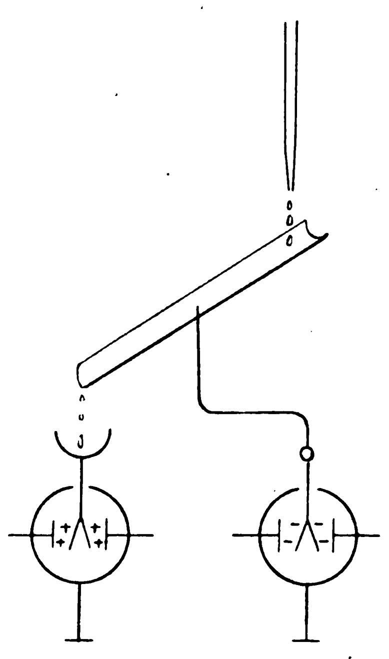


Fig. 2.

Ausschläge, die mit jedem Tropfen zunehmen, bis die Blättchen seitlich anschlagen und sich dadurch entladen, worauf das Anwachsen der Ladung wieder einsetzt. Beim Nähern eines geriebenen Hartgummistabes erweist sich das erste Elektroskop als negativ, das zweite als positiv geladen.

Zeigt sich die Paraffinfläche mit der Zeit unwirksam, indem sie das Maximum der Aufladung erreicht hat, so entlädt man sie mit einem kontinuierlichen Wasserstrahl oder durch Überfahren mit einer Flamme.

3. Der Unterschied wahrer und freier Elektrizität auf einem Dielektrikum läßt sich zeigen, indem man eine dünne Paraffinplatte auf einer Seite durch in Tropfen darüber fallendes Wasser lädt. Annähern an ein geladenes Elektroskop zeigt, daß die getroffene Seite negativ ist. Aber auch die nicht vom Wasser getroffene Seite erweist sich als negativ. Jene trägt eine nach der Berührung mit dem Wasser hinterbleibende wahre Ladung, diese eine durch dielektrische Polarisation erzeugte freie Ladung. Wird die wahre Elektrizität der vom Wasser getroffenen Seite durch Ableuchten entladen, so ist damit auch die freie Ladung der anderen Seite verschwunden. Wird aber in einem zweiten Versuch die freie Elektrizität der vom Wasser nicht getroffenen Seite entladen, so bleibt die wahre Elektrizität der anderen Seite erhalten.

4. Die Paraffinplatte erlaubt, mit einem reinen Dielektrikum eine Art Analogon zu dem bekannten Versuch mit der Franklinschen Tafel zu geben. Entlädt man zuerst die vom Wasser nicht getroffene Seite mit der Flamme, und darauf auch die getroffene, so zeigt sich die erstere positiv. Leuchtet man jetzt diese ab, so wird die andere negativ und so fort bis die anfangs durch Berührung mit dem Wasser aufgebrachte negative Ladung verbraucht ist.

5. Es ist eine bekannte Erscheinung, daß eine ein verdünntes Gas enthaltende Glaskugel beim Reiben leuchtet. Die Erscheinung wird weithin erkennbar, wenn man ein evakuiertes Glasgefäß, etwa eine durchgebrannte Glühlampe, die mit Hilfe ihrer Fassung auf der Achse eines kleinen Elektromotors angebracht ist, rotieren läßt und sie dabei an einem Stück Gummi vorübergleiten läßt. Das Innere leuchtet dabei hell auf, wobei der als Träger der Fäden dienende Glasstab der Metallfadenlampe stark fluoresziert. Farbe und Intensität des Leuchtens hängen von Natur und Druck des Gasrestes ab. Eine Azolampe leuchtet tiefblau, eine Neonlampe (Glimmlampe Pintsch) intensiv rot. Das stärkere Leuchten dieser Lampe ist vermutlich darauf zurückzuführen, daß die Elektronen an den Molekülen des Edelgases, da es keine Elektronenaffinität besitzt, bei nichtionisierenden Zusammenstößen ohne Energieverlust reflektiert werden und damit fähig bleiben, auf weiteren freien Wegen die zur Ionisierung von Gasmolekülen erforderliche Geschwindigkeit zu erwerben[1]).

6. Die Verfolgung der Erscheinung des

1) J. Franck u. G. Hertz, diese Zeitschr. 17, 409, 1916.

Leuchtens mäßig evakuierter Glas- oder Quarzröhren beim Reiben der Außenwand führte zu der Frage, ob sich eine erhebliche Zunahme der Leitfähigkeit im Inneren nachweisen ließe. Die geeignetste Anordnung dafür bietet eine gewöhnliche Quarzquecksilberlampe von Heraeus. Legt man an die Pole die zum Brennen erforderliche Spannung und reibt man etwa mit einem weichen Gummilappen das Quarzrohr, so zündet die Lampe.

Geschieht das Zünden nicht sofort, so erreicht man es nach ganz kurzem durch Kippen eingeleitetem Brennen. Die Zündung erfolgt dann schon durch einmaliges leichtes Überfahren mit dem Gummi zur kathodischen Quecksilberfläche hin, und zwar besonders leicht, wenn man das Quecksilber über die Kathodenverengerung in das Leuchtrohr durch Schrägstellen hineinreichen läßt.

Noch überraschender ist es, daß man die Lampe auch zünden kann durch bloßes Heranführen eines geriebenen Glas- oder besser noch Quarzstabes — also einer positiven Ladung — gegen die Endfläche des kathodischen Quecksilbers. Dagegen findet kein Zünden statt beim Nähern eines geriebenen Hartgummistabes, also einer negativen Ladung.

Auch aus weiterer Entfernung läßt sich die Zündung bewirken, wenn man die Ladung einer Influenzmaschine entnimmt. Heranführen eines positiv geladenen Drahtes bewirkt bei einer kleinen Influenzmaschine Zündung aus mehreren Dezimetern Entfernung. Heranführen der negativen Ladung tut es nicht. Dagegen bewirkt rasches Fortführen des negativ geladenen Drahtes dasselbe wie Heranführen des positiven.

Die Deutung des Vorganges liegt offenbar darin, daß das durch die herangeführte Ladung erzeugte Feld die gleiche Richtung haben muß wie dasjenige, welches den Lichtbogen unterhalten soll. Für dieses Feld ist die Quecksilberkathode eine Stelle einmündender Kraftlinien. Ebenso aber auch für das Feld, das durch Nähern des positiv geladenen Stabes an die kathodische Quecksilberfläche entsteht.

In dem Lampenraum sind von vornherein Elektronen, wenn auch in geringer Zahl vorhanden. Sie bewegen sich in dem an der Lampe liegenden Felde von der Kathode zur Anode. Zündung erfolgt, wenn sie dabei ausreichende Beschleunigung bekommen, um Gasmoleküle zu ionisieren. Diese Beschleunigung der Elektronen in der Richtung von der Kathode fort erfolgt aber durch die genäherte positive Ladung. Dagegen reicht bei der geringen Geschwindigkeit der positiven Gasreste eine der Anode genäherte negative Ladung nicht aus, um den dort abgestoßenen positiven Trägern auf dem Wege zur Kathode eine zur Ionisierung von Molekülen ausreichende Geschwindigkeit zu erteilen.

Wird eine Stelle des Quarzrohres durch Berühren mit dem geladenen Quarzstab positiv aufgeladen, so werden Elektronen bzw. negative Träger dorthin angezogen und damit für die Zündung unwirksam. Das Nähern des positiv geladenen Stabes hat dann zumeist keinen Erfolg.

Wird aber das Quarzrohr durch Berühren mit dem geriebenen Ebonitstab negativ geladen, so können dort Elektronen nicht an die Wand gelangen und die Zündung durch den genäherten positiven Quarzstab geht besonders leicht vor sich.

Wieder wirkt hier Fortführung negativer Ladung wie Heranführen positiver: Bei mit dem Ebonitstab negativ aufgeladenem Quarzrohr erfolgt häufig schon Zündung, wenn man die Grenzstelle des Kathodenquecksilbers ganz kurz mit dem Finger berührt.

Eine ausführliche Diskussion der Vorgänge bei der Zündung der Quecksilberlampe wird die Dissertation von A. Lotz enthalten.

Göttingen, Photochemische Abteilung des Physikalisch-chemischen Instituts, März 1920.

(Eingegangen 10. April 1920.)

Statistik mit Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

(Bemerkung zu Arbeiten von Herrn Fürth.)

Von Eberhard Buchwald.

Zählt man in gleichen Zeitabständen τ die Teilchen im abgegrenzten Volumen ΔV eines Kolloids, so ist nach v. Smoluchowski[1]) der quadratische Mittelwert der Differenzen aufeinanderfolgender Beobachtungen

$$\overline{\Delta^2} = 2\nu P, \qquad (1)$$

wo ν den Mittelwert der Teilchenzahl und P die Wahrscheinlichkeit für ein ursprünglich irgendwo in ΔV befindliches Teilchen bedeutet, nach Ablauf von τ nicht mehr darin zu sein. P, eine Funktion von τ, der Gestalt und Größe von ΔV und dem Diffusionskoeffizienten D, ist ein echter Bruch und wird 1 (Gewißheit des Austritts) in dem Grenzfalle, daß τ genügend groß ist, um die einzelnen Beobachtungen voneinander unabhängig zu machen. Allgemein kann es als Maß für die Wahrscheinlichkeits-

1) M. v. Smoluchowski, Wien. Ber. **123**, IIa, 2381, 1915; **124**, IIa, 339, 1915; diese Zeitschr. **17**, 557 u. 585, 1916.

nachwirkung oder Wahrscheinlichkeitskoppelung aufeinanderfolgender Ablesungen gelten.

Die Formel (1) ist — neben andern der Smoluchowskischen Theorie — von Herrn Fürth[1]) an einer statistischen Reihe von 505 Beobachtungen,

0001112122....,

bestätigt worden, gewonnen durch regelmäßig wiederholte Zählung der Fußgänger, die sich auf dem Fußsteige vor einer Hausfront A befinden. Die Reihe ist deswegen von Interesse, weil τ und A so gewählt sind ($\tau = 5$ Sekunden, $A = 24$ m), daß eine starke Wahrscheinlichkeitsnachwirkung besteht, daß also ein Fußgänger, der sich bei einer Zählung in A aufhält, mit erheblicher Wahrscheinlichkeit auch bei der nächsten noch darin verweilt. Die Reihe ergibt $\overline{\Delta^2} = 1{,}006$, $\nu = 1{,}592$ und damit nach (1) $P = 0{,}316$, einen Wert, der sich nicht nur den übrigen Formeln der Theorie gut einfügt, sondern auch unmittelbar verifiziert werden kann. Schreibt man nämlich allen Fußgängern die gleiche Geschwindigkeit v zu, so werden diejenigen innerhalb des nächsten τ die Hausfront verlassen, die sich auf dem (in der Bewegungsrichtung letzten) Stück $v\tau$ befinden, und P ist demnach gleich dem Verhältnis dieses „günstigen" Stücks zur Gesamtstrecke A:

$$P = \frac{v\tau}{A}. \qquad (2)$$

Mit $v = 1{,}39$ m/sec (5 km in der Stunde) wird $P = 0{,}290$.

Schließlich hat Fürth gezeigt, daß beim Durcheinanderschütteln der Reihenziffern die Nachwirkung verschwindet und P annähernd 1 wird. Man kann die Reihe aber noch weiter verwerten, nämlich den allmählichen Übergang von der starken Nachwirkung 0,316 zur fehlenden Nachwirkung 1 beobachten, wenn man die um 2τ, 3τ, 4τ ... auseinanderstehenden Werte zu Reihen zusammenfaßt. Gleichung (2) läßt vermuten, daß bei 3τ noch eine geringe Nachwirkung stattfinden und von 4τ ab jede Nachwirkung verschwinden wird. Man berechnet jedoch aus der Reihe

für	$2\tau:\overline{\Delta^2}$	$= 2{,}036$	und P	$= 0{,}639$
„	3τ	$= 2{,}496$	„	$= 0{,}784$
„	4τ	$= 2{,}571$	„	$= 0{,}807$
„	5τ	$= 2{,}590$	„	$= 0{,}814$
„	6τ	$= 2{,}555$	„	$= 0{,}803$
„	7τ	$= 2{,}683$	„	$= 0{,}843$

Diesen viel langsameren Anstieg wird man darauf zurückführen, daß v nicht einheitlich ist; sind merklich geringere Geschwindigkeiten vertreten, so muß auch bei größeren Beobachtungsabständen noch eine Wahrscheinlichkeitskoppelung zu spüren sein. In Ermangelung näherer Anhaltspunkte versuchen wir den Ansatz der Maxwellschen Verteilung und schreiben unter der Annahme, daß nur eine Bewegungsrichtung auftritt, als Wahrscheinlichkeit einer Geschwindigkeit zwischen v und $v + dv$

$$dW_v = \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv \qquad (3)$$

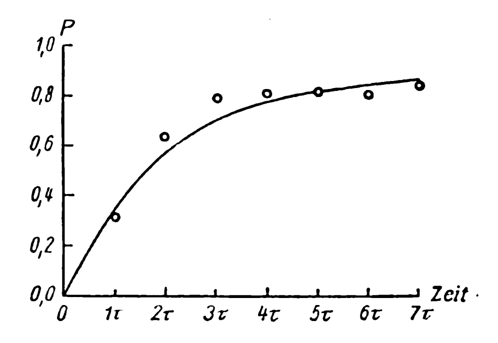
(α = constans). Nun hat die Austrittswahrscheinlichkeit P_v für einen Fußgänger mit der Geschwindigkeit v den Wert $\frac{v\tau}{A}$, solange $v\tau < A$, und den Wert 1, sobald $v\tau > A$. Diese beiden Gebiete hat man zu trennen, wenn man durch Multiplizieren eines jeden P_v mit seiner Wahrscheinlichkeit (3) und folgende Integration das gesuchte P bildet. Es wird

$$P = \frac{2\tau}{\alpha\sqrt{\pi}A}\int_0^{\frac{A}{\tau}} v e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} . dv + \frac{2}{\alpha\sqrt{\pi}}\int_{\frac{A}{\tau}}^{\infty} e^{-\frac{v^2}{\alpha^2}} dv$$

$$P = \frac{\tau\alpha}{\sqrt{\pi}A}\left\{1 - e^{-\left(\frac{A}{\tau A}\right)^2}\right\} + \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{A}{\tau\alpha}}^{\infty} e^{-t^2} dt. \qquad (4)$$

Für α kann die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ eingeführt werden, die sich nach (3) zu $\bar{v} = \frac{\alpha}{\sqrt{\pi}}$ ergibt.

Berechnet man nach Gleichung (4) die P-Werte für verschiedene τ unter Zugrundelegung des Wertes $\bar{v} = 1{,}6$ m/sec ($5^3/_4$ km in der Stunde), so ergibt sich die in der Figur ausgezogene Kurve. Gleichzeitig sind die empirisch gefundenen Werte eingetragen. Die Übereinstimmung ist im allgemeinen befriedigend. Die



1) R. Fürth, diese Zeitschr. **19**, 421, 1918; **20**, 21, 1919.

zufälligen Abweichungen lassen sich durch die begrenzte Länge der Reihe, die systematischen durch das willkürlich angenommene Verteilungsgesetz erklären.

Gleichung (4) hat genau dieselbe Form wie der Ausdruck für P, den v. Smoluchowski[1]) für den Fall berechnet hat, daß es sich um den Austritt eines Kolloidteilchens aus einer dünnen, planparallelen Schicht innerhalb eines größeren Flüssigkeitsvolumens oder aus einem Streifen eines zwischen Deckgläsern eingeschlossenen Präparats handelt. An Stelle unseres

$$\frac{A}{\tau\alpha} = \frac{A}{\tau\sqrt{\pi}\,\bar{v}}$$

steht bei v. Smoluchowski

$$\beta = \frac{h}{2\sqrt{D\tau}},$$

wo h die Schichtdicke und D den Diffusionskoeffizienten bezeichnet. Auch diese beiden Ausdrücke lassen sich noch in Übereinstimmung setzen. Bekanntlich ist

$$D = \frac{1}{2}\frac{\overline{\Delta^2}}{\tau}$$

1) M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. a. a. O. S. 563, Gleichung (16).

($\overline{\Delta^2}$ mittleres Verschiebungsquadrat in einer Richtung während τ)

$$= \frac{|\overline{\Delta}|^2}{\tau}\frac{\pi}{4}$$

($|\overline{\Delta}|$ mittlere absolute Verschiebung in einer Richtung während τ), also

$$\beta = \frac{h}{\sqrt{\pi}\,|\overline{\Delta}|},$$

was mit unserm $\dfrac{A}{\sqrt{\pi}\,\tau\,\bar{v}}$ übereinstimmt, wenn man h mit A identifiziert und $|\overline{\Delta}|$ durch das Produkt von τ in die mittlere Geschwindigkeit $\bar{v}$ ersetzt. Infolgedessen die Übereinstimmung unsrer Figur mit der Fig. 2, S. 19, in Westgrens Arbeit „Die Veränderungsgeschwindigkeit der lokalen Teilchenkonzentration in kolloiden Systemen“[1]). Die Beziehungen des Fürthschen Beispiels zur Kolloidstatistik sind darnach enger, als es nach den Fürthschen Arbeiten selbst den Anschein hat.

1) A. Westgren, Arch. f. Mat., Astr. och Fys., Svensk. Vet. Ak. 11, Nr. 14, 1916.

Breslau, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 15. Januar 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Der „supraleitende Zustand“ von Metallen.

Von C. A. Crommelin.

(Schluß.)

Wir haben uns bisher auf eine Betrachtung des experimentellen Tatsachenmaterials beschränkt. Ich möchte nun eine kurze Übersicht über die theoretischen Arbeiten geben, die in Anlehnung an die Ergebnisse von Kamerlingh Onnes, von Nernst[28]), Lindemann[29]), Wien[27]), J. J. Thomson[26]), Keesom[30]) und Kamerlingh Onnes[11]) selbst entwickelt sind. Ich muß dazu kurz auf die ältere Elektronentheorie der Metalle zurückgehen, wie sie namentlich von Riecke[35]), Drude[36]), Thomson[39]) und Lorentz[37]) [37a]) entwickelt ist. Diese Theorie betrifft allerlei Erscheinungen in Metallen, bei denen die Elektronen eine Rolle spielen, z. B. die Elektrizitätsleitung, den Thomsoneffekt, den Peltiereffekt, die thermoelektrischen Erscheinungen. Wir möchten uns jedoch auf die Wiedergabe einiger Resultate der Elektrizitätsleitung beschränken, hauptsächlich in Anlehnung an Betrachtungen von Drude. Nach seiner Theorie besteht ein Metall aus Atomen, die um eine Gleichgewichtslage schwingen können, und frei dazwischen laufenden und mit den Atomen zusammenstoßenden Elektronen. Diese verhalten sich mutatis mutandis ganz wie ein Gas, nehmen teil an der Wärmebewegung und zeigen eine mittlere kinetische Energie, die ebenso groß ist, wie die eines Atoms oder Moleküls bei derselben Temperatur. Die Geschwindigkeiten der Elektronen sollen also sehr groß sein, doch werden die Elektrone durch die fortdauernden Stöße an die Metallatome nicht imstande sein, große Wege geradewegs zurückzulegen; daher spricht man auch, wie in der kinetischen Gastheorie, von einer mittleren freien Weglänge der Elektronen. Unterliegen die Elektronen keinem elektrischen Feld, so sollen sie vollkommen unregelmäßig zwischen den Metallatomen hin und her fliegen und so keine Elektrizität in einer Richtung transportieren. Wirkt jedoch ein elektrisches Feld auf die Elektronen ein, so sollen sie sich vor allem in einer bestimmten Richtung, nämlich längs den elektrischen Kraftlinien

bewegen und so den elektrischen Strom zustande bringen.

Ausgehend von diesen verhältnismäßig einfachen Vorstellungen konnte Drude für das elektrische Leitungsvermögen den folgenden Ausdruck ableiten:

$$\sigma = e^2 \frac{Nl}{2mu}, \tag{1}$$

worin u die mittlere Geschwindigkeit eines Elektrons zufolge seiner Wärmebewegung, l die mittlere freie Weglänge, N die Zahl der freien Elektronen pro Volumeneinheit, e die Ladung und m die Masse eines Elektrons bedeuten.

In Verfolgung einer der oben genannten Vorstellungen, setzt Drude

$$\tfrac{1}{2} m u^2 = \alpha T,$$

kümmert sich also um eine Geschwindigkeitsverteilung nicht und erhält:

$$\sigma = e^2 \frac{Nl \cdot u}{4\alpha T}. \tag{2}$$

Es versteht sich wohl von selbst, daß wir uns nur auf die Angabe der mit unsern Arbeiten im Zusammenhang stehenden Ergebnisse beschränken und so an vielem mit Stillschweigen vorübergehen: ein bekanntes und schönes Ergebnis dieser Theorie möchte ich aber noch angeben, nämlich, daß sie Rechenschaft gibt von dem empirischen Gesetz von Wiedemann und Franz, demzufolge das Verhältnis des Wärmeleitvermögens zum elektrischen Leitvermögen bei einer bestimmten Temperatur für alle Metalle dasselbe ist. Hierauf werden wir im folgenden noch zu sprechen kommen.

Daß die Theorie von Drude und die damit verwandten Theorien keineswegs selbst qualitativ Rechenschaft geben können von dem Widerstand der Metalle bei Heliumtemperaturen, kann man daraus schließen, daß die kinetische Energie der Elektronen beim absoluten Nullpunkt Null ist und somit niemals eine Elektrizitätsleitung zustande kommen kann im Gegensatz zum Experiment.

Um diese und andere Schwierigkeiten zu lösen, brachte man die Theorie der Elektrizitätsleitung in Zusammenhang mit der berühmten Quantentheorie von Planck, über die ich hier keine Übersicht geben kann; doch möchte ich den Grundgedanken wenigstens streifen, nämlich, daß sie annimmt: in den Stoffen existieren schwingende Systeme, Oszillatoren (z. B. Elektrone, Atome), die ihre Energie nur in bestimmten Portionen, die ihrer Schwingungszahl ν proportional sind, also in Quanten von der Größe $h\nu$, abgeben können.

Nernst[28]) bemerkte zwischen der Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme und des spezifschen Widerstandes von Metallen (insbesondere von Platin und Blei, Metalle, die Nernst für seine Widerstandsthermometer verwandte), eine Analogie und bedachte, daß der Verlauf der spezifischen Wärme sehr gut durch eine Formel wiedergegeben wurde, die Einstein[38]) mit Hilfe der Quantenhypothese von Planck abgeleitet hatte. So kam er auf den Gedanken, daß die Eigenfrequenzen der Elektronen, wie sie in der modernen Strahlungstheorie vorkommen, mit dem Leitvermögen in Verbindung stehen und versuchte mit Erfolg, den Temperaturkoeffizienten des Widerstandes von Metallen mittels der Strahlungsformel von Planck darzustellen. Er fand die Formel:

$$W = \frac{A}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} + B,$$

worin T die absolute Temperatur, A und B 2 Materialkonstanten und β eine universelle Konstante bedeuten. Bei sehr tiefen Temperaturen gibt diese Formel die experimentellen Resultate mit guter Annäherung wieder, bei höheren Temperaturen ist sie indessen vollständig unbrauchbar.

In unmittelbarem Anschluß an diese halb empirischen, halb theoretischen Betrachtungen von Nernst, versuchte J. A. Lindemann[29]) eine Quantenformel rein theoretisch abzuleiten. Er ging dabei aus von einer der Grundhypothesen der Drudeschen Theorie, die, wie schon bemerkt, das Gesetz von Wiedemann und Franz erklärte und an der er so wenig wie möglich ändern will. Er präzisiert die Vorstellungen, nimmt z. B. an, daß die Elektronen nicht an die Atome, sondern an die positiven elektrischen Kerne der Atome anstoßen, weiter, daß sich die Anzahl freier Elektronen proportional $\sqrt{T}$ ändert. So gelingt es ihm, für den Widerstand die folgende Formel abzuleiten:

$$W = \frac{A^2}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1} + \frac{2AB}{\sqrt{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1}} + B^2,$$

für niedrige Temperaturen lautet die Formel:

$$W = \frac{A^2}{e^{\frac{\beta\nu}{T}}} + \frac{2AB}{e^{\frac{\beta\nu}{2T}}} + B^2.$$

Für große T-Werte ist

$$W = \frac{A^2}{\beta\nu} T + B^2,$$

der gewöhnlichen Formel von Drude ganz analog gebaut. Die Lindemannsche Formel ist zwar imstande, für verschiedene Metalle ihren Widerstand bei Temperaturen von Wasserstoff bis denen bei flüssigem Sauerstoff ziemlich gut

wiederzugeben, doch ist sie für das Heliumgebiet vollständig unbrauchbar.

Kamerlingh Onnes[11]) publizierte ungefähr gleichzeitig und unabhängig von Nernst und Lindemann, im Anschluß an seine ersten Beobachtungen an Gold und Platin eine Formel, worin er auch im Sinne der Quantentheorie die Elektrizitätsleitung zu erklären suchte. Er weist zuerst darauf hin, daß die Theorie des unendlich großen Widerstandes beim absoluten Nullpunkt auf jeden Fall verlassen werden muß. Die Elektronen, die den Transport der Elektrizität verursachen, frieren keineswegs fest oder kondensieren, sondern scheinen gerade im Gegenteil bei den allertiefsten Temperaturen ganz unbehindert in ihren Bewegungen zu sein. Die Hemmnisse ihrer Bewegungen sucht Kamerlingh Onnes in der Energie der Planckschen Oszillatoren, so daß auch hier, wie bei Nernst und Lindemann, die Theorie der Elektrizitätsleitung und die der spezifischen Wärmen im Zusammenhang gebracht werden. Bei der Aufstellung seiner Formel geht Kamerlingh Onnes von einer Formel von Riecke aus. Er macht jedoch über die mittlere freie Weglänge der Elektronen eine andere Voraussetzung. Während Riecke diese proportional $\frac{1}{\sqrt{T}}$ setzt, schreibt Kamerlingh Onnes

$$l = \frac{C}{\sqrt{E_T}},$$

wo für die Schwingungsenergie eines Oszillators nach Planck und Einstein geschrieben werden kann

$$E_T = \frac{R}{N} \frac{\beta\nu}{e^{\frac{\beta\nu}{T}} - 1},$$

wenn R die Gaskonstante pro Mol und N die Anzahl Moleküle im Mol bedeutet. Nimmt man nun an, daß $\frac{\beta\nu}{T}$ bei 0^0 C bereits klein ist, so kann man nach einigen Umformungen schreiben:

$$\frac{W_T}{W_0} = \frac{T - \frac{\beta\nu}{4}}{273{,}1 - \frac{\beta\nu}{4}}.$$

Eine Schwierigkeit bei der Anwendung dieser und anderer Quantenformeln besteht in der Berechnung von ν. Einstein[33]) leitet diese Größe aus der Elastizität, Nernst und Lindemann[34]) aus der spezifischen Wärme ab und beide Methoden geben stark voneinander abweichende Zahlen. Kamerlingh Onnes ist es schließlich geglückt, durch Wahl von plausiblen Werten für ν, seine Formel in annähernde Übereinstimmung mit den Experimenten selbst bei Heliumtemperaturen zu bringen.

Die Anwendung der Quantentheorie auf die kinetische Elektronentheorie der Metalle ist von W. Wien[27]) weiter ausgearbeitet. Er stellte sich vor, daß bei tieferen Temperaturen die Anzahl der freien Elektronen und ihre Geschwindigkeit konstant sei, und daß die Veränderung des Widerstandes eine Folge der Änderung der freien Weglänge sei.

Auch Keesom[30]) machte einen Versuch, über die Schwierigkeiten der Äquipartitionstheorie zu kommen und mittels der Quantentheorie das Gebiet der tiefen mit dem der hohen Temperaturen zu verbinden. Wir wollen aber nun von dieser Art Theorien absehen und unsere Aufmerksamkeit auf eine ganz andere Theorie, nämlich die von J. J. Thomson[26]) lenken, die vor allem mit Rücksicht auf den supraleitenden Zustand von besonderem Interesse ist.

Ich möchte bei dieser länger verweilen, weil sie als einzige Rechenschaft gibt über die Diskontinuität in der Widerstandskurve, die wir den Sprungpunkt genannt haben. Thomson geht bezüglich der Elektrizitätsleitung von ganz anderen Vorstellungen aus als die Grundleger der gewöhnlichen Elektronentheorie der Metalle. Er stellt sich vor, daß die Metallatome elektrische Dipole enthalten, deren Pole die gleiche, aber entgegengesetzte elektrische Ladung zeigen und einen sehr kleinen Abstand voneinander haben. Wirkt keine elektrische Kraft in einer bestimmten Richtung, dann sollen die Axen dieser Dipole gleichförmig über alle möglichen Richtungen verteilt sein. Wirkt jedoch eine äußere elektrische Kraft in einer bestimmten Richtung, dann sollen die Achsen versuchen, sich in die Richtung des Feldes zu stellen, während andere Einflüsse, z. B. die Wärmebewegung sich hiergegen auflehnen und versuchen, die hergestellte Ordnung zu zerstören, so daß die Orientierung unvollkommen wird. Um die Vorstellungen zu fixieren, können wir uns denken, daß ein Bruchteil der in der Volumeneinheit vorhandenen Achsen vollkommen in Richtung des elektrischen Feldes gerichtet ist, während der Rest an der Orientierung keinen Anteil genommen hat. Dieser Zustand soll dann äquivalent sein dem wirklichen Zustande von allgemeiner, doch unvollkommener Orientierung. Wir stellen uns weiter vor, daß die vollkommen gerichteten Dipole sich aneinander reihen, Ketten bilden, deren Teile kräftige elektrische Wirkungen aufeinander und auf andere benachbarte Elektronen ausüben, die so kräftig sind, daß dadurch viele Elektronen in einer bestimmten Richtung, nämlich der Richtung der



äußeren elektrischen Kraft gezogen werden. So soll nach Thomson nun ein Transport von Elektronen stattfinden und der Strom, den wir wahrnehmen, zustande kommen. Arbeitet man diese Vorstellungen aus, dann kann man zeigen, daß bei nicht allzu tiefen Temperaturen das Ohmsche Gesetz gilt und außerdem der Widerstand linear von der Temperatur abhängt, wie dies in der Tat für reine Metalle annähernd der Fall ist. Diese Theorie wurde von Thomson dem supraleitenden Zustande angepaßt und es glückte ihm zu zeigen, daß für einige Metalle eine sehr bestimmte kritische Temperatur existieren müsse, unterhalb derer das Metall supraleitend wird, oberhalb derer es keine besonderen Erscheinungen zeigt. Die Betrachtungen, durch die er zu diesem merkwürdigen Resultat kommt, sind nicht außergewöhnlich kompliziert, doch eignen sie sich weniger dazu, um in einem Vortrag wie diesem auseinandergesetzt zu werden. Ich beschränkte mich daher auf die Mitteilung der Resultate.

Weiter wußte Thomson als Bedingung für die Möglichkeit einer kritischen Temperatur abzuleiten, daß der Temperaturkoeffizient des Widerstandes bei nicht allzu tiefen Temperaturen größer als 1/273 sein müsse. Diese Bedingung ist für nahezu alle Metalle erfüllt. Auch fand er, daß der Temperaturkoeffizient des Widerstandes von Metallen, die keine kritische Temperatur zeigten, bei sehr tiefen Temperaturen sehr gering sein müsse. Dies ist, wie oben bemerkt, wahrscheinlich bei Platin und Gold der Fall, die auch keine kritische Temperatur zu zeigen scheinen.

Ich möchte noch bemerken, daß es Thomson[39]), wenn auch in einer etwas vagen, qualitativen Weise glückte, Rechenschaft zu geben von der Vermehrung des Widerstandes im magnetischen Felde, eine Erscheinung, die, wie oben bemerkt ist, unter anderem auch in flüssigem *He* untersucht ist und auf die Fig. 8 und 9 Bezug nehmen. Soweit mir bekannt, ist Thomsons Theorie die einzige, worin diese Erscheinung behandelt ist*).

Das Anziehende dieser Theorie besteht unzweifelhaft darin, daß sie allein eine Erklärung der Sprungpunktstemperatur gibt und man aus ihr eine Widerstandskurve ableiten kann, die qualitativ dieselbe Gestalt hat, wie die experimentell gefundene von *Hg*, *Pb* und *Sn*. Indessen, wie einfach dies auch alles aussieht, es enthält diese Theorie Schwierigkeiten, die nicht so leicht zu lösen sind. Man sieht z. B. nicht ein, wie es zu einer Wärmeentwicklung des Stromes kommt, wenigstens, wenn man sich an der Form hält, die Thomson dieser Theorie gab, und es ist nötig, seine Vorstellungen zu erweitern, wenn man sich gebührend von der Jouleschen Wärme Rechenschaft geben will.

Zum Schluß möchte ich Ihre Aufmerksamkeit auf einige interessante Betrachtungen von Lindemann[39a]) richten, die er, noch nicht lange her, in 1915, publiziert hat.

Lindemann gibt in der Einleitung zu seinem Artikel eine Übersicht über die Schwierigkeiten, die der Elektronentheorie der Metalle anhaften, und die sie noch lange nicht überwunden hat. Die größte Schwierigkeit, sagt Lindemann, liegt wohl in der Frage der Atomwärme. Die Messungen haben gezeigt, daß auf 100 Atome nicht mehr als 1 freies Elektron kommt, wenn das Elektron das Äquipartitionsgesetz der Energie befolgt. Das elektrische Leitvermögen erfordert dagegen dreimal so viel Elektronen wie Atome. Läßt man nun das Äquipartitionsgesetz fallen, so kann man die Wärmeleitung und das Wiedemann-Franzsche Gesetz nicht erklären. Der Widerstandstemperaturkoeffizient macht eine spezifische Wärme 0 erforderlich und die Wärmeleitung kann allein mittels einer normalen spezifischen Wärme erklärt werden. Und so gibt es noch viele Widersprüche und Schwierigkeiten, die einer Lösung harren, einer Lösung, die Lindemann auf ganz anderen Wegen sucht, als es bisher geschah. Er betrachtet die Elektronen nicht wie ein ideales Gas, sondern in vollständigem Gegensatz hierzu als vollkommen feste Körper und richtet nun weiter sein Augenmerk auf Kristalle (die Metalle sind doch mikrokristallinischer Struktur). Ein Metallkristall soll bestehen aus einem Gitter von Atomen und zwischen diesem ein Netz von Elektronen, so daß die Atomebenen und Elektronenebenen einander abwechseln. Die strenge mathematische Ausarbeitung dieser Vorstellungen bringt naturgemäß große Schwierigkeiten mit sich, so daß Lindemann sich damit begnügt, eine Übersicht über die Erklärungen zu geben, die er von den verschiedenen Erscheinungen auf Grund seiner Hypothese geben kann. Wir beschränken uns auf das elektrische Leitvermögen. Lindemann stellt sich den Transport von Elektrizität folgendermaßen vor. Unter dem Einfluß elektrischer Kräfte kann sich das Elektronennetz durch das ruhende Atomnetz hindurch bewegen, und gibt dabei an der einen Seite soviel Elektronen ab, wie ihm auf der anderen Seite zugeführt werden. Unter bestimmten Umständen kann es vorkommen, daß das Fortschieben des Elektronengitters widerstandslos vonstatten geht. Dieses widerstandslose Fortschieben ist in dem supraleitenden

*) Bereits im Jahre 1900 hatte Thomson einen Schritt in dieser Richtung getan. Siehe Rapp. Congr. int. de physique, Paris 3, 143, 1900.

Zustand verwirklicht. Ist ein Metall nicht ganz rein, so kann der supraleitende Zustand nicht realisiert werden, da das Elektronennetz dann stets Unregelmäßigkeiten des Atomnetzes antrifft und so nicht ohne Widerstand sich fortschieben kann. Jedoch der Widerstand sollte dann ausschließlich von der Verunreinigung und nicht von der Temperatur abhängen. Vorübergehend sei bemerkt, daß dies im Gegensatz steht mit den Ergebnissen von Kamerlingh Onnes[16]) an Gold, Zinn und Kadmiumamalgam bei Heliumtemperaturen. Steigt die Temperatur eines reinen Metalls, dann werden die Amplituden der Atomschwingungen so groß, daß das Elektronennetz nicht mehr ohne Widerstand verschoben werden kann. Lindemanns Betrachtungen vieler anderer Erscheinungen, die in der Elektronentheorie auftreten, müssen wir mit Stillschweigen übergehen. Wir wollen bemerken, daß seine Theorie imstande ist, einigermaßen Rechenschaft zu geben von dem eigenartigen Verhalten des Widerstandes von Legierungen und von den photoelektrischen Erscheinungen, worüber die älteren Theorien keinen Aufschluß zu geben vermögen. Das Gesetz von Wiedemann und Franz dagegen, daß die ältere Theorie ohne Mühe zu erklären vermag, kann Lindemann nicht ohne spezielle Hypothese erklären.

Wenn ich schließlich noch erwähne, daß Stark[32a]) im Anschluß an seine bekannte Hypothese der Valenzelektronen, versucht hat, qualitativ Rechenschaft zu geben von den Erscheinungen des supraleitenden Zustandes, so glaube ich eine ziemlich vollständige Übersicht über die verschiedenen Theorien gegeben zu haben, die auf unsere Untersuchungen Bezug haben.

Es ist natürlich vorläufig ganz unmöglich, eine bestimmte Auswahl aus all diesen mehr oder weniger ausgearbeiteten Theorien zu treffen. Man wird sich eines unbefriedigenden Gefühls nicht erwehren können, wenn man bedenkt, daß in all diesen Theorien Bedenken und Schwierigkeiten ernster Art auftreten und man ist geneigt, an der Möglichkeit einer befriedigenden Lösung zu zweifeln. Ein Gesichtspunkt jedoch drängt sich in den Vordergrund, nämlich daß die geheimnisvollen und rätselhaften Quanten auch hier wie in so vielen Kapiteln der Physik vielleicht bestimmt sind, die Schwierigkeiten zu überbrücken, wenn auch ihre eigene Existenz rätselhaft bleibt.

Literatur.

Die folgenden Angaben erheben keinen Anspruch auf Vollständigkeit, außer was die Supraleiter anbetrifft.

I. Widerstandsmessung bei tiefen Temperaturen (ausgesondert Heliumtemperaturen).

1) L. Cailletet u. E. Bouty, Journal de physique (2) **6**, 29, 1885.
2) L. Holborn u. W. Wien, Wied. Ann. **59**, 211, 1896.
3) L. Holborn, Ann. d. Phys. **6**, 242, 1901.
4) S. v. Wroblewski, Wied. Ann. **26**, 27, 1005.
5) K. Olszewski, Akad. Wissensch. Krakau, Juni 1895.
6) M. W. Travers u. A. G. C. Gwyer, Proc. Roy. Soc. Z. **4**, 74, 1905.
7) B. Meilink, Versl. Kon. Akad. Febr. 1902, Comm. No. 77.
7a) B. Meilink, Ibid. Juni 1904, Comm. No. 93.
7b) B. Meilink, Inaugural-Dissertation, Amsterdam 1904.
8) H. Kamerlingh Onnes u. J. Clay, Versl. Kon. Akad., Juni 1906, Comm. No. 95c.
8a) H. Kamerlingh Onnes u. J. Clay, Ibid. Juni 1906, Comm. No. 95d.
8b) H. Kamerlingh Onnes u. J. Clay, Ibid. Juni 1907, Comm. No. 99c.
8c) H. Kamerlingh Onnes u. J. Clay, Ibid. Mai 1908, Comm. No. 107c.
8d) H. Kamerlingh Onnes u. J. Clay, Ibid. September 1907, Suppl. No. 17.
8e) J. Clay, Inaugural-Dissertation, Leiden, 1908 und Comm. No. 197d.
9) H. Kamerlingh Onnes u. G. Holst, Versl. Kon. Akad. Juni 1914, Comm. No. 141a.
9a) H. Kamerlingh Onnes u. G. Holst, Ibid. Juni 1914, Comm. No. 142a.
10) Lord Kelvin, Phil. Mag. (6) **3**, 257, 1902.

II. Widerstandsmessungen bei Helium-Temperaturen.

11) H. Kamerlingh Onnes, Versl. Kon. Akad. Febr. 1911, Comm. No. 119.
12) H. Kamerlingh Onnes, Ibid. April 1911, Comm. No. 120b.
13) H. Kamerlingh Onnes, Ibid. Mai 1911, Comm. No. 122b.
14) H. Kamerlingh Onnes, Ibid. Dezember 1911, Comm. No. 124c.
15) H. Kamerlingh Onnes, Ibid. Februar, März, Mai 1911, Comm. No. 133a, b, c.
16) H. Kamerlingh Onnes, Ibid. Mai 1913, Comm. No. 133d.
17) H. Kamerlingh Onnes, Ibid. Februar 1914, Comm. No. 139f.
18) H. Kamerlingh Onnes, Ibid. April, Mai 1914, Comm. No. 140b, c.
19) H. Kamerlingh Onnes, Ibid. Juni 1914, Comm. No. 141b.
20) H. Kamerlingh Onnes u. G. Holst, Versl. Kon. Akad. Juni 1914, Comm. No. 142a.
21) H. Kamerlingh Onnes, Rapport et discussions du Conseil Solvay, Oktober, November 1911, 304. Suppl. No. 29.
22) H. Kamerlingh Onnes, Rapport Third International Congress of Refrigeration, Washington-Chicago, September, Oktober 1913, 89, Suppl. No. 34b.
23) H. Kamerlingh Onnes, Nobelrede 1913, Suppl. No. 35.
24) J. Clay, Jahrb. der Rad. und Elektronik, Bd. VIII, November 1911.
25) J. Clay, Ebenda, Bd. XII, Oktober 1915.
26) J. J. Thomson, Phil. Mag. (6) **30**, 192, 1915.
27) W. Wien, Sitzungsber. Berlin 1913, S. 184.
28) W. Nernst, Sitzungsber. Berlin 1911, S. 311.
29) J. A. Lindemann, Sitzungsber. Berlin 1911, S. 316.
29a) F. A. Lindemann, Phil. Mag. **29**, 127, 1915.

30) W. H. Keesom, Versl. Kon. Akad. Mai 1913, Suppl. No. 30b; diese Zeitschr. 14, 670, 1913.
31) W. H. Keesom, Feuilleton Nieuwe Rotterd. Courant, Juli 1914.
32) C. A. Crommelin, Le Génie civil 64, 245, 1914.
32a) J. Stark, Jahrb. Rad. und Elektr. 9, 188, 1912.

III. Weitere zitierte Literatur.

33) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 34, 170, 1911.
34) F. A. Lindemann, Phys. Zeitschr. 11, 609, 1910.
35) E. Riecke, Wien. Ann. 66, 353, 545, 1199, 1898.
35a) „ Ann. d. Phys. (4) 2, 836, 1900.
36) P. Drude, Ann. d. Phys. (4), 1, 566, 1900; 3, 369, 1900.
37) H. A. Lorentz, Versl. Kon. Akad. Dezember 1904, Januar 1905.
37a) H. A. Lorentz, The theory of electrons (Teubner, 1909).
38) A. Einstein, Ann. d. Phys. (4) 22, 184, 1907.
39) J. J. Thomson, The corpuscular theory of matter 1907.

Comm. = Communications from the Physical Laboraty of the University of Leiden.
Suppl. = Supplements to the communications.

(Eingegangen 19. Mai 1919.)

BESPRECHUNGEN.

W. Nernst, Die theoretischen und experimentellen Grundlagen des neuen Wärmesatzes. gr. 8⁰. VII u. 218 S. m. 21 Abbildungen. Halle a. S., W. Knapp. 1918. M. 12.—, geb. M. 13.50.

Das Buch ist eine Monographie über den vom Verfasser im Jahre 1906 aufgestellten und gewöhnlich nach ihm benannten Wärmesatz und das ungemein reiche und fruchtbare Kapitel theoretischer und experimenteller Forschung, die sich (letztere hauptsächlich im Nernstschen Laboratorium) an diese grundlegende Entdeckung geknüpft hat. Der Satz selbst wird hier (Kapitel 6) in folgenden drei Formen ausgesprochen:

1. Ist A die maximale Arbeit, die bei einem isothermen Prozeß gewonnen werden kann (d. i. die Differenz der „freien Energien" vom Anfangs- und Endzustand des Prozesses), und ist T die absolute Temperatur, so ist

$$\lim_{T=0} \frac{dA}{dT} = 0$$

2.

$$\lim_{T=0} \frac{dA}{dT} = \lim_{T=0} \frac{dU}{dT},$$

wobei U die gesamte Energiedifferenz.

3. In der Nähe des absoluten Nullpunktes spielen sich alle Vorgänge ohne Änderung der Entropie ab.

Zur Analogisierung mit den ersten beiden Hauptsätzen kann man als zugrundeliegendes Erfahrungsprinzip (analog den Prinzipien von der Unmöglichkeit der beiden Perpetua mobilia) die Unerreichbarkeit des absoluten Nullpunkts bezeichnen (Kapitel 7).

Vorausgeschickt wird eine eingehende Besprechung der Erfahrungstatsachen über Gasgleichgewichte bei hohen Temperaturen (Kapitel 2) und über die spezifischen Wärmen (Kapitel 3—5). Nach Formulierung des Satzes (Kapitel 6 und 7) werden die mannigfachen Anwendungen auf kondensierte Systeme (Kapitel 9), dann auf teilweise gasförmige Systeme (Kapitel 10), ferner die chemischen, thermochemischen, photochemischen, elektrochemischen Anwendungen besprochen (Kapitel 11 und 12). Der theoretischen Berechnung chemischer Konstanten ist das 13., der Theorie der Gasentartung das 14. Kapitel gewidmet.

Im 15. Kapitel, welches in verallgemeinerter Behandlung einen Überblick über das große physikalische Anwendungsgebiet des 3. Wärmesatzes liefert (Kapillarität, Paramagnetismus, Thermoelektrizität u. a.), interessiert besonders der Abschnitt über den hypothetischen Einfluß der Temperatur auf die Gravitation. So primitiv naturgemäß — beim vollkommenen Fehlen des Experiments — der Versuch ausfallen muß, auch die Gravitationserscheinungen dem System des thermodynamischen Geschehens einzuordnen, so scheint mir dieser Versuch einer Erweiterung der alten Auffassung von der Gravitation (s. a. W. Nernst, Verh. d. D. Phys. Ges. 18, 83, 1916) doch mindestens von derselben Tragweite, wie der in ganz anderer Richtung zielende Einsteinsche.

Der Anhang bringt eine handliche Zusammenstellung der benutzten Zeichen und Zahlwerte, ferner ausführliche Tabellen der für die Theorie der spezifischen Wärme wichtigen Funktionen von $h\nu/kT$, endlich ein Literaturverzeichnis des Berliner Physikalisch-chemischen Instituts ven 1906—1916.

Irgendwelche Anmerkung über den Wert dieser Monographie aus der für den behandelten Gegenstand berufensten Feder ist wohl überflüssig.

E. Schrödinger.

Personalien.

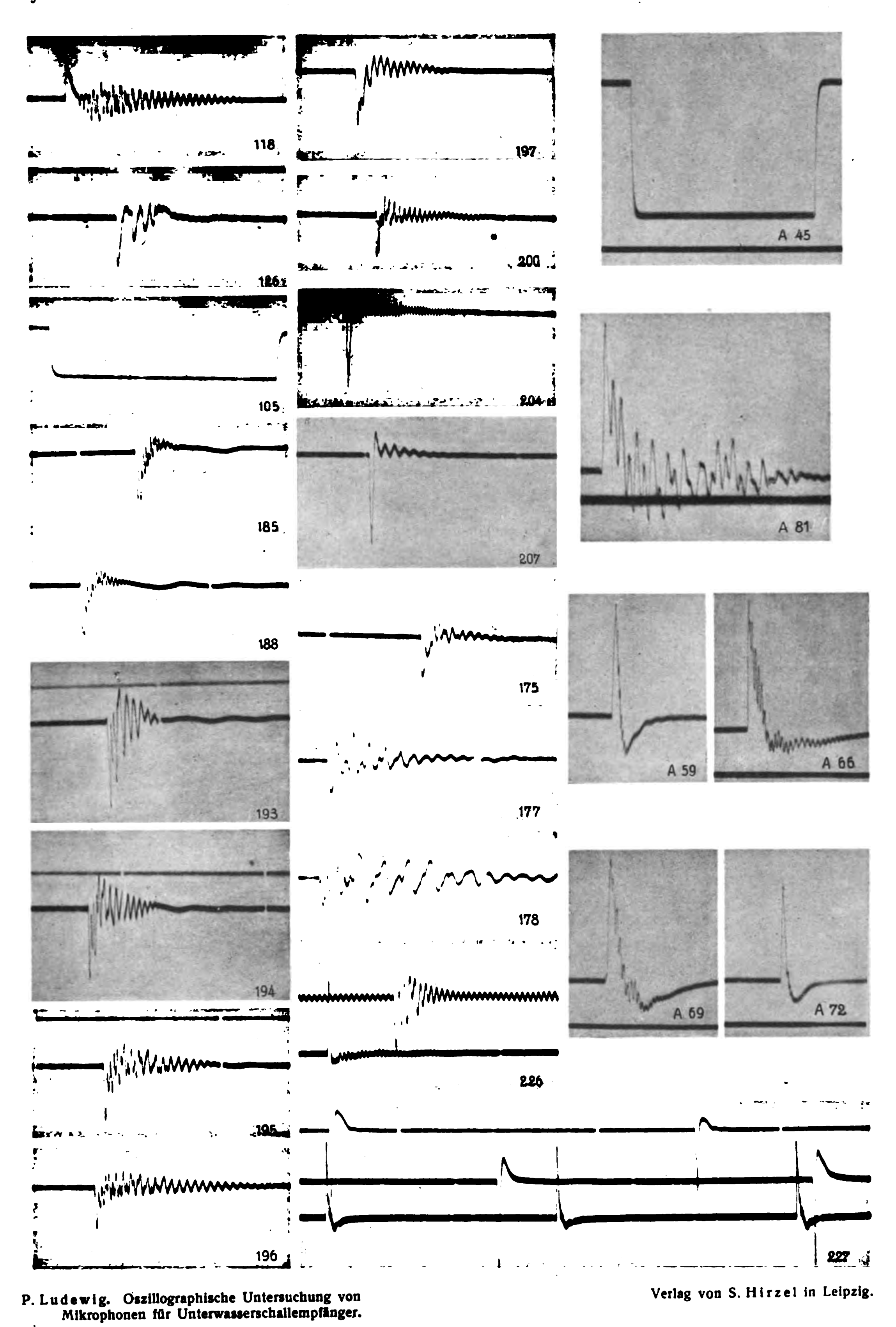
(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Berlin Dr. Felix Stumpf für Optik und Strahlenphysik, an der Universität Göttingen Dr. Remy für Chemie.

Ernannt: L. W. Jones an der Universität von Minnesota zum Professor für organische Chemie an der Universität zu Princeton N.-J.

Gestorben: Der ord. Professor an der Universität Lund Johan Martin Lovén, der Professor der Chemie und Ehrendirektor der Ecole nationale supérieure des mines in Paris Adolphe Carnot, der ord. Professor der Chemie und Technologie an der Universität Freiburg i. Br. Geh. Hofrat Dr. Ludwig Gattermann.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



P. Ludewig. Oszillographische Untersuchung von Mikrophonen für Unterwasserschallempfänger.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

Sinsel & Co. G.m.b.H., Leipzig-Oetzsch

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 13. — 1. Juli 1920. — 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 15 am 10. Juli 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Zur allgemeinen Isotopie[1]).

Von A. van den Broek.

Bekanntlich haben Mendelejeff und Meyer beide bei der Aufstellung des periodischen Systems auch versucht die Elemente der VIII. Gruppe mit den Umliegenden als eigene Reihen von je 6 Elementen aufzufassen, die großen Perioden also als aus 3 kleinen von (nach Entdeckung der Edelgase) je 6 Elementen, statt aus 2 von 7 bzw. 11 Elementen bestehend.

Da für die großen Perioden von 18 Elementen je die Atomgewichtsdifferenz annähernd 48 ist, wären diese kleinen Perioden von 6 Elementen je den Atomgewichten nach gleich den beiden „regelmäßigen" von 8 Elementen je am Anfang des Systems.

Nun kennen wir einen einfachen Grund für eine Verkürzung einer Elementenreihe (mit entsprechender Änderung der Atomgewichte), nämlich die Einfügung von Kernelektronen. Wenn in einem vollständig regelmäßigen System von kleinen Perioden von je 8 Elementen und Atomgewichten gleich den doppelten Ordnungszahlen, für jede Periode zwei Kernelektronen eingefügt werden, so kommt regelmäßig eine Atomgewichtsdifferenz 16 auf 6 statt auf 8 Elemente. So wäre dann z. B. von *Ca* bis *Hg* für 80 — 20 = 60 Ordnungszahlen der Atomgewichtsdifferenz $16 \times 60:6 = 160$, wie er tatsächlich (200,6 — 40 = 160,6) ist.

Auch die letzte große Periode von 32 Elementen statt 36 oder 48 ist dann zu erklären durch Extraeinfügung von 4 Kernelektronen, wie wir sie in den radioaktiven Reihen beim *Pb* teilweise auch kennen.

Nun sind die Zerfallsreihen der Radioelemente natürlich (vom komplexen Zerfall abgesehen) zu gleicher Zeit arithmetische Reihen von Kernteilchen, denn jeder Zerfallsstufe entspricht der Verlust von entweder ein α- oder ein β-Teilchen.

Im allgemeinen, z. B. in der *Th*-Reihe von *ThD* bis *Th* (also in umgekehrter Folge), schließt sich aber die Anordnung nach den Ordnungszahlen dieser Reihe der Kernteilchen genau an, und fällt für die nur durch eine Isotope vertretenen Ordnungszahlen mit dieser zusammen.

Diese „Typischen" weisen also bei einem Unterschied im Atg. von jeweils 8, auch in Kernladung, Ordnungszahl (Z) und Zahl der Kernteilchen (K) wie der peripherischen Elektronen einen solchen von je 3 auf, so daß für die Typischen der ganzen *Th*-Reihe

$$Z/3 - A/3 = \text{konst. und } Z - K = \text{konst.}$$

Tabelle I.

Thorium	*D*	C_2	C_1	*B*	*A*	*Em*	*X*	*Rad*	Ms_2	Ms_1	*Th*
Atg.	208	212	*212*	212	216	220	224	228	*228*	229	232
K.	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
Thorium	—	*D* *B*	C_1	C_2 *A*	—	*Em*	—	*X* Ms_1	Ms_2	*Rad* *Th*	—
Z	81	82	83	84	85	86	87	88	89	90	91
Atg.	—	208 212	*212*	212 216	—	220	—	224 228	*228*	228 I 232	—

1) Siehe auch diese Zeitschr. **17**, 260, 1916.

Tabelle II.

Beispiel eines regelmäßigen Systems aller Isotopen nach der $4\alpha/2\beta$-Hypothese.

K, a, b, h = Zahl der Kern-, α-, β-, H^+-Teilchen; Z = Ordnungszahl, $a' = a - 8$;

	Z	K	h	$a+b$	$a'+b$	a'	a	$4a$	Atg.	b	Isot.
Cu	29	21	1	20	12	8	16	64	65	gerade	frei
Zn	30	22	2	20	12	8	16	64	66	„	„
Ga	31	23	3	20	12	8	16	64	67	„	„
Ge	32	24	1	23	15	10	18	72	73	ungerade	zentral
As	33	25	2	23	15	10	18	72	74	„	„
Se	34	26	3	23	15	10	18	72	75	„	„
Br	35	27	1	26	18	12	20	80	81	gerade	frei

usw.

Die Zahlen der Kernelektronen (b) bilden natürlich ebenso eine kontinuierliche Reihe, wie die der α-Teilchen (a) eine solche von geraden Zahlen, denn für jede weitere Typische ist die Differenz $2\alpha - \beta$.

Natürlich sind von den Atg., wenn eine, dann alle ganzzählig. Nun hat die Proutsche Hypothese vor wenigen Wochen eine plötzliche Bestätigung erfahren durch die Astonschen Versuche mit positiven Strahlen, wobei alle Atom- und Molekulargewichte (in über 40 Fällen) sich als ganzzählig ergaben, ohne irgendwelche Zwischenstufen[1]).

So für Cl 2 Isotopen 35 und 37, und für Ne 20 und 22, also ungerade Atg. an ungeraden, und gerade an geraden Stellen. Da keine weiteren hier gefunden würden, muß auch, wie meistens schon angenommen, die Zahl (h) der H^+-Teilchen 0, 1, 2 oder 3, aber nicht höher sein, denn sonst wäre z. B. für $h = 4$ eine weitere Isotope $3\alpha + 4H^+$ neben 5α für die Kernladung 10 gefunden. Diese vier Reihen $4n$; $4n+1$; $4n+2$ und $4n+3$ waren schon durch die Atg. der ersten Periode 4, 12; 1, 9; 14; und 7, 11 usw. gegeben, und dürften lückenlos sein.

Die wirklichen Atg. bilden also ebenfalls eine kontinuierliche Reihe. Wäre außerdem für jede die Zahl (oder Zahlen) der Kernelektronen bekannt, so hätten wir das vollständige System der Isotopen.

Denken wir uns nun 1, 2 bzw. 3 H^+-Teil-

Atn.		Atg.	$4n+1$			$4n+2$			$4n+3$			$4n$		
1	*H*	1,008		1			—				3		—	
2	*He*	4,00		—			(2)			(3)			4	
3	*Li*	6,94	5		9		—		(3)		7		—	
4	*Be*	9,1		9			6			—			8	
5	*B*	11.0	9		13		—			11			—	
6	*C*	12,00		—		10	?	14		—			12	
7	*N*	14,01		17			14			15			—	
8	*O*	16,00		—		14.		18		—			16	
9	*F*	19,1		21			—			19			—	
10	*Ne*	20,2		—			22			—			20	
11	*Na*	23,10		25			—			23			—	
12	*Mg*	24,32		—			26			—			24	
13	*Al*	27,1		29			—			27			—	
14	*Si*	28,3		—			30			—			28	
15	*P*	31,04		33			—			31			—	
16	*S*	32,07		—			34			—			32	
17	*Cl*	35,46		37			—			35			—	
18	*Ar*	39,88		—			38			—		36		40
19	*K*	39,10		41			—		39	?	43		40	
20	*Ca*	40,07		—			42			43		40		44
21	*Sc*	45 ?		45			—		43	?	47		—	
22	*Ti*	48,1		·			46			—			48	
23	*V*	51,0		49			—			51			—	
24	*Cr*	52,0		—			50			—			52	
25	*Mn*	54,9	53		57		—			55			—	
26	*Fe*	55,84		57		54		58		—			56	
27	*Co*	58,97	57		61		58			59			—	
28	*Ni*	58,7				58		62		—		60		64

1) Nature **104**, 393.

b	II.			$4n+1$			$4n+2$			$4n+3$			$4n$		
	29	*Cu*	63,6		**65**			—			(63)			**64**	
4	30	*Zn*	65,4		—			**66**			—		64		68
	31	*Ga*	69,9	69		73		—			**67**			—	
	32	*Ge*	72,5		**73**		70		74		—			**72**	
5	33	*As*	74,96	73		77		**74**		71		75		—	
	34	*Se*	79,2		—		74		78		**75**		76		80
	35	*Br*	79,9		**81**			—		75		79		**80**	
6	36	*Kr*	82,9		—			**82**			—		80		84
	37	*Rb*	85,45	85		89		—			**83**			—	
	38	*Sr*	87,6		**89**		86		90		—			**88**	
7	39	*Y*	89	89		93		**90**		87		91		—	
	40	*Zr*	90,6		—		90		94		**91**		92		96
	41	*Nb*	93,5		**97**			—		91		95		**96**	
8	42	*Mo*	96,0		—			**98**			—		96		100
	43	—	—	101		105		—			**99**			—	
	44	*Ru*	101,7		**105**		102		106		—			**104**	
9	45	*Rh*	102,9	105		109		**106**		103		107		—	
	46	*Pd*	106,7		—		106		110		**107**		108		112
	47	*Ag*	107,9		**113**			—		107		111		**112**	
10	48	*Cd*	112,4		—			**114**			—		112		116
	49	*In*	114,8	117		121		—			**115**			—	
	50	*Sn*	118,7		**121**		118		122		—			**120**	
11	51	*Sb*	120,2	121		125		**122**		119		123		—	
	52	*Te*	127,5		—		122		126		**123**		124		128
	53	*I*	126,9		**129**			—		123		127		**128**	
12	54	*X*	130,2		—			**130**			—		128		132
	55	*Cs*	132,8	133		137		—			**131**			—	
	56	*Ba*	137,4		**137**		134		138		—			**136**	
13	57	*La*	139,0	137		141		**138**		135		139		—	
	58	*Ce*	140,25		—		138		142		**139**		140		144
	59	*Pr*	140,6		**145**			—		139		143		**144**	
14	60	*Nd*	144,3		—			**146**			—		144		148
	61	—	—	149		153		—			**147**			—	
	62	*Sa*	150,4		**153**		150		154		—			**152**	
15	63	*Eu*	152,0	153		157		**154**		151		155		—	
	64	*Gd*	157,3		—		154		158		**155**		156		160
	65	*Tb*	159,2		**161**			—		155		159		**160**	
16	66	*Ds*	162,5		—			**162**			—		160		164
	67	*Ho*	163,5	165		169		—			**163**			—	
	68	*Er*	167,7		**169**		166		170		—			**168**	
17	69	*Tu*	168,5	169		173		**170**		167		171		—	
	70	*Yb*	172,0		—		170		174		**171**		172		176
	71	*Lu*	174,5		**177**			—		171		175		**176**	
18	72	—	—		—			**178**			—		176		180
	73	*Ta*	181,5	181		185		—			**179**			—	
	74	*W*	184,0		**185**		182		186		—			**184**	
19	75	—	—	185		189		**186**		183		187		—	
	76	*Os*	190,6		—		186		190		**187**		188		192
	77	*Ir*	193,1		**193**			—		187		191		**192**	
20	78	*Pt*	195,2		—			**194**			—		192		196
	79	*Au*	197,2	197		103		—			**195**			—	
	80	*Hg*	200,6		**203**		198		202		—			**200**	
	81—92	*Tl* — *U*					Radioelemente.								

chen mit je 8 α-Teilchen für die beiden ersten Perioden und dann mit je 1 β- und je 2 α-Teilchen für je 3 Ordnungszahlen vereint, also $\beta n\, \alpha\, 2n + 8H + 1$, 2 bzw. 3, dann ist

$$A = 4\ (2n + 8) + 1,\ 2 \text{ bzw. } 3 \text{ und}$$

$$Z = 3n + 16 + 1,\ 2 \text{ bzw. } 3.$$

Ebenso aber können wir von den Radioelementen ausgehen. Denn wie oben erwähnt, kommt für die *Th*-Reihe eine Typische auf je 3 Ordnungszahlen. Denkt man zu jedem je 1, 2 bzw. 3 H^+-Teilchen hinzu, so bilden die 3 neuen Reihen wieder nach Ordnungszahlen und Zahl der Kernteilchen eine kontinuierliche Reihe, wobei die der *Th*-Reihe mit einer von diesen 3 neuen zusammenfallen muß, und zwar, wenn zu gleicher Zeit ein Kernelektron hinzukommt (natürlich eine willkürliche Annahme), mit der $4n + 1$ Reihe.

Für alle 4 Reihen zusammen würde sich dann die einfache Formel $A = 8/3\, Z + h +$ konst.

ergeben, wenn nur für $Z/3$ immer die nächste ganze Zahl gerechnet wird, denn alle wirklichen Atg. müssen ganzzählig sein.

Für die Radioelemente der $4n + 2$ Reihe (*U*-, *Ra*- und wahrscheinlich *Ac*-Reihe) gibt diese Formel nicht die bekannten Isotopen; ob für die beiden ungeraden Reihen ist unbekannt. Auch ist bei *Pb* der Zerfall allgemein komplex und wohl verdoppelt. Denn dem Atg. des *Hg* 200,6 entspricht eine Typische 200, nicht 204. Von *Hg* jedoch nach unten bis etwa *Ca* ergibt sich für $80 - 20 = 60$ Ordnungszahlen und $70 - 10 = 60$ Kernteilchen ein Atg. Unterschied $200 - 40 = 160$ also wieder 8 für je 3 Ordnungszahlen, und wenn nach der Formel konst. $= 8/3\,Z + h - A = 8/3 \times 81 - 200 = 16$, so ergibt sich ein vollständiges System der Typischen und dann aller Isotopen in fast vollständiger Anschließung an die experimentellen Atg.

Nur für *Ru* (101,7 statt 102) und *In* (114,8 statt 115) ist die Abweichung mehr als eine Dezimale, und da die Atg. immer so angegeben werden, daß die letzten Dezimalen unsicher sind, kommen auch diese beiden Abweichungen nicht in Betracht. Vielleicht ist auch das Atg. des α-Teilchens nicht genau 4,00.

Anmerkung bei der Korrektur. Es wurden hier die β- mit den α-Teilchen vereint und zu diesen die 1, 2, 3 oder 0 *H*-Teilchen hinzugedacht. Können aber zu diesen *H*-Kernen auch β-Teilchen hinzukommen, so ist damit die Möglichkeit von nicht weniger als 10 Reihen gegeben je nachdem zu den Teilchen der *Th*-Reihe H, $H\beta$; H_2, $H_2\beta$, $H_2\beta_2$; H_3, $H_3\beta$, H_3B_2 oder $H_3\beta_3$ hinzukommen. Die erst nach Einsendung dieser Abhandlung durch Aston veröffentlichten Zahlen machen diese Annahme wahrscheinlich. Denn es wurden von Aston, in scharfem Gegensatz zu oben erwähnten 2 Itotopen bei *Ne* und *cl*, für *Kr* und *Xe* nicht weniger als 6 bzw. 5 (nach dem $4\alpha + 2\beta$-System je 8) Isotopen gefunden und zwar fast genau dieselben, wie sie in einer 1916 erschienenen Abhandlung: „Über die Isotopen sämtlicher chemischen Elemente" aus der $4\alpha + 2\beta$ Hypothese vorhergesagt wurden durch Fortsetzung der 3 Radioreihen nach unten (diese Zeitschr. **17**, 260, 1916).

Aston:	*Kr*	78, 80, 82, 83, 84, 86;
	Xe	128, 130, 131, 133, 135.
van den Broek:	*Kr*	—, 80, 82, 83, 84, 87;
	Xe	128, 130, 131, 132, 135.

Diese Übereinstimmung wird vollkommen, wenn nach der jetzt allgemeinen Auffassung die *Ac*-Reihe als Abzweigung der *Ra*-Reihe, statt als $4n + 3$-Reihe aufgefaßt wird, und neben der $4n + 3$ auch eine $4n + 1$-Reihe zugefügt. Das kann aber auf mehrere Weise geschehen.

Das ganze System aller Isotopen, d. h. aller wirklichen Elemente mit ganzzähligen Atg. zerfällt also in 3 Teile. Der Anfang ist nur dann aufzustellen, wenn jede Einfügung von Kernelektronen in Paaren stattfindet. Dann muß für $h = 1$ diese Einfügung beim *Be* (Atg. 9 in $Z = 4$); für $h = 2$ beim *N* (Atg. 14 in $Z = 7$) stattfinden; denn ungerade Atg. für gerade Ordnungszahlen oder umgekehrt können nur zentrale sein. Für $h = 0$ ergibt sich die erste Einführung unzweideutig beim *K*, da sowohl für *Ar* als für *Ca* das Atg. fast genau 40 ist. Die bekannte Radioaktivität des *K* (β-Strahlung) würde also eine einfache Erklärung finden, deutet aber außerdem auf Einfügung von Kernelektronen für $h = 3$ hin für *K* und *Ca*, während eine zweite Einfügung für $h = 3$ schon ganz am Anfang des Systems vorhanden sein muß, da schon beim *Li* (Atg.) 2 Kernelektronen vorhanden sein müssen. Allerdings wurden die Isotopen des *C* und *O* von Aston nicht gefunden.

Zusammenfassung.

Wäre das periodische System ein System von 2 Reihen, z. B. $3 + 4n$ und $4n$, ohne Kernelektronen, so wäre Atg. $= 2Z$ bzw. $2Z + 1$ und alle Atg. ganzzählig. Daß sie es nicht sind, wird bedingt erstens durch das Vorhandensein von mindestens 2 weiteren Reihen $1 + 4n$ und $2 + 4n$, deren Atome nur seltener sind. Dann durch Einfügung der Kernelektronen, und zwar nach dieser $4\alpha/2\beta$-Hypothese von *Cu* ab in regelmäßiger Weise. Die sich dabei ergebende Gleichheit in Zahl der weiter hinzukommenden Kernteilchen mit den peripherischen (sei es auch nur für typische Isotopen) wird vielleicht einmal für den Aufbau der Atome im Raume von Bedeutung werden. Wo diese Gleichheit zusammenfällt mit der Durchführung der ursprünglichen kleinen Perioden von 16 Atg.-Einheiten auf jetzt 6 statt 8 Ordnungszahlen, und die Zahl der Isotopen im Durchschnitt gerade verdoppelt wird, wie die Zahl der Kernteilchen, können beide Teile des Systems als gleich regelmäßig betrachtet werden, das erste durch die ungleiche Einfügung der Kernelektronen sogar eigentlich unregelmäßiger. Ob die weitere Reduktion der letzten Perioden erst bei den Radioelementen oder eher zu erstarkter Aufnahme von Kernelektronen führt, d. h. welche Isotopen hier tatsächlich existieren, muß experimentell bestimmt werden. Ebenso der Übergang in der dritten kleinen Periode.

Scheveningen, Februar 1920.

(Eingegangen 2. März 1920.)



Reduzierte Umwandlungs- und Schmelztemperaturen.

Von J. Narbutt.

Nimmt man an, daß die Entropie S, welche der durch die absolute Temperatur T dividierten Differenz von Gesamtenergie U und freier Energie A gleich ist, bei einem bestimmten Vorgang in kondensierten Einstoffsystemen durch folgende Gleichung

$$S = \frac{U-A}{T} = bT + cT^2 \qquad (1)$$

ausgedrückt wird, in welcher b und c Konstanten sind, dann ist, weil die Entropie der negative Temperaturkoeffizient der freien Energie ist,

$$-\frac{dA}{dT} = bT + cT^2. \qquad (2)$$

Hieraus folgt durch Integration

$$A = -\frac{1}{2}bT^2 - \frac{1}{3}cT^3 + \text{Const.} \qquad (3)$$

Aus den Gleichungen (3) und (1) folgt für $T = 0$,

$$\text{Const.} = A_0 = U_0, \qquad (4)$$

und daher ist

$$A = U_0 - \frac{1}{2}bT^2 - \frac{1}{3}cT^3. \qquad (5)$$

Setzt man nun den Wert für A aus der Gl. (5) in die Gl. (1) ein, so erhält man:

$$U = U_0 + \frac{1}{2}bT^2 + \frac{2}{3}cT^3. \qquad (6)$$

Für die Differenz der Molekularwärmen folgt aus obiger Gleichung:

$$c_2 - c_1 = \frac{dU}{dT} = bT + 2cT^2. \qquad (7)$$

Die Gleichungen (5) und (6), welche den allbekannten Nernstschen Gleichungen entsprechen, sollen nun ein wenig modifiziert und auf die Umwandlung enantiotroper fester Stoffe bzw. die Erstarrung geschmolzener Substanzen angewendet werden.

Die absolute Umwandlungs- bzw. Schmelz temperatur im Tripelpunkte werde mit Θ und die ihr entsprechende Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme mit U_Θ bezeichnet.

Für die Gleichgewichtstemperatur Θ, bei welcher A gleich null wird, erhält man, wenn die Differenz der Molekularwärmen mit γ bezeichnet wird:

$$0 = U_0 - \frac{1}{2}b\Theta^2 - \frac{1}{3}c\Theta^3,$$

$$U_\Theta = U_0 + \frac{1}{2}b\Theta^2 + \frac{2}{3}c\Theta^3,$$

$$\underline{\gamma = b\Theta + 2c\Theta^2.}$$

Hieraus berechnen sich:

$$U_0 = \frac{4U_\Theta - \gamma\Theta}{6}; \quad b = \frac{2U_\Theta - \gamma\Theta}{\Theta^2}; \quad c = -\frac{U_\Theta - \gamma\Theta}{\Theta^3}. \qquad (8)$$

Für eine beliebige Temperatur T ist nun

$$A_T = \frac{4U_\Theta - \gamma\Theta}{6} - \frac{1}{2}\left(2U_\Theta - \gamma\Theta\right)\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(U_\Theta - \gamma\Theta\right)\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3.$$

Wenn obige Gleichung durch U_Θ dividiert und $\frac{T}{\Theta} = \vartheta$ gesetzt wird, d. h. die Temperaturen in Bruchteilen der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur, welche hier reduzierte Temperaturen genannt werden mögen, ausgedrückt werden, dann bekommt man

$$\frac{A_T}{U_\Theta} = \frac{1}{6}\left(4 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right) - \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right)\vartheta^2 + \frac{1}{3}\left(1 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right)\vartheta^3. \qquad (9)$$

Ebenso ist

$$U_T = \frac{4U_\Theta - \gamma\Theta}{6} + \frac{1}{2}\left(2U_\Theta - \gamma\Theta\right)\left(\frac{T}{\Theta}\right)^2 - \frac{2}{3}\left(U_\Theta - \gamma\Theta\right)\left(\frac{T}{\Theta}\right)^3.$$

und

$$\frac{U_T}{U_\Theta} = \frac{1}{6}\left(4 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right) + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right)\vartheta^2 - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}\right)\vartheta^3. \qquad (10)$$

Aus den Gleichungen (9) und (10) erhält) man, wenn

$$\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta} = 1 \qquad (11)$$

gesetzt wird,

$$\frac{A_T}{U_\Theta} = \frac{1}{2}\left(1 - \vartheta^2\right) \qquad (1$$

und

$$\frac{U_T}{U_\Theta} = \frac{1}{2}\left(1 + \vartheta^2\right). \qquad (13)$$

Die Gleichungen (12) und (13) entsprechen, wie leicht zu finden, den einfachen Nernstschen Gleichungen:

$$A = U_0 - \frac{1}{2}bT^2 \qquad (12a)$$

und

$$U = U_0 + \frac{1}{2}bT^2, \qquad (13a)$$

welche unschwer aus der Annahme

$$S = bT \qquad (14)$$

abzuleiten sind [vgl. die Ableitung der Gleichungen (5) und (6)].

Es mögen nun für eine Reihe gegebener ϑ- und $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte die $\frac{A_T}{U_\Theta}$- und $\frac{U_T}{U_\Theta}$-Werte aus den Gleichungen (9) und (10) berechnet und in der folgenden Tabelle zusammengestellt werden.

Tabelle I.

$\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$	$\vartheta = 0{,}995$		$\vartheta = 0{,}99$		$\vartheta = 0{,}95$	
	$\frac{A_T}{U_\Theta}$	$\frac{U_T}{U_\Theta}$	$\frac{A_T}{U_\Theta}$	$\frac{U_T}{U_\Theta}$	$\frac{A_T}{U_\Theta}$	$\frac{U_T}{U_\Theta}$
2	0,00498	0,990	0,00990	0,980	0,0475	0,905
1	0,00499	0,995	0,00995	0,990	0,0488	0,951
0,5	0,00499	0,998	0,00997	0,995	0,0494	0,975
0,25	0,00500	0,999	0,00999	0,997	0,0497	0,986
0	0,00500	1,000	0,01000	1,000	0,0499	0,998

Diese Tabelle lehrt, daß mit der Abnahme der $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte eine Zunahme der $\frac{A_T}{U_\Theta}$- und $\frac{U_T}{U_\Theta}$-Werte verknüpft ist und letztere wächst, wenn ϑ kleiner wird. Es läßt sich nun hieraus schließen, daß die Gleichungen (12) und (13), welche, wie wir gesehen haben, aus den Gleichungen (9) und (10) folgen, wenn $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$ gleich 1 gesetzt wird, bei ϑ-Werten, welche in der Nähe von 1 liegen, noch brauchbare Resultate liefern, sogar wenn die $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte enormen Schwankungen von 2 bis 0 unterliegen. (Wasser hat den hohen Wert 1,7 und Helium hat vermutlich einen sehr geringen Wert.) Selbst bei $\vartheta = 0{,}95$, also bei Temperaturen, welche um 5 Proz. niedriger als die Umwandlungs- bzw. Schmelztemperaturen liegen, unterscheidet sich der nach der einfachen Gl. (12) berechnete A-Wert von den nach der Gl. (9) unter Berücksichtigung der verschiedenen $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte berechneten um höchstens $2^1/_2$ Proz.

Nachdem wir nun gesehen haben, daß die Gl. (12) in einem begrenzten Temperaturintervall der genaueren Gl. (9) wenig nachsteht, wollen wir sie für zwei Substanzen mit den Umwandlungs- bzw. Schmelztemperaturen Θ' und Θ'' für die Temperaturen T' und T'' aufschreiben:

$$\frac{A'_{T'}}{U'_{\Theta'}} = \frac{1}{2}\left[1 - (\vartheta')^2\right] \text{ und } \frac{A''_{T''}}{U''_{\Theta''}} = \frac{1}{2}\left[1 - (\vartheta'')^2\right].$$

Setzt man in diesen beiden Gleichungen $\vartheta' = \vartheta''$, so folgt:

$$\frac{A'_{T'}}{U'_{\Theta'}} = \frac{A''_{T''}}{U''_{\Theta''}}. \qquad (15)$$

Bei gleichen reduzierten Temperaturen soll das Verhältnis von Umwandlungs- bzw. Erstarrungsaffinität zur Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme bei der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ für alle Substanzen gleich sein.

Zur Prüfung der obigen Beziehung seien für einige Substanzen bei gleichen ϑ die Affinitäten beim Erstarren ihrer unterkühlten Schmelzflüsse nach der bekannten Gleichung

$$A = RT \ln \frac{p_2}{p_1} \qquad (16)$$

berechnet, und dann die Quotienten aus den berechneten Affinitäten und den Erstarrungswärmen gebildet, welche konstant sein müssen.

Die Berechnung von A nach der Gl. (16) möge für Benzol bei $+0{,}2^0$ C angeführt werden. R ist gleich 1,985 cal., T ist gleich $273{,}1^0 + 0{,}2^0 = 273{,}3^0$, p_2 und p_1 (Dampfdrucke des flüssigen und des festen Benzols) sind gleich 26,78 und 24,77 mm. Aus diesen Daten erhält man nach Ersatz von ln durch lg:

$$A = \frac{1{,}985 \times 273{,}3 (\lg 26{,}78 - \lg 24{,}77)}{0{,}4343} = 42{,}2 \text{ cal.}$$

In dieser Weise sind die A_T-Werte in der folgenden Tabelle berechnet worden. M bedeutet hier und auch weiter stets das Molekulargewicht oder Atomgewicht (bei Elementen).

Der Ausdruck $\frac{A_T}{U_\Theta}$ kann auf Grund der Zahlen der letzten vertikalen Reihe als konstant angesehen werden, wenn man die Größe der Beobachtungsfehler von p_2, p_1 usw. berücksichtigt. Nach der Gl. (12) sollte bei ϑ gleich 0,9813 und 0,9950 $\frac{A_T}{U_\Theta}$ gleich 0,0186 und 0,0050 sein; die Übereinstimmung mit den Mittelwerten ist völlig genügend.

Ferner wollen wir nun die Gl. (13) ebenso wie die Gl. (12) anwenden. Dann erhalten wir für zwei Substanzen:

$$\frac{U'_{T'}}{U'_{\Theta'}} = \frac{U''_{T''}}{U''_{\Theta''}}. \qquad (17)$$

Bei gleichen reduzierten Temperaturen soll das Verhältnis von Umwandlungs- bzw. Erstarrungwärme zur Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme bei der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ für alle Substanzen gleich sein.

Viel genügendes Material zur Prüfung der Beziehung (17) ist leider nicht vorhanden, und wir müssen uns mit einer Reihe von p-Dihalogen-

Tabelle II.

	$\Theta - 273{,}1^0$	$T - 273{,}1^0$	p_2 mm	p_1 mm	$\lg p_2 - \lg p_1$	A_T cal	$\frac{U_\Theta}{M}$ cal	$\frac{A_T}{U_\Theta}$
				$\vartheta = 0{,}9813$				
Benzol	+ 5,4	+ 0,2	26,78[1]	24,77[1]	0,0338	42,2	30,4[2]	0,0178
Wasser	0	− 5,1	3,134[3]	2,984[3]	0,0213	26,1	79,6[4]	0,0182
p-Chlorbrombenzol	+ 64,6[5]	+ 58,3	75,4[6]	66,5[6]	0,0546	82,7	23,4[5]	0,0184
							Mittel	0,0181
				$\vartheta = 0{,}9950.$				
Benzol	+ 5,4	+ 4,0	33,02	32,32	0,0093	11,8	30,4	0,0050
Wasser	0	− 1,33	4,153	4,102	0,0054	6,7	79,6	0,0047
p-Dichlorbenzol	+ 52,9[5]	+ 51,3	116,9[6]	113,2[6]	0,0139	20,6	29,5[5]	0,0048
							Mittel	0,0048

benzolen[7]) begnügen. Für diese existieren Messungen der Schmelzwärmen und Formeln für die mittleren spezifischen Wärmen der festen Substanzen, welche als recht genau gelten können. Die mittleren spezifischen Wärmen der unterkühlten flüssigen p-Dihalogenbenzole müssen jedoch nach den Formeln für die mittleren spezifischen Wärmen der anderen Isomere berechnet werden, weil infolge der geringen Unterkühlungsfähigkeit dieser Substanzen die Bestimmung der spezifischen Wärme für sie in unterkühltem flüssigen Zustand unmöglich war[8]).

Die in der folgenden Tabelle befindlichen $\frac{U_T}{M}$-Werte sind nach der Gleichung

$$\frac{U_T}{M} = \frac{1}{M}\left[U_\Theta - (\Theta - T)(c_2 - c_1)\right] \quad (18)$$

berechnet worden. Hier bedeutet $c_2 - c_1$ die Differenz der mittleren Molekularwärmen zwischen Θ und T.

Die Konstanz der Zahlen in der letzten vertikalen Reihe ist recht befriedigend.

Tabelle III.

	$\Theta - 273{,}1^0$	$\frac{U_\Theta}{M}$ cal	$T - 273{,}1^0$	$\frac{c_2 - c_1}{M}$	$\frac{U_T}{M}$ cal	$\frac{U_T}{U_\Theta}$
			$\vartheta = 0{,}98$			
p-Dichlorbenzol	+ 52,9	29,50	+ 46,4	0,0306	29,30	0,993
p-Chlorbrombenzol	+ 64,6	23,42	+ 57,8	0,0250	23,25	0,993
p-Dibrombenzol	+ 86,9	20,77	+ 79,7	0,0221	20,61	0,992
p-Bromjodbenzol	+ 90,1	16,57	+ 82,8	0,0209	16,42	0,991
p-Dijodbenzol	+ 129,0	16,21	+ 121,0	0,0112	16,12	0,994
					Mittel	0,993
			$\vartheta = 0{,}90$			
p-Dichlorbenzol	+ 52,9	29,50	+ 20,3	0,0357	28,34	0,961
p-Chlorbrombenzol	+ 64,6	23,42	+ 30,8	0,0290	22,26	0,950
p-Dibrombenzol	+ 86,9	20,77	+ 50,9	0,0245	19,89	0,958
p-Bromjodbenzol	+ 90,1	16,57	+ 53,8	0,0235	15,72	0,949
p-Dijodbenzol	+ 129,0	16,21	+ 88,8	0,0142	15,64	0,965
					Mittel	0,956
			$\vartheta = 0{,}70$			
p-Dichlorbenzol	+ 52,9	29,50	− 44,9	0,0483	24,78	0,840
p-Chlorbrombenzol	+ 64,6	23,42	− 37,3	0,0380	19,55	0,835
p-Dibrombenzol	+ 86,9	20,77	− 21,1	0,0305	17,47	0,841
p-Bromjodbenzol	+ 90,1	16,57	− 18,9	0,0301	13,29	0,802
p-Dijodbenzol	+ 129,0	16,21	+ 8,4	0,0218	13,58	0,838
					Mittel	0,831

1) Landolt-Börnstein, Phys.-chem. Tabellen, IV. Aufl., S. 391, 1912.
2) J. Meyer, Zeitschr. f. phys. Chem. **72**, 225, 1910.
3) Landolt-Börnstein, Phys.-chem. Tabellen, IV. Aufl., S. 359, 1912.
4) A. Leduc, Annales de Physique [9] **5**, 17, 1916.
5) J. Narbutt, Zeitschr. f. Elektrochem. **24**, 339, 1918.
6) A. Speranski, Zeitschr. f. phys. Chem. **51**, 45, 1905.
7) J. Narbutt, l. c.
8) Benutzt wurden die Formeln für o- und m-Dichlorbenzol, m-Chlorbrombenzol, m-Dibrombenzol, o-Bromjodbenzol und o-Dijodbenzol.

Tabelle IV.

	$\Theta - 273{,}1^0$	$\frac{\gamma}{M}$	$\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$	$\frac{0{,}45 \times U_\Theta}{\Theta \times M} = \frac{\gamma}{M}$
p-Dichlorbenzol	+ 52,9	0,286—0,257 = 0,029	0,32	0,039
p-Chlorbrombenzol	+ 64,6	0,227—0,203 = 0,024	0,35	0,031
p-Dibrombenzol	+ 86,9	0,194—0,173 = 0,021	0,36	0,026
p-Bromjodbenzol	+ 90,1	0,165—0,145 = 0,020	0,44	0,021
p Dijodbenzol	+129,0	0,146—0,135 = 0,011	0,27	0,018

Vergleichen wir nun die obigen $\frac{U_T}{U_\Theta}$-Werte mit aus der Gl. (13) berechneten; für die reduzierten Temperaturen 0,98; 0,90; 0,70 erhalten wir aus ihr 0,980; 0,905; 0,745 — also eine sehr mangelhafte Übereinstimmung. Das ist auch verständlich, denn die $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte für obige *p*-Dihalogenbenzole weichen sehr stark von 1 ab, wie folgende Tabelle zeigt, in welcher auch die Differenzen der spezifischen Wärmen $\frac{\gamma}{M}$ bei den Schmelztemperaturen Θ, wie sie sich aus den empirischen Formeln für die mittleren spezifischen Wärmen ergeben, angeführt sind.

Wir müssen also, um eine bessere Übereinstimmung zu erreichen, die kompliziertere Gl. (10) benutzen. Für zwei Substanzen mit den Schmelztemperaturen Θ' und Θ'' und den Wärmen $U'_{\Theta'}$ und $U''_{\Theta''}$ ist bei den reduzierten Temperaturen ϑ' und ϑ'':

$$\frac{U'_{T'}}{U'_{\Theta'}} = \frac{1}{6}\left(4 - \frac{\gamma'\Theta'}{U'_{\Theta'}}\right) + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\gamma'\Theta'}{U'_{\Theta'}}\right)\left(\vartheta'\right)^2 - \\ - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\gamma'\Theta'}{U'_{\Theta'}}\right)\left(\vartheta'\right)^3$$

und

$$\frac{U''_{T''}}{U''_{\Theta''}} = \frac{1}{6}\left(4 - \frac{\gamma''\Theta''}{U''_{\Theta''}}\right) + \frac{1}{2}\left(2 - \frac{\gamma''\Theta''}{U''_{\Theta''}}\right)\left(\vartheta''\right)^2 - \\ - \frac{2}{3}\left(1 - \frac{\gamma''\Theta''}{U''_{\Theta''}}\right)\left(\vartheta''\right)^3.$$

Die Beziehung (17) gilt hier nur in dem Falle, wenn in den beiden obigen Gleichungen

$$\frac{\gamma'\Theta'}{U'_{\Theta'}} = \frac{\gamma''\Theta''}{U''_{\Theta''}} \tag{19}$$

ist, was für die *p*-Dihalogenbenzole innerhalb der Fehlergrenzen zutrifft, wovon man sich aus der Tabelle IV überzeugen kann.

Bildet man nun aus den Zahlen in der vorletzten vertikalen Reihe der erwähnten Tabelle das Mittel 0,35 und setzt es in die Gl. (10) ein, so bekommt man eine bedeutend bessere, aber noch nicht befriedigende Übereinstimmung mit den $\frac{U_T}{U_\Theta}$-Werten in der Tabelle III; doch läßt sich jetzt leicht durch Probieren ein völlig genügender Wert 0,45 finden. In der letzten vertikalen Reihe der vorstehenden Tabelle befinden sich die aus $\frac{0{,}45 \times U_\Theta}{\Theta \times M}$ berechneten $\frac{\gamma}{M}$-Werte, und solche Differenzen, wie sie zwischen den auf zweierlei Weise gefundenen $\frac{\gamma}{M}$-Werten zu konstatieren sind, erscheinen hier statthaft.

Durch Einsetzen des Wertes 0,45 in die Gl. (10) erhalten wir:

$$\frac{U_T}{U_\Theta} = \frac{1}{6}(4 - 0{,}45) + \frac{1}{2}(2 - 0{,}45)\vartheta^2 - \\ - \frac{2}{3}(1 - 0{,}45)\vartheta^3 = 0{,}5917 + 0{,}775\,\vartheta^2 - 0{,}3667\,\vartheta^3. \tag{20}$$

Hieraus berechnen sich für die reduzierten Temperaturen 0,98; 0,90; 0,70 die $\frac{U_T}{U_\Theta}$-Werte 0,991; 0,948; 0,846. Der Anschluß dieser Werte an die aus den Schmelzwärmen und den empirischen Formeln für die spezifischen Wärmen berechneten (s. Tabelle III) ist gut, wenn man bedenkt, daß die vorausgesetzten Unterkühlungen bis zu 120⁰ betragen.

Ferner können wir auch noch für ϑ gleich 0,9813 und 0,9950 aus der nachstehenden Formel

$$\frac{A_T}{U_\Theta} = \frac{1}{6}(4 - 0{,}45) - \frac{1}{2}(2 - 0{,}45)\vartheta^2 + \\ + \frac{1}{3}(1 - 0{,}45)\vartheta^3 = 0{,}5917 - 0{,}775\,\vartheta^2 + 0{,}1833\,\vartheta^3 \tag{21}$$

berechnen und die so erhaltenen Werte 0,0187 und 0,0050 mit den Zahlen in der letzten vertikalen Reihe der Tabelle II vergleichen. Hierbei ist wieder eine genügende Übereinstimmung zu konstatieren, obwohl die $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte, z. B. für Wasser und *p*-Dichlorbenzol, sehr stark verschieden sind — es muß eben nur ϑ in der Nähe von 1 liegen.

Die Gl. (9) und (10), welche den Quotienten $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$ enthalten, sind wohl für ein weites Temperaturintervall richtig und ebenso die aus ihnen folgenden Beziehungen (15) und (17), mit der Einschränkung, daß die letzteren für Substanzen von sehr ähnlicher Konstitution, z. B. für Glieder homologer Reihen, gelten sollen, denn in solchen Fällen wird der obige Quotient wohl von gleicher oder ziemlich gleicher Größe sein, wie wir das auch bei den *p*-Dihalogenbenzolen vorgefunden haben.

Andererseits ist es durchaus möglich, daß völlig unähnliche Stoffe doch sehr nahe gleiche $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$-Werte besitzen. So läßt sich für die Umwandlung vom monoklinen in den rhombischen Schwefel aus $\frac{U_\Theta}{M} = 3{,}19$ cal und $\Theta = 368^0$ nach den Messungen Tammanns[1]) und $\frac{\gamma}{M} = 0{,}009$, angenähert geschätzt aus den Messungen der mittleren spezifischen Wärmen von Koref[2]) und Wigand[3]),

$$\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta} = \frac{0{,}009 \times 368}{3{,}19} = 1{,}04$$

und für das Erstarren von flüssigem $MgCl_2 \cdot 6H_2O$ aus den Daten von Riesenfeld und Milchsack[4]): $\frac{U_\Theta}{M} = 41{,}2$ cal, $\Theta = 389^0$ und $\frac{\gamma}{M} = 0{,}111$,

$$\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta} = \frac{0{,}111 \times 389}{41{,}2} = 1{,}05$$

berechnen. Dagegen ist für letzteren Vorgang für ein anderes Salzhydrat, von allerdings wenig ähnlicher Konstitution, das $Co(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$, berechnet aus den Daten derselben Autoren für $\frac{U_\Theta}{M} = 30{,}2$ cal, $\Theta = 330^0$ und $\frac{\gamma}{M} = 0{,}127$,

$$\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta} = \frac{0{,}127 \times 330}{30{,}2} = 1{,}39.$$

Gelegentlich der Erwähnung der Arbeit von Riesenfeld und Milchsack möchte ich noch auf folgendes hinweisen. Die genannten Autoren finden experimentell für die spezifische Wärme des festen $MgCl_2 \cdot 6H_2O$ 0,3800 und berechnen 0,3852 nach der Nernstschen Formel

$$\gamma = \frac{U_\Theta}{\Theta}. \qquad (22)$$

1) Angeführt nach Nernst, Lehrb. d. theor. Chem. 5. Aufl., S. 631.
2) Ann. d. Phys. **36**, 65, 1911.
3) Ann. d. Phys. **22**, 64, 1907.
4) Zeitschr. f. anorgan. Chem. **85**, 427, 1914.

[Diese folgt aus der Gl. (13), denn differenziert man die letztere nach T, so wird

$$\frac{dU}{dT} = c_2 - c_1 = \frac{U_\Theta}{\Theta^2} T,$$

und für die Schmelztemperatur wird

$$c_2 - c_1 = \gamma = \frac{U_\Theta}{\Theta}\Big].$$

Die Übereinstimmung zwischen dem obigen beobachteten und dem berechneten Werte der spezifischen Wärme ist ziemlich gut, dagegen schlecht für die spezifische Wärme des festen $Co(NO_3)_2 \cdot 6H_2O$; es wurde experimentell gefunden 0,3733 und berechnet nach der Nernstschen Formel 0,4091. Dieses Auseinandergehen möchten Riesenfeld und Milchsack auf die Ungenauigkeit der Bestimmung der spezifischen Wärme des flüssigen Salzes zurückführen; möglicherweise sind die Messungen aber doch genügend genau, und die spezifische Wärme des festen Salzes berechnet sich nur deshalb zu hoch, weil ja hier der Wert von $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$ sehr von 1 abweicht (vgl. die frühere Berechnung). Beispielsweise erhält man in einem ähnlichen Falle für die spezifische Wärme von Eis bei 0^0 C aus den Daten: $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta} = 1$ (anstatt 1,7), $\Theta = 273^0$, $\frac{U_\Theta}{M} = 80$ cal und $\frac{c}{M}$ (flüssig) $= 1$, den Wert 0,7, anstatt 0,5[1]).

Überhaupt wird es nicht oft vorkommen, daß der Quotient $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}$ in der Nähe von 1 liegt, und deshalb wird die Formel $\gamma\Theta = U_\Theta$ nicht oft zu guten Resultaten führen. Will man aber die spezifische Wärme eines festen Stoffes aus γ berechnen, wenn obiger Quotient nicht gleich 1 ist, so müssen Θ, U_Θ und noch ein U_T-Wert bekannt sein, mit deren Hilfe man dann γ aus nachstehender Gleichung:

$$\gamma = \frac{U_\Theta(4 + 6\vartheta^2 - 4\vartheta^3) - 6U_T}{\Theta(1 + 3\vartheta^2 - 4\vartheta^3)}, \qquad (23)$$

welche aus der Gl. (10) folgt, findet.

Mittelst dieser Gleichung erhält man für die Schwefelumwandlung aus den vorhin erwähnten Daten von Tammann für $\frac{U_\Theta}{M}$ und Θ und dem von Brönsted[2]) gemessenen Werte $\frac{U_T}{M} = 2{,}40$ cal bei 0^0 C $\left(\vartheta = \frac{273}{368}\right)$:

1) O. Sackur, Lehrb. d. Thermochemie u. Thermodynamik, S. 316, 1912.
2) Zeitschr. f. phys. Chem. **55**, 371, 1906.

$$\frac{\gamma}{M} = \frac{3{,}19(4+6\vartheta^2-4\vartheta^3)-6\times 2{,}40}{368(1+3\vartheta^2-4\vartheta^3)} = 0{,}010,$$

welcher Wert mit dem früher aus den mittleren spezifischen Wärmen angenähert geschätzten 0,009 sehr gut übereinstimmt, wenn man bedenkt, daß z. B. der Wert U_Θ hier wohl nur bis auf einige Prozente sicher bekannt und wahrscheinlich zu hoch ist und ein Prozent Fehler in seiner Bestimmung schon einen Fehler von ca. 5 Proz. des γ-Wertes verursacht.

Andererseits kann U_Θ aus Θ, γ und einem U_T-Werte mittelst folgender Gleichung berechnet werden:

$$U_\Theta = \frac{6U_T + \gamma\Theta(1+3\vartheta^2-4\vartheta^3)}{4+6\vartheta^2-4\vartheta^3}. \quad (24)$$

Diese Gleichung gestattet beispielsweise U_Θ für die Umwandlung des weißen Zinns in graues zu berechnen. Nach Brönsted ist bei 0^0 C $U_T = 532$ cal pro Grammatom[1]) und die Differenz der Molekularwärmen ist bei $+10^0$ C gleich 0,5[2]). Ist γ angenähert 0,5, so erhält man für die Umwandlungstemperatur $+18^0$ C $\left(\vartheta = \frac{273}{291}\right)$:

$$U_\Theta = \frac{6\times 532 + 0{,}5\times 291(1+3\vartheta^2-4\vartheta^3)}{4+6\vartheta^2-4\vartheta^3} = 542 \text{ cal}.$$

Übrigens könnte U_Θ noch berechnet werden aus der Differenz der Molekularwärmen beider Modifikationen bzw. der flüssigen und festen Substanz bei der halben Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur. Wenn man nämlich in der Gl. (7) für b und c ihre Werte aus (8) einsetzt und in der so modifizierten Gleichung einige Umformungen vornimmt, so erhält man:

$$c_2 - c_1 = \left[2(1-\vartheta) - \frac{\gamma\Theta}{U_\Theta}(1-2\vartheta)\right]\frac{\vartheta U_\Theta}{\Theta}. \quad (23\text{a})$$

Bei $\vartheta = 0{,}5$ verwandelt sich obige Gleichung in

$$c_2 - c_1 = \frac{U_\Theta}{2\Theta}, \quad (23\text{b})$$

und hieraus bekommt man

$$U_\Theta = 2\Theta(c_2 - c_1). \quad (24\text{a})$$

Die Formel (24a) ist aber leider von geringer praktischer Bedeutung, weil $c_2 - c_1$ selten experimentell bestimmbar ist und noch seltener genügend genau gemessen werden kann[3]). Z. B. berechnet sich $\frac{U_\Theta}{M}$ für die oben besprochene Schwefelumwandlung aus den Messungen der spez. Wärmen von Nernst[1]) zu $2\times 368\times 0{,}0053 = 3{,}9$ cal (anstatt 3,19 cal). Die Differenz beträgt also ca. 22 Proz.; doch ist die Übereinstimmung zwischen Erfahrung und Rechnung nur scheinbar unbefriedigend, weil eine solche Differenz in der Umwandlungswärme schon durch eine Unsicherheit von weniger als 1 Proz. in den Daten für die spezifischen Wärmen verursacht wird.

Besser sieht die Übereinstimmung aus, wenn man umgekehrt aus der Umwandlungswärme und der Umwandlungstemperatur $c_2 - c_1$ berechnet. Für die Differenz der spezifischen Wärmen der beiden Schwefelmodifikationen bei 184^0 abs. bekommt man:

$$\frac{c_2 - c_1}{M} = \frac{3{,}19}{2\times 368} = 0{,}0043.$$

Dieser Wert deckt sich gut mit dem aus den experimentellen Daten für die spezifischen Wärmen von Nernst (l. c.) für dieselbe Temperatur berechneten Werte 0,0053.

Auch findet man für Betol aus $\frac{U_\Theta}{M} = 18{,}0$ cal[2]) für 183^0 abs. den Wert 0,025 und für Benzophenon aus $\frac{U_\Theta}{M} = 23{,}4$ cal[1]) für 161^0 abs. den Wert 0,36, welche sich den von Koref[3]) experimentell gefundenen befriedigend anschließen.

Mit Hilfe der Gleichungen (23a) und (23b) lassen sich ferner die spezifischen Wärmen berechnen. Z. B. sollte für unterkühltes Wasser bei 137^0 abs. aus der spezifischen Wärme von Eis[4]), welche bei derselben Temperatur gleich 0,26 ist, $\frac{c_2}{M}$ ungefähr gleich 0,4 sein.

Schließlich folgt noch aus der Gl. (23a), daß bei Annäherung an den absoluten Nullpunkt $c_2 - c_1 < 0$ wird, wenn für eine Substanz $\frac{\gamma\Theta}{U_\Theta} > 2$ ist; dieses bedeutet so viel, daß die Molekularwärme der stabilen Modifikation bzw. der festen

1) Entnommen der Arbeit von E. Cohen und W. D. Heldermann, Zeitschr. f. phys. Chem. **89**, 728, 1915.

2) Zeitschr. f. Elektrochem. **18**, 716, 1912.

3) Es sei noch darauf hingewiesen, daß, wenn ganz allgemein

$$S = bT^m + cT^n$$

ist, wo m und $n > 0$ und $m < n$ ist, die Beziehung

$$U_\Theta = \Theta(c_2 - c_1)\cdot\frac{n^{\frac{m}{n-m}}}{m^{\frac{n}{n-m}}}$$

existieren muß und zwar bei $\vartheta = \sqrt[n-m]{\frac{m}{n}}$.

1) Ann. d. Phys. **36**, 414, 1911.

2) G. Tammann, Kristallisieren und Schmelzen (Leipzig 1903), S. 45.

3) Sitzungsber. d. kgl. preuß. Akad. d. Wissensch. (1910), 261.

4) W. Nernst, Sitzungsber. d. kgl. preuß. Akad. d. Wissensch. (1910), 274.

Substanz größer als die der instabilen Modifikation bzw. der flüssigen Substanz wird.

Nun wollen wir zur Beziehung (15) zurückkehren und in ihr U_Θ durch den Quotienten aus der Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme und der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ, welcher gleich der Entropie S_Θ ist, ersetzen; dann erhalten wir:

$$\frac{A'_{T'}}{\Theta' S'_{\Theta'}} = \frac{A''_{T''}}{\Theta'' S''_{\Theta''}}$$

und bei gleichen S_Θ-Werten:

$$\frac{A'_{T'}}{\Theta'} = \frac{A''_{T''}}{\Theta''}. \quad (25)$$

Der Quotient aus der Umwandlungs- bzw. Erstarrungsaffinität und der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ soll bei gleichen reduzierten Temperaturen für alle Substanzen mit gleichen S_Θ-Werten gleich sein.

Ebenso erhalten wir aus der Beziehung (17):

$$\frac{U'_{T'}}{\Theta'} = \frac{U''_{T''}}{\Theta''}. \quad (26)$$

Der Quotient aus der Umwandlungs- bzw. Erstarrungswärme und der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ soll bei gleichen reduzierten Temperaturen für alle Substanzen mit gleichen Werten der Entropie S_Θ gleich sein.

Natürlich gelten die Beziehungen (25) und (26) nur dann allgemein, wenn $1 - \vartheta$ gering ist; sie sollen aber in einem weiten Temperaturintervall gelten, wenn die zu vergleichenden Stoffe von sehr ähnlicher Konstitution sind.

Die Richtigkeit der Beziehung (26) möge für $\vartheta = 0{,}90$ an einigen der schon früher erwähnten p-Dihalogenbenzole mit fast völlig gleichen S_Θ-Werten in der Tabelle V gezeigt werden.

Tabelle V.

	S_Θ	$T-273{,}1^0$	$\frac{U_T}{M}$ cal	$\frac{U_T}{\Theta}$
p-Dichlorbenzol .	13,30	+ 20,3	28,34	12,8
p-Chlorbrombenzol	13,27	+ 30,8	22,26	12,6
p-Dijodbenzol . .	13,30	+ 88,8	15,64	12,8

Wir haben früher gesehen, daß die Umwandlungs- bzw. Erstarrungsaffinität nach der Gl. (16) oder der Gl. (12) berechnet werden kann; in beiden Fällen resultiert fast derselbe Wert, wenn die Differenz $1 - \vartheta$ genügend klein ist. Daher kann man setzen:

$$RT \ln \frac{p_2}{p_1} = \frac{U_\Theta}{2}(1 - \vartheta^2),$$

und hieraus folgt:

$$U_\Theta = \frac{2RT}{1 - \vartheta^2} \ln \frac{p_2}{p_1}$$

oder

$$U_\Theta = \frac{2R\Theta\vartheta}{1 - \vartheta^2} \ln \frac{p_2}{p_1}. \quad (27)$$

Die Erstarrungs- bzw. Umwandlungswärme läßt sich aus den Dampfdrucken der unterkühlten flüssigen und festen Substanz bzw. der labilen und stabilen Modifikation berechnen.

Bei genügend genauen Beobachtungen von p kann U_Θ ziemlich richtig aus der Gl. (27) erhalten werden, und diese indirekte Bestimmungsmethode dürfte manchmal in Fällen, in denen direkte Messungen von U nicht möglich sind, ziemlich gute Resultate ergeben, wie die nachstehende Tabelle, in welcher die Erstarrungswärmen für einige Substanzen, nach der Gl. (27) berechnet, angeführt und mit den kalorimetrischen Werten verglichen sind, zeigt.

Tabelle VI.

	$\Theta-273{,}1^0$	$T-273{,}1^0$	p_2 mm	p_1 mm	$\frac{U_\Theta}{M}$ cal ber.	$\frac{U_\Theta}{M}$ cal beob.	Diff. Proz.
Wasser	0	− 1	4,255[1]	4,215[1]	77,6	79,6[2]	−3
Benzol	+ 5,4	+ 4	33,02[3]	32,32[3]	30,1	30,4[4]	−1
p-Chlorbrombenzol	+64,6	+58,3	75,4[5]	66 5[5]	23,4	23,4[6]	0
p-Dichlorbenzol	+52,9	+51,3	116,9[5]	113,2[5]	28,7	29,5[6]	−3

Noch etwas bessere Resultate gibt natürlich die genauere Gleichung:

$$U_\Theta = \Theta \left[\frac{6R\vartheta \ln \frac{p_2}{p_1} + \gamma(1 - 3\vartheta^2 + 2\vartheta^3)}{4 - 6\vartheta^2 + 2\vartheta^3} \right], \quad (27\text{a})$$

1) Landolt-Börnsteins Tabellen, IV. Aufl., S. 359, 1912.
2) A. Leduc, l. c.
3) Landolt-Börnsteins Tabellen, IV. Aufl., S. 391, 1912.
4) J. Meyer, l. c.
5) A. Speranski, l. c.
6) J. Narbutt, l. c.

Tabelle VII.

	$T-273{,}1^0$	Konst.	$T-273{,}1^0$	Konst.	$T-273{,}1^0$	Konst.	$T-273{,}1^0$	Konst.	$T-273{,}1^0$	Konst.
Benzol¹)	+4	1,0025	+3	1,0047	+2	1,0070²)	+1	1,0079	0	1,0096
Wasser¹)	−1,37	1,0024	−2,36	1,0042	−3,34	1,0061	−4,32	1,0079	−5,30	1,0098

welche durch Gleichsetzung der Ausdrücke für A (16) und (9) und einige Umformungen erhalten werden kann. Z. B. berechnet sich nach der Gl. (27a) aus obigen Daten für Wasser U_Θ gleich 77,8 cal und aus den Dampfdruckmessungen bei -4^0 U_Θ gleich 78,3 cal. Doch wird in den allermeisten Fällen die Ungenauigkeit der Dampfdruckbeobachtungen den Vorteil der Anwendung der genaueren Gleichung, welche außerdem die Kenntnis von γ verlangt, illusorisch machen.

Durch Einsetzen von S_Θ an Stelle von $\frac{U_\Theta}{\Theta}$ in die Gl. (27) erhält man nach einigen Umformungen für zwei Substanzen:

$$\ln\frac{p_2'}{p_1'} = \frac{S'_{\Theta'}}{2R}\left[\frac{1}{\vartheta'} - \vartheta'\right]$$

und

$$\ln\frac{p_2''}{p_1''} = \frac{S''_{\Theta''}}{2R}\left[\frac{1}{\vartheta''} - \vartheta''\right].$$

Wird in den beiden Gleichungen $\vartheta' = \vartheta''$ gesetzt und die erste Gleichung durch die zweite dividiert, so folgt

$$\ln\frac{p_2'}{p_1'} : \ln\frac{p_2''}{p_1''} = \frac{S'_{\Theta'}}{S''_{\Theta''}}$$

oder

$$\sqrt[S'_{\Theta'}]{\frac{p_2'}{p_1'}} = \sqrt[S''_{\Theta''}]{\frac{p_2''}{p_1''}}. \tag{28}$$

Bei gleichen reduzierten Temperaturen soll die Wurzel, deren Exponent der Entropie bei der Umwandlungs- bzw. Schmelztemperatur Θ gleich ist, aus dem Quotienten der Dampfdrucke der labilen und der stabilen Modifikation bzw. der unterkühlten flüssigen und der festen Substanz für alle Substanzen gleich sein.

Die Konstanz des Ausdrucks (28) kann für eine Anzahl gleicher reduzierter Temperaturen an Wasser und Benzol, für welche recht genaue Dampfdruckmessungen existieren, in vorstehender Tabelle gezeigt werden. Für Wasser ist $S_\Theta = 5{,}25$ und für Benzol ist $S_\Theta = 8{,}51$.

Setzt man ferner in der Gl. (28) $S'_{\Theta'} = S''_{\Theta''}$, dann wird

$$\frac{p'_2}{p'_1} = \frac{p''_2}{p''_1}. \tag{29}$$

Das Verhältnis der Dampfdrucke der unterkühlten flüssigen und festen Substanz bzw. der labilen und stabilen Modifikation soll bei gleichen reduzierten Temperaturen für alle Substanzen mit gleichen S_Θ gleich sein.

Daten zur Prüfung der Beziehung (29) sind wohl nur für p-Dichlorbenzol und für p-Chlorbrombenzol, deren S_Θ-Werte 13,30 und 13,27 betragen, vorhanden¹).

Für die reduzierte Temperatur 0,9950 ist für p-Dichlorbenzol

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{116{,}9}{113{,}2} = 1{,}033$$

und für p-Chlorbrombenzol (die folgenden p-Werte sind von mir interpoliert worden) ist

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{96{,}5}{92{,}5} = 1{,}043.$$

Diese Übereinstimmung genügt, denn sie entspricht der Genauigkeit der Dampfdruckmessungen.

Endlich möge noch auf eine Gleichung:

$$\ln\frac{p_2}{p_1} = \frac{U_\Theta}{3R\Theta}\left(\frac{2}{\vartheta} - 3\vartheta + \vartheta^2\right) - \frac{\gamma}{6R}\left(\frac{1}{\vartheta} - 3\vartheta + 2\vartheta^2\right), \tag{30}$$

hingewiesen werden, welche aus der Gl. (27a) folgt und $\ln\frac{p_2}{p_1}$ aus Θ, U_Θ und γ zu berechnen gestattet. Hiernach läßt sich die Dampfdruckkurve einer unterkühlten flüssigen Substanz finden, wenn die Dampfdruckkurve für die feste Substanz bekannt ist, oder umgekehrt.

Die folgende Gl. (30a) stellt die Gl. (30) in etwas modifizierter Form vor und dürfte für ein ziemlich weites Temperaturintervall gültig sein:

$$\lg p_2 = \lg p_1 + \frac{0{,}4343}{6R}\left[\frac{2U_\Theta}{\Theta}\left(\frac{2}{\vartheta} - 3\vartheta + \vartheta^2\right) - \gamma\left(\frac{1}{\vartheta} - 3\vartheta + \vartheta^2\right)\right]. \tag{30a}$$

1) Die Dampfdrucke sind Landolt-Börnsteins Tabellen (l. c.) entnommen.

2) Dieser Wert weicht erheblich von dem für Wasser ab und paßt sich auch den anderen für Benzol nicht gut an. Das liegt vermutlich daran, daß die zur Berechnung der Konstanten benutzten Dampfdruckwerte des Benzols in diesem Falle nicht richtig sind, wenigstens fügt sich der p-Wert für flüssiges Benzol schlecht in die p, T-Kurve ein.

1) Die p-Werte sind der Arbeit von A. Speranski (l. c.) entnommen.

Leider fehlen fast völlig genaue Dampfdruckmessungen an festen und unterkühlten flüssigen Substanzen in gleichen und genügend weiten Temperaturgrenzen, um die Gleichung exakt prüfen zu können. Wir müssen uns daher damit begnügen, die Dampfdrucke von flüssigem Wasser unterhalb 0^0 aus den Dampfdruckmessungen für Eis von Scheel und Heuse für einige Temperaturen nach der Gl. (30a) zu berechnen und sie mit den Beobachtungen derselben Autoren an unterkühlten Wasser zu vergleichen[1]). Für Wasser ist $U_\theta = 79{,}6 \times 18{,}016$ cal, $\Theta = 273{,}1^0$ und $\gamma = 0{,}5 \times 18{,}016$.

Tabelle VIII.

$T-273{,}1^0$	p_1 mm	p_2 mm ber.	p_2 mm beob.	Diff. in mm
— 3	3,566	3,671	3,669	+0,002
— 6	2,762	2,928	2,928	0,000
— 9	2,127	2,322	2,321	+0,001
— 10	1,947	2,146	2,144	+0,002
— 11	1,780	1,981	1,979	+0,002
— 12	1,627	1,829	1,826	+0,003
— 13	1,486	1,687	1,684	+0,003
— 15	1,237	1,432	1,429	+0,003

Die Übereinstimmung ist gut, doch sind die mittelst der Gl. (30a) berechneten Werte durchschnittlich um ein paar tausendstel Millimeter größer als die beobachteten.

Ferner läßt sich aus der obigen Tabelle leicht finden, daß die Differenzen der aus der Gl. (30a) berechneten Zahlenwerte für p_2 und der beobachteten für p_1 zwischen -11^0 und -12^0 ein Maximum aufweisen dessen Existenz schon von Thiesen[2]) vorausberechnet und von Scheel und Heuse[3]) experimentell gefunden worden ist.

Endlich wollen wir noch für drei Temperaturen, bei welchen Wasser in unterkühltem Zustande nicht mehr beobachtet werden konnte und von welchen zwei schon sehr tief liegen, $\frac{p_2}{p_1}$-Werte, berechnet aus auf rechnerischem Wege von Cederberg[4]) und von Nernst[5]) gefundenen Daten und ermittelt aus der Gl. (30), in folgender Tabelle zusammenstellen.

Die Übereinstimmung ist bis zu 200^0 abs. herab, bei welcher Temperatur nach den Rechnungen von Cederberg (l. c.) und Nernst (l. c.) der Dampfdruck des Eises ca. 1 Tausendstel und der Dampfdruck des unterkühlten Wassers ca.

Tabelle IX.

T^0	$\frac{p_2}{p_1}$ (C.)	$\frac{p_2}{p_1}$ (N.)	$\frac{p_2}{p_1}$ (Gl. 30)
253,09	1,222	1,221	1,217
200,00	2,33	2,07	2,14
100,00	27	9	12

2—3 Tausendstel Millimeter beträgt, befriedigend, und auch noch bei 100^0 abs., bei welcher Temperatur der Dampfdruck des unterkühlten Wassers etwa 1 Tausendbillionstel Millimeter betragen soll, stimmen die $\frac{p_2}{p_1}$-Werte nach der Größenordnung überein, wobei der aus der Gl. (30) berechnete Wert sich mehr an den aus den Daten von Nernst ermittelten anlehnt. Es ist daher wahrscheinlich, daß die Gl. (30a) auch in manchen anderen Fällen, wenn sichere experimentelle Daten vorliegen, brauchbare Resultate liefern wird.

Hiermit seien nun meine Ausführungen, welche als vorläufige Mitteilung aufzufassen sind, beschlossen. Arbeiten anderer Autoren konnten von mir leider nicht genügend berücksichtigt werden, weil solche infolge des fast völligen Fehlens der einschlägigen Literatur, besonders aus den letzten Jahren, hier am Orte mir nicht zugänglich waren. Die Veröffentlichung wollte ich aber nicht aufschieben, da ich leider einige Zeit am wissenschaftlichen Arbeiten verhindert sein werde.

Dorpat, im August 1919.

(Eingegangen 20. September 1919.)

Eine Analogie zwischen zweidimensionaler Hydrodynamik und Elektrostatik.

Von Fritz Bartels.

Das zweidimensionale Feld sei gegeben durch die analytische Funktion

$$\psi(z) = \varphi + i \cdot \chi,$$

die erfüllt:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \chi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \chi}{\partial x}.$$

Die Richtung s (Cosinus: α, β) gibt also:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \alpha + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \beta = \frac{\partial \chi}{\partial x} \cdot (-\beta) + \frac{\partial \chi}{\partial y} \cdot \alpha$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \chi}{\partial t},$$

wo s und t zwei aufeinander senkrechte Richtungen sind; s liegt zu t wie x zu y.

In der Hydrodynamik setzt man φ gleich

1) Die Dampfdrucke für Eis und unterkühltes Wasser sind Landolt-Börnsteins Tabellen (l. c.) entnommen.
2) Ann. d. Phys. u. Chem. **67**, 690, 1899.
3) Ann. d. Phys. **29**, 723, 1909.
4) Die thermodynamische Berechnung chemischer Affinitäten usw. Berlin 1916, S. 33 u. 36.
5) Entnommen der Arbeit von J. W. Cederberg, l. c.

dem Geschwindigkeitspotential (also $\chi =$ konst. = Stromlinien) und hat dann für den hydrodynamischen Druck p in einer inkompressiblen Flüssigkeit der Dichte ϱ ohne äußere Kräfte

$$p = p_0 - \frac{\varrho}{2} v^2 = p_0 - \frac{\varrho}{2} \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}\right)^2 = p_0 - \frac{\varrho}{2} \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial n}\right)^2. \quad (1)$$

Hierin ist p_0 der Ruhedruck, v die Geschwindigkeit, s die Richtung einer Stromlinie, speziell also einer Kontur, n deren Normale. In der Aerodynamik verwendet man dies zur Berechnung des Auftriebs von Zylinderflächen in bewegter Luft.

$\psi(z)$ gibt uns zugleich ein elektrostatisches Feld, wenn wir χ als Potential ansetzen; also $\chi =$ konst. sind die Potentiallinien, darunter im besonderen die Konturen unserer Leiter. Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ erfüllt also (σ = Flächendichte, ε = Dielektrizitätskonstante, n = äußere Normale):

$$\mathfrak{E}_l = -\frac{\partial \chi}{\partial l}, \quad 4\pi\sigma = \varepsilon \cdot \mathfrak{E}_n.$$

Die mechanischen Kräfte, ausgeübt auf Leiter, ergeben sich in bekannter Weise aus dem elektrischen Druck p pro cm² parallel n:

$$p = \frac{\sigma}{2} \cdot \mathfrak{E}_n = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}_n^2 = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \left(\frac{\partial \chi}{\partial n}\right)^2. \quad (2)$$

Ein Vergleich von (1) und (2) zeigt also: elektrische und hydrodynamische Kräfte sind identisch, wenn die Dichte der strömenden Flüssigkeit $\varrho = \frac{\varepsilon}{4\pi}$, und der Ruhedruck $p_0 = 0$.

Setzt man dies also in die Formeln der vorliegenden aerodynamischen Probleme ein, so sind auch die Kräfte und Momente des entsprechenden Influenzproblems gefunden. Blasius hat 1910 die Berechnung im Falle der Aerodynamik auf einfache komplexe Integrale zurückgeführt (vgl. Grammel, Die hydrodynamischen Grundlagen des Fluges, 1917). Genau analog können wir hier vorgehen.

Definition: $$\mathsf{E} = -\frac{\partial \psi}{\partial z}. \quad (3)$$

Also:

$$\mathsf{E} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x} = -\frac{\partial \chi}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial \chi}{\partial x},$$
$$\mathsf{E} = \mathfrak{E}_y + i \cdot \mathfrak{E}_x.$$

n sei stets die äußere Normale, s die Bogenlänge der Kontur (positiv im Gegenzeigersinn). Wegen

$$n_x = \frac{dy}{ds}, \quad n_y = -\frac{dx}{ds}$$

folgt für die Kraftkomponenten auf ein Oberflächenelement (Länge $= ds$, Tiefe $= 1$ cm):

$$d\mathfrak{K}_x = p \cdot ds \cdot n_x = p \cdot dy = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}_n^2 \cdot dy,$$
$$d\mathfrak{K}_y = p \cdot ds \cdot n_y = -p \cdot dx = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathfrak{E}_n^2 \cdot dx.$$

Definition: $\mathsf{K} = \mathfrak{K}_y + i\mathfrak{K}_x$.

Also:

$$d\mathsf{K} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot (\mathfrak{E}_x^2 + \mathfrak{E}_y^2) \cdot (-dx + i \cdot dy),$$
$$d\mathsf{K} = \frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathsf{E} \cdot (\mathfrak{E}_y - i\mathfrak{E}_x) \cdot (-dx + i \cdot dy).$$

Am Leiter ist:

$$\mathfrak{E}_x \cdot dx + \mathfrak{E}_y \cdot dy = 0.$$
$$(\mathfrak{E}_y - i \cdot \mathfrak{E}_x) \cdot (-dx + i \cdot dy) = (\mathfrak{E}_y + i \cdot \mathfrak{E}_x)(-dx - i \cdot dy) = -\mathsf{E} \cdot dz,$$
$$d\mathsf{K} = -\frac{\varepsilon \cdot \mathsf{E}^2}{8\pi} \cdot dz.$$

Für ein endliches Stück also (positiver Sinn!):

$$\mathfrak{K}_y + i\mathfrak{K}_x = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \int_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \cdot dz. \quad (4)$$

Drehmoment $d\mathfrak{M}$ um den Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$ auf das Element ds:

$$d\mathfrak{M} = (x - x_0) \cdot d\mathfrak{K}_y - (y - y_0) \cdot d\mathfrak{K}_x,$$
$$d\mathfrak{M} = -\frac{\varepsilon \mathfrak{E}_n^2}{8\pi} \left\{(x - x_0) \cdot dx + (y - y_0) \cdot dy\right\}.$$

Aber:

$$(\mathfrak{E}_y - i\mathfrak{E}_x) \cdot (-dx + i \cdot dy) = -\mathsf{E} \cdot dz,$$
$$(\mathfrak{E}_y + i\mathfrak{E}_x) \cdot \{(x - x_0) + i(y - y_0)\} = \mathsf{E} \cdot (z - z_0).$$

Durch Multiplizieren:

$$(\mathfrak{E}_y^2 + \mathfrak{E}_x^2) \cdot \{-[(x - x_0)dx + (y - y_0) \cdot dy] + i \cdot [(x - x_0) \cdot dy - (y - y_0) \cdot dx]\} = -\mathsf{E}^2 \cdot (z - z_0) \cdot dz.$$

Wir sehen also: $d\mathfrak{M}$ ist Realteil von

$$d\mathsf{M} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \cdot \mathsf{E}^2 \cdot (z - z_0) \cdot dz.$$

Für ein endliches Stück: $\mathfrak{M}$ = Realteil von:

$$\mathsf{M} = -\frac{\varepsilon}{8\pi} \int_1^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial z}\right)^2 \cdot (z - z_0) \cdot dz. \quad (5)$$

Die Elektrizitätsmenge auf dem Element folgt, wie bekannt, zu

$$dE = \sigma \cdot ds = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \frac{\partial \chi}{\partial n} \cdot ds = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \frac{\varepsilon}{4\pi} \cdot d\varphi, \quad E = \frac{\varepsilon}{4\pi}(\varphi_2 - \varphi_1),$$

oder da χ längs der Kontur konstant ist:

$$E = \frac{\varepsilon}{4\pi}(\psi_2 - \psi_1) = -\frac{\varepsilon}{4\pi} \int_1^2 \mathsf{E} \cdot dz. \quad (6)$$

Die Ladung entspricht also dem Produkt: Dichte mal Zirkulation. (3) liefert durch eine komplexe Differentiation die Feldstärke; (4) und (5)

durch je eine komplexe Integration die Kräfte und Drehmomente auf beliebige Teile der Leiter. Die beiden letzten Formeln sind der Beziehung (6) ganz analog. Sie sind nach Cauchy vom Integrationswege unabhängig, sofern er durch stetige Deformation aus der Kontur 1 .. 2 erhalten werden kann ohne Überschreiten eines anderen Leiterstückes.

Besonders einfach werden die Formeln, wenn man sie anwendet auf eine von mehreren geschlossenen Flächen. Man hat dann nur E^2 bzw. $\mathsf{E}^2(z-z_0)$ bzw. E in eine Laurent-Reihe zu entwickeln mit den Residuen R_k, R_m, R_e und hat dann nach dem Residuensatz:

$$\mathsf{K} = -\frac{\varepsilon i}{4} R_k, \quad \mathsf{M} = -\frac{\varepsilon \cdot i}{4} \cdot R_m, \quad E = -\frac{\varepsilon \cdot i}{2} \cdot R_e.$$

Haben wir z. B. im Endlichen eine Konfiguration von Leitern und im Unendlichen ein homogenes $\mathfrak{E}$-Feld, so ist:

$$\mathsf{E} = A_0 + \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z^2} + \dots.$$

Also die Gesamtmenge: $E = -\frac{\varepsilon i}{2} A_1$ (entsprechend der Zirkulation der Aerodynamik). Eine reelle Menge E verlangt also, daß A_1 rein imaginär ist. Weiter:

$$\mathsf{E}^2 = A_0{}^2 + \frac{2 A_0 A_1}{z} + \frac{1}{z^2}\left\{A_1{}^2 + 2 A_0 A_2\right\} + \dots,$$

$$\mathsf{K} = -\frac{\varepsilon \cdot i}{2} A_0 A_1,$$

oder

$$\mathsf{K} = A_0 \cdot E.$$

$$\mathfrak{K}_y + i \mathfrak{K}_x = (\mathfrak{E}_y + i \mathfrak{E}_x)_\infty \cdot E.$$

wie zu erwarten war trotz der Felddeformation am Leiter (Analogon zu der Kutta-Joukowskyschen Auftriebsformel 1910). Drehmoment um den Nullpunkt:

$$\mathsf{M} = -\frac{\varepsilon i}{4} \cdot (2 A_0 A_2 + A_1{}^2).$$

$A_0 = 0$ gibt, da $A_1{}^2$ reell ist: M = rein imaginär, also $\mathfrak{M} = 0$: kein Gesamtdrehmoment, wenn das Feld im Unendlichen = 0 ist. Ist im Unendlichen das Feld, also A_0 von Null verschieden, so resultiert ein Drehmoment im allgemeinen auch dann, wenn $A_1 = 0$ ist (keine Gesamtladung). Gleichgewichtslagen ergeben sich nur, wenn $A_0 \cdot A_2$ reell ist. — Für eine einzige ebene unelektrische Platte erhält man leicht ein $\mathfrak{M}$ proportional sin 2β, wenn β der Winkel zwischen $\mathfrak{E}_\infty$ und Platte ist. Es folgt eine labile Gleichgewichtslage, wenn die Platte senkrecht zu $\mathfrak{E}_\infty$ steht, eine stabile, wenn sie parallel dazu ist (d. h. senkrecht zu den Potentiallinien im Unendlichen). Hydrodynamisch entspricht dem, wie wir sehen, daß eine drehbare lange Platte sich senkrecht zu dem Anblasestrom stellt, wenn Zirkulation und Gesamtkraft = 0 sind, wie man das auch beobachtet. — So lassen sich sämtliche Probleme übertragen.

Zusammenfassung.

Es wird die Analogie zwischen hydrodynamischen und elektrostatischen Kräften (Leiter im Dielektrikum) im zweidimensionalen Falle gezeigt. Die der Aerodynamik entsprechenden Formeln werden abgeleitet und an Beispielen erläutert.

Göttingen, Januar 1920.

(Eingegangen 8. Februar 1920.)

Zu Rayleighs Theorie des sekundären Lichtes.

Von W. Filehne.

In der Physiologischen Abteilung des Archivs für Anatomie und Physiologie 1919 ist von mir soeben eine Arbeit erschienen: „Das Blau der durch die menschliche Haut schimmernden Venen usw.", in der ich unter anderem (im Abschnitt V) das Aussehen trüber Medien in monochromatischen Lichtern verschiedener Wellenlängen bespreche. Ich hatte gefunden, daß ein trübes Medium gegen schwarzen Hintergrund in rotem, orangefarbenem und gelbem Teile des Bogenlichtspektrums nicht trübe und farbig, sondern klar und farblos gesehen wird. Im Grün zeigt sich die Trübung und sekundäres, schwaches, grünes Licht. Im Blaugrün, Blau und Violett war die Trübung sehr deutlich und allenthalben von der Farbe des auffallenden Lichtes. Bis zum Indigo, etwa bei $\lambda = 440\ \mu\mu$, nahm die physiologische Intensität des Lichteindrucks zu, von hier bis zum Ende des sichtbaren Spektrums wieder ab. Auf Grund dieser Beobachtungen schrieb ich (Seite 174): es „entspricht der Rayleighsche Satz, daß die Intensität des sekundären Lichtes umgekehrt proportional der vierten Potenz der Wellenlänge zu sein habe, so richtig er (selbstverständlich) mathematisch abgeleitet ist, nicht den Tatsachen."

Hier liegt ein Fehler vor. Die physiologischen Eindrücke sind es, die mit Rayleighs Satz im Widerspruch zu stehen scheinen. Ich hätte also mich wie folgt ausdrücken sollen:

„Für die physiologische Wirkung liegt also das Maximum des sekundären Lichtes

bei etwa $\lambda = 440\,\mu\mu$, obwohl physikalisch die Lichtintensität auch noch über Indigo (und Violett) hinaus weiter zunimmt. Während für ein und dieselbe Wellenlänge die physiologische Wirkung (Empfindung) mit zunehmender (physikalischer) Lichtintensität zunächst ebenfalls zunimmt, gilt für Lichter weitauseinanderliegender Wellenlängen nicht, daß das intensivere Licht eine stärkere Empfindung erzeuge als ein minder intensives Licht einer anderen Wellenlänge. Wir entwerfen von einem möglichst schwachen weißen Lichte das Spektrum und bringen das trübe Medium in dessen einzelnen Teile. Nur im Indigo erhalten wir (gleichfarbiges) sekundäres Licht. Lassen wir das weiße Licht an Intensität zunehmen, so werden auch Violett und Zyanblau, bei weiterer Verstärkung des weißen Lichtes auch Grün wirksam. Es mag ja sein, daß bei weiterer Lichtintensitätssteigerung — über die Intensitäten hinaus, die mir im Bogenlichte zur Verfügung standen, — auch noch im Gelb usw. sekundäres Licht erzeugt werden könnte, — aber über die Grenzen des sichtbaren Spektrums hinaus können wir kein sichtbares, sekundäres Licht erzeugen. Und Violett wirkt schwächer als Indigo."

Dieser Fassung gemäß ist der Abschnitt V meiner Arbeit zu berichtigen. Die übrigen neun Abschnitte der Arbeit bleiben hiervon unberührt. Es bleibt übrigens im Abschnitt V bestehen die Analogie zwischen der Lage des Maximums des sekundären Lichtes und der maximalen chemischzersetzenden Wirkung des Lichtes bei $\lambda = 440\,\mu\mu$ (z. B. auf Bromsilber). Bestehen bleibt dort auch die Ablehnung des Gedankens, daß der Himmel deshalb von uns blau gesehen werde, weil das ursprünglich überwiegend „violette", aus der Höhe kommende Licht auf seinem weiten Weg (durch die Atmosphäre hindurch) infolge von Extinktion mehr violettes als blaues Licht verloren hat. Dieser Verlust ist ja tatsächlich vorhanden. Aber auch ohne diesen Verlust würde das gesamte sekundäre Licht, trotz seines Gehalts an ungemein intensivem violetten Lichte, unserm Sehorgane —, entsprechend seiner Organisation, — blau erschienen sein und nicht violett.

(Eingegangen 12. Februar 1920.)

Das Leitvermögen verdünnter mischkristallfreier Legierungen.

(Bemerkungen zur gleichnamigen Abhandlung des Herrn H. C. Burger.)

Von Karl Lichtenecker.

1. In dieser Zeitschrift hat Herr H. C. Burger[1]) jüngst den Versuch gemacht, das Leitvermögen mischkristallfreier Legierungen zu bestimmen. Er beschränkt sich hierbei auf „verdünnte" Legierungen, bei denen das Volumen des einen der beiden Bestandteile nur einen gegen die Einheit kleinen Bruchteil X des Gesamtvolumens ausmacht. Mit dieser Einschränkung führt nun Herr Burger eine von ihm selbst als Näherung gekennzeichnete Rechnung durch, welche die Leitfähigkeit solcher verdünnter Legierungen ermitteln soll für den Fall, daß der die geringfügige Beimengung bildende Bestandteil in Form isolierter kleiner Partikel von besonders einfacher Form (Kugeln, Stäbchen, Plättchen) eingesprengt ist. Als Ziel seiner Arbeit bezeichnet Burger die Entscheidung der Frage, ob die Gestalt der Begrenzungen zwischen den die Legierung bildenden beiden Stoffen einen Einfluß auf den Wert der spezifischen Leitfähigkeit der Legierung besitzt und kommt zu dem Schluß, daß dies der Fall ist.

2. Es muß zunächst festgestellt werden, daß die von Burger mitgeteilten Endformeln in bestimmten Fällen zu unmöglichen Werten für die Leitfähigkeit der Legierung führen. Wir betrachten zunächst die beiden Grenzfälle, für welche, wie Verf. bereits an anderem Orte[2]) ausgeführt hat, das Ergebnis von vornherein zu übersehen ist.

A. Nichtleitendes Material in einem Leiter eingebettet.

In diesem Falle nimmt der eingesprengte Bestandteil an der Stromleitung nicht teil. Bezeichnet mit Burger σ_1 das Leitvermögen des Hauptbestandteils, σ_2 das des eingesprengten Bestandteils, so ist für diesen Fall zu setzen:

$$\sigma_1 = \text{endlich}, \qquad \sigma_2 = 0$$
$$x = \text{beliebig (klein gegen 1)}.$$

Die Endformeln (9), (10), (11) ergeben, je nachdem die eingesprengten Teilchen Kugeln, Platten oder Stäbchen sind, für die Leitfähigkeit σ der Kombination durch Einsetzung unmittelbar:

1) H. C. Burger, diese Zeitschr. **20**, 73, 1919.
2) K. Lichtenecker, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. **14**, 466, 1917.



Kugeln . . . $\sigma = \sigma_1 (1 - \frac{3}{2} x)$
Platten . . . $\sigma = -\infty$
Stäbchen . . . $\sigma = \sigma_1 (1 - \frac{5}{3} x)$.

Setzen wir, um für das Folgende auch numerisch vergleichen zu können, beispielsweise

$\sigma_1 = 1 \qquad \sigma_2 = 0 \qquad x = 0{,}01$

so würde folgen:

Kugeln . . . $\sigma = 1 - 0{,}015$
Platten . . . $\sigma = \infty$
Stäbchen . . . $\sigma = 1 - 0{,}0167$.

B. Leitendes Material in nichtleitendem Medium eingebettet.

In diesem Falle ist die Leitfähigkeit der Kombination gleich Null. Die Formeln Burgers dagegen ergeben für

$\sigma_1 = 0, \qquad \sigma_2 = \text{endlich},$
$x = \text{beliebig, (klein gegen 1)}$

für Kugeln . . . $\sigma = 0$
„ Platten . . . $\sigma = \frac{2}{3} x \cdot \sigma_2$
„ Stäbchen . . . $\sigma = \frac{1}{3} x \cdot \sigma_2$

und, wenn man als Zahlen beispielsweise, analog (A), die Werte:

$\sigma_1 = 0 \qquad \sigma_2 = 1 \qquad x = 0{,}01$

einsetzt:

für Kugeln . . . $\sigma = 0$
„ Platten . . . $\sigma = 0{,}0067$
„ Stäbchen . . . $\sigma = 0{,}0033$.

Wie man sieht, führt die Burgersche Formel im Falle (A) für Platten, im Falle (B) sowohl für Platten als auch für Stäbchen zu unmöglichen Werten. Im ersteren Falle führt sie zu einem unendlichen Wert für die Leitfähigkeit der Kombination, trotzdem diese offenbar endlich, und zwar kleiner sein muß als die des leitenden Bestandteils, im letzteren Falle (B) ergibt die Formel zwei endliche, von Null verschiedene Werte für die Leitfähigkeit der Kombination, trotzdem nach der der Berechnung zugrunde gelegten Annahme die eingesprengten Partikel voneinander isoliert in Abständen, die groß sind gegen die Partikelgröße, im Nichtleiter eingebettet sind.

3. Nur in dem einen Falle, daß die eingelagerten Teilchen Kugelgestalt haben, ist das Ergebnis der Burgerschen Formel nicht von vornherein abzuweisen. Dieser Fall ist aber, wie ich ebenfalls in der vorgenannten Veröffentlichung erwähnt habe, bereits durch Maxwell[1]) erledigt. Der von Maxwell gegebene Ausdruck lautet:

1) M. Maxwell, Lehrbuch der Elektrizität und des Magnetismus. Deutsche Übersetzung, I. Bd., S. 457, Berlin 1883.

$$W = \frac{2W_1 + W_2 + p(W_1 - W_2)}{2W_1 + W_2 - 2p(W_1 - W_2)} W_2,$$

wo $W_1 = \frac{1}{\sigma_2}$ und $W_2 = \frac{1}{\sigma_1}$ die spez. Widerstände des Einschlusses, bzw. des umgebenden Mediums, $p = x$ das Verhältnis des Kugelvolumens zum Gesamtvolumen bezeichnen. In der Burgerschen Bezeichnungsweise lautet somit die Maxwellsche Formel:

$$\sigma = \frac{2\sigma_1 + \sigma_2 - 2x(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\sigma_1 + \sigma_2 + x(\sigma_1 - \sigma_2)} \sigma_1.$$

Abweichend davon findet Burger (Gl. 9) den Ausdruck:

$$\sigma = \frac{2\sigma_1 + \sigma_2 - 3x(\sigma_1 - \sigma_2)}{2\sigma_1 + \sigma_2} \sigma_1,$$

der für kleine Werte x in erster Näherung mit dem Maxwellschen Ausdruck übereinstimmende Werte liefert[1]).

Der nach Burgers Formel für Kugeln sich ergebende Wert beträgt, wie weiter oben angegeben, $\sigma = 1 - 0{,}015$. Die durch die Einführung des zweiten Bestandteils in die Kombination entstehende Widerstandsänderung 0,015 ergibt sich somit gegenüber Maxwell um die Hälfte zu groß.

4. Es existiert nun allerdings ein beschränktes Gebiet, in welchem die Burgerschen Formeln brauchbare Resultate liefern könnten, dann nämlich, wenn der Quotient $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ von der Einheit nicht sehr abweicht, eine Annahme, die der Burgerschen Ableitung allerdings fremd ist[2]). Gerade dieser Fall aber hat natürlich praktisch die größte Bedeutung, da die bekannten mischkristallfreien Legierungen sämtlich unter diesen Fall eingereiht werden können. Unter dieser einschränkenden Annahme stimmt nicht nur der Zahlenwert, der sich aus Burgers Formel für Kugeln berechnet, mit dem aus der Maxwellschen Formel sich ergebenden überein, sondern es liegen auch die nach Burger folgenden Werte für alle drei Fälle (eingesprengte Kugeln, Platten und Stäbchen) innerhalb der Grenzen, welche Verf. als bei beliebiger Materialverteilung gültig dargetan hat[3]).

1) In zweiter Näherung beträgt die Abweichung, um die der Burgersche Wert von σ gegenüber dem von Maxwell kleiner ist, $3x^2 \cdot \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2\sigma_1 + \sigma_2}\right)^2 \cdot \sigma_1$ und, wenn σ_2 gegen σ_1 überwiegt, $3x^2\sigma_1$.

2) Burgers Formel führt übrigens nicht nur in den beiden besprochenen Grenzfällen zu unmöglichen Resultaten. Für Platten z. B. sänke danach die Gesamtleitfähigkeit bei Abnahme der Leitfähigkeit des eingesprengten Bestandteils sehr bald auf Null, um weiterhin negative Werte anzunehmen u. a. m.

3) K. Lichtenecker, diese Zeitschr. 19, 374, 1918.

So ergibt sich beispielsweise für

$\sigma_1 = 1 \qquad \sigma_2 = 2 \qquad x = 0{,}01$

als obere mögliche Grenze der Leitfähigkeit . . . . $\sigma = 1{,}01$

als untere mögliche Grenze der Leitfähigkeit . . . . $\sigma = 1{,}005$

nach Burger in Übereinstimmung mit Maxwell für Kugeln: . . $\sigma = 1{,}0075$

also genau das Mittel der Grenzwerte.

Die gleichen Zahlenwerte σ_1, σ_2, x geben nach Burger

für Platten . . . $\sigma = 1{,}0083$

für Stäbchen . . . $\sigma = 1{,}0078$,

wie man sieht, sämtlich im Innern des angegebenen Intervalls.

5. Diesen zuletzt angeschriebenen numerischen Werten muß man leider entnehmen, daß die Burgersche Formel gerade innerhalb des Gebietes, in dem sie mit der Theorie verträgliche Ergebnisse liefert, nichts Einwandfreies auszusagen vermag. Die Unterschiede der Leitfähigkeiten, die sie in den drei behandelten Fällen liefert, sind trotz der extremen Formunterschiede der als eingesprengt angenommenen Partikel nicht nur an sich gering, sondern im Hinblick auf die Ableitung Burgers durchaus unsicher. Herr Burger kennzeichnet seine Ableitung selbst richtig als erste Näherung, indem er die Abweichung des mittleren Feldes vom ungestörten Felde, entwickelt nach Potenzen von x, mit der ersten Potenz abbricht; das Gleiche hat für eine analoge Entwicklung bezüglich der mittleren Leitfähigkeit statt. Ist, wie in dem gewählten Beispiel, x von der Größenordnung der Hundertstel, so werden durch die von Burger gemachte Näherung Abweichungen der so ermittelten Leitfähigkeit vom wahren Werte im Betrage von einigen Zehntausendsteln von vornherein zu erwarten sein; nun betragen aber die nach Burger sich ergebenden Abweichungen für verschiedene Gestalt der Einsprengung nur 3, bzw. 5 Zehntausendstel vom mittleren Werte. — Man wird daher sagen müssen, daß diese Unterschiede, deren Nachweis sich Herr Burger als Ziel seiner Untersuchung gesetzt hat, durch seine Ableitung nicht als mit Sicherheit erwiesen gelten können[1]).

7. Wenn man der Burgerschen Formel — allerdings mit der ihrer Ableitung anhaftenden Unsicherheit — etwas entnehmen kann, so ist es das, daß die Unterschiede in der Leitfähigkeit, die durch die Gestalt der Materialgrenzen zwischen den Legierungsbestandteilen für praktisch in Betracht kommende Werte des Quotienten $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ hervorgerufen werden, jedenfalls recht gering sind[2]). Dadurch würde sie dazu beitragen, die gute Übereinstimmung der vom Verf. unter der — vollkommen willkürlichen — Annahme der tesseralen Raumgitteranordnung[3]) durchgeführten Berechnung der Legierungswiderstände mit den Messungen dieser Widerstände durch Matthiesen erklärlich zu machen und ihre Berechtigung über das Gebiet der erfolgten Verifikation durch die Erfahrung hinaus, hervortreten zu lassen.

1) Man wird übrigens die Grundauffassung, auf der die Ableitung Herrn Burgers beruht, daß nämlich der eine Bestandteil in vollkommen isolierten Partikeln eingesprengt ist, auch dann nicht allseits als für wirkliche Legierungen mit Notwendigkeit zutreffend anerkennen, wenn x eine gegen 1 kleine Zahl ist. Selbst wenn $\sqrt{x}$ noch klein gegen 1 ist, ist eine dendritische Struktur der Einlagerung, wie sie von C. Benedicks vermutet wird, durchaus nicht ausgeschlossen. Dem Nachweis des wirklichen Vorkommens solcher Strukturen innerhalb der Legierungen sollten C. Benedicks Versuche ja gelten. (Vgl. C. Benedicks, Jahrb. d. Rad. u. Elektr. 13, 351, 1916.)

2) Eine gewisse Abhängigkeit der Leitfähigkeit, innerhalb der vom Verf. festgestellten Grenzen, von der Gestalt der Partikel erscheint von vornherein durchaus wahrscheinlich. Das Gegenteil hat Verf. auch in seiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand vom Jahre 1909 weder behauptet noch angenommen.

3) K. Lichtenecker, diese Zeitschr. 10, 1005, 1909.

Wien, 31. Januar 1920.

(Eingegangen 8. Februar 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neue Sterne.

Von Hans Kienle.

Mit Tafel III.

Das vor kurzer Zeit[1]) erfolgte Aufleuchten eines überaus hellen neuen Sternes im Sternbilde des Adlers hat wohl über den Kreis der Fachastronomen hinaus Aufsehen erregt und das Interesse an diesen seltsamen Himmels-

1) Anmerkung bei der Korrektur 13. Mai 1919: Die äußeren Verhältnisse verzögerten den Abdruck des bereits im Juli vorigen Jahres geschriebenen Aufsatzes. Zur Zeit seiner Abfassung war eine Diskussion der Erscheinung der Nova Aquilae 3 noch nicht möglich. Was inzwischen hierüber veröffentlicht worden ist, bietet keine Veranlassung zu irgendwelchen Änderungen der vorliegenden Ausführungen.



Tabelle I.

	Name	$\alpha_{1900,0}$	$\delta_{1900,0}$	β	t	h_m
1	B Cassiopejae	0h 19m 15s	+63° 33′,5	+ 1″,8	1572	—5 M?
2	P Cygni	20 14 6	+37 43,3	+ 1,3	1600	3,5
3	Nova Serpentarii	17 24 38	—21 23,7	+ 6,3	1604	—4?
4	II Vulpeculae	19 43 28	+27 4,2	+ 0,9	1670	3
5	Nova Ophiuchi	16 53 54	—12 44,4	+17,2	1848	5,5
6	T Scorpii	16 11 5	—22 43,6	+18,9	1860	7,0
7	T Coronae	15 55 19	+26 12,2	+47,8	1866	2,0
8	Q Cygni	21 37 47	+42 23,1	— 7,5	1876	3
9	S Andromedae	0 37 15	+40 43,2	—21,2	1885	7
10	V Persei	1 55 6	+56 50,0	— 4,3	1887	9,2
11	T Aurigae	5 25 34	+30 22,2	— 1,2	1891	4,5
12	R Normae	15 22 11	—50 13,9	+ 4,4	1893	7,0
13	RS Carinae	11 3 54	—61 23,6	— 1,8	1895	8
14	Z Centauri	13 34 18	—31 8	+29,7	1895	7
15	Nova Sagittarii 1	18 56 13	—13 18,2	— 8,7	1898	4,7
16	RS Ophiuchi	17 44 48	—16 40	+ 5,2	1898	7,7
17	Nova Aquilae 1	19 15 16	— 0 19,2	— 7,0	1899	7
18	Nova Sagittarii 3	18 13 48	—25 13,5	— 8,4	1899	8,5
19	Nova Persei	3 24 24	+43 33,7	— 9,6	1901	0,0
20	Nova Sagittarii 4	18 0 27	—27 26,5	— 3,8	1901	10,4
21	Nova Geminorum 1	6 37 49	+30 2,7	+12,2	1903	5,1
22	Nova Aquilae 2	18 56 48	— 4 35,2	— 4,8	1905	9,1
23	Nova Velorum	10 58 20	—53 50,9	+ 4,9	1905	9,7
24	SU Lyrae	18 50 7	+36 23,1	+15,2	1905	10
25	Nova Scorpii	17 47 28	—34 19,7	— 2,2	1906	8,8
26	Nova Circini	14 40 31	—59 35,0	— 0,8	1907	9,5
27	Nova Piscium	0 29 49	+ 9 45	—50,2	1910	8,8
28	Nova Sagittarii 2	17 53 29	—27 32,8	— 2,6	1910	7,5
29	Nova Arae	16 33 1	—52 13,5	— 4,4	1910	6,0
30	Nova Lacertae	22 31 45	+52 11,9	— 4,7	1910	5,0
31	Nova Geminorum 2	6 48 25	+32 16,0	+15,2	1912	3,7
32	Nova Ritchey	20 32 47	+59 46,8	+11,8	1917	13,5
33	Nova Monocerotis	7 21 54	— 6 28,5	+ 4,9	1918	5,4
34	Nova Aquilae 3	18 43 48	+ 0 28,4	+ 0,4	1918	— 0,2

erscheinungen geweckt. Nun vermitteln zwar manche Darstellungen in populären Werken das Wichtigste, was wir heute über die neuen Sterne wissen, aber eine ganze Reihe von theoretischen Arbeiten zur Erklärung und Begründung der Vorstellungen, die wir uns von der Entstehung der neuen Sterne machen, haben bisher keine zusammenfassende Bearbeitung gefunden. Eine solche zu geben, erscheint daher nicht unangebracht.

Die Bezeichnung „neue Sterne" entstammt noch einer Zeit, die diese Sterne als wirklich neu geschaffen ansah, während wir heute wissen, daß all diese Sterne schon vorher am Himmel standen und daß das Aufleuchten nur eine Episode in ihrem Dasein darstellt. Seit man T Coronae nachträglich auf den Karten der Bonner Durchmusterung hat auffinden können, sind die Fälle sehr zahlreich geworden, in denen es gelang, auf früheren photographischen Aufnahmen den „neuen" Stern als schwach leuchtenden Himmelskörper nachzuweisen. Für uns besteht daher zwischen diesen „neuen" Sternen und den „veränderlichen" Sternen kein prinzipieller Unterschied. Wir betrachten sie weniger als gekennzeichnet durch ihren Helligkeitsverlauf, denn vielmehr durch die Eigentümlichkeiten ihres Spektrums; und selbst dann bleibt es noch bei einigen der neuen Sterne zweifelhaft, ob man sie nicht als Veränderliche von langer Periode ansehen soll.

Im folgenden sei zunächst eine Zusammenstellung der bisherigen Erscheinungen von neuen Sternen gegeben, die zum Teil der 5. Auflage von Newcomb-Engelmanns Populärer Astronomie entnommen ist. Die Tabelle gibt neben dem Namen des Sternes Rektaszension und Deklination für 1900,0, die galaktische Breite β (auf die wir später zurückkommen werden), das Jahr des Aufleuchtens (unter t) und die maximale Helligkeit h_m. Man erkennt deutlich die rasche Zunahme von neuen Sternen mit Einführung der Photographie, insbesondere der photographischen Spektroskopie. Die meisten dieser Sterne sind gar nie über teleskopische Sichtbarkeit hinausgekommen und die glänzenden Erscheinungen sind nach wie vor verhältnismäßig selten.

Der Helligkeitsverlauf.

Die neuen Sterne sind zunächst dadurch charakterisiert, daß sie von der völligen Unsichtbarkeit oder doch von sehr geringer Helligkeit plötzlich zu verhältnismäßig starkem Leuch-

ten kommen, das aber bald wieder abklingt und die Sterne zu dem früheren Zustande oder nahe demselben zurückkehren läßt. Es liegt in der Natur der Sache, daß die neuen Sterne erst entdeckt werden, wenn sie ihre Maximalhelligkeit bereits erreicht haben oder sich gar schon wieder auf dem absteigenden Aste der Helligkeitskurve befinden. Wir wissen darum im allgemeinen über die Schnelligkeit des Anstieges nur wenig zu sagen. Doch war man in einigen Fällen so glücklich, wenigstens ungefähre obere Grenzen für die Dauer der Helligkeitszunahme angeben zu können, und man kann daraus den Schluß ziehen, daß das Aufleuchten wohl sehr rasch erfolgt, vielleicht im Verlaufe von wenigen Stunden; zum mindesten innerhalb weniger Tage. T Coronae z. B. wurde am 12. Mai 1866 um 12 Uhr als Stern 2. Größe entdeckt, während noch um $9^1/_2$ Uhr an der betreffenden Stelle sicher kein dem bloßen Auge sichtbarer Stern vorhanden war. Nova Persei war bei ihrer Entdeckung am 21. Februar 1901 von der Größe 2,5 und noch auf einer 28 Stunden vorher gemachten photographischen Aufnahme, die Sterne 12. Größe enthielt, nicht zu sehen. Ähnlich war es bei der Nova Geminorum 2. Sie war am 11. März 1912 von der Größe 4,5 und noch 23 Stunden vorher, wie man ebenfalls durch photographische Aufnahmen nachweisen konnte, schwächer als 10. Größe. Schließlich sei noch die Nova Aquilae 3 erwähnt, die nach Aufnahmen von Wolf in Heidelberg noch am 5. Juni die gleiche Größe (11,5) wie früher hatte, während sie am 8. Juni sicher schon 1. Größe war. Man darf also wohl den Schluß ziehen, daß der aufsteigende Ast der Lichtkurve ziemlich steil verläuft. Dabei handelt es sich vielfach um ganz enorme Helligkeitszunahmen; bei Nova Persei z. B. um mindestens das 10000fache der ursprünglichen Intensität.

Das Maximum der Helligkeit wird nur kurz innegehalten. Es erfolgt sehr bald eine Abnahme, zunächst langsam und vielfach unter Schwankungen. Bei einigen Sternen tritt dann ein ziemlich plötzlicher Abfall der Helligkeit ein, wie die Kurve von T Aurigae (Fig. 1) zeigt, bei anderen wieder hält das langsame Abklingen unter stetigen Schwankungen an, wie z. B. bei Nova Persei (Fig. 2). Jedenfalls aber ist die ganze Erscheinung von sehr begrenzter Dauer und ist in der Hauptsache nach Wochen oder wenigen Monaten als beendet zu betrachten. Parallel mit der Helligkeitsabnahme geht vielfach ein Wechsel der Farbe. Die Novae sind in der Regel beim Aufleuchten weiß und werden dann mit abnehmender Helligkeit gelb bis rötlich, zuweilen sogar ziemlich intensiv rot.

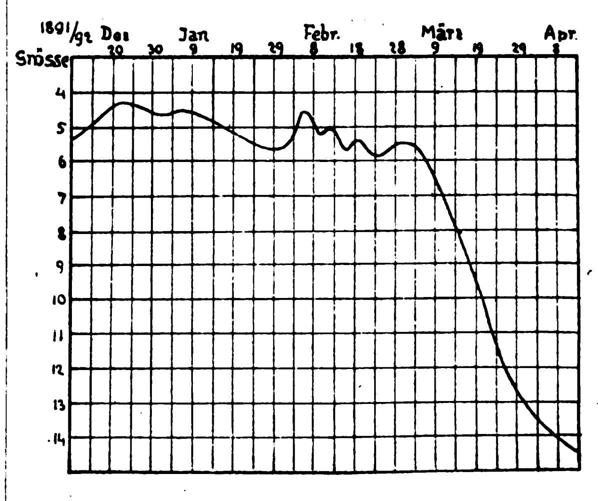


Fig. 1.

Das typische Nova-Spektrum.

Wie schon oben betont wurde, hat man als das beste Charakteristikum der neuen Sterne ihr Spektrum zu betrachten. Man kann von einem „typischen Nova-Spektrum" sprechen, und in der Tat verdanken eine Reihe der in Tabelle 1 aufgeführten Novae aus der neueren Zeit ihre Aufnahme unter diese Kategorie von Sternen nur ihrem Spektrum, an dem sie — oft lange, nachdem die Erscheinung schon vorüber war — erkannt wurden. Dieses Spektrum und die Veränderungen, die es im Verlaufe der Erscheinung erleidet, mögen im folgenden kurz erläutert werden:

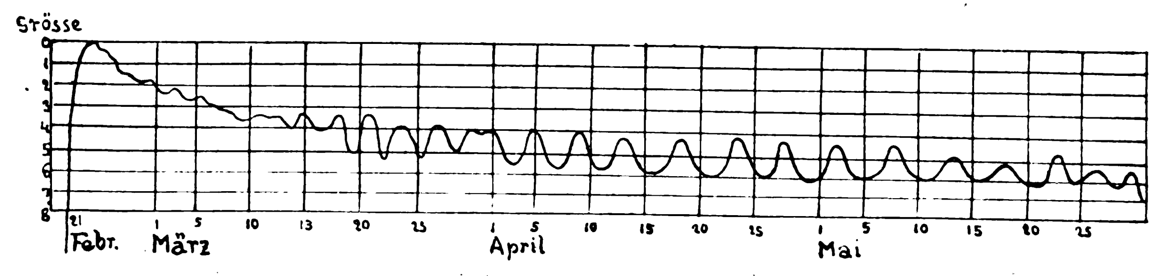


Fig. 2.

Tabelle II.

Linie	$H\beta$	$H\gamma$	$H\delta$	$H\varepsilon$	K	Mittel
Mitte der dunklen Linie	—	—1,2	—1,1	—	—	—1,2 $\mu\mu$
Helle Linie in der dunklen	—1,0	—0,9	—0,8	—1,0	—0,9	—0 9
1. Maximum der hellen Linie	0,0	0,0	—0,1	—0,2	—0,2	—0,1
2. Maximum der hellen Linie	+0,8	+0,8	+0,6	+0.4	+0,3	+0,6
3. Maximum der hellen Linie	+1,5	+1,4	—	—	—	+1,5

Im ersten Stadium bildet ein weit ins Blau und Violett sich erstreckendes kontinuierliches Spektrum den hell leuchtenden Untergrund, von dem sich dunkle Absorptionslinien abheben, die wegen ihrer Breite eher als „Bande" zu bezeichnen sind. Gleichzeitig oder doch schon nach wenigen Tagen lassen sich helle Emissionslinien erkennen, die zum größten Teil dem Wasserstoff, daneben auch dem Helium, Kalzium und Natrium angehören. Die hellen Linien, besonders des Wasserstoffes, sind meist ebenfalls sehr breit und zeigen bis zu drei Intensitätsmaxima, von denen das eine an der brechbareren Seite den scharfen Rand bildet und nur wenig oder gar nicht nach dem roten Ende zu gegen die normale Linie verschoben ist. Nach der weniger brechbaren Seite sind die Linien verwaschen. Umgekehrt sind die Absorptionsbande, die sich stets auf der brechbareren Seite der Emissionslinien befinden, nach dem Rot zu scharf begrenzt, verschwimmen gegen das blaue Ende und zeigen nahe ihrer Mitte meist noch ein helles Maximum. So kommt das für die neuen Sterne charakteristische Doppelspektrum zustande, wie es bei jedem dieser Sterne in mehr oder weniger ausgeprägter Form bisher beobachtet wurde: Helle Linien auf kontinuierlichem Untergrunde mit dunklen Begleitern auf der brechbareren Seite. Die Verschiebungen der einzelnen Intensitätsmaxima sind dabei für alle Sterne nahe von der gleichen Größenordnung. Tabelle 2 gibt sie nach Scheiner, „Populäre Astrophysik", für die Wasserstofflinien im Spektrum der Nova Aurigae.

Die Struktur im einzelnen variiert selbst bei der gleichen Linie oft sehr stark, wie z. B. die folgenden Zeichnungen von Furuhjelm (Fig. 3) zeigen, welche die Intensitätsverhältnisse der Wasserstoff-Linien H_δ und H_γ im Spektrum der Nova Geminorum 2 an verschiedenen Tagen darstellen.

Man erkennt daran als von jedem Wechsel unberührt nur das Vorhandensein einer Emissionslinie und ihres dunklen Begleiters, während die einzelnen Maxima oft ganz verschwinden und dann wieder in reicher Anzahl auftreten.

Schließlich seien auch noch einige Spek-

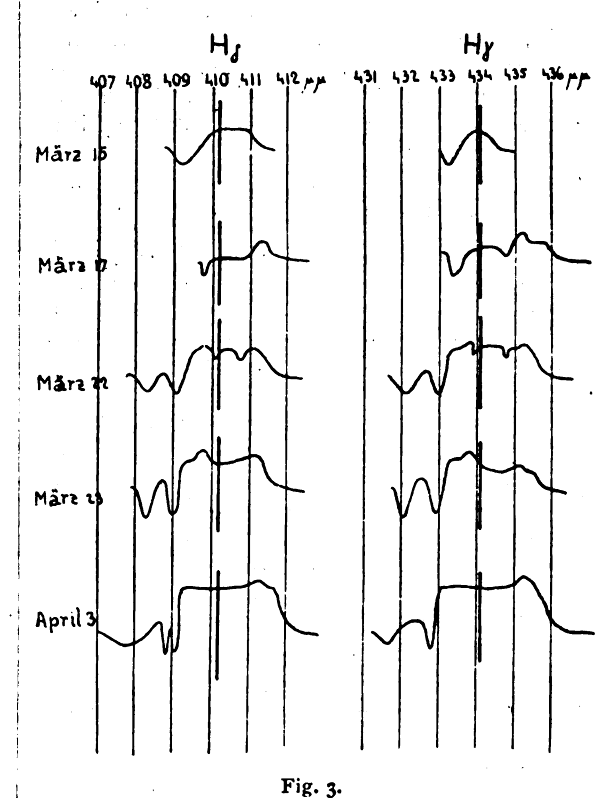


Fig. 3.

tralaufnahmen der Nova Geminorum mit dem Potsdamer Spektrographen im Bilde vorgeführt, um die typische Wandlung des Spektrums in den ersten Tagen zu zeigen. Man erkennt insbesondere an der Aufnahme von März 1913 sehr schön die hellen Linien mit den dunklen Begleitern, in denen noch eine Aufhellung sich vorfindet, genau wie dies aus Tabelle 2 für T Aurigae hervorgeht.

Im weiteren Verlaufe nimmt das kontinuierliche Spektrum mehr und mehr an Helligkeit ab, die äußeren Partien und ebenso die dunklen Linien verschwinden ganz, und das Spektrum zieht sich schließlich auf einige wenige helle Linien im Grün und Gelb zusammen. Unter diesen übrigbleibenden hellen Linien ist besonders eine von großer Bedeutung: die erste Nebellinie λ 5007. Sie tritt neben anderen Nebellinien im Endstadium fast aller neuen Sterne auf, so daß man die Entwicklung da-

hin charakterisieren kann, daß das Spektrum der Novae in das der Gasnebel übergeht. Damit scheint aber die Entwicklung ihr Ende noch nicht erreicht zu haben. Wenigstens scheint bei einigen der noch nach Jahren als schwache Sterne sichtbaren Novae eine große Ähnlichkeit des Spektrums mit demjenigen der Wolf-Rayet-Sterne vorhanden zu sein[1]). Doch ist diese Feststellung noch unsicher, und es ist zum mindesten der manchmal gezogene Schluß verfrüht, daß wir in den Wolf-Rayet-Sternen frühere „neue" Sterne zu sehen hätten. Wir werden unten noch einen anderen Grund kennen lernen, der gegen diese Vermutung spricht.

Nebelerscheinungen in der Umgebung der neuen Sterne.

Der Übergang des Novaspektrums in ein Nebelspektrum läßt den Gedanken naheliegend erscheinen, daß sich der Stern überhaupt in einen Nebel verwandelt habe. In der Tat haben eine Reihe von Beobachtern das Aussehen der Novae im vorgerückten Stadium ihrer Entwicklung mit dem der planetarischen Nebel verglichen. Schon bei der Nova Cygni wollte Huggins eine schwache Nebelhülle bemerkt haben, und ähnliche Behauptungen wiederholten sich bei T Aurigae und Nova Persei. Bei letzterer nun konnte M. Wolf mit untrüglicher Sicherheit den rein optischen Charakter dieser scheinbaren Nebelhülle nachweisen, die nur in den von Refraktoren entworfenen Bildern auftritt und in unvollständiger Achromatisierung des Linsensystems ihren Grund hat. Das Licht der neuen Sterne ist so sehr von dem der gewöhnlichen Sterne verschieden, daß sie im allgemeinen einen ziemlich von diesen abweichenden Fokus bedingen. Ist aber auf eine der hellen Linien, z. B. die grüne Nebellinie, fokussiert, dann liefern die anderen Linien Zerstreuungskreise, die einen Nebel von gar nicht geringer Ausdehnung vortäuschen. Wolf konnte die Übereinstimmung des theoretischen und des tatsächlichen Durchmessers der Aureole an mehreren Aufnahmen nachweisen. Diese Tatsache läßt natürlich auch alle früheren Beobachtungen von Nebelhüllen als wenig glaubwürdig erscheinen; doch läßt sich nachträglich keine Entscheidung über die Realität der Erscheinungen treffen.

Etwas ganz anderes nun ist es mit den Nebeln, die Wolf in der Umgebung der Nova Persei auffand, gerade als er den optischen Charakter der von anderer Seite gemeldeten Nebelhüllen aufdeckte. Hier handelte es sich um zwar schwache, aber trotzdem strukturreiche Nebelmaterie im Gegensatz zu dem durchaus symmetrischen Aussehen der optischen Aureole, so daß an ihrer Realität nicht gezweifelt werden konnte. Das Interesse, das dieser Erscheinung entgegengebracht wurde, erhöhte sich noch, als weitere Aufnahmen von Ritchey und Perrine die Nebelmaterie in lebhafter radialer Ausdehnung befindlich zeigten; denn diese Ausdehnung erfolgte mit einer Geschwindigkeit, wie man sie in solchen Fernen des Fixsternsystems nie zu beobachten gewohnt war. Das Aussehen und die Bewegung der durch die langen Daueraufnahmen (Expositionszeiten von 2^h bis 7^h) festgestellten Nebel möge hier mit den Worten Kopffs charakterisiert werden, der eine sehr wertvolle und eingehende Untersuchung darüber angestellt hat[1]). Zwei Aufnahmen von Ritchey (Fig. 5) dienen zur Erläuterung.

„Im wesentlichen kann man also in der Umgebung der Nova dreierlei in Entfernung und Verhalten verschiedene Kondensationen unterscheiden:

1. Den Nebel *m*, der bis Anfang Dezember eine konstante Entfernung von etwa 135″ von der Nova hat, der sich bis Mitte Dezember nach S bewegt und dann mit großer Geschwindigkeit hauptsächlich nach W und NW ausbreitet.

2. Die Nebel der inneren Ellipse, die anfangs eine mittlere tägliche Geschwindigkeit von etwa 2″ haben, die von August ab auf 1″, später noch weiter heruntersinkt. Von Einzelheiten abgesehen, hört die Bewegung im Februar fast ganz auf, wächst aber dann rasch zu der früheren Geschwindigkeit wieder an. Die Nebel sind einer lebhaften Form- und Helligkeitsänderung unterworfen. Der Abstand der im SO gelegenen hellsten Gruppe ist für August im Mittel 384″, für Mitte Dezember 492″.

3. Die Nebel der äußeren Ellipse, die im allgemeinen sehr schwach sind, von denen einzelne aber zu bedeutender Helligkeit anwachsen. ... Die Nebel haben sich mit nahezu doppelt so großer Geschwindigkeit wie die inneren Nebel von der Nova entfernt; diese Geschwindigkeit läßt aber schon Ende 1901 bedeutend nach, so daß eine augenfällige Vergrößerung der äußeren Ellipse nicht mehr wahrzunehmen ist. Die große Achse zeigt anfangs

1) Gelegentlich der Nova Aquilae 3 bemerkt M. Wolf nach einigen Ausführungen über das Liniengewirr des Spektrums: „Es scheint mir die ganze Erscheinung die größte Ähnlichkeit mit jener zu besitzen, die ich 1915 bei den Wolf-Rayet-Sternen zu entwirren versucht habe" (Astr. Nachr. **207**, 64).

1) A. Kopff, Über die Nebel der Nova Persei. Publ. d. Astrophysikalischen Inst. Königstuhl-Heidelberg. Bd. II. Nr. 9.



Januar 1902 eine Ausdehnung von 1065″ im Mittel, die kleine von 849″. Der Abstand der äußeren Nebel ist also ziemlich genau das Doppelte desjenigen der inneren.

Zu erwähnen ist noch, daß der Positionswinkel für innere und äußere Nebel der Hauptsache nach kleiner wird."

Dieser Beschreibung ist kaum etwas hinzuzufügen. Es sei nur besonders auf die von Kopff unter 2. gemachte Feststellung hingewiesen, daß die Nebel einer „lebhaften Form- und Helligkeitsänderung unterworfen" sind, und daß die Ausdehnung nicht radial erfolgt, sondern von Änderungen im Positionswinkel begleitet ist.

Ältere Theorien über die Entstehung der neuen Sterne.

Jede Theorie der neuen Sterne, die ernst genommen werden will, muß Rücksicht nehmen auf die spektralen Eigentümlichkeiten und muß in erster Linie sie zu erklären versuchen. Es ist darum begreiflich, daß gerade die spektroskopischen Untersuchungen der letzten Jahrzehnte den älteren Theorien ihr Todesurteil gesprochen haben. Sie können deshalb hier füglich übergangen werden, und es genügt, auf die Darstellungen in populären Werken hinzuweisen[1]). Eine kurze Besprechung möge nur die insbesondere von H. C. Vogel noch anläßlich der Nova T Aurigae verfochtene Hypothese finden, welche das Phänomen der neuen Sterne durch das Eindringen eines dunklen Weltkörpers in ein Planetensystem und die dadurch bedingten nahen Vorübergänge oder gar Zusammenstöße zweier Weltkörper zu erklären sucht[2]). Vorauszuschicken wäre, daß diese Hypothese die Verschiebung der Spektrallinien nach dem Dopplerschen Prinzip, d. h. durch Bewegung in der Gesichtslinie, erklären will, und daß sie daher dem in das Planetensystem eindringenden Körper das kontinuierliche Spektrum mit den Absorptionsbanden zuspricht, und dem oder den anderen Körpern, in deren Nähe er gelangt und die er dadurch zum Aufleuchten bringt, das helle Linienspektrum. Aus dieser Annahme resultieren wegen der starken Linienverschiebungen außerordentlich große Radialgeschwindigkeiten. Man hat bekanntlich die Beziehung

$$\frac{d\lambda}{\lambda} = \frac{v}{c}$$

wenn λ die Wellenlänge, $d\lambda$ die Verschiebung, v die Radialgeschwindigkeit und c die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. Nun entspricht den in Tabelle 2 angeführten Mittelwerten der Verschiebung eine Wellenlänge von $\lambda = 425\,\mu\mu$, so daß man die bezüglichen Radialgeschwindigkeiten -847, -635, -71, $+424$, $+1059$ km/sec hätte. -847 km/sec wäre die der Nova, d. h. dem eindringenden Körper zuzusprechende Geschwindigkeit. Auf Grund von einfachen Betrachtungen über parabolische und hyperbolische Bahnen, die wiederzugeben hier zu weit führen würde, kommt Seeliger[1]) zu folgenden Abschätzungsformeln für die Summe μ der Massen der beiden in Betracht kommenden Körper (in Einheiten der Sonnenmasse):

$$\mu > 0{,}009123\left(\frac{v}{V}\right)^3 \cdot t \quad \text{für parabolische Bahn}$$

$$\mu > 0{,}0104\left(1-\frac{v_0^2}{v^2}\right)^{3/2}\left(\frac{v}{V}\right)^3\sqrt{e}\cdot t \quad \text{für hyperbolische Bahn.}$$

Darin ist v die relative Bahngeschwindigkeit der beiden Körper, in unserem Falle also mindestens 800 km/sec, V die Geschwindigkeit der Erde in ihrer Bahn, v_0 die Geschwindigkeit im Unendlichen, e die Exzentrizität der Hyperbel und t schließlich die Zeit vom Periastron aus gezählt. Für t muß mindestens 60 Tage gesetzt werden, da das Aufleuchten der Nova, also das Periastron, auf Ende Dezember 1891 anzusetzen ist, und die obigen Spektralaufnahmen zum Teil aus dem März 1892 stammen. Faßt man beide Formeln zusammen, so findet man mit genügender Annäherung:

$$\mu > \left(1-\frac{v_0^2}{v^2}\right)^{3/2}\sqrt{e}\cdot 10^4 \text{ Sonnenmassen.}$$

Für die Parabel also ($v_0 = 0$, $e = 1$): $\mu > 10000$ Sonnenmassen. Und für die Hyperbel selbst noch für $\frac{v_0}{v} = 0{,}9$ rund $900\sqrt{e}$ Sonnenmassen.

Man sieht daraus, daß die Vogelsche Hypothese entweder unwahrscheinlich große Massen (Parabel oder Hyperbel mit kleiner Anfangsgeschwindigkeit) oder aber unwahrscheinlich große Anfangsgeschwindigkeiten ($v_0 \sim 800$ km) erfordert. Dabei haben wir oben noch den der Hypothese günstigsten Fall angesetzt, indem wir den 2. Körper mit dem 1. Intensitätsmaximum identifizierten. Würden wir statt dessen das 3. wählen, so kämen wir auf Relativgeschwindigkeiten von nahezu 2000 km/sec, und unsere letzte Formel gäbe als Abschätzung:

$$\mu > 16\cdot\left(1-\frac{v_0^2}{v^2}\right)^{3/2}\sqrt{e}\cdot 10^4 \text{ Sonnenmassen.}$$

1) Siehe Nachtrag!

2) H. C. Vogel, Über den neuen Stern im Fuhrmann. Abh. K. Pr. Akademie d. Wiss. Berlin 1893.

1) H. Seeliger, Über den neuen Stern im Fuhrmann. Astr. Nachr. **130**, 393 und **133**, 305.

Da Vogel nicht so sehr an direkte Zusammenstöße denkt als vielmehr an mächtige Flutwirkungen (entsprechend der von Wilsing im Anschluß an Klinkerfues für gewisse Typen von veränderlichen Sternen aufgestellten Fluthypothese) beim Vorübergange des Eindringlings an Gliedern des Planetensystems, so macht Seeliger auch noch Abschätzungen über die Dauer der Einwirkung beider Körper aufeinander. Unter den gleichen Voraussetzungen wie oben findet sich für Parabel und Hyperbel die Formel:

$$r > 1{,}06 \sqrt{v^2 - v_0^2} \cdot t$$

für den Abstand r beider Körper. Setzt man wieder $v = 800$ km/sec, so erhält man für:

$$v_0 = 0 \qquad r > 73 \cdot 10^6 t \text{ km}$$
$$v_0 = 400 \text{ km} \quad r > 64 \cdot 10^6 t \text{ km}$$
$$v_0 = 700 \text{ km} \quad r > 35 \cdot 10^6 t \text{ km}$$

Darin ist t in Tagen ausgedrückt. Der Vorübergang beider Körper erfolgt also so überaus rasch, daß an nachhaltige Einwirkungen auch nur einen Tag vor oder nach dem Vorübergange kaum zu denken ist. Überdies betont Seeliger mit Recht, daß unsere Ansichten über die Wirkung von Ebbe und Flut vorerst rein statisch fundiert sind, und daß wir schlechthin nichts auszusagen vermögen über die hier in Frage stehenden Vorgänge.

Ein letztes und nicht zu gering einzuschätzendes Argument gegen die Vogelsche Hypothese ist die außerordentlich geringe Wahrscheinlichkeit dafür, daß der eindringende Körper sich nahe in der Ebene des Planetensystems bewege — in Analogie zu unserem System müssen wir eine im wesentlichen ebene Orientierung annehmen —, und daß er nicht nur mehreren der Planeten, sondern, wie Vogel will, auch dem Zentralkörper begegne.

(Fortsetzung folgt.)

Untersuchungen über die sichtbare blaugraue Brennfleckstrahlung an der Lilienfeldröhre [1]).

Von J. E. Lilienfeld und Franz Rother.

Berichtigung.

Infolge irrtümlicher Inbezugsetzung der Polarisationsebene des Nicols zur Richtung des elektrischen Vektors hat die Formulierung eines der Ergebnisse unserer Untersuchung eine bedauerliche Entstellung erfahren. Der elektrische Vektor des linear polarisierten Brennflecklichtes schwingt nicht parallel, sondern senkrecht zur Ebene des Antikathodenspiegels. Insofern bedürfen die §§ 8 und 10 unserer Arbeit einer Richtigstellung. Hinzugefügt sei, daß die gegenwärtig noch erheblichen Spielraum enthaltenden Fehlergrenzen der Winkelmessung immerhin Abweichungen der Schwingungsrichtung von dem auf dem Spiegel errichteten Lote bis zu 5° zulassen würden.

Auch der Inhalt des die physikalische Auffassung der Vorgänge berührenden § 17 hat demzufolge eine entsprechende Änderung zu erfahren. Es dürfte zwar nach wie vor daran festzuhalten sein, daß die lichtemittierenden Elektronen zwischen den Belegen der Doppelschicht schwingen, jedoch nicht annähernd parallel zur Brennfleckebene, sondern senkrecht dazu.

Leipzig, Physikalisches Institut der Universität, 8. Juli 1920.

1) Diese Zeitschr. Nr. 10, 21. Jahrgang, vom 15. Mai 1920.

Berichtigung.

Eine Schwebungsmethode zur Prüfung der Trägheit von Kontaktdetektoren.

In der unter obigem Titel in dieser Zeitschrift **21**, 1920, S. 208 abgedruckten Arbeit von R. Ettenreich ist folgender Fehler unterlaufen: In Fig. 5, Audiongenerator in Spannungsteilerschaltung, sind die Spulenanschlüsse von Gitter und Glühkathode vertauscht.

Wien, 30. Mai 1920.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretendnn Äxderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr.-Ing. Max Lembert für allgemeine und anorganische Chemie.

Ernannt: Der a. o. Professor für angewandte Physik an der Universität Greifswald Dr. Adolf Bestelmeyer zum ord. Professor ebenda, der ord. Professor an der Technischen Hochschule München Dr. Heinrich Liebmann zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Heidelberg, Dr. Erwin Freundlich zum Observator am Astrophysikalischen Observatorium in Potsdam, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe und Vorstand der chemisch-technischen Prüfungs- und Versuchsanstalt Dr. Paul Eitner zum ord. Honorarprofessor ebendaselbst, der a. o. Professor an der Universität Leipzig Dr. Robert Winger zum ord. Professor der Geophysik an derselben Hochschule, der Privatdozent an der Technischen Hochschule München Dr. Max Lagally zum ord. Professor für angewandte Mathematik an der Technischen Hochschule Dresden, der frühere ord. Professor an der Universität Straßburg Dr. Emil Cohn zum ord. Honorarprofessor der theoretischen Physik an der Universität Freiburg i. Br.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 14. 15. Juli 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 16 am 25. Juli 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über eine scheinbare photoelektrische Nachwirkung am Kalium und über den Einfluß der Entgasung auf den Photoeffekt an Metallen.

Von J. Elster† und H. Geitel.

Der erste Teil der folgenden Mitteilung ist als ein Nachtrag zu unsern Untersuchungen an lichtelektrischen Zellen anzusehen, die wir in den Jahren 1912, 1913 und 1916 in dieser Zeitschrift veröffentlicht haben[1]).

Er bezieht sich auf eine der Ursachen, die eine Art von „lichtelektrischer Nachwirkung" vortäuschen können.

Der zweite Teil handelt von Versuchen zur Klärung der Frage, ob der Photostrom an Metallen durch deren Gasgehalt bedingt ist.

Aus den früheren Mitteilungen ist dasjenige kurz wiederholt, was zum Verständnis dieser Ausführungen notwendig schien.

Beim Gebrauche von photoelektrischen Alkalimetallzellen zur Vergleichung kleiner Lichtstärken, z. B. bei der Photometrie des Fixsternlichts, kann sich als Fehlerquelle eine gewisse Nachwirkung nach voraufgegangener stärkerer Belichtung bemerklich machen. Sie besteht in einer schwachen Elektrizitätsströmung durch die Zelle nach vollkommenem Abschluß des Lichtes, die in der Zeit schnell abklingt. Die Stärke dieses Dunkelstroms nach Ablauf einer Zeit von der Größenordnung einer Sekunde von der Verdunkelung an gerechnet bleibt bei Zellen der gebräuchlichen Größe und Form auch nach Lichtreizen von der Intensität einiger Tausende von Meterkerzen unter 10^{-12} Amp., so daß der Effekt bei galvanometrischer Bestimmung des Photostroms überhaupt nicht beobachtet, sondern erst durch empfindlichere Methoden der Strommessung entdeckt wird.

Die Schaltung der Zelle für Messungen in dem Bereiche hoher Empfindlichkeit ist diese: Vom negativem Pole N einer Batterie kleiner Akkumulatoren von 100—200 Volt Spannung,

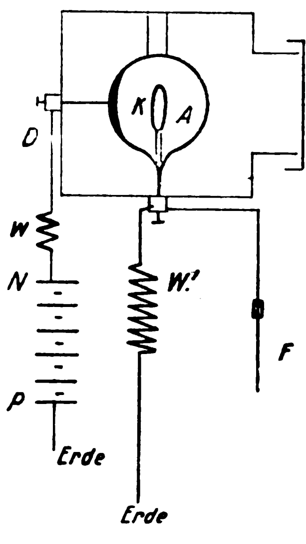


Fig. 1.

deren positiver P geerdet ist, führt der Verbindungsdraht D über einen hohen Widerstand W zur Alkalimetallkathode K der Zelle, die in eine lichtdichte Kapsel mit abnehmbarem Deckel eingebaut ist, vom Anodendraht A geht eine Leitung zum Faden F eines Einfadenelektrometers, Empfindlichkeit etwa: 20 Sk. = 1 Volt. Will man das Instrument unmittelbar zur Strommessung benutzen, so leitet man den Faden durch einen bekannten sehr hohen Widerstand W' (10^{12} bis 10^{11} Ohm) zur Erde ab, der Ausschlag des Elektrometerfadens ist dann

1) J. Elster u. H. Geitel, diese Zeitschr. 13, 468, 1912; 14, 741, 1913; 17, 268, 1916.

der Stärke des Photostroms proportional. Andrerseits kann man eine selbst noch größere Empfindlichkeit der Messung erreichen, indem man unter Fortlassung des Widerstands W' die Aufladezeit des Elektrometers bis zum Eintritt eines bestimmten Potentials mißt, selbstverständlich unter der Bedingung, daß die anderweit bekannte Kapazität des aufzuladenden Systems unverändert bleibt. Der Photostrom ist dann der Aufladungsdauer umgekehrt proportional. Zum Nachweis und selbst zur quantitativen Abschätzung von Beleuchtungsstärken, die nahe bei oder unter der Empfindlichkeitsgrenze des Auges liegen, wird die an der Zelle liegende Spannung bis auf wenige Volt unter den Betrag getrieben, bei dem die leuchtende Entladung durch den aus verdünntem Argon bestehenden Gasinhalt fließen würde. Der Elektrometerfaden zeigt nun bei völligem Abschluß des Lichtes von der Zelle sprungweise alle 15 bis 30 Sek. wiederkehrende Stromstöße an, die vermutlich von der β-Strahlung des Kaliums und einer schwachen Radioaktivität der Umgebung der Zelle ausgelöst werden. Läßt man nun die geringste Lichtmenge einfallen, so vermehrt sich die Anzahl der Fadensprünge in dem gleichen Zeitintervall, und zwar ist die Vermehrung der wirkenden Lichtstärke ungefähr proportional. Steigert man die Beleuchtung, so werden schon lange bevor der Betrag von 10^{-4} M-K erreicht ist, die Fadensprünge so häufig, daß sie in eine kontinuierliche Bewegung des Fadens zusammenfließen.

Um nun die in Rede stehende Nachwirkung eines Lichtreizes zu beobachten, wird die unter der normalen, vom Potential der leuchtenden Entladung noch weit entfernten Belastung von etwa 100 Volt stehende Zelle einer Beleuchtung von mehr als 1 M-K ausgesetzt, während der Elektrometerfaden geerdet bleibt. (Andernfalls würde er sofort aus dem Bereich der Skala hinausgeschleudert werden.) Dann wird die Zellenkapsel lichtdicht verschlossen und sofort die Erdung des Elektrometerfadens aufgehoben. Man beobachtet eine Wanderung des Fadens, als ob die Zelle noch von schwachem Licht getroffen würde. Die Wirkung ist nicht für alle Zellen gleich deutlich, wir haben solche hergestellt, an denen sie kaum bemerkbar war. Am deutlichsten scheint sie an Zellen mit Kalium als Kathode aufzutreten. Nach einigen Minuten ist die Nachwirkung unmeßbar klein geworden, der Faden bleibt in der Nullage stehen. Erhöht man nun die Spannung bis dicht unter das (für die betreffende Zelle früher schon festgestellte) Entladungspotential, und wendet jetzt die „Methode der Fadensprünge" an, so verhält sich die Zelle immer noch so, als wäre sie einer äußerst schwachen nahe bei oder unter der Reizschwelle des dunkeladaptierten Auges liegenden Beleuchtung ausgesetzt. Erst im Laufe einer Stunde erweist sich auch diese hochempfindliche Methode nicht mehr ausreichend; die Erscheinung ist endgültig abgeklungen.

Die Nachwirkung tritt ein, gleichgültig ob die Zelle während der Belichtung an Spannung lag oder nicht. Durch ein magnetisches Feld, dessen Kraftlinien zu der Richtung des Photostromes in der Zelle senkrecht verlaufen, wird die Nachwirkung verkleinert oder ganz aufgehoben. Hierdurch ist, ebenso wie durch die Existenz der Stromstöße, erwiesen, daß sie wenigstens teilweise auf einer wahren Gasentladung in der Zelle beruht.

Es war im höchsten Grade unwahrscheinlich, daß die lichtelektrische Auslösung von Elektronen aus einem metallischen Leiter die Einwirkung des Lichtes wesentlich überdauern sollte, auch hätte in diesem Falle kein Unterschied zwischen Zellen derselben Art bestehen können.

Wir vermuteten schon früher eine Störung, die von der unbelegten Glaswand der Zelle ausging. Infolge der bei gewöhnlicher Temperatur schon merklichen Verdampfung der Alkalimetalle könnte sich die freie Glasfläche im Innern der Zelle mit einer molekularen Schicht des Metalls überziehen, von der im Lichte negative Elektronen entwichen. Nach der Verdunkelung stellte sich dann, wenn die Zelle an Spannung lag, diese Wandladung langsam wieder her, indem sie zugleich auf den Anodendraht influenzierte und dadurch freie negative Elektrizität in den Elektrometerfaden trieb.

Es ist wohl möglich, daß ein Vorgang der bezeichneten Art in Alkalimetallzellen abläuft. Indessen ist, wie wir uns überzeugten, noch eine andere Wirkung im Spiele.

Gewöhnliches Glas und ganz besonders das für die Zellen häufig gewählte Uviolglas zeigt nach Bestrahlung mit ultraviolettem Licht eine dem Auge in völliger Dunkelheit deutlich sichtbare, allmählich abklingende Phosphoreszenz. Dies Nachleuchten des Glases ist vollkommen ausreichend, nach voraufgegangener Belichtung mit einer Ultraviolett enthaltenden Strahlungsquelle, die Nachwirkung an der Zelle hervorzurufen. Bei der großen Empfindlichkeit der „Methode der Fadensprünge" genügen vielleicht schon die geringen Spuren von Ultraviolett, die in den gewöhnlichen Lichtquellen enthalten sind, eine auf diese Weise nachweisbare Phosphoreszenz zu erregen.

Aber es ist nicht das Nachleuchten des Glases allein, das störend wirken kann.

Bei den Versuchen über die Phosphoreszenz des Glases bemerkten wir nämlich, daß in Kaliumzellen, die einer starken Ultraviolettbestrahlung (durch brennendes Magnesiumband) ausgesetzt waren, die Lichterscheinung auf der freien Glaswand an bestimmten Stellen besonders lebhaft war. Wir vermuteten, daß das Hydrid des Kaliums, dessen Bildung in den Zellen wir schon früher festgestellt hatten, der Träger einer besonders intensiven Phosphoreszenz war.

Wir stellten daher das reine Hydrid durch Erhitzen einer kleinen Menge von Kalium in verdünntem Wasserstoff in einem zylindrischen Glasrohr her. Es bildet einen weißen kristallinischen Belag an den Wänden, der durch Erhitzen in dem Rohre von Ort zu Ort getrieben wird. Man erkennt die Phosphoreszenz der Masse nach voraufgegangener Belichtung mit ausgeruhtem Auge im Dunkeln aufs deutlichste. Nähert man in diesem Zustande das Rohr einer Kaliumzelle, so unterhält es in dieser einen — durch die Auflademethode leicht meßbaren — Photostrom.

Aus dieser Phosphoreszenz des Kaliumhydrids (und des Zellenglases) erklärt sich außer der in Rede stehenden Nachwirkung eine verwandte Erscheinung an Photozellen, die uns schon früher aufgefallen war. Ist einmal durch zu starke Voltbelastung eine leuchtende Entladung hindurchgegangen, so erregt diese eine so kräftige Nachwirkung, daß ihre letzten Spuren bis zu 12 Stunden andauern können. Durch die von dem leuchtenden Argon ausgehende Strahlung ist offenbar das Kaliumhydrid, das nicht nur an der Glaswand der Zelle, sondern wohl auch an der Oberfläche des lichtempfindlichen Metalls selbst haftet, zu lebhafter Phosphoreszenz angeregt, die bei der unmittelbaren Nähe der leuchtenden Substanz die lichtelektrische Elektronenemission des Kaliums lange Zeit hindurch unterhält.

Mit dieser Erklärung der Nachwirkung ist in guter Übereinstimmung, daß sie an Zink- und Kadmiumzellen aus Uviolglas, die nur auf Violett bzw. Ultraviolett ansprechen, nicht beobachtet wird. Das Phosphoreszenzlicht des Glases, das hier allein in Betracht kommen könnte, da das entsprechende Metallhydrid fehlt, enthält in diesem Falle keine am Zink oder Kadmium wirksame Strahlen.

Aus den mitgeteilten Erfahrungen ergibt sich von selbst die Vorschrift, bei photoelektrischen Arbeiten an sehr schwachen Lichtquellen die Einwirkung starker Lichtreize auf die Alkalimetallzellen zu vermeiden. Die Herren Guthnick und Prager haben bei ihren bekannten Messungen von Sternhelligkeiten diese Vorsichtsmaßregel als notwendig erkannt und befolgt.

Ein weiteres Auskunftsmittel, durch das wenigstens einer der beiden Träger der Phosphoreszenz beseitigt würde, läge in der Herstellung hydridfreier Zellen. Praktisch hat aber dieser Vorschlag deshalb keine Bedeutung, da die größte Empfindlichkeit der Zellen gerade erst durch die Einwirkung des Glimmstromes auf das Alkalimetall in verdünntem Wasserstoff erzielt wird, die Entstehung der Hydride also zur Voraussetzung hat.

II.

Wie man sieht, hängen diese wesentlich zur Vervollkommnung der photoelektrischen Meßmethode unternommenen Untersuchungen über die scheinbare Nachwirkung des Lichtes mit einer allgemeinen Frage zusammen, die in letzter Zeit von verschiedenen Seiten experimentell erörtert ist, wieweit nämlich der Gasgehalt der vom Lichte getroffenen Metalle die photoelektrische Wirkung beeinflußt.

Daß ein solcher Einfluß überhaupt besteht, ist unzweifelhaft, geradeso wie er auch bei den den lichtelektrischen so nahe verwandten glühelektrischen Erscheinungen vorhanden ist.

Die Frage ist nur, ob man soweit gehen darf, den Gasgehalt des Metalls als *notwendige Voraussetzung* für das Zustandekommen der lichtelektrischen Elektronenemission aufzufassen. Auch bei der glühelektrischen Wirkung schien während einer gewissen Entwicklungsstufe unserer Kenntnis dieser radikale Standpunkt berechtigt. Daß er später verlassen werden mußte, mahnt uns auch hier zur Vorsicht.

Vor der Hand stehen die Befunde der verschiedenen Forscher in einem unüberbrückbaren Gegensatze. Die Herren G. Wiedmann und H. Hallwachs[1]) haben gefunden, daß die lichtelektrische Wirkung am Kalium durch fortgesetztes Sieden und wiederholtes Destillieren des Metalls im höchsten Vakuum sehr stark (bis unter 1 Proz. der ursprünglichen) vermindert wird, und daß insbesondere der selektive Effekt, d. h. die abnorm hohe Elektronenemission im Blau für schief einfallendes und zur Einfallsebene senkrecht polarisiertes Licht infolge dieser Behandlung des Kaliums ganz verschwindet. Übereinstimmend hiermit findet H. Küst-

1) G. Wiedmann u. H. Hallwachs, Verh. d. D. Phys. Ges. **16**, 107, 1914 u. G. Wiedmann, ebenda **17**, 342, 1915 u. **18**, 333, 1916.

ner[1]), daß an ganz frischen, im Vakuum durch Schaben erhaltenen Flächen von Zink die lichtelektrische Wirkung unmeßbar klein wird. Auch K. Fredenhagen[2]) schließt sich auf Grund seiner Erfahrungen der Ansicht an, daß das wirksame Agens bei der lichtelektrischen Elektronenemission der Wasserstoff sei, fügt aber hinzu, daß ein direkter Beweis hierfür noch nicht erbracht ist.

Den Erfahrungen dieser Forscher gegenüber steht zunächst das Ergebnis der Arbeiten von Pohl und Pringsheim[3]) die nach 430-stündigem Sieden des Kaliums im Vakuum keine Verminderung des Photostroms, bezogen auf gleiche Energie des einfallenden Lichtes, nachweisen konnten. Auch nach Versuchen von Dushman und Hagenow, in bezug auf welche wir auf eine Bemerkung von I. Langmuir[4]) und ein Referat von W. Gerlach[5]) verweisen, bewirkt die Entgasung der Metalle im höchsten Vakuum keineswegs eine Abnahme der lichtelektrischen Elektronenemission.

Wir hatten beabsichtigt, zur Klärung dieses Widerspruchs lange fortgesetzte Messungen der Intensität des lichtelektrischen Sättigungsstroms am Kalium unter konstanter Belichtung und unveränderlicher beschleunigender Spannung auszuführen, während das Metall zwischendurch durch Sieden im Vakuum einer Gaedeschen Diffusionspumpe mehr und mehr entgast wurde.

Die unsichere und häufig unterbrochene Belieferung unsres Arbeitsraums mit Gas und elektrischem Strom in den letzten Jahren zwang uns, diesen Plan aufzugeben, da es unmöglich wurde, die Diffusionspumpe in sicheren Betrieb zu setzen.

Dagegen haben wir versucht, durch Änderung der Untersuchungsmethoden wenigstens einen Beitrag zu der strittigen Angelegenheit zu liefern.

Zur Herstellung des Vakuums verwandten wir eine gewöhnliche Gaedesche Pumpe, deren Vorvakuum von einer Wasserstrahlpumpe unterhalten wurde. In einem Quarzrohr bis dicht unter Rotglut erhitztes Kalzium diente dazu, die Wirkung der Pumpe durch Absorption der Gasreste, besonders des Wasserstoffs zu unterstützen. Ein Geißlerrohr mit parallel geschalteter Funkenstrecke (Zinkkugeln von 4 cm Durchmesser), angeschlossen an einen Rhumkorff von 20 cm Schlagweite gab ein gewisses Urteil über das erreichte Vakuum. Dies konnte soweit getrieben werden, daß zwischen den Kugeln Funken von 4 cm übergingen, bei Vergrößerung dieses Abstands blieb in der Regel auch im Geißlerrohr die Entladung aus.

Wir wandten uns zunächst, im Anschluß an das Ergebnis von Wiedmann, der Frage zu, ob der selektive Effekt an den Alkalimetallen bei fortschreitender Entgasung ausbleibt oder wenigstens vermindert wird. Sehr bequem zur Beobachtung des selektiven Effekts ist der bekannte Versuch an der spiegelnden Oberfläche der flüssigen Kaliumnatriumlegierung; ein senkrecht zur Einfallsebene polarisierter, unter etwa 60° auffallender Strahl erregt bei gleicher beschleunigender Spannung einen mehr als 10 mal so starken Photostrom, als ein parallel polarisierter von gleicher Intensität. Eine Bedingung dabei ist, wie oben schon bemerkt, daß der Strahl Licht aus einem bestimmten Bereich des Spektrums enthält; bei den Alkalimetallen ist die Wirkung für Blau-Violett ein Maximum. Die stärkere Absorption, die das senkrecht zur Einfallsebene polarisierte Licht erfährt, reicht allein nicht hin, um diese Verschiedenheit zu erklären, es liegt eben eine besondere auswählende Wirkung, ein selektives Ansprechen der Alkalimetalle für bestimmte Frequenzen vor[1]), das aber nur dann erfolgt, wenn die Schwingungen des elektrischen Vektors des Lichtes in der Einfallsebene liegen.

Der zu den Versuchen benutzte Apparat war dieser: Die Kugel K trägt drei Rohransätze; von den beiden horizontalen führt der

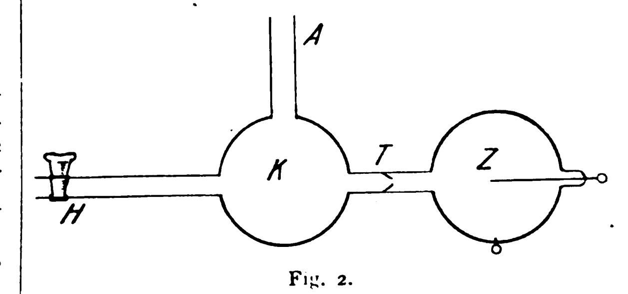


Fig. 2.

eine zur Pumpe, der andere über ein eingeschmolzenes Trichterchen T zur Zelle Z. In die Leitung zur Pumpe ist der gut schließende, mit Fett gedichtete Hahn H eingeschaltet.

1) H. Küstner, diese Zeitschr. 15, 68, 1914.
2) K. Fredenhagen, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 201, 1914.
3) R. Pohl u. P. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 336, 1914.
4) I. Langmuir, diese Zeitschr. 15, 524, 1914.
5) C. F. Hagenow, Beibl. 43, 814, 1919 (Referat von W. Gerlach).

1) R. Pohl u. P. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. 12, 215, 1910.

Durch den vertikalen Ansatz A von K führten wir einige Kubikzentimeter flüssiger Kaliumnatriumlegierung ein, die schon vor längerer Zeit im Vakuum hergestellt und in einem luftdicht verschmolzenen Glasgefäß aufbewahrt war. Nach dem Einführen der Legierung wurde A zugeschmolzen und der Apparat an der Pumpe evakuiert, während durch Erhitzen von K in einer Asbesthülle das Hydroxyd zersetzt wurde, mit dem sich das Metall beim Kontakt mit der in K anfangs enthaltenen Luft bedeckt hatte.

Sobald die reichliche Wasserstoffentwicklung, die von der Reaktion der Alkalimetalldämpfe mit dem Hydroxyd herrührt, nachgelassen hatte, ließen wir den Apparat erkalten, nahmen ihn bei verschlossenem Hahn H von der Pumpe ab und führten das Metall durch Neigen in die Zelle Z hinüber. Das Licht einer kleinen Glühlampe, die an einen Akkumulator angeschlossen war, fiel durch Linse und Blende und ein großes Nicolsches Prisma unter 60° Einfallswinkel auf die spiegelnde Metallfläche. Die Zelle stand in bekannter Weise mit einer beschleunigenden Spannung von 100 Volt und einem Galvanometer in Verbindung. Durch Drehen des Nicols konnten die beiden Hauptstellungen, nämlich: Polarisationsebene senkrecht und parallel zur Einfallsebene — am Galvanometer mit großer Schärfe beobachtet werden. Das Verhältnis der zugehörigen Intensitäten des Photostroms I_s/I_p hängt von dem selektiven Effekt ab. Die Einzelwerte der am Galvanometer gemessenen Stromstärken I_s und I_p nähern sich mit abnehmendem Gasdruck in der Zelle infolge der allmählichen Ausschaltung der Stoßionisierung bestimmten Grenzwerten, die den Sättigungsströmen entsprechen. Bei unsern Versuchen war I_s/I_p beim Beginn etwa gleich 13. Wenn nun der selektive Effekt bei zunehmender Entgasung des Metalls verschwindet, so war zu erwarten, daß auch I_s/I_p kleiner werden und sich einem Betrag (nahe gleich 3) nähern würde, der durch das Verhältnis der absorbierten Energie für senkrecht und parallel zur Einfallebene polarisiertes Licht bestimmt ist[1]).

Wir verfuhren nun in der Weise, daß wir, nachdem wir den Quotienten I_s/I_p an dem noch nicht entgasten Metall gemessen hatten, das letztere in die Kugel K zurücklaufen ließen und den Apparat von neuem an die Pumpe brachten. Sobald das Vakuum vor dem Hahn H wieder hergestellt war, öffneten wir diesen und erhitzten das Metall in der Kugel zum Kochen, während das entwickelte Wasserstoffgas durch die Pumpe, unterstützt durch die Absorption des auf etwa 300° C erhitzten Kalziums entfernt wurde. Dies Entgasen der Kaliumnatriumlegierung wurde 15 Stunden fortgesetzt, nach dem Erkalten nahmen wir den Apparat bei geschlossenem Hahne H von der Pumpe ab, sammelten das an den Wänden der Kugel K z. T. sublimierte Metall durch Ausschwenken und führten es in die Zelle Z hinüber. Dann bestimmten wir wie zuvor den Quotienten I_s/I_p. Es ist uns auch bei Wiederholung des Verfahrens nicht gelungen, den Betrag merklich unter 13 zu vermindern. Es fällt uns schwer, anzunehmen, daß mangelhafte Entgasung der Legierung an diesem völligen Mißerfolge schuld sei, zumal das Geißlerrohr hohes Vakuum anzeigte.

Bei diesen Versuchen, ebenso wie bei denen von Wiedmann, wurde eine erhebliche Menge des Alkalimetalls, nämlich mehrere Kubikzentimeter, dem Prozeß der Entgasung unterworfen. Je größer die angewandte Menge, um so langwieriger wird aber das Verfahren.

Wir untersuchten daher im Gegensatz zu dieser Methode auch den Photoeffekt an minimalen Mengen, nämlich an molekularen Schichten des Alkalimetalls, deren Vorhandensein eben nur durch ihr lichtelektrisches Verhalten erkannt wird.

Bekanntlich geben alle Alkalimetallzellen auch bei umgekehrter Schaltung im Lichte einen Photostrom, da der Anodendraht infolge der bei gewöhnlicher Temperatur schon merklichen Dampfspannung des Alkalimetalls geringe Spuren davon an seiner Oberfläche kondensiert. Diese lichtempfindliche Schicht stellt sich, wenn sie durch Glühen des Anodendrahts entfernt ist, in wenigen Sekunden auf dem erkalteten Draht wieder her; an ihr müßte sich die etwaige Abhängigkeit der Lichtwirkung vom Gasgehalt leicht erkennen lassen. Wir verbanden nun mit der Pumpe eine Kaliumzelle, die nur dadurch von der gewöhnlichen Form abwich, daß der aus Platin verfertigte Anodendraht eine Schlinge bildete, die durch Anschluß an einen Akkumulator zum Glühen gebracht werden konnte. Die Kaliumfläche lag jetzt an einer positiven Spannung von 100 Volt, der Anodendraht konnte durch einen Kommutator abwechselnd an den Heizstrom angeschlossen oder mit der einen Polklemme eines Galvanometers verbunden werden, dessen andere Klemme mit dem negativen Pole der die Zelle ladenden Batterie in Verbindung stand.

Unmittelbar nach Abschaltung des Heiz-

1) J. Elster u. H. Geitel, Ann. d. Phys. 61, 457, 1897.

stroms, solange der Anodendraht noch heiß war, zeigte sich kein Photostrom im Lichte, aber schon nach 3'', als der Draht zu erkalten begann, setzte sich die Galvanometernadel in Bewegung, um nach einer Stunde den Maximalausschlag zu erreichen. Erneutes Glühen vernichtete die Lichtempfindlichkeit wieder vorübergehend, aber der Grenzzustand blieb derselbe nach 33 stündigem Glühen des Drahtes unter dauernder Tätigkeit der Pumpe. Es zeigte sich also der von der molekularen Kaliumschicht auf der Platinschlinge unterhaltene Sättigungsstrom bei gleicher Beleuchtungsstärke unabhängig sowohl von dem Gasgehalt in der Zelle wie in dem als Unterlage dienenden Metalle, das während des Glühens selbst reichlich Gas verloren hatte. Dieser Versuch betrifft nicht wie der vorige nur den selektiven, sondern den gesamten Photoeffekt am Kalium, er scheint uns wie jener mit der Lehre von der entscheidenden Bedeutung des Gases schwer vereinbar zu sein. Er würde voraussichtlich von entscheidender Bedeutung werden, wenn er, mit den besten Hilfsmitteln der Vakuumerzeugung wiederholt, unter Anwendung eines (gasfreien) Wolframdrahts als Unterlage der molekularen Kaliumschicht zu demselben Ergebnisse führte.

Die Hartnäckigkeit mit der das Kalium den Wasserstoff festhält, legte den Gedanken nahe, statt des Metalls selbst das Amalgam dem Entgasungsprozeß zu unterwerfen. Da die Amalgame der Alkalimetalle schon bei 1 Proz. Gehalt bei gewöhnlicher Temperatur zu erstarren beginnen, ist in einem leichtflüssigen Amalgam nur ein sehr geringer Bruchteil des Alkalimetalls enthalten; das Amalgam verhält sich, von seiner photoelektrischen Empfindlichkeit abgesehen, wie Quecksilber. Daß aber dieses Metall merkliche Mengen Wasserstoff absorbierte oder gar beim Kochen im Vakuum zurückhielte, ist nicht bekannt.

Um den Photostrom, der an den Amalgamen bei Einwirkung sichtbaren Lichtes unter sonst gleichen Umständen viel geringer als an den reinen Alkalimetallen ist, möglichst zu vergrößern, wählten wir das Amalgam des Rubidiums als das lichtempfindlichste. Man stellt es leicht durch Elektrolyse einer gesättigten heißen Lösung von Rubidiumchlorid mit Quecksilber-Kathode und Kohlenanode her; das erstarrte kristallinische Produkt wird mit so viel Quecksilber versetzt, daß es leicht fließt und dann in eine Zelle eingeführt. Da es bei Berührung mit der Luft etwas Hydroxyd bildet, so muß es durch Erhitzen in einer Vorkugel im Vakuum von diesem befreit werden. Hierbei entwickelt sich Wasserstoff, der abgesaugt wird. Wir ließen das so gereinigte Amalgam durch ein Trichterchen (wie bei der Kaliumnatriumlegierung) in die Zelle fließen. In dieser konnten wir es einem tagelang fortgesetzten Sieden im höchsten von uns erreichbaren Vakuum unterwerfen. Das reichlich verdampfende Quecksilber floß dabei, nachdem es sich an den Wänden der Zelle und des zur Pumpe führenden Rohres verdichtet hatte, von selbst in die Zelle zurück, so daß die Konzentration und die Gesamtmasse des Amalgams ungeändert blieb. Auch hier fiel der Versuch völlig negativ aus; der von dem Lichte einer Nernstlampe an dem kalten Metall ausgelöste Photostrom (Sättigungsstrom) ließ nach 214 stündigem Kochen keine Änderung erkennen, sobald die Betriebsspannung der Nernstlampe auf einen bestimmten Betrag eingestellt wurde. Es verdient noch bemerkt zu werden, daß auch das Verhältnis der oben an der Kaliumnatriumlegierung definierten Stromintensitäten I_s und I_p für senkrecht und parallel der Einfallsebene polarisiertes Licht während dieser Behandlung dasselbe (2,4) blieb und mit dem entsprechenden Verhältnis (2,3) an einer vor Jahren hergestellten mit verdünntem Wasserstoff gefüllten Rubidiumamalgamzelle fast übereinstimmt. Ein selektiver Effekt liegt hier bekanntlich nicht vor, vielmehr erklärt sich die größere Wirksamkeit des senkrecht zur Einfallsebene polarisierten Lichtes in diesem Falle allein aus der stärkeren Absorption des Lichtes am Quecksilber[1]).

Schließlich haben wir den Entgasungsversuch noch auf das im Vakuum leicht flüchtige Kadmium ausgedehnt. Da dies Metall nicht mehr auf sichtbares Licht anspricht, so kann es nur in Zellen aus Uviolglas als photoelektrisches Material bei Belichtung durch Ultraviolett untersucht werden.

Wir stellten uns zwei gleich große und gleich gebaute Zellen aus Uviolglas mit Kadmiumbelegung als Kathode her. In die eine war das Metall durch einfache Sublimation aus einem Ansatzrohr eingeführt. Bei der andern wurde es zuvor unter stetiger Tätigkeit der Pumpe, deren Wirkung wie sonst durch heißes Kalzium unterstützt war, schrittweise von einer Vorlage in eine andere getrieben, um erst nach siebenmaliger Wiederholung des Verfahrens in die Zelle zu gelangen. Die vom Metall verlassene Vorlage wurde jedesmal durch Abschmelzen von der Pumpe getrennt. Beide Zellen erwiesen sich im Licht einer Quecksilberbogenlampe als von fast der gleichen Empfindlichkeit und zeigten nahe iden-

1) R. Pohl u. P. Pringsheim, Verh. d. D. Phys. Ges. 12, 349, 1910.



tische Charakteristiken. Wir fügen diese in nachstehender Tabelle bei.

Zelle 1 mit 7 mal sublimiertem Kadmium.
Zelle 2 „ 1 „ „ „
Lichtquelle: Quarzquecksilberlampe.

Angelegte Spannung in Volt	19,5	39,0	78	117	156	195
Photostrom in $2,6 \cdot 10^{-10}$ Amp.						
Zelle 1	27,0	34,9	42,1	47,6	48,3	49,4
Zelle 2	25,8	32,0	38,8	45,0	48,0	51,0

Die mitgeteilten von verschiedenen Gesichtspunkten ausgehenden, allerdings nicht mit den zur Zeit vollkommensten Mitteln der Vakuumtechnik durchgeführten Untersuchungen haben keinen Anhalt dafür erbracht, daß der Gasgehalt eines Metalls für das Zustandekommen der lichtelektrischen Wirkung notwendig sei.

Die Kosten der Untersuchung sind größtenteils aus Mitteln der Jagorstiftung in Berlin bestritten.

(Eingegangen 2. März 1920.)

Über unipolare Leitung an Kristallen[1]).

(Dritte Mitteilung.)

Von Franz Streintz.

Temperatur und Polarität.

Wird die untere blanke Fläche eines leitenden Sulfidkristalles gegen eine amalgamierte Bleiplatte gepreßt, die obere nicht gescheuerte mit einer Zuleitung aus Messing, Kupfer, Silber oder Platin versehen, so erhält man nur an der letzteren einen nennenswerten Übergangswiderstand, der durch die Bildung eines Molekularkondensators zwischen Erz und Metall entsteht. Eine derartige Anordnung soll ein Kristalldetektorsystem genannt werden. Die besonders ausgeprägten Eigenschaften des Silberglanzes ließen erwarten, daß ein aus diesem Sulfid hergestelltes System zu anschaulichen Vorstellungen über die Natur der polaren Leitung führen dürfte. Über die Ergebnisse der eingehenden Untersuchung des Systems in der Zusammenstellung Messing/Silberglanz/Blei soll im folgenden berichtet werden.

Fließt der stabile oder nomale Strom i_{21} durch den Kristall (Fig. 1), so erfährt er beim Übergang von 2 nach 1 eine Drosselung. Sie entsteht dadurch, daß nur eine gewisse Anzahl

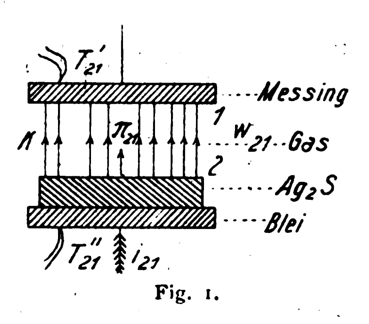


Fig. 1.

von Punkten der gegenüberliegenden Flächen im leitenden Kontakt stehen. Es entsteht ein Übergangswiderstand w_{21}, der einem Leiter zwischen 2 und 1 entspräche, dessen Querschnitt um ein Vielfaches verkleinert worden wäre. Der Strom scheint zu seinem überwiegenden Teile stationär zu sein. Die Stromwärme bildet die thermoelektrische Kraft π_{21}= Kristall/Metall aus, die einen Strom (↑) erzeugt von gleicher Richtung wie i_{21} (↑), mithin die Ausbildung neuer Bahnen begünstigt. Der Strom erfährt daher zunächst eine geringfügige Zunahme, w_{21} nimmt ab, T'_{21} steigt infolge der entwickelten Stromwärme, T''_{21} dagegen wird nur durch die Wärmeleitung des Kristalls beeinflußt, da die Verbindung mit der amalgamierten Bleiplatte als widerstandslos angesehen werden kann und das Erz als guter Leiter der Elektrizität auch ein solcher für die Wärme sein wird. Bei längerem Fließen des Stromes nimmt T'_{21} ab und sinkt zuweilen unter den Wert vor Stromschluß. Diese Erscheinung wird auf das Auftreten des Peltier-Effektes zurückzuführen sein, der auf eine Abkühlung der Messingplatte gerichtet ist. Nachdem der Strom stundenlang geflossen ist, steigt T'_{21} wieder etwas an.

Als Beleg für den geschilderten Verlauf diene zunächst ein Versuch, der mit einem Akkumulator bei der konstant erhaltenen Stromstärke von 0,1 Weber durchgeführt wurde. Nur im Anfang mußte etwas Widerstand zugeschaltet werden, dann blieb die Stromstärke vollkommen unverändert. Die Temperaturen im offenen Kreise betrugen:

$$T' = -0^0{,}24, \quad T'' = -0^0{,}11,$$

zeigen also eine Differenz von $0^0{,}13$. Mit wenigen Ausnahmen lag die Anfangstemperatur T' unter T'', zwischen $0^0{,}1$ und $0^0{,}4$, selten waren beide Temperaturen gleich, niemals fand sich T' größer als T''. Das negative Zeichen gibt an, daß sich die am Thermoelement Eisen-Konstantan gemessene Temperatur unter der Zimmertemperatur befand. Durch den Strom wurden die Temperaturen in nachstehender Weise verändert:

1) Diese Zeitschr. 21, 42 u. 316, 1920.

Nach Stromschluß in Minuten:	T'_{21}	T''_{21}
10	$-0^0,17$	$-0^0,24$
20	$-0^0,43$	$-0^0,25$
30	$-0^0,66$	$-0^0,74$
40	$-0^0,88$	$-0^0,91$
60	$-0^0,81$	$-0^0,88$
90	$-0^0,46$	$-0^0,44$
120	$-0^0,06$	$-0^0,05$
180	$+0^0,24$	$+0^0,22$

Vierzig Minuten nach Stromschluß fiel T'_{21} auf ein Minimum, um dann langsam zu steigen. Ist dieses Minimum erreicht, dann gleichen sich T'_{21} und T''_{21} vollständig aus.

Beobachtungen mit 2 Akkumulatoren und $i_{21} = 0,1$ Weber ergaben:

Nach Stromschluß in Minuten:	T'_{21}	T''_{21}
5	$+0^0,28$	$+0^0,06$
10	$0^0,23$	$0^0,00$
15	$0^0,19$	$0^0,00$
20	$0^0,19$	$-0^0,01$
30	$0^0,19$	$-0^0,03$
45	$0^0,17$	$-0^0,04$
60	$0^0,21$	$+0^0,03$
75	$0^0,21$	$+0^0,03$
120	$0^0,18$	$-0^0,01$

Im offenen Stromkreise waren vorher

$$T' = T'' = 0^0,05.$$

Obwohl also die Ausgangstemperaturen gleich waren, entstand nach Stromschluß eine nicht unerhebliche Differenz, die ungleich dem Ergebnis der vorangegangenen Reihe und ebenso den später zu besprechenden zu keinem Ausgleich führte, sondern im Gegenteil unverändert bestehen blieb. Nach 45 Min. ist ein Minimum der Temperatur T'_{21} eingetreten.

Vor einer Versuchsreihe mit 5 Akkumulatoren bei konstant erhaltener Stromstärke von 0,1 Weber betrugen

$$T' = 0^0,58, \quad T'' = 0^0,77,$$

es entstand mithin eine Differenz von $0^0,19$ zu Ungunsten von T'. Das Ergebnis war folgendes:

Nach Stromschluß in Minuten:	T'_{21}	T''_{21}
10	$1^0,00$	$0^0,93$
20	$0^0,95$	$0^0,98$
30	$0^0,95$	$0^0,98$
40	$1^0,05$	$1^0,05$
60	$1^0,25$	$1^0,27$
80	$1^0,56$	$1^0,59$
100	$1^0,84$	$1^0,86$

Ein Absinken von T'_{21} nach dem ersten Anstieg ist auch hier erkenntlich. Im Gegensatz zur vorhergehenden Messungsreihe gleichen sich beide Temperaturen rasch aus. Auch hier bedurfte es gleich nach Stromschluß der Zuschaltung eines kurzen Drahtstückes. Dann blieb der Strom vollständig konstant.

Ein erwas verändertes Bild gab der Verlauf der Temperaturen, wenn $i_{21} = 0,1$ Weber von 6 Akkumulatoren geliefert wurde. Vor dem Schließen der Kette waren

$$T' = 0^0,15, \quad T'' = 0^0,32$$

also

$$\Delta = -0^0,19.$$

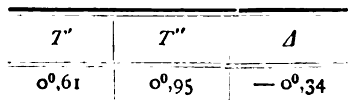
Nach Stromschluß in Minuten:	T'_{21}	T''_{21}
10	$0^0,15$	$0^0,16$
20	$0^0,15$	$0^0,09$
35	$0^0,19$	$0^0,08$
60	$0^0,23$	$0^0,10$
80	$0^0,28$	$0^0,13$
100	$0^0,27$	$0^0,13$
120	$0^0,24$	$0^0,13$
155	$0^0,22$	$0^0,09$

Trotzdem die Temperaturen vor Stromschluß um ungefähr $0^0,2$ auseinander lagen, hatten sie sich, nachdem der Strom zehn Minuten geflossen war, ausgeglichen, um dann im weiteren Verlauf derart voneinander abzuweichen, daß T''_{21} ungefähr ebenso tief unter T'_{21} zu liegen kam, als es sich vor dem Stromschluß darüber erhoben hatte. Auch hier blieb der Strom, von der ersten geringen Zunahme abgesehen, konstant. Beobachtungen, die nach dem Öffnen der Kette angestellt wurden, ergaben:

	T'	T''
nach einer halben Stunde:	$0^0,03$	$0^0,02$,
also einen Ausgleich. Am nächsten Tage fanden sich		
dagegen;	$-1^0,02$	$-0^0,72$,

Δ mithin $= -0^0,30$.

Die Differenz wurde besonders untersucht, um festzustellen, ob sie zeitlichen Änderungen unterworfen sei. Zunächst tauchten die Glasröhren, in deren Mitte sich die Lötstellen Eisen-Konstantan mit der Drahtleitung befanden, in das Wasserbad (man vgl. die in der ersten Mitteilung gegebene Versuchsanordnung), das am Vormittag die Temperatur von $13^0,8$ besaß, während das Thermometer im Hohlraum des Kastens, der die Presse mit dem Kristall enthielt, $15^0,0$ zeigte. Es fanden sich:



T''	T''	Δ
$0^0,61$	$0^0,95$	$-0^0,34$

Darauf wurde das Wasser aus der Wanne

abgelassen. Am Nachmittag sollten sämtliche Lötstellen die Zimmertemperatur von 20°,2 angenommen haben, da auch der Kasten offen gestanden war. Die Messungen ergaben im Verlaufe einer Stunde:

T'	T''	Δ
— 0°,81	— 0°,42	— 0°,39
— 0°,38	0°,00	— 0°,38
— 0°,10	+ 0°,25	— 0°,35
+ 0°,06	+ 0°,37	— 0°,31

und nach Verlauf von weiteren drei Stunden:

+ 0°,15	+ 0°,32	— 0°,17

Beide Temperaturen lagen zunächst unter der des Zimmers. Die an den Zuleitungsscheiben des Kristalles angebrachten Lötstellen der Thermoelemente lagen frei in Luft, die mit den Leitungsdrähten verlöteten dagegen staken in Glasröhren. Bei der allmählichen Zunahme der Zimmertemperatur infolge der Ofenheizung nahm die Umgebung der erstgenannten Lötstellen die Lufttemperatur an, während die der letztgenannten nachhinkte. Mithin waren die Differenzen Δ durch Vorgänge an den Grundflächen des Kristallzylinders entstanden.

Allen Beobachtungsreihen ist gemeinschaftlich, daß die durch den Strom i_{21} hervorgerufene Temperaturänderung nach einstündigem Wirken äußerst geringfügig ist. Bei den Versuchen mit einem Akkumulator und mit sechsen tritt eine Abnahme, mit 2 und 5 Akkumulatoren eine geringfügige Zunahme von T_{21} ein. Es sei bemerkt, daß nur bei Anwendung von fünf Akkumulatoren die Wanne mit Wasser gefüllt war.

Im allgemeinen wird man sagen können, daß sich die Verhältnisse beim Stromdurchgang in der nomalen oder stabilen Richtung ziemlich einfach gestalten. Geringe Abweichungen der verschiedenen Beobachtungsreihen voneinander mögen wohl daran liegen, daß das System durch die Umbildung des Kondensators K gleichfalls Änderungen unterworfen war. Bei einer Versuchsreihe, die in gleicher Weise wie die mitgeteilten mit 4 Akkumulatoren ausgeführt wurde, scheint eine einschneidende Veränderung von K eingetreten zu sein. Die Voltmeternadel geriet in Bebungen und beruhigte sich innerhalb einer halben Stunde nicht; die Temperatur T'_{21} änderte sich kaum, pulsierte aber zwischen 0° und 0°,05. Wahrscheinlich ist, daß Ströme von der angewendeten Stärke von 0,1 Weber doch nicht vollkommen stationär sind, sondern von Zeit zu Zeit von geringen Entladungen begleitet werden, die sich aber am Voltmeter meist nicht mehr erkenntlich machen.

Der Widerstand w_{21} sank bei dem mit einem Akkumulator ausgeführten Versuche in zwei Stunden von 1,3 bis auf 0,9 Ohm herab. Nach mehrstündiger Unterbrechung des Stromes i_{21} ergab sich bei unveränderter Temperatur $w_{21} = 1,6$ Ohm, wieder als Beweis, daß K eine Änderung erfahren hatte. Auch bei Anwendung einer Stromstärke $i_{21} = 0,5$ Weber verhielt sich der Strom recht stationär, von kleinen Schwankungen abgesehen. Gleich nach Stromschluß stieg T'_{21} ebenfalls an, nahm aber bereits nach einer Minute ein wenig ab, um dann gleichmäßig langsam wieder zu steigen. Nach einstündigem Fließen des Stromes betrug der Temperaturgewinn 2°,24 und 1°,10 an den beiden Zuleitungen.

Vollkommen verschieden gestalten sich die Verhältnisse, wenn der anomale oder labile Strom i_{12} geleitet wird. Unmittelbar nach dem Umschalten von der nomalen zur anomalen Richtung zeigt sich durchweg $i_{12} = i_{21}$, während im Gegensatz dazu i_{12} meist größer als i_{21} war, wenn keine der Kristallgrundflächen übergangsfrei gewesen war. T'_{12} ist in dauernder Zunahme begriffen, die Temperatursteigerung an der Messingscheibe hält also an. Die erwachende thermoelektrische Kraft π_{12} wirkt der Stromrichtung entgegen, gleichzeitig vergrößert sie die Stromwärme durch die sekundäre des Peltier-Effektes. Infolge des gemeinschaftlichen Wirkens wächst π_{12} und damit erlöschen ursprünglich vorhandene Strombahnen; i_{12} nimmt ab, w'_{12} wächst. Es tritt eine Stauung im Potentialausgleich ein, der Kondensator K wird aufgeladen, bis er ein Potential erlangt hat, das einen Durchbruch an benachbarten Punkten 1 und 2 (der Fig. 2) herbeiführt. Durch

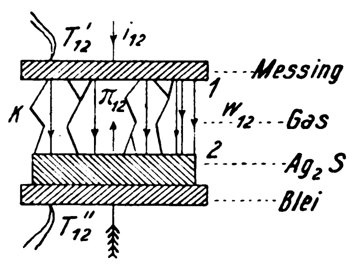


Fig. 2.

derartige Entladungen, die anfänglich recht sparsam an Zahl sein mögen, wird zwischen diesen Punkten eine bedeutende Wärme entwickelt, die sich der Messingplatte mitteilt. Es tritt sofort eine plötzliche Steigerung der Temperatur T'_{12} ein. Durch die Erhitzung, man kann sie sich durch das Auftreten ultra-

mikroskopischer Fünkchen entstanden denken, schwillt π_{12} mächtig an, es wird eine größere Zahl von noch vorhandenen Stromlinien außer Kurs gesetzt. Der Kondensator wird rascher aufgeladen, die Entladungen folgen schneller. Dieser Vorgang ruft einen chemischen Umsatz hervor, der in der Bildung von Sulfiden und Oxyden an Zuleitung und Kristall besteht. K erleidet durchgreifende Veränderungen. Gegenüberliegende Punkte, die vorher nicht im leitenden Kontakt standen, sind durch ein entstandenes leitendes Sulfid etwa überbrückt worden; damit ist eine Bahn für einen Dauerstrom geschaffen; i_{12} steigt, dagegen fällt T'_{12}, da die Entladungen weniger zahlreich geworden sind. Nun sorgt wieder die Thermokraft für das Verschwinden regulärer Linien und das Spiel wiederholt sich. Bei der fortgesetzten Umbildung von K kann aber auch die Lage zweier gegenüberliegender Punkte ungünstig beeinflußt werden etwa durch überwiegende Oxydation oder Entstehung eines nichtleitenden Sulfids (ZnS); in diesem Fall nimmt i_{12} plötzlich ab, T'_{12} steigt, bis wieder der Kondensator neu aufgeladen ist und bei der folgenden Entladung ein neues Anschwellen der Temperatur bewirkt.

Die Wechselwirkung zwischen Stromstärke und Temperatur ist derart innig, daß man bei einiger Übung aus den Strommessungen am Voltmeter die Temperaturänderungen am Galvanometer richtig zu schätzen in der Lage ist.

Der Strom, der durch das Voltmeter fließt, besteht nach dem Gesagten in einer Übereinanderlagerung zweier veränderlicher Ströme, eines stationären und eines Entladungsstromes. Der äußerst bewegliche Aluminiumzeiger eines Westonvoltmeters zeigt in vortrefflicher Weise das Vorhandensein beider Ströme an. Nach einem plötzlichen Ruck nach der einen oder anderen Seite ist er nicht selten vollkommen ruhig: er bleibt, so macht es den Eindruck, „hängen". Bald tritt ein geringes Beben ein, oft nur im Bezirk zweier Teilstriche, bis die Nadel einen entgegengesetzten Ruck erhält in die Ausgangsstellung, also wieder auf den Teilstrich Hundert, der einer Stromstärke von 0,1 Weber entspricht, einspielt. Bald entsteht ein neuerliches Beben, das zuweilen über den größeren Teil der in 150 Striche geteilten Skala anwachsen kann. Nicht selten fährt die Nadel über die Skala hinaus und schlägt an. Dann sinkt sie, meist in einigen Absätzen bald rascher, bald langsamer in die Tiefe, um eine Dauerstellung bei 70 oder 80 Strichen einnehmen zu wollen. Mit Hilfe eines Schlittenwiderstandes gelingt es, die Nadel wieder einzustellen. Herrschen aber die Entladungsstöße stark vor, dann ist dies nicht möglich. Doch hat sich immer feststellen lassen, daß auf derartige Fluten Ebben folgen, die bis zu einer halben Stunde andauern können. Daß die Entladungen oszillatorisch sind, scheint die Nadel gleichfalls anzuzeigen, indem sie zuweilen

Nach Stromschluß in Minuten:	T'_{12}	T''_{12}	Bemerkungen.
10	$1^0,02$	$0^0,95$	Drahtwiderstand zunächst 75 Ohm, dann 6 Ohm ausgeschaltet, die Nadel wird unruhig.
20	$3^0,67$	$1^0,58$	Stöße gegen die großen Zahlen.
30	$4^0,48$	$2^0,01$	Die Nadel etwas ruhiger.
40	$4^0,95$	$2^0,39$	Sie erfährt nur ab und zu kleine Zuckungen.
45	$4^0,96$	$2^0,45$	Unmittelbar nach der Beobachtung stieg i_{12}, nahm T'_{12} ab.
50	$5^0,31$	$2^0,62$	Die Nadel ruhig.
60	$5^0,53$	$2^0,87$	„
70	$5^0,54$	$3^0,04$	„
80	$5^0,71$	$3^0,24$	„
90	$5^0,88$	$3^0,46$	Ziemlich viel Widerstand zur Erhaltung der Stromstärke ausgeschaltet.
100	$6^0,01$	$3^0,52$	
110	$6^0,16$	$3^0,61$	
120	$6^0,39$	$3^0,71$	Die Nadel bebt, dann schlägt sie von 100 auf 111 Striche aus.
125	$5^0,14$	$3^0,53$	
130	$4^0,29$	$3^0,41$	Ein leichtes Beben, dann sinkt die Stromstärke dauernd, so daß der Widerstand fortwährend reguliert werden muß.
140	$3^0,96$	$3^0,25$	
150	$6^0,27$	$3^0,62$	
160	$6^0,55$	$3^0,68$	Die Nadel ruhig.
170	$7^0,00$	$3^0,92$	„
180	$7^0,22$	$4^0,00$	„
190	$7^0,20$	$4^0,02$	„

in stehende Transversalschwingungen gerät wie eine Saite, so daß man für ihr Bestehen bange wird.

Die Umbildung, die K erfährt, ist dem Gesagten zufolge in der anomalen Stromrichtung eine weitaus regere, Beziehungen zwischen Spannung und Temperaturerhöhung sind daher nur angenähert zu ermitteln. Denn jeder Versuchsreihe wird ein individueller Charakter aufgeprägt. Trotzdem wurden ausgedehnte Messungen von der Spannung von einem Akkumulator bis zu einer solchen von sechs Akkumulatoren angestellt. Die geschilderten Ergebnisse wurden daraus gewonnen. i_{12} wurde nach Tunlichkeit auf 0,1 Weber zu erhalten versucht, damit die beobachteten Temperaturen in beiden Stromrichtungen verglichen werden können.

Aus dem angegebenen Grunde soll auf eine Wiedergabe aller Meßreihen verzichtet werden. Um aber doch ein Bild über den ganz anders gearteten Temperaturverlauf bei der anomalen Richtung zu geben, möge eine Reihe Platz finden, die unter Wirksamkeit von fünf Akkumulatoren gefunden wurde.

Im offenen Stromkreise waren $T' = 0^0{,}63$, $T'' = 0{,}^0 82$, also $\Delta = -0{,}^0 19$.

Der recht gleichmäßige erste Anstieg der Temperatur hat nach zwei Stunden eine jähe Unterbrechung erfahren, die durch eine plötzliche Vergrößerung der Stromstärke bewirkt wurde. Obwohl der Strom sofort reguliert worden war, führte dieses Verhalten zu einer raschen und bedeutenden Abnahme der Temperatur. In der darauffolgenden Zeit stieg sie wieder an, um bereits nach einer halben Stunde den vorher erreichten Hochwert einzunehmen und in einer weiteren halben Stunde um fast einen Grad zu überflügeln. Scheinbar erhält man ein Maximum von $7^0{,}22$ nach drei Stunden. Man kann aber mit demselben Recht behaupten, daß ein derartiges Maximum schon nach zwei Stunden erreicht worden ist oder ein noch höheres in Aussicht gestanden wäre. Wenn also in einer und derselben Beobachtungsreihe derartige Unregelmäßigkeiten auftreten, die auf Umbildungen von K zu schieben sind, dann wird die Schwierigkeit, verschiedene Reihen miteinander zu vergleichen, wesentlich vergrößert. Trotzdem scheint eine Regel sehr wahrscheinlich. Die höchsten erzielten Temperaturen von T'_{12} waren nämlich:

	T'_{12} beob.	T'_{12} ber.
bei 2 Volt	$4^0{,}40$	$4^0{,}40$
„ 4 „	$5^0{,}16$	$5^0{,}15$
„ 6 „	$6^0{,}07$	$5^0{,}90$
„ 8 „	$5^0{,}80$	—
„ 10 „	$7^0{,}22$	$7^0{,}40$

Den berechneten Werten liegt die Gleichung

$$T'_{12} = 3{,}65 + 0{,}375\ \mathrm{V}.$$

zugrunde. Sie sagt aus, daß die **Temperatursteigerung proportional ist der Spannung.** — Bemerkt sei, daß der Versuch mit 8 Volt wahrscheinlich zu frühzeitig abgebrochen worden ist.

Ein Vergleich der Versuchsreihe in der anomalen Richtung mit der in der nomalen Richtung bei gleicher Stromstärke und Spannung dürfte recht lehrreich sein. Nach dem Stromschluß waren in zehn Minuten nach beiden Richtungen die Temperaturen T'_{21} und T'_{12}, desgleichen T''_{21} und T''_{12} gleich. Nach hundert Minuten lagen die ersteren um $4^0{,}2$ auseinander! In der Erwartung, daß der Zusammenhang zwischen Temperatursteigerung und Spannung bei geringerer Stromstärke reiner zum Ausdruck kommen werde, wurden Ströme von $i_{12} = 0{,}02$ W. durch den Kristall geleitet. Langwierige Versuche führten aber auch dann nicht zum erstrebten Ziele. Störungen machten es immer wieder unmöglich, eine größere Zahl von vergleichsfähigen Reihen zu gewinnen. Schließlich blieben nur drei Reihen übrig, die angenähert regelmäßig verlaufen waren:

	T'_{12} beob.	T'_{12} ber.
bei 4 Volt	$2^0{,}22$	$2^0{,}18$
„ 12 „	$3^0{,}42$	$3^0{,}50$
„ 16 „	$4^0{,}11$	$4^0{,}16$

Den berechneten Werten liegt die Gleichung der Geraden:

$$T'_{12} = 1{,}52 + 0{,}165\ \mathrm{V}.$$

zugrunde.

Bei dem Versuche mit 6 Akkumulatoren und der Stromstärke

$$i_{12} = 0{,}02\ \text{Weber} = i_{21}$$

betrugen die Widerstände unmittelbar vor Unterbrechung

$$w_{21} = 5\ \text{Ohm}, \quad w_{12} = 220\ \text{Ohm},$$

die Strompolarität war somit eine sehr ansehnliche.

Ein Versuch, der bei einer Spannung von 4 Akkumulatoren bei $i_{12} = 0{,}5$ Weber angestellt wurde, zeigte dieselben Vorgänge, nur sind sie ins Große gesteigert. T'_{12} nimmt enorm zu. Beim Umschalten von i_{21} nach i_{12} sind zunächst wieder beide Größen gleich. Dann setzen große Bebungen und Stöße ein. Nach 5 Minuten war $T'_{12} = 28^0$, nach 10 Minuten 36^0. An weitere Messungen konnte nicht gedacht werden.

Wie empfindlich T'_{12} auf die Einstellung des Systems, d. h. auf die damit erreichten Werte w_{12} und K reagiert, soll noch mit zwei Zahlen gezeigt werden. Bei einer der nicht allzu

häufig notwendig gewordenen Neueinstellungen hatte w_{21} einen etwas höheren Wert bei 0,1 Weber als vorher. Es fanden sich:

	T''_{12}
bei 8 Volt	18⁰,18
„ 12 „	22⁰,12

Bildet man die Quotienten der Temperaturen T'_{12}, die bei den beiden Stromstärken $i_{12} = 0{,}1$ und 0,02 W. berechnet und die bei der Neueinstellung mit 0,1 W. für 12 und 8 Volt ermittelt wurden, so ergeben sich die Zahlen 1,23, 1,23 und 1,22.

Würden keine chemischen Kräfte ins Spiel treten, dann wäre es nicht unwahrscheinlich, mit schwachen Strömen einen genaueren Nachweis für die Proportionalität zwischen Temperaturerhöhung und Spannung zu führen. Denn es würde damit erreicht werden, daß die Joule-Wärme gegenüber der sekundären Peltier-Wärme, die der Stromstärke in erster Potenz proportional ist, entsprechend unterdrückt werden könnte. Selbstverständlich muß der Vorgang irreversibel bleiben auch bei Anwendung sehr kleiner Stromstärken. Das ist auch, wie in der zweiten Mitteilung gezeigt worden ist, der Fall.

Von vornherein wenig verheißend war es, über die Differenz $\varDelta = T' - T''$ Aufklärung zu erhalten. Zwischen Mineral und Metall findet ein chemischer Umsatz statt, am Blei nach der Gleichung

$$Ag_2S + Pb = Ag_2 + PbS,$$

am Messing nach

$$Ag_2S + \begin{cases} Cu \\ Cu_2 \end{cases} = Ag_2 + \begin{cases} CuS \\ Cu_2S \end{cases}$$

wenn man nicht berücksichtigt, daß im Messing Zink enthalten ist. Von Thomsen sind die Bildungswärmen für Ag_2S zu 5340, für PbS zu 20430, für CuS zu 9760 und für Cu_2S zu 20 270 cal[1]) bestimmt worden. Für die Bildungswärme von ZnS findet sich keine Angabe. Man würde also demnach an der Bleizuleitung erhalten:

$$Ag_2S + Pb = Ag_2 + PbS + 15\,090 \text{ cal.}$$

an der Messingzuleitung:

$$Ag_2S + \begin{cases} Cu \\ Cu_2 \end{cases} = Ag_2 + \begin{cases} CuS + \\ Cu_2S + \end{cases} \begin{cases} 4\,420 \text{ cal} \\ 14\,930 \text{ cal.} \end{cases}$$

Die Vorgänge wären mithin an den beiden Grenzflächen des Kristalls exotherm, die Wärmetönung am Blei größer als am Messing. Damit wäre erklärt, daß an der Bleizuleitung eine höhere Temperatur entsteht, als an der Messingzuleitung, freilich in der Voraussetzung, daß die Reaktionsgeschwindigkeiten bei beiden Umsätzen für dieselbe Temperatur gleich groß seien. Bei Zimmertemperatur ergab sich mit dem Gesagten übereinstimmend $T' - T'' = \varDelta < 0$. Man könnte sich auch damit abfinden, daß $\varDelta$ zeitlichen Änderungen unterliegt. Die in unmittelbarer Nachbarschaft der Thermoelemente befindlichen Quecksilberthermometer müßten demnach eine niedrigere Temperatur anzeigen als jene. Das war aber bei Zimmertemperatur nicht der Fall. Da anzunehmen ist, daß der Umsatz bei höheren Temperaturen, also bei größerer Reaktionsgeschwindigkeit, lebhafter wird, so wurden Versuche in dieser Richtung angestellt. Die Presse mit dem Kristall wurde in die Mitte des Hohlraumes eines elektrischen Ofens versenkt, dessen gut isolierte Mantelfläche durch eine Spirale von Platinfolie erwärmt werden konnte. Den Messungen ging eine sorgfältige Eichung der beiden Thermoelemente Eisen — Konstantan voran. Sie erfolgte in der Weise, daß zunächst an Stelle des Kristalls ein gleich großer Zylinder aus Messing zwischen die Zuleitungen gepreßt wurde. In gleicher Höhe wie der Zylinder und nahe daran befand sich das Gefäß des Normalthermometers. Ein gleichfalls in Zehntelgrade geteiltes Thermometer, das vorher mit dem Normalthermometer verglichen worden war, tauchte in das Wasserbad zwischen die in Glasröhren steckenden zweiten Lötstellen der Thermoelemente. Bei höheren Temperaturen wurde das Normalthermometer durch ein mit Stickstoffüllung versehenes, gleichfalls von der Reichsanstalt geprüftes Quarzglasthermometer ersetzt. Die Eichung erfolgte in verschiedenen Temperaturintervallen bis zu 200⁰. Es fand sich keine strenge Proportionalität zwischen Temperatur und Thermokraft der beiden Elemente. Bei Temperaturen zwischen 60⁰ und 100⁰ fanden sich 23,3 Galvanometerteilstriche im Mittel für den Grad und jedes Element, zwischen 100⁰ und 170⁰ dagegen ergaben sich für das Element (T') 24,3, für (T'') 24,4 Striche Doppelausschlag. Es ist möglich, daß die Oxydation des Messings sich bemerkbar macht. Denn nach abgeschlossener Eichung fand sich, daß die Messingscheiben, die einen größeren Querschnitt hatten als der dazwischen geschobene Messingzylinder, an den freien Rändern angelaufen waren. Nach vollendeter Eichung nahm wieder der Silberglanzkristall den Platz des Messingzylinders ein und wurde kräftiger als bei der Prüfung auf Polarität zwischen Bleiblech und Messingplatte eingepreßt. Das

1) Ein Stift von CuS, aus dem auf chemischem Wege hergestellten blauschwarzen weichen Pulver gepreßt, eignet sich, zwischen Messingzuleitungen eingeschoben, in vorzüglicher Weise zur raschen Vorführung der Gesetze der Strom- und Leistungspolarität im Hörsaal.

Normalthermometer tauchte genau gleich tief in den Ofen wie bei der Eichung. Die Beobachtungen wurden erst dann vorgenommen, sobald die Ofentemperatur keine Steigerung mehr erfuhr. Nach dreistündigem Stromschluß war es erreicht. Die Messungen am Galvanometer wurden in der Weise angestellt, daß die Ablesungen nach beiden Stromrichtungen bei eingeschaltetem zweiten Thermoelement von denen beim ersten eingeschlossen waren. Vor und nach jeder Bestimmung am Galvanometer erfolgte die Feststellung der Temperaturen an beiden Thermometern. So schien also alles vorbereitet, um die Messungen einwandfrei zu gestalten. Die Ergebnisse blieben unbefriedigend. Es konnte nur ermittelt werden, daß die Differenzen Δ, im Gegensatz zu ihrem Verhalten bei Zimmertemperatur, von etwa 30^0 bis 40^0 aufwärts positiv waren und blieben. Zwischen 14^0 und 24^0 waren die an den Thermometern beobachteten Temperaturdifferenzen bald kleiner, bald größer als die an den Thermoelementen festgestellten. Bei Temperaturen von 40^0 aufwärts zeigten dagegen die Thermoelemente regelmäßig eine höhere Temperatur an, als den Differenzen der Thermometer entsprach. Die Messungen ergaben ferner, daß sowohl Δ als die zuletzt genannten Unterschiede mit Zunahme der Temperatur im Ofen stiegen. Das Lot am höher erwärmten Thermoelement (T'), das an Messing lag, floß wiederholt, obwohl die Ofentemperatur noch nicht 200^0 erreicht hatte.

Man erhält aus dem Verhalten den Eindruck, daß sich an den Grenzflächen des Kristalls bei niedrigen Temperaturen in Summa endothermische, bei höheren dagegen, exothermische Vorgänge abspielen. Derartige endothermische Prozesse könnten etwa durch Umkehrung der vermuteten Wärmetönungen oder durch Umbildungen der beiden Schwefelkupfer hervorgerufen werden. Bei höheren Temperaturen dagegen treten, wie der Versuch mit dem Messingzylinder zu zeigen scheint, zu den Umsätzen durch Sulfidbildungen auch noch solche durch Oxydationen hinzu. So lange es nicht möglich ist, über die Vorgänge an einer Zuleitung allein Resultate zu gewinnen, wird es versagt bleiben, sich auch nur ein skizzenhaftes Bild des Chemismus zu verschaffen. Zweifellos beeinflußt auch das Fließen des Stromes die Vorgänge. Die merkwürdige Tatsache, daß der stabile Strom i_{21} zu keinem Ausgleich von T'_{21} und T''_{21} führt, wenn Δ vorher gleich Null war, dagegen zu einem raschen Ausgleich, sobald vorher $\Delta < 0$ gefunden worden war, läßt auf eine Verschiedenheit der chemischen Vorgänge durch den Strom schließen. —

Die thermoelektrischen Messungen.

Wenn an jeder Grundfläche eines Kristalls Übergangswiderstände gelagert sind, so wird sich polares Verhalten ausbilden können, sobald eine Thermokraft zwischen Metall und Kristall vorhanden ist, unabhängig von ihrer Richtung. Denn durch den Vektor π werden i_{21} und i_{12} bestimmt. Anders steht es, wenn, wie im Silberglanzdetektorsystem, eine Berührungsfläche übergangsfrei hergestellt wird. Dann zwingen die Beobachtungen anzunehmen, daß π die Richtung Kristall—Gasschicht—Messing vorgeschrieben ist. Silberglanz müßte sich somit thermoelektronegativ gegen das Zuleitungsmetall verhalten. Mit dem nur 4,2 mm hohen Zylinderchen aus diesem Erze ließ sich nur feststellen, daß der Thermostrom von der erhitzten Grundfläche durch die Gasschicht des Kondensators zum Metall floß. Der Annahme war damit entsprochen. Ein größerer einheitlicher Kristall aus diesem Erze konnte leider nicht beschafft werden.

Dagegen gelang es, die thermoelektrische Kraft von Bleiglanz messend zu verfolgen. Herr Prof. A. Tornquist hatte die Güte, ein großes Stück eines grob kristallinischen Aggregates, wahllos orientiert, aus Bleiberg in Kärnten, zur Verfügung zu stellen. Aus diesem Stück wurden zwei gleich große vierseitige Prismen geschnitten und ihre rechteckigen Grundflächen zunächst zwischen amalgamierte Bleiplatten gepreßt. Der Übergangswiderstand des ersten betrug 60 Ohm; dieser Wert wurde für die Messungen nicht tauglich erachtet. Den Kristall durchzog ein kaum haarbreiter Sprung. Zur Verwendung kam das zweite Prisma von $2{,}25 \times 1{,}92$ cm² Querschnitt und 2,4 cm Höhe mit einem Übergangswiderstand von nur 0,46 Ohm. Seine Dichte betrug 7,47. Das Prisma mit den gut haftenden Bleiplatten wurde zwischen zwei Messingwannen mit rechteckigen Grundflächen und einem Fassungsraum von je 300 cm³ in den Schraubstock gepreßt und durch Asbestplatten gegen ihn isoliert. Zwischen den dem Kristall zugekehrten Messingwänden der Behälter waren die Thermoelemente Eisen—Konstantan eingelegt. Eine Wanne wurde mit Wasser und Eis, die andere mit Anilin gefüllt. In die Mitte dieser Flüssigkeit tauchten zwei parallele Platten aus Eternit, die mit einer Heizspirale bewickelt waren. Zur Kontrolle tauchten in jede Wanne Thermometer in Zehntelgrade geteilt. Die mit den Leitungsdrähten verlöteten Lötstellen der Thermoelemente befanden sich wieder in Glasröhren, die in eine Glaswanne, gleichfalls mit schmelzendem Eise gefüllt, versenkt waren. Auch diese Wanne nahm ein Thermometer auf.

In der Literatur findet sich über das Verhalten des Bleiglanzes nur die dürftige Angabe: Schon Seebeck fand, daß die thermoelektrischen Kräfte der Erze groß seien und Bleiglanz sich thermoelektronegativ gegen Wismut verhalte. Die Messungen bestätigten die Angabe Seebecks. Das qualitative Verhalten ließ sich bereits mit dem Weston-Voltmeter feststellen. Die erwärmte Kristallfläche bildete den positiven Pol wie bei Silberglanz. Bei Temperaturdifferenzen von ungefähr 60° ergaben sich als elektromotorische Kraft etwa 0,01 Volt. Genaue Bestimmungen wurden mit dem Spiegelgalvanometer angestellt. Die Beobachtungen erfolgten in der Weise, daß der von den Thermoelementen und der am Kristall erzeugte Strom durch Galvanometer und Zuleitung erst in der einen, dann in der anderen Richtung floß. Zunächst wurden die Temperaturen mit den Thermoelementen gemessen. Darauf folgte die Messung am Kristall und zum Schlusse wurde wieder das an der Anilinwanne liegende Thermoelement verglichen, obwohl darauf geachtet worden war, daß der Heizstrom vorher so lange geschlossen blieb, bis keine Änderung mehr in der Temperatur des Bades zu beobachten war.

Die thermoelektrische Kraft des Bleiglanzes zeigte sich von der Temperatur nicht unbedeutend abhängig. Mit der Differenz der Temperaturen stieg sie von 156 bis 165 $\frac{\text{Mikrovolt}}{1^0\,\text{C}}$ an. Das zweite mit der Differenz der Quadrate der Temperaturen verbundene Glied war demnach nicht zu vernachlässigen. Die Rechnnng führte zur Gleichung:

$$\pi = 143{,}70\,(t_2 - t_1) + 0{,}235\,(t^2{}_2 - t^2{}_1)\ \text{Mikrovolt}$$

In der folgenden Tabelle sind die beobachteten und die berechneten Werte zum Vergleich nebeneinander gestellt.

$t_2 - t_1$	$\pi \times 10^6$ Volt beob.	$\pi \times 10^6$ Volt ber.
11°,5	1 694	1 694
28°,1	4 255	4 272
36°,3	5 585	5 607
57°,1	8 970	9 128
64°,4	10 685	10 329
74°,5	12 125	12 098
80°,4	13 290	13 340

A. Abt[1]) hat die thermoelektrische Kraft eines Antimon-Wismutpaares zu 0,00524 Volt zwischen 0° und 100° ermittelt. Bezieht man auf diese thermoelektrische Kraft als Einheit, so ergibt sich für Blei—Bleiglanz zwischen denselben Temperaturen der 3,2 fache Wert.

1) A. Abt, Ann. d. Phys. (IV), **2**, 277, 1900.

Graz, Zweites Phys. Inst. der Techn. Hochschule, 6. März 1920.

(Eingegangen 12. März 1920.)

Über neue Apparate und Messungen im langwelligen Spektrum.

Von Holjer Witt.

(Vorläufige Mitteilung.)

Die theoretischen Untersuchungen, die auf Grund der Bjerrumschen Auffassung über die Absorption der Gase im Ultrarot ausgearbeitet sind, haben es von Bedeutung gemacht die Absorption im Rotationsgebiete verschiedener Gase näher experimentell zu prüfen. Von genaueren Messungen auf diesem Gebiete liegen bisher nur die von H. Rubens und G. Hettner[1]) über das langwellige Wasserdampfspektrum vor, die sich bis etwa 35 μ strecken. Im langwelligeren Bereich hat Rubens[2]) auf indirektem Weg durch die Reststrahlenmethode einige Absorptionsstreifen des Wasserdampfes aufgesucht und die Wellenlängen bestimmt. Seit einigen Jahren habe ich mich bemüht, eine Apparatur herzustellen, mit welcher auf direktem Weg eine systematische genaue Messung der Absorption auch im sehr langwelligen Gebiete ausgeführt werden könnte. Es ist mir gelungen, ein Radiomikrometer von sehr großer Empfindlichkeit und einen Spiegelspektrometer von geeigneter Konstruktion herzustellen, mit deren Hilfe die Absorption des Wasserdampfes im Gebiete 80—160 μ auf direktem Weg sich bestimmen ließ.

Im Prinzip schließt sich der Radiomikrometer dem zuerst von Boys angegebenen Typus an. Das magnetische Feld wird hervorgebracht durch vier Stahlmagneten von derselben Art wie diejenigen, die zu Telephoninduktorien Verwendung finden. Die Magneten konnten durch einen kräftigen Elektromagnet ersetzt werden. Durch einen kupfernen Trichter wurde die Strahlung auf die Lötstelle des Thermoelements konzentriert; die innere Öffnung hatte einen Diameter von 1,5 mm, die äußere war mit einem Quarzfenster von 0,13 mm Dicke und 13 mm Diameter geschlossen. Durch eine mit einer Glasscheibe bedeckte Öffnung

1) Sitzungsber. d. Königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. **7**, 167, 1916.

2) Sitzungsber. d. Königl. Preuß Akad. d. Wissensch. **28**, 513, 1913; **7**, 169, 1914.

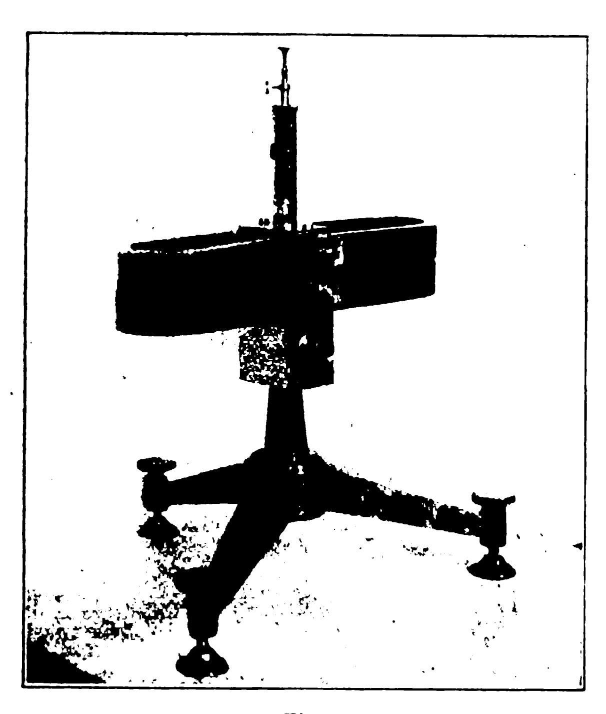


Fig. 1.

auf der Rückseite konnte der Apparat einjustiert werden.

Das größte Gewicht wurde darauf gelegt, das bewegliche System wie auch den Ablesungsspiegel vollkommen unmagnetisch zu machen. Zu diesem Zweck wurde der Radiomikrometer mit dem Elektromagnet aptiert, und das zu verwendende Material sorgfältig geprüft. Die Ablesungsspiegel wurden von sehr dünnem Deckglas angefertigt, das mit einer Pinzette in quadratische Stückchen gebrochen wurde. Die Gläser wurden auf eine Glasscheibe festgedrückt und auf chemischem Weg eine von jeder Verunreinigung befreite Silberschicht auf ihnen niedergeschlagen. Da das Glas magnetisch ist, die angeschlagene Silberschicht aber diamagnetisch, konnte bei einer ganz bestimmten Dicke der Belegung erreicht werden, daß der erhaltene Spiegel unmagnetisch wurde. Der Spiegel wurde auf einem dünnen Quarzfaden befestigt und in die Röhre des Radiomikrometers in etwa 45° Winkel gegen das Magnetfeld aufgehängt. Beim Schließen des elektrischen Stromes gaben die besten Spiegel nur einen Ausschlag von etwa 0,1 mm bei 1 m Skalenabstand. Der Spiegel wurde mit ein wenig Kanadabalsam auf einem unmagnetischen Kupferdraht befestigt, der an einem dünnen einige cm langen Quarzdraht aufgehängt, das bewegliche System in einem Häkchen am Ende tragen sollte. Die unmagnetischen Kupferdrähte, die auch zu der Schlinge des Systems verwendet wurden, wurden auf folgende Weise angefertigt. Ein Kupferdraht von 0,2 mm Diameter wurde durch Ätzung mit verdünnter Salpetersäure von den äußeren, von Eisen am meisten verunreinigten Schichten befreit. Nur ein sehr dünner Draht blieb übrig, der sich bei Prüfung als magnetisch erwies. Nach Polierung mit Sämischleder wurde der Draht in ein elektrolytisches Kupferbad eingehängt, wobei auf der Fläche ein diamagnetisches Lager von reinem Kupfer ausfiel. Die Drähte wurden nach und nach auf dieselbe Weise wie die Spiegel geprüft; am Ende dauerte die Ausfällung nur ein Paar Sekunden. Damit wurde erreicht, daß das ausgefällte diamagnetische Kupfer die magnetischen Wirkungen der inneren Kerne aufhob und ein vollkommen unmagnetischer Draht erhalten wurde, der bei Prüfung einen kaum merkbaren Ausschlag gab. Die Drähte des Thermoelements wurden nicht wie üblich durch das Ausgießen der schmelzenden Legierungen auf eine rotierende Platte, sondern in eine sehr rasch rotierende zylindrische Schale erhalten. Die schmelzende Masse fließt gegen die Wand und erstarrt in Form langer dünner Drähte. Ich habe eine Anzahl verschiedener Legierungen geprüft; die Thermoelemente der besten Systeme bestanden von I. 95 Proz. *Bi*, 5 Proz. *Sn*. II. 97 Proz. *Bi*, 3 Proz. *Sb*. Eine 0,05 mm dicke Silberplatte wurde mit verdünnter Salpetersäure geätzt, bis eine Folie von nur 0,005 mm übrig blieb, eine runde Platte wurde von solcher Größe ausgeschnitten, daß sie die innere Öffnung des Lichttrichters vollkommen bedecken sollte. Die Drähte wurden mit ein wenig Woods-Metall an die Silberplatte befestigt; die Enden des zu einem Bügel geformten unmagnetischen Drahtes wurden verzinnt und mit Woods-Metall überzogen; der Bügel wurde auf einem Korkklotz mit Stecknadeln befestigt und so angebracht, daß die Enden gegen die Enden der Drähte des auf eine Marmorplatte gelegten Thermoelements leicht drückten. Mit einer Mikroflamme wurde das Ganze zusammengelötet. Als Schwärzungsmittel verwendete ich nach dem Beispiel Rubens' ein Gemisch von Ruß und Wasserglas. Die besten Systeme gaben bei einem Skalenabstand von 1 m für eine Hefnerlampe in einem Abstand von 3 m einen Ausschlag von etwa 150 Skalenteilen. Der Ausschlag war aperiodisch und die Schwingungsdauer betrug einige Sekunden. Durch Anbringen des Elektromagneten konnte der Ausschlag vielfach vergrößert werden, aber die Fehlerquellen auf Grund der Erwärmung durch den elektrischen Strom waren sehr groß. Ich habe bei meinen Messungen nur die Stahlmagneten verwandt, da ich für meine Zwecke

mit dieser Empfindlichkeit sehr wohl auskommen konnte. Der ganze Apparat war in Watte eingebettet und in ein Pappenhaus mit von Watte gefüllten Wänden gebracht, das zwei Öffnungen hatte, eine zur Einlassung der zu messenden Strahlung und eine — mit einer Glasscheibe bedeckten — für die Spiegelablesung. Eine Wanderung des o-Punktes, hauptsächlich durch die Skalenbelichtung — diese war soviel wie möglich eingeschränkt — und durch die Nähe des Observators hervorgebracht, war nicht zu vermeiden. Da die Wanderung das o-Punktes während einer Messungsreihe etwa linear folgte, wurde dieser Einfluß durch Ablesungen mit konstantem Zeitintervall und durch Wiederholung der Ablesungen wegeliminiert. Viel schwerer war es der Einfluß atmosphärischen Störungen zu entgehen, gegen diese war nichts anderes zu tun, als eine günstige Wetterlage abzuwarten.

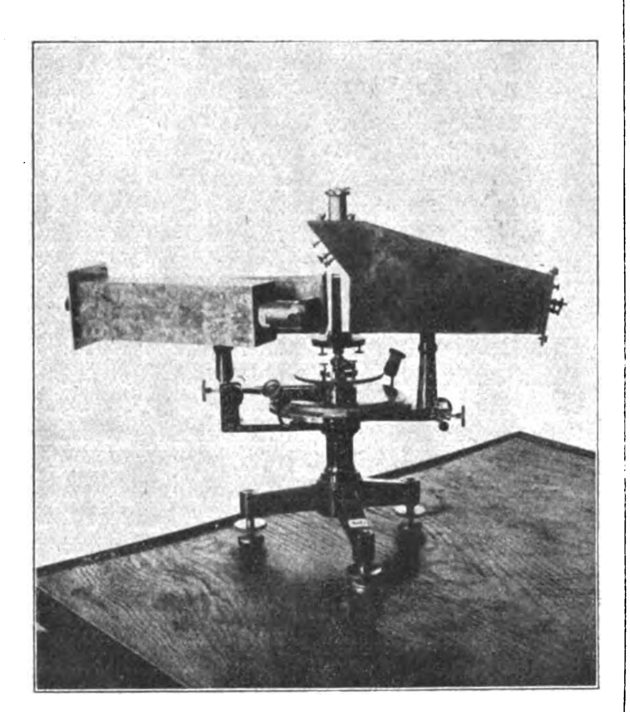


Fig. 2.

Fig. 2 zeigt das Äußere des Spektrometers, in Fig. 3 wird der Strahlengang schematisch skizziert. Die Strahlung des belichteten Spalts S_1, der sich in der Brennebene der Hohlspiegel A, von einer Brennweite von 35,5 cm, befindet, wird von diesem Spiegel parallel gemacht und nach Durchgang des Drahtgitters G, das in der Verlängerung der Drehachse des Spektrometers aufgestellt ist, von dem Hohlspiegel B — von derselben Brennweite wie A — aufwärts gerichtet und auf den Spalt S_2 konzentriert. Die Spektrometerspiegel, wie auch die Spiegel, die zur Konzentrierung der Strahlung auf die Lötstelle der Thermoelemente dienten, wurden durch Flächenversilberung und Polierung von runden Brillengläsern angefertigt. Die Spiegel ***B*** und ***P*** und der Spalt S_2 sind auf dem beweglichen Arm des Spektrometers befestigt. Ein verkleinertes Bild von dem Spalt S_2 wird mit Hohlspiegeln auf die Lötstelle des Thermoelements konzentriert. Bei Drehung des Spektrometerarms dreht sich das Bild des Spaltes S_2 auf der Lötstelle. Man gewinnt damit den Vorteil, sehr verschiedene Wellenlängenbereiche durch eine einfache Drehung des Spektrometerarms aufnehmen zu können. Zur Anfertigung des Gitters wurde von einem nach der Länge in zwei gleiche Teile gespaltenen und wieder zusammengelöteten Messingstab eine Präzisionsschraube von 0,3 mm Steighöhe angefertigt,

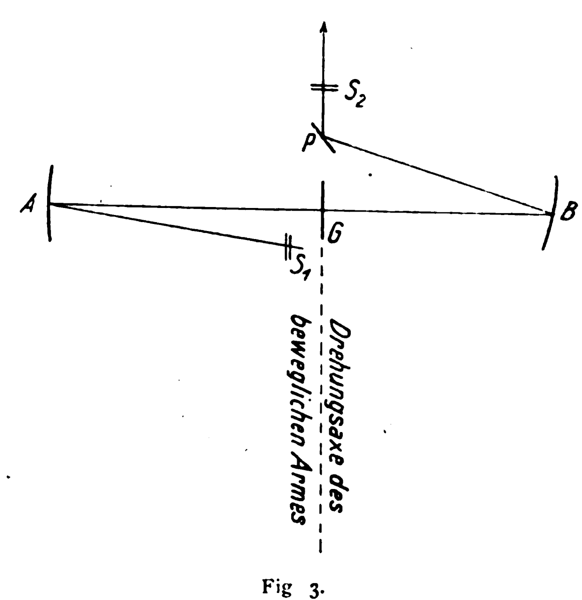


Fig 3.

die Teile wieder gespalten und als die gegeneinanderliegenden Seiten eines Messingrahmens angebracht. Es brachte einige Schwierigkeiten, Drähte von überall gleicher Dicke zu erhalten, da infolge des Weltkriegs keine Ziehscheiben zu erhalten waren, aber dank der Geschicklichkeit des Herrn Mechanikers J. Ahlström, der mir achatene Ziehscheiben ausgeschliffen hat, konnte ich sehr gute Silberdrähte von einem Diameter von etwa 0,17 mm ziehen. Es war nicht möglich, Drähte von der halben Gitterkonstanz zu erhalten, wobei die Spektra von jeder zweiten Ordnung ausfallen. Bei der von mir benutzten Drahtdicke aber fielen die Spektra von jeder dritten Ordnung aus. Der Draht wurde auf den Rahmen gewickelt, durch eine besondere Einrichtung gespannt, auf die Schrau-

benhälfte mit Roses Metall gelötet und die Drähte auf der Rückseite weggeschnitten. Das Gitter hatte eine Höhe von 4 cm und eine Breite von 3 cm. Die Gitterkonstanz wurde mit Teilungsmaschinen zu 0,30005 mm bei 18° bestimmt. Eine spektrometrische Bestimmung der Lage der Natriumstreifen bis zu der 30. Ordnung ergab den Wert 0,2999 mm. Das Spektrum von der ersten Ordnung war sehr scharf. Nachdem ich einige Messungsreihen über das Absorptionsband des Chlorwasserstoffs bei 3,5 μ aufgenommen hatte, wobei sich zeigte, daß die Apparate in diesem Gebiet sehr wohl zu brauchen sind, habe ich mich mit Aufnahme von Energieverteilungskurven für Auerbrenner von verschiedenen Zusammensetzungen innerhalb des langwelligen Emissionsgebiets beschäftigt. In den Strahlengang war eine planparallele Quarzscheibe von 4 mm Dicke eingesetzt. Da der Quarz die Strahlung von 4,5 μ bis etwa 70 μ sehr wenig durchläßt und Verunreinigungen von einer Wellenlänge kleinerer als 4,5 μ nur in Spektra von so hohen Ordnungen vorkommen konnten, daß keine meßbare Intensität mehr zu erwarten war, so war nur bei den größeren Wellenlängen mit einer kleinen Beimengung von der Strahlung zweiter Ordnung zu rechnen. Zur ferneren Herabdrückung des Einflusses kurzwelliger Beimischungen bestand der Klappschirm, welcher die Strahlung in den Radiomikrometer durch Hebung eintreten läßt, aus einer Steinsalzplatte von etwa 2 mm Dicke. Die Steinsalzplatte läßt die kurzwellige Strahlung hindurch, absorbiert aber die langwellige.

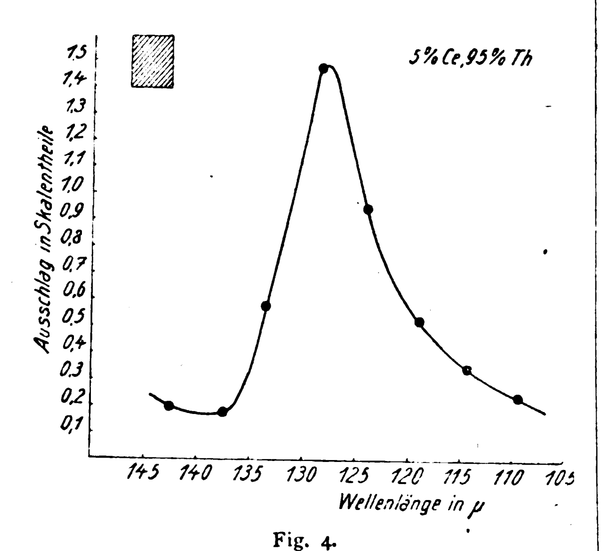


Fig. 4.

Fig. 4 zeigt eine Energieverteilungskurve für einen Brenner, der 5 Proz *Ce*, 95 Proz. *Th* enthält, Fig. 5 die für einen Auerstrumpf von

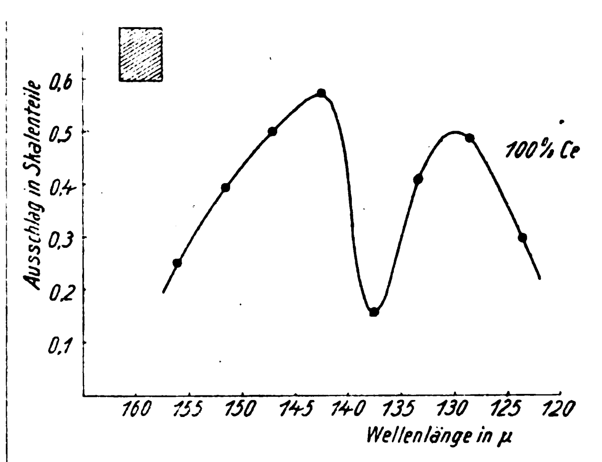


Fig. 5.

100 Proz. *Ce*. Die Observationen sind bei der zweiten Kurve bis zu größeren Wellenlängen ausgedehnt, und ein sehr ausgeprägtes Minimum ist wahrzunehmen. Da die Absorption des Wasserdampfs in dem Rotationsgebiet sehr stark ist, lag es nahe anzunehmen, daß wir es hier mit einem Absorptionsstreifen zu tun hatten, der durch den Wasserdampf im Strahlengang (von der Länge 2,05 m) hervorgebracht war, und es war daher von Interesse die Messungen über einen größeren Wellenlängenbereich auszudehnen. Mit einem Brenner von 100 Proz. *Th* wurde eine Messungsreihe aufgenommen (Fig. 6); die

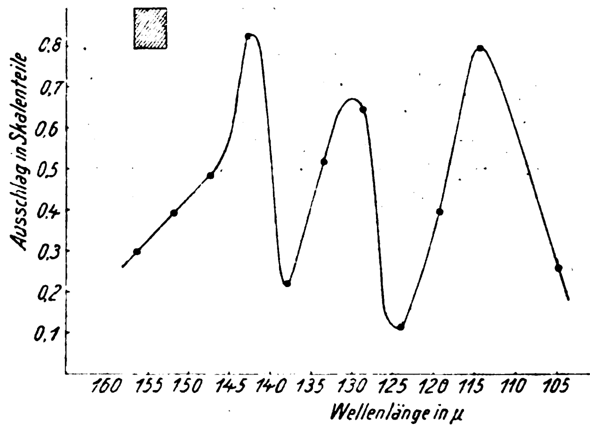


Fig. 6.

zuerst gefundene Einsenkung war vorhanden, und eine neue wurde gefunden. Mit dem *Th*-Brenner habe ich eine neue Messungsreihe von der größten bisher erreichbaren Genauigkeit aufgenommen und dabei mehrere neue Einsenkungen wahrgenommen. Das Resultat (Fig. 7) wurde mit mehreren Kontrollmessungen geprüft. Die Lage der Minima stimmt im allgemeinen mit der aus den kurzwelligen Absorptionsstreifen des Was-

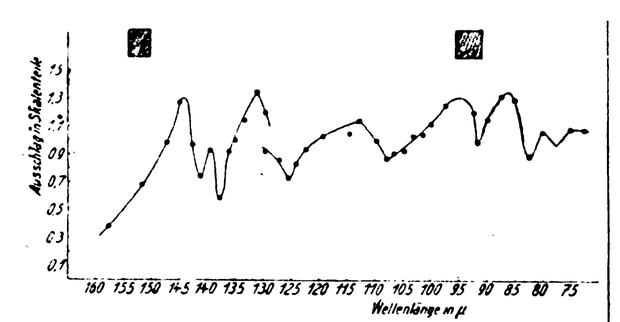


Fig. 7.

serdampfs berechneten Lage der Absorptionsstreifen im Rotationsgebiet wohl überein. Die folgende Tabelle[1]) zeigt die aus der von Eva v. Bahr gemessenen Werten der kurzwelligen Absorptionsstreifen berechneten Lage des Wasserdampfbands in diesem Wellenlängenbereich. In der ersten Kolumne sind die aus dem kurzwelligen Ausläufer, in der letzten die aus dem langwelligen des Absorptionsstreifens bei 6,26 μ berechneten Lage der Rotationsstreifen, und in der Mitte die von Rubens mit der Reststrahlenmethode gefundenen Streifen angegeben.

172		170
124		128
109	106	109
92		91
79	79	81

Wir finden in der Energieverteilungskurve Einsenkungen bei 125, 106, 91 μ wieder. In der Nähe von 80 μ sind, wie auch eine Kontrollserie zeigt, zwei Einsenkungen vorhanden. Durch die Untersuchungen H. Rubens' über die Absorption des Quarzes[2]) wird es wahrscheinlich gemacht, daß ein Absorptionsmaximum für den ordentlichen Strahl in der Nähe von 82 μ vorhanden ist, und es scheint mir natürlich, dem einen Streifen die Absorption des Quarzes zuzuschreiben, den anderen mit dem Wasserdampfstreifen bei 79 μ zu identifizieren. Der Streifen bei etwa 138 μ ist nicht unter den berechneten Streifen zu finden. Es ist möglich, daß bei diesen großen Wellenlängen die Beimengungen von Strahlen der zweiten Ordnung auf den Verlauf der Energieverteilungskurve merkbar eingewirkt haben, es ist aber kaum denkbar, daß die sehr ausgeprägte Einsenkung nur durch Verunreinigungen der zweiten Ordnung — es ist ein Absorptionsstreifen bei 69 μ vorhanden — hervorgerufen ist, wofür es wahrscheinlich ist, daß auch bei 138 μ ein Absorptionsmaximum des Wasserdampfs vorhanden ist.

1) Vgl. Rubens, Sitzungsber. d. Königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. **7**, 177, 1916.
2) Sitzungsber. d. Königl. Preuß. Akad. d. Wissensch. **28**, 547, 1913.

Lund, Physikalisches Institut der Universität, Februar 1920.

(Eingegangen 2. März 1920.)

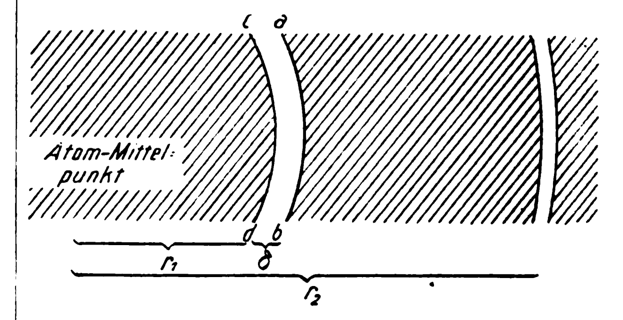
Der Zusammenhang der optischen und der Röntgenspektren.

Von E. Gehrcke.

Bekanntlich hat Sommerfeld[1]) die Feinstruktur der Spektrallinien, z. B. der Doppellinie H_α theoretisch abgeleitet. Diese Ableitung läßt sich wesentlich einfacher gestalten, wenn man ein Atommodell in der von mir entwickelten Form benutzt.

Ich habe an meinem Modell, das sich in seinen geometrischen Abmessungen vom Bohrschen H-Modell durch den Faktor 2 unterscheidet (derart, daß alle den positiven Kern umgebenden Ringbahnen doppelt so große Radien haben als bei Bohr) zur Ableitung der Balmerschen Serie die Hypothese des Äthers gebraucht[2]).

Es mußten in dem Äther, der den Atomkern umgibt, ringförmige, konzentrische „Sprungstellen" angenommen werden, d. h. ringförmige Stufenzonen, die von Äther frei sind, und an denen das von einer Stufe auf die andere herabfallende Elektron hängen bleibt, wenn es seine Schwingungen ν in senkrechtem Aufprall auf die Stufenfläche vollzieht. Es war bisher nicht näher auf die Dicke dieser Stufenflächen Rücksicht genommen worden. Wenn wir nunmehr jeder Stufenzone eine bestimmte Dicke δ zusprechen, so kann also das herabgefallene Elektron entweder auf der äußeren Äthergrenz-



fläche ab der Stufe (vgl. die Figur) oder auf der inneren Äthergrenzfläche cd der Stufe hängen bleiben, im ersten Fall hat es einen geringeren

1) Siehe besonders Sommerfeld, Atombau und Spektrallinien, Braunschweig 1919.
2) Gehrcke, diese Zeitschr. **15**, 123, 1914.

Teil seiner potentiellen Energie verloren, im zweiten einen größeren, so daß also die Schwingungszahlen ν_a auf der äußeren Fläche ab etwas kleiner als die Schwingungszahlen ν_i auf der inneren Fläche cd sein müssen. Es wird hiernach also die Balmersche Serie eine Feinstruktur haben müssen, indem sie aus einer Serie von Doppellinien besteht.

Man findet somit:

$$h\nu_a = \frac{e^2}{r_1+\delta} - \frac{e^2}{r_2},$$

$$h\nu_i = \frac{e^2}{r_1} - \frac{e^2}{r_2},$$

also:

$$\nu_i - \nu_a = \frac{e^2}{h}\left[\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1+\delta}\right].$$

Da $r_1 = 4r_0$,

so folgt:

$$\nu_i - \nu_a = \frac{e^2}{16 r_0 h}\cdot\frac{\delta}{r_0\left(1+\frac{\delta}{4r_0}\right)} = \frac{N}{16}\cdot\frac{\delta}{r_0\left(1+\frac{\delta}{4r_0}\right)},$$

wo N die Rydbergsche Konstante.

Sofern $\frac{\delta}{r_0}$ sehr klein, folgt:

$$\nu_i - \nu_a = \frac{N}{16}\cdot\frac{\delta}{r_0}.$$

Es entsteht nun die Frage: Wie groß ist δ?

Wir setzen (durch den Erfolg, wie sich sogleich zeigen wird, gestützt) δ gleich der dreifachen Größe eines Elektronenradius a an, also:

$$\delta = 3a = \frac{2e^2}{mc^2}. \qquad (1)$$

Da

$$r_0 = \frac{h^2}{2\pi^2 m e^2}$$

(vgl. die genannte Arbeit S. 124, Gleichung [10]), so folgt mithin:

$$\nu_i - \nu_a = \frac{N}{16}\cdot\frac{4\pi^2 e^4}{h^2 c^2}. \qquad (2)$$

Dies ist die Sommerfeldsche Formel für die Feinstruktur. Man wird zugeben müssen, daß die hier gegebene Ableitung konsequent und wesentlich einfacher ist als die Sommerfeldsche Ableitung, die „drei Hauptströme der modernen theoretisch-physikalischen Forschung: die Elektronentheorie, die Quantentheorie und die Relativitätstheorie"[1]) benötigte. — Wir kommen hier mit der Elektronentheorie und mit der Annahme eines anschaulichen, widerspruchslosen Atommodells völlig aus und es ist durchaus nicht notwendig, mit Sommerfeld anzunehmen, daß (l. c., S. 335) die „Feinstruktur .... ein augenfälliges Anzeichen nicht nur für das tatsächliche Vorkommen der Ellipsenbahnen, sondern auch für die Veränderlichkeit der Elektronenmasse und für das Vorrücken des Perihels in diesen Bahnen" ist.

1) Sommerfeld l. c., S. 370.

Für die Ableitung komplizierterer Feinzerlegungen als der Dupletts sind natürlich weitere Annahmen nötig, was hier übergangen werden möge. Wir wollen lieber nach den Doppellinien der Röntgenspektren fragen. Diese sind bei Wasserstoff nicht beobachtet, wir müssen also ein Atom mit hohem Atomgewicht, etwa der Ordnungszahl Z, zugrunde legen. Die Frage lautet hier so: wie stellt sich bei einem solchen Atom das Ringsystem der ringförmigen Stufenflächen her? Bei dem einfachen Wasserstoffatom war angenommen:

$$r_{p-1} = p^2 \cdot r_0$$

[vgl. meine oben genannte Arbeit Gleichung (1), l. c., S. 124].

Daß die Radien der Stufenflächen im Äther bei einem Atom der Nummer Z nach demselben Gesetz wie bei Wasserstoff entstehen, ist physikalisch unwahrscheinlich, da wir uns hier in dem starken elektrischen Felde zwischen innerem positivem Kern und äußerem Elektronenring befinden. Wir setzen demgemäß voraus, daß die Grundentfernung r_0 hier eine andere ist, und zwar — wieder durch den Erfolg gestützt — um das $(Z-1)$fache verkleinert; daß also

$$r_{p-1} = p^2 \cdot \frac{r_0}{(Z-1)}. \qquad (3)$$

Ferner nehmen wir an, daß bei den hohen Atomgewichten von dem äußeren Elektronenring des Atoms ein Elektron fortgenommen ist und dem Kerne nahe sitzt[1]). So erhalten wir ganz analog wie beim Wasserstoff:

$$\left.\begin{aligned} h\nu &= \frac{(Z-1)e^2}{r_{p-1}} - \frac{(Z-1)e^2}{r_{q-1}} = \\ &= (Z-1)e^2\left(\frac{(Z-1)}{p^2 r_0} - \frac{(Z-1)}{q^2 r_0}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

Also:

$$\nu = (Z-1)^2 \cdot N \cdot \left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right). \qquad (5)$$

Dies ist für $p=1$, $q=2$ die bekannte Moseleysche Formel für die Röntgenspektren K. Sie ergibt auch die Struktur eines optischen Heliumspektrums, da hier statt $Z-1$ einfach Z (nämlich $=2$) zu setzen ist.

1) Herr Sommerfeld macht diese Annahme nicht; vgl. l. c., S. 260.

Es sei bemerkt, daß diese Ableitung die von dem äußeren Elektronenring herrührende Abstoßung auf das fallende Elektron vernachlässigt. Hieraus — und auch aus anderen Umständen — ist eine Korrektion der Moseleyschen Formel, die tatsächlich beobachtet ist, ersichtlich, aber es soll hier auf diesen Punkt nicht näher eingegangen werden.

Die Feinstruktur der Röntgenlinien ist ähnlich wie diejenige der optischen Spektren zu behandeln. Wir setzen analog Gleichung (4):

$$\left.\begin{aligned} h\nu_a &= \frac{(Z-1)e^2}{r_1+\delta'} - \frac{(Z-1)e^2}{r_2}, \\ h\nu_i &= \frac{(Z-1)e^2}{r_1} - \frac{(Z-1)e^2}{r_2}. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Also:

$$\nu_i - \nu_a = \frac{e^2}{h}(Z-1)\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_1+\delta'}\right). \quad (7)$$

Nun ist über die Dicke δ' der Stufenfläche, die unter der Wirkung des $(Z-1)$ fach geladenen Kerns steht, zu verfügen. Wir werden δ' als vergrößert voraussetzen; dies ist physikalisch dadurch plausibel, daß der im elektrischen Kraftfeld befindliche Äther in Richtung der Kraftlinien sich kontrahiert, also die Dicken δ der Ringe aus Äthervakuum sich vergrößern, und zwar um das $(Z-1)$ fache. Also setzen wir:

$$\delta' = \delta \cdot (Z-1). \quad (8)$$

Dann folgt mithin:

$$\nu_i - \nu_a = \frac{e^2}{h}(Z-1)\left(\frac{1}{\frac{p^2 r_0}{Z-1}} - \frac{1}{\frac{p^2 r_0}{Z-1} + \delta(Z-1)}\right) = N(Z-1)^2 \cdot \left(\frac{\delta(Z-1)^2}{p^4 r_0 + p^2(Z-1)^2 \cdot \delta}\right),$$

$$= \frac{N}{p^4}(Z-1)^4 \cdot \frac{\delta}{r_0\left(1 + \frac{(Z-1)^2}{p^2} \cdot \frac{\delta}{r_0}\right)}.$$

Sofern $\frac{\delta}{r_0}$ klein, wird dies

$$\nu_i - \nu_a = \frac{N}{p^4} \cdot (Z-1)^4 \cdot \frac{\delta}{r_0} = \frac{N}{p^4}(Z-1)^4 \cdot \frac{4\pi^2 e^4}{h^2 c^2}. \quad (9)$$

Dies ist die Sommerfeldsche Formel für die Feinstruktur der Röntgenspektren.

Es sei bemerkt, daß die gegebene Ableitung nicht beansprucht, die einzig mögliche zu sein, und daß man auch auf andern Wegen zu der Endformel gelangen kann; sie zeigt aber, daß man auf sehr einfache Weise zu den Röntgendupletts gelangen kann. Natürlich ist das Modell für die feineren Einzelheiten weiter ausbaufähig.

Es sei schließlich zusammenfassend einiges über die Röntgenspektren gesagt, wie sie sich im Zusammenhang mit den optischen Spektren im Atommodell darstellen. Wir haben einen positiv geladenen Kern, der umgeben ist von Äthersprungflächen der Radien $r_0, r_1, r_2, r_3, r_4 \ldots$. Es ist allgemein für hohe Atomgewichte:

$$r_p = p^2 \frac{r_0}{Z-1}$$

(von den kleinen Dicken der Stufenflächen sei im Augenblick abgesehen).

Für niedere Atomgewichte ist:

$$r_p = p^2 \cdot \frac{r_0}{Z}.$$

Der Größe r_0 entspricht $p = 1$, d. h. der K-Ring
„ „ r_1 „ $p = 2$, d. h. der L-Ring;
„ „ r_2 „ $p = 3$, d. h. der M-Ring
usw.

Für Wasserstoff ist
- der K-Ring identisch mit dem Ring der Lyman-Serie,
- der L-Ring identisch mit dem Ring der Balmer-Serie,
- der M-Ring identisch mit dem Ring der ultraroten Bergmann-Serie.

Außerhalb des Bezirks der K-, L-, M-Ringe liegt bei den hohen Atomgewichten der äußere Elektronenring; ein Elektron desselben aber liegt im Innern dem Kern nahe. Dieses Elektron muß, da es beim Fall eines anderen Außenelektrons in den Kern Energie übertragen erhält, geringe Abweichungen von den obigen Formeln bedingen, die sich z. B. darin äußern, daß das Ritzsche Kombinationsprinzip zwar näherungsweise, aber nicht genau stimmt.

Daß das Fallen eines Elektrons aus der Ferne in die Nähe des Kerns die Veranlassung zu Schwingungen abgibt, ist nichts anderes als die ursprünglich von Lenard für das Leuchten der Phosphore ausgesprochene Vorstellung. Diese ist von Bohr auf die Gase übertragen und als zwischen diskreten Ringsystemen erfolgend spezialisiert worden, dann weiterhin von mir dahin spezialisiert, daß die Schwingungen an der Auftreffstelle des Ringes, an dem das Elektron endet, und [bei den Serienlinien][1]) senkrecht zur Ringfläche (also in Richtung eines Atomradius) erfolgen. Bohr hat das Springen des Elektrons von Stufe zu Stufe zur Ableitung besonders der H- und He-Spektren

1) Bei den Bandenlinien parallel der Ringfläche.

angewandt, darauf habe ich es besonders zur Ableitung der Alkalidupletts und der verschiedenen Alkaliserien benutzt, und schließlich hat es Kossel auf die Röntgenspektren übertragen. Ich möchte es für wahrscheinlich halten, daß man bei konsequentem Festhalten an den klaren und einfachen Grundlagen des Atommodells der Nachahmung der Natur bisher am nächsten gekommen ist.

(Eingegangen 2. März 1920.)

Über die Ursache der Wirksamkeit der Strahlungsdetektoren und des Elektronenrelais.

Von Ewald F. W. Rasch.

F. Streintz und A. Wesely zitieren in dieser Zeitschrift, in ihrer Arbeit „Über unipolare Leitung an Kristallen"[1]) aus einem Nachrufe auf Ferdinand Braun[2]) die Ansicht, daß die Natur der Erscheinungen, welche die Wirksamkeit der Detektoren bedingen, sowohl Braun selbst wie auch anderen „noch immer rätselhaft geblieben" sei, obwohl dieselben in der drahtlosen Telegraphie längst eine wichtige praktische Rolle erlangt haben.

Auch ich vermag im Einklang mit F. Streintz und A. Wesely diese Ansicht nicht zu teilen und kann mich auf meine nachstehende an F. Braun gerichtete briefliche Mitteilung vom 13. April 1903 beziehen, in der ich das wirksame energetische Prinzip des Strahlungsrelais dargelegt habe und der ich inhaltlich auch heute nichts Wesentliches hinzuzufügen wüßte.

„Seit mehreren Jahren interessiert mich die technische Aufgabe eines Translators, der möglichst von retardierend wirkenden Massenbeschleunigungen frei sein soll (cf. DRP. 116850). Bei dieser Gelegenheit wurde ich auf eine Seitenidee geführt, die ich für elegant halte, zu deren Verifizierung mir jedoch Zeit und ein geeignetes Laboratorium fehlt."

„Es handelt sich um ein energetisches Relais, d. h. um ein Relais, bzw. ein bolometerartiges Instrument, das auf energetische Strahlen — bei deren Absorption — anspricht, eventuell auch selektiv absorbierend wirkt."

„Ich bin daher der Meinung, daß meine Mitteilungen vielleicht Ihr Interesse finden könnten."

1) Diese Zeitschr. **21**, 42, 1920.
2) Diese Zeitschr. **19**, 537, 1918.

„Im letzten Grunde handelt es sich um folgendes Prinzip:

Die Erwärmung von Leitern zweiter Klasse hat einen enormen Anstieg der Leitfähigkeit derselben im Gefolge."

„Leitet man nun die Erwärmung eines derartigen Rezeptors eventuell periodisch ein, so kann man in einem, diesen Widerstand durchfließenden Stromkreis synchrone Stromschwankungen erzeugen, deren Amplitude den primären Schwankungen im Exponenten proportional sind."

„Aus Versuchen über die Leitfähigkeit von festen Leitern zweiter Klasse[1]) finde ich, daß der Widerstand (W) von solchen durch die Differentialgleichung

$$\frac{dW}{W} = -m\frac{dT}{T^2}; \qquad m = \text{const.}$$

in sehr weiten Grenzen wiedergegeben wird; einer Gleichung, die ihrem Bau nach der van t'Hoffschen Reaktionsisochore entspricht und somit auch theoretisch wahrscheinlich ist."

„Dieser rapide Anstieg der Leitfähigkeit mit der Temperatur eines stromführenden Leiters zweiter Klasse läßt sich nun — mit sicherer Aussicht auf Erfolg — für Bolometer, wahrscheinlich jedoch auch als Empfänger für elektrische Wellen verwenden."

„Ich behandle im nachstehenden — um nicht zu weitschweifig zu werden — die Aufgabe lediglich an der Hand eines bolometerartigen Apparats. Für Bolometer benutzt man zurzeit lediglich metallische Leiter (*Pt*) in der hierbei zu erreichenden Feinheit (Rubens u. a.). Ich schlage vor, an deren Stelle dünne Schichten von Leitern zweiter Klasse (Oxyde, Sulfide, Selenide) zu benutzen, deren Temperaturkoeffizient dem absolutem Betrage nach etwa sechsmal so groß ist."

„Bolometer bzw. Kohärer dieser Art lassen sich in sehr einfacher Weise wie folgt herstellen. Ein Plättchen h aus Glimmer, Schiefer, Glas oder dgl. erhält einen metallischen Belag nach Art der Silber- bzw. *Pt*-Spiegel, an dem die Stromzuführungen ll mit sicherem Kontakt liegen. Man deckt dann das ganze

1) Verf. hat inzwischen bekanntlich nachgewiesen, daß dasselbe Gesetz auch für die Elektronenströmung (in Vakuumröhren, Verstärkerröhren u. dgl. vgl. D.R.P. 117214 (1899) strenge Gültigkeit besitzt. Die Konstante m besitzt für Oxydkathoden etwa den Wert 38500. Ausführlichere Einzelheiten über diese Fragen sind in meinem Buche „Das elektrische Bogenlicht" (1910, Vieweg & Sohn, Braunschweig) und in der englischen Ausgabe desselben (1913, Nostrand & Co., New York) dargelegt worden. Anm. d. Verf.

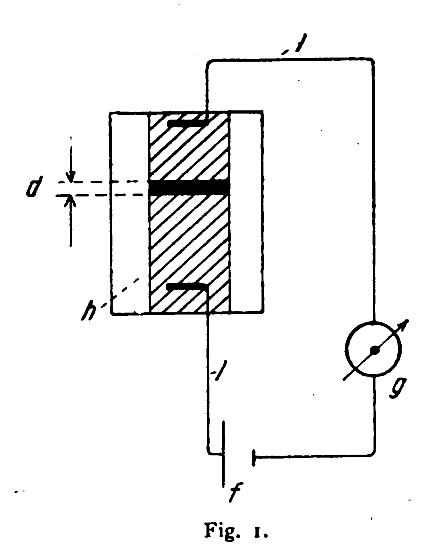


Fig. 1.

Plättchen bis auf den Streifen *d* mit einem Lack oder dgl. ab und taucht dann dasselbe in Schwefelwasserstofflösung (Schwefelammonlösung oder dgl.). Hierdurch wird dann das auf dem Streifen *d* befindliche Metall in eine Schicht von Schwefelmetall (Silber Schwefelsilber) umgewandelt."

„In ähnlicher Weise kann man auch Oxydbolometer usw. in beliebiger Feinheit herstellen."

„Handversuche mit einem kleinen Apparat mit Schwefelsilber ergeben sehr zufriedenstellende Resultate.

Auch bei Kohärern, bei denen zurzeit Metallkontakte in Anwendung kommen, wird man sicher mit Vorteil diese Metalle an den Kontaktstellen zweckbewußt mit einem Überzug von Leitern zweiter Klasse versehen. (Vgl. Fig. 2.) Z. B. Stahlkugeln versilbern,

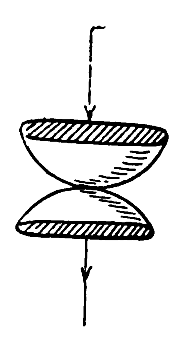


Fig. 2.

dann den Silberbelag in Schwefelsilber umwandeln (vgl. auch DRP. 116850).

Ich halte übrigens die Kohärerwirkung für eine reine Wärmewirkung auf stromdurchflossene Kontakte."

„Ich würde mich freuen, falls Sie diese Anregung durch Versuche verfolgen oder falls Sie wenigstens einen Ihren Herren Doktoranden für eine derartige experimentelle Arbeit, die nicht nur von wissenschaftlichem Wert ist, erwärmen würden."

„Ihren freundlichen Rückäußerungen sieht entgegen mit vorzüglicher Hochachtung ergebenst

Potsdam, den 13. April 1903.

Ewald Rasch, Oberingenieur."

(Eingegangen 2. März 1920.)

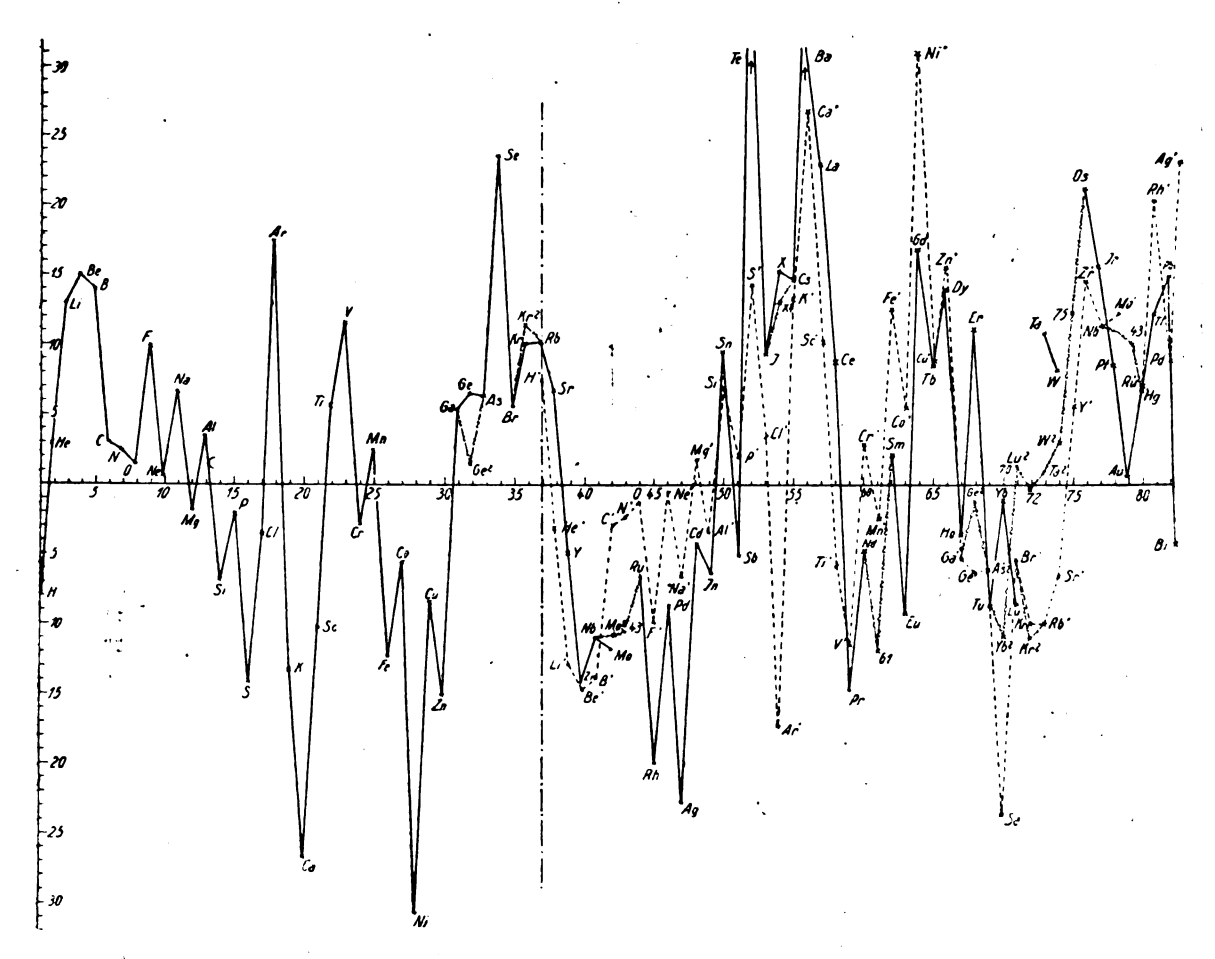
Über eine neue periodische Beziehung zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente. II. Das Gesetz der gespiegelten Reste.

Von Karl Fehrle.

Vorliegende Arbeit bildet die Fortsetzung meiner kürzlich unter demselben Titel erschienenen Abhandlung[1]). Ich habe daselbst eine ideale Atomgewichtsreihe abgeleitet, deren Differenzen im Vergleich mit der Reihe der experimentell gefundenen Atomgewichte eine periodische Funktion des Atomgewichts bzw. der Ordnungszahl sind. Diese Differenzen finden sich in Spalte 3 der Tabelle[2]). Sie sind in der folgenden Figur in Zehnteln des Gewichts als Ordinaten abgetragen, während die Abszissenachse die Ordnungszahlen enthält. Sodann wurde die Kurve von O.-Z. 1—37 an einer unterhalb der Figur zur x-Achse parallel verlaufenden Geraden gespiegelt und das Spiegelbild auf den Rest der Kurve gelegt, die x-Achsen aufeinander, bei der strichpunktierten Linie beginnend. Diese Kurve wurde gestrichelt gezeichnet und die Namen ihrer Elemente mit ′ versehen. Es zeigt sich, daß die Kurve von O.-Z. 37 ab, was den Gang der Differenzen betrifft, das Spiegelbild der Kurve von O.-Z. 1—37 ist. Die Maxima und Minima stimmen bis auf 4 nicht nur in ihrer Lage überein, sondern auch ihre Beträge steigen miteinander an und ab, und wo aufeinanderfolgende Elemente auf einem ungebrochenen Linienzug liegen, tun sie dies auch auf dem entsprechenden Teil des darüber gelegten Kurvenzuges.

Diese Übereinstimmung legt es nahe, mittels des gegenseitigen Vergleiches beider Kurventeile sowohl die Verbesserung unsicher bestimmter Atomgewichte, als auch die Ergänzung der fehlenden vorzunehmen. Zu den Unstimmig-

1) Diese Zeitschr. **21**, 162, 1920.
2) Diese Zeitschr. **21**, 164, 1920.



keiten in den Maximis und Minimis gehört das Atomgewicht von Germanium. Es fällt in der Spiegelkurve auf ein Minimum, während der Verlauf der Vergleichskurve ein Maximum erfordert. Tatsächlich beträgt auch die Unsicherheit bei *Ge* nach der Atomgewichtstabelle für 1911 (Landolt-Börnstein, 4. Aufl.) $\pm 0{,}5$, während sie für *Er*, seinen Gegenpart, nur $\pm 0{,}2$ beträgt. Ich habe deshalb die Differenz für *Ge* um den erlaubten Betrag herabgesetzt, so daß sie noch 0,12 beträgt. Demnach wäre das Atomgewicht von

$$Ge = 71{,}86 + 0{,}12 = 71{,}98. \quad \text{Abgerundet } 72{,}0.$$

Der 1. Summand, welcher das „ideale" Atomgewicht darstellt, ist der Spalte 2 entnommen. Die Richtigkeit dieser Verbesserung dürfte außer allem Zweifel stehen, denn der Verlauf der Vergleichskurve ist derart charakteristisch, und die Differenz derart aus der Reihe fallend, daß die Änderung vorgenommen werden muß. Bei Krypton ist das Gegenelement unbekannt. Da aber alle Kurvenzüge sägenförmig verlaufen, so wird auch hier keine Ausnahme stattfinden. Ich habe deshalb die Differenz um den erlaubten Betrag, hier nur 0,1 hinaufgesetzt, so daß sie jetzt im ganzen $+ 1{,}13$ beträgt:

$$Kr = 81{,}89 + 1{,}13 = 83{,}02. \quad \text{Abgerundet } 83{,}0.$$

Auch die Linie *Nb*—*Mo* folgt nicht dem Lauf der Vergleichskurve. Ich habe deshalb auch diese Differenz um den erlaubten Betrag von 0,1 herabgesetzt auf 1,1:

$$Mo = 97{,}2 - 1{,}1 = 96{,}1.$$

Der für Xenon als möglich bezeichnete Fehler von $\pm 0{,}2$ ändert zwar das Kurvenbild nicht prinzipiell, verbessert es aber immerhin etwas:

$$X = 128{,}68 + 1{,}32 \doteq 130{,}0.$$

Falls das Atomgewicht von Argon richtig ist, muß der Kurve gemäß das von Xenon bedeutend niedriger angesetzt werden. Die Differenz für Ytterbium, welche ebenfalls dem Gang der Kurve nicht folgt, habe ich um den erlaubten Betrag von 1 geändert, also auf $-1{,}11$:

$$Yb = 172{,}11 - 1{,}11 = 171.$$

Damit wären alle Unstimmigkeiten bis zu O.-Z. 70 berichtigt, und es ist eine Bestätigung des Gesetzes, daß die Berichtigung ausschließlich als unsicher bezeichnete Atomgewichte treffen mußte,

und daß bis auf einen Fall die Beträge, welche als möglicher Fehler angegeben waren, genügten.

Es käme nun die Ausfüllung der Lücken. Der Verlauf der Gegenkurve in der Nähe von O.-Z. 43 ist derart sichergestellt — diese Atomgewichte gehören zu den bestbestimmten —, daß ein Zweifel an der Richtigkeit der Bestimmung nicht bestehen kann. Die zu O.-Z. 43 gehörige Differenz kann deshalb aus der ergänzten Kurve abgelesen werden. Sie beträgt — 1,05. Damit wird

Nr. 43 = 99,79 — 1,05 = 98,74. Abgerundet 98,7.

Da die Ecke bei Nr. 43 nicht einspringen kann, wäre der größte mögliche Fehler $\pm$ 0,15. Ebenso sicher scheint mir die Bestimmung von Nr. 61 zu sein, für das die Ergänzung der Kurve als Differenz — 1,21 liefert:

Nr. 61 = 147,49 — 1,21 = 146,28. Abger. 146,3.

Von Lutetium bis Osmium fehlen 2 Elemente. Den Verlauf von *Yb* ab habe ich nach dem Spiegelbild angelegt, da von den in Betracht kommenden Elementen Brom, Rubidium und Strontium zu den bestbestimmten gehören, und die übrigen, nämlich Selen, Krypton, Yttrium und Zirkonium eine Unsicherheit von höchstens $\pm$ 0,2 besitzen, während die zu bestimmenden, nämlich Ytterbium, Lutetium, Tantal und Wolfram Unsicherheiten von bzw. $\pm$ 1,0 $\pm$ 0,5 $\pm$ 1,0 aufweisen. Mit den erlaubten Änderungen ergibt sich:

Lu = 174,88 + 0,14 = 175,02. Abgerund. 175,0.

Dieser Wert stimmt genau mit dem nach den neuesten Messungen für *Lu* mitgeteilten überein.

Ta = 180,42 + 0,1 = 180,52. Abgerundet 180,5.
W = 183,2 + 0,3 = 183,5.

Für Nr. 72 ergibt sich aus der Vergleichskurve
Nr. 72 = 177,64 — 0,03 = 177,61. Abger. 177,6,
oder, wenn man *Lu*—*Ta* zieht,
Nr. 72 = 177,64 + 0,03 = 177,67. Abger. 177,7.
Für Nr. 75 liefert der Zug *W*?—*Os*
Nr. 75 = 185,98 + 1,19 = 187,17. Abger. 187,2,
oder der Zug *W*—*Os*
Nr. 75 = 185,98 + 1,46 = 187,44. Abger. 187,4.
Das Mittel Nr. 75 = 187,3.

Eine weitere Bestätigung des Gesetzes liefert die Betrachtung von Nr. 61. Wäre dieses Element nicht, wie es die Röntgenspektren verlangen, an dieser Stelle eingeschoben worden, so wären von hier ab alle Maxima der Kurve auf Minima des Spiegelbildes getroffen und umgekehrt.

Woher rührt nun die entdeckte Gesetzmäßigkeit? Wie schon an der zitierten Stelle ausgeführt, muß das Verhältnis p der Zahl der Molekelschwingungen zur Zahl der in derselben Zeit stattfindenden Schwingungen der „Atome“ in der Zahl der während einer „Atom“schwingung den auf 1 „Atom“ entfallenden Teil der Oberfläche der Kugel passierenden „Atome“ ganzzahlig enthalten sein. Trifft dies nicht zu, so muß die Zahl der Atomdurchgänge und damit das Atomgewicht so weit erhöht oder erniedrigt werden, daß p ohne Rest darin enthalten ist. Der Sinn der Änderung — Erhöhung oder Erniedrigung — richtet sich jeweils danach, mit welcher kleinsten Änderung die Ganzzahligkeit des Verhältnisses zu erreichen ist. Es mögen nun 2 Zahlenreihen nebeneinander herlaufen, von denen die erste langsamer wächst, als die zweite. Die erste stellt dann die Reihe, gebildet aus der Anzahl der Atomdurchgänge durch einen Punkt der Kugelfläche während einer Periode, die zweite die Reihe der zugehörigen Werte von p dar. Es möge jedes Glied der ersten Reihe durch den zugehörigen Wert von p dividiert und je nach der Größe des Restes zur Ganzzahl des Verhältnisses auf- oder abgerundet werden. Würden beide Reihen im selben Verhältnis wachsen, so würde der Rest immer denselben Sinn behalten. Da aber die erste Reihe langsamer wächst, wechselt der Rest, allmählich durch 0 oder die Nähe von 0 hindurchgehend, sein Vorzeichen. In dem Augenblick, wo der Unterschied eines Gliedes der ersten Reihe gegenüber dem Wert, den es hätte, wenn das Wachstum der 1. Reihe proportional dem der zweiten wäre, gleich dem halben Divisor, also gleich dem halben entsprechenden Glied der zweiten Reihe, oder einem ungeradzahligen Vielfachen davon ist, wiederholt sich, proportional vergrößert, ein früherer Rest, aber mit umgekehrtem Vorzeichen. Auch bei den benachbarten Gliedern ist dies in bezug auf die dem früheren benachbarten Reste annähernd der Fall. Die Erscheinung erstreckt sich auf eine desto größere Reihe von Gliedern, je weniger das Wachstum der ersten Reihe hinter dem der zweiten zurückbleibt, da dann desto länger die Differenz der Glieder der ersten Reihe gegenüber den Werten, die sie bei einem der zweiten Reihe proportionalen Wachstum hätten, annähernd dem halben Divisor gleich bleibt. In der Mitte ist die Erscheinung am schärfsten, gegen die Ränder zu mehr verwaschen. Gerade dies ist das Bild, das die beiden aufeinander gelegten Kurven gewähren. Die Mitte ist bei der strichpunktierten Linie. Würde die Atomgewichtsreihe links vom Wasserstoff noch eine Fortsetzung haben, so müßte deren Spiegelbild auf den Kurvenzug von *H* bis *Rb* passen. Die allmähliche Verwaschung des Bildes zeigt sich am rechten Ende von Nr. 79 ab sehr charakteristisch, indem die Maxima mehr und mehr auf

die Minima fallen. Ein linkes Ende gibt es nicht, da zum Vergleich kein Spiegelbild vorhanden ist, weil sich die Atomgewichtsreihe nicht links von Wasserstoff erstreckt.

Daß Elemente derselben Gruppe im Bild und Spiegelbild durch zweimal anderthalb Horizontalreihen hindurch zusammenzustehen kommen, scheint mir ein Zufall zu sein. Die Bedeutung des Gesetzes liegt nicht in seinem Verhältnis zum periodischen System der Elemente, sondern darin, daß es den Beweis liefert, daß die Unregelmäßigkeiten in den Atomgewichten nicht Unregelmäßigkeiten gegenüber der Ganzzahligkeit, sondern gegenüber der idealen Atomgewichtsreihe sind. Die Isotopentheorie, soweit sie die Unregelmäßigkeiten in den altbekannten sicher bestimmten Atomgewichten erklären will, dürfte damit als widerlegt gelten. Es läßt sich auch nicht einwenden, die Wiederkehr der selben Reste sei dadurch verursacht, daß die gegenseitige Abmessung der Isotopen in einem Element durch den Gruppencharakter verursacht sei, denn gerade ein sehr schöner Teil der Kurve, nämlich von *V* bis *Zn*, der das Zusammengehen von Oktaven bildenden Elementen mit Metallen der seltenen Erden zeigt, widerspricht dem. Man könnte höchstens behaupten, die Isotopenbildung hätte ihre Ursache in eben den Umständen, die ich zur Erklärung der mitgeteilten Erscheinung benutzt habe, etwa derart, daß eine stetige Änderung der Atomdurchgänge bis zur erforderlichen Zahl unmöglich sei, sondern daß die Molekeln eines Elementes in mehrere Gruppen geteilt seien, mit sprungweisen Übergängen, eben die Isotopen, die dann durch ihr Zusammenwirken den geforderten Effekt ergäben. Aber dann wäre nicht einzusehen, wieso die Isotopen sich sollten isolieren lassen.

Zusammenfassung.

Die vorstehenden Darlegungen lassen sich zusammenfassen zu einem

Gesetz der gespiegelten Reste.

Die Differenzen zwischen den experimentell gefundenen und den „idealen" ′Atomgewichten von O.-Z. 37 bis O.-Z. 74 sind die Spiegelbilder der entsprechenden Glieder der Reihe der Differenzen von O.-Z. 1 bis O.-Z. 37.

Das Gesetz wird benutzt zur Verbesserung unsicherer Atomgewichte und zur Ausfüllung der Lücken in der Atomgewichtsreihe. Auf Grund meines Atommodells wird die Ursache der Erscheinung abgeleitet.

Zeichenerklärung.

——— Gang der Differenzen (gewöhnliche Atomzeichen).
– – – – – Spiegelbild des Gangs der Differenzen von O.-Z. 1 bis O.-Z. 37. (Atomzeichen mit ′).
—~—~—~— Mutmaßlicher Gang der Differenzen in den Lücken der Atomgewichtsreihe (Ordnungszahl) sowie bei Verbesserungen (Atomzeichen mit ?).
—·—·—·— Grenze des Spiegelbildes.
Spiegelung an einer unterhalb der Figur parallel zur *x*-Achse verlaufenden Gerade.
Differenzen in Zehnteln.

(Eingegangen 23. März 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neue Sterne.

Von Hans Kienle.

(Fortsetzung.)

Die Seeligersche Theorie der neuen Sterne.

Bereits anläßlich der Erscheinung der Nova Aurigae trat Seeliger mit einer Theorie der neuen Sterne hervor[1]), die er in der Folge gegen verschiedene Angriffe zu verteidigen wußte, und die sich gerade wegen des großen Spielraumes, den sie im einzelnen läßt, allmählich durchgesetzt hat und heute wohl ganz allgemeiner Anerkennung sich erfreut. Interessante weitere Ausführungen zu dieser Theorie hat dann gelegentlich der Erscheinung der Nova Persei noch J. Halm gegeben[1]), ohne allerdings ein wesentlich neues Moment in die Betrachtungsweise zu bringen. In Anlehnung an die zitierten Arbeiten möge hier eine kurze Darlegung der Vorstellungen gegeben werden, die man sich nach Seeliger vom Aufleuchten der neuen Sterne zu machen hat.

Es ist eine bekannte und durch die prächtigen Daueraufnahmen mit modernen Spiegel-

1) H. Seeliger, Über den neuen Stern im Fuhrmann. Astr. Nachr **130**, 393 u. **133**, 305.

1) J. Halm, Zur Theorie der neuen Sterne, Astr. Nachr. **156**, 147; Über den Gleichgewichtszustand der Sternatmosphären (2. Abh.), Astr. Nachr. **160**, 85 (speziell über neue Sterne, S. 118—125).

teleskopen (insbesondere von Wolf in Heidelberg und von den Beobachtern des Lick-Observatoriums) hinreichend belegte Tatsache, daß der Weltenraum neben den leuchtenden Objekten eine Fülle von nichtleuchtenden, dunklen Massen enthält, die man am treffendsten als „kosmische Staubmassen" bezeichnet. Auf das Vorhandensein solcher Massen gründet sich Seeligers Theorie. — Das Eindringen eines bereits erkalteten oder nur noch mäßig leuchtenden Himmelskörpers in derartige Gebilde muß — mutatis mutandis — genau die gleichen Wirkungen erzeugen wie das Eindringen von Meteoren in die Atmosphäre der Erde: der Widerstand, den der Körper vorfindet, bedingt einen Verlust an lebendiger Kraft, die sich in Wärme umsetzt und eine wegen der Größe des Körpers im allgemeinen nur oberflächliche starke Erhitzung hervorruft. Die in Glutfluß geratene Oberfläche, die Gasausbrüche aus dem Weltkörper und die Verdampfung der auf ihn aufschlagenden Teilchen der kosmischen Wolke: das sind die Ursachen des Aufleuchtens und der verschiedenen besonderen Erscheinungen der neuen Sterne. Zwanglos erklärt sich aus dieser Theorie der typische Helligkeitsverlauf, wie wir ihn eingangs festgestellt haben: Ein plötzliches Auflodern beim Eintritt in die Wolke, ein gewisser Gleichgewichtszustand mit langsamem Abklingen der Helligkeit während des Verweilens in ihr und ein meist ziemlich steiler Abfall der Lichtkurve mit dem Zeitpunkt des Austrittes aus der Wolke. Mehrmaliges unregelmäßiges Aufleuchten, wie bei T Aurigae (Fig. 1) ist bedingt durch wechselnde Dichte der Staubwolke; periodischer Helligkeitswechsel, wie bei Nova Persei (Fig. 2), kann auf Rotation des Weltkörpers zurückgeführt werden; wobei die Rotation schon ursprünglich vorhanden gewesen oder aber auch durch die Vorgänge in der Wolke erst entstanden sein kann (siehe unten!). Für die verschiedenen Erklärungsmöglichkeiten des typischen Nova-Spektrums läßt die Theorie vollkommen freie Hand, ob man nun an Radialbewegung oder an Druckwirkungen oder an anomale Dispersion denkt. Darüber werden wir im nächsten Abschnitt zu sprechen haben. Hier möge noch kurz eine Vorstellung gewonnen werden von den Vorgängen, die sich im einzelnen bei der Annäherung des Weltkörpers an die kosmische Wolke und bei dem Durchgange durch dieselbe abspielen.

Bei Annäherung des Weltkörpers an die Wolke wird sich diese infolge der Gravitationswirkung in der Richtung auf ihn zu verlängern. Wird die Konstitution der Wolke als wesentlich „staubförmig" angenommen — worunter man nach Seeliger nur zu verstehen hat, daß die relativen Abstände der einzelnen Partikelchen groß sind gegenüber ihren Dimensionen —, so werden die Bewegungsverhältnisse der Hauptsache nach bedingt durch die Anziehung des eindringenden Weltkörpers. Bei einer gewissen Annäherung wird er beginnen, die Wolke aufzulösen, und es wird sich ihm ein Strom von Materie entgegen ergießen, dessen einzelne Teilchen sich nach den Keplerschen Gesetzen bewegen. Um die Bewegungsverhältnisse zu studieren, wollen wir in Fig. 6

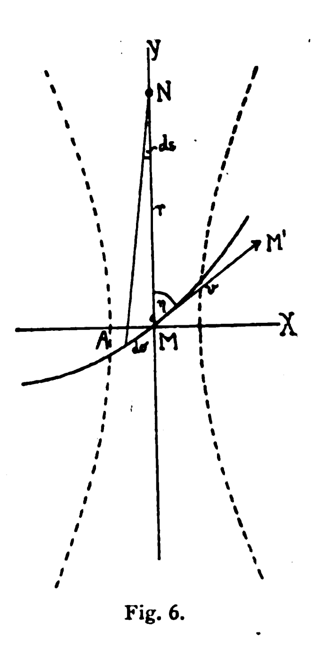


Fig. 6.

annehmen, die Nova befinde sich in N in Ruhe. Ein Teilchen M der Wolke habe die ursprüngliche Geschwindigkeit $MM' = v$ relativ zu N. Bezeichnet noch r den Abstand von N, η den Winkel $M'MN$, ferner μ die Summe der Massen von N und M, so liefert die Integration der Bewegungsgleichung

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -k \frac{\mu}{r^2}$$

zunächst:

$$v^2 = k^2 \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)$$

wo a die große Halbachse der Bahn ist.

Ferner ergibt die Figur:

$$\sin \eta = \frac{r\,ds}{d\sigma} = \frac{r^2 \dfrac{ds}{dt}}{r \dfrac{d\sigma}{dt}} = \frac{k\sqrt{\mu}\sqrt{p}}{r \cdot v}$$

wenn man mit p den Parameter des Kegelschnittes bezeichnet. Wegen $p = a(1 - e^2)$, wo e die Exzentrizität ist, folgt:

$$r^2 v^2 \sin^2 \eta = k \mu a (1 - e^2)$$

Wählt man der Einfachheit halber als Einheit der Länge die halbe große Achse der Erdbahn, als Einheit der Geschwindigkeit die im Kreise vom Radius 1, so gehen beide Gleichungen über in:

$$v^2 = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}$$

$$r^2 v^2 \sin^2 \eta = a(1 - e^2).$$

Bezeichnet noch

$$q = a(1 - e)$$

die Periheldistanz, so liefert die Elimination von a und e die Gleichung:

$$v^2 (r^2 \sin^2 \eta - q^2) = 2q\left(1 - \frac{q}{r}\right).$$

Sind $\dot{x}$ und $\dot{y}$ die Geschwindigkeitskomponenten, also

$$\sin \eta = \frac{\dot{x}}{v}, \ v^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

so erhält man schließlich die Gleichung einer Hyperbel:

$$\frac{r(r+q)}{2q} \dot{x}^2 - \frac{qr}{2(r-q)} \dot{y}^2 - 1 = 0.$$

Das durch Rotation dieser Hyperbel um die Y-Achse entstehende Rotationshyperboloid ist der geometrische Ort für die Bildpunkte M' aller jener Teilchen, deren Periheldistanz q ist. Setzt man also $q = R$, wo R der Radius der Nova ist, so trennt die Hyperbel mit der reellen Halbachse

$$MA = \sqrt{\frac{2R}{r(r+R)}}$$

die Bildpunkte derjenigen von M ausgehenden Teilchen, welche den Körper treffen, von denjenigen, die an ihm vorbeigehen. Nun ist der Asymptotenwinkel der Hyperbel

$$\alpha = 2 \operatorname{arc\,tg} \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}}$$

wegen der Kleinheit von R gegen r sehr spitz. Daraus geht hervor, daß die Wahrscheinlichkeit einer Kollision gering ist, wenn die Teilchen der Wolke einen Parallelstrom bilden, der in der x-Richtung keine sehr große Ausdehnung hat, weil der Bildpunkt M' nur dann innerhalb der Hyperbel liegt, wenn die relative Geschwindigkeit der Teilchen gegen den eindringenden Weltkörper nahe in die Verbindungslinie MN fällt. Die Wahrscheinlichkeit der Kollision wächst jedoch, wenn man — was wohl zulässig ist — den einzelnen Teilchen innerhalb der Wolke verschieden gerichtete Geschwindigkeiten zuschreibt. Die Wolke liefert dann einen breiten Meteorstrom, der zum Teil mit dem Körper kollidiert, zum Teil an ihm vorüberfliegt. Dabei bedingt die gemeinsame Geschwindigkeitskomponente — d. h. die Geschwindigkeit des Schwerpunkts der Wolke — die Bevorzugung einer gewissen Stelle des Aufschlags, so daß der Körper nicht allseitig gleich stark erhitzt wird. Daran ändert auch eine eventuelle Rotation nichts Wesentliches, da gleich beim ersten Zusammentreffen des Körpers mit der kosmischen Wolke die entstehenden Gase eine schützende Atmosphäre um den Körper bilden, wodurch die weiteren kollidierenden Teilchen eine starke Dämpfung ihrer Geschwindigkeit erfahren. Zwischen den Teilchen, die mit dem Körper zusammentreffen und denjenigen, die in größerer Entfernung in hyperbolischen Bahnen an ihm vorübergehen, finden natürlich alle möglichen Übergänge statt. Insbesondere werden in der nächsten Umgebung des Körpers infolge des Geschwindigkeitsverlustes durch Reibung in der Atmosphäre geschlossene Bahnen auftreten, die mehr oder weniger von Kreisbahnen verschieden sind, so daß der Körper von einem Wirbel glühender Materie umgeben erscheint. Im ganzen gewinnt man so von der Nova die Vorstellung eines durch die kosmische Wolke sich fortbewegenden mächtigen Wirbels und als wichtigstes Moment ist hervorzuheben, daß die mit dem Eintritt des Körpers in die Wolke sich einstellenden charakteristischen Erscheinungen erhalten bleiben, solange sich der Körper durch die Staubmassen bewegt. Vogel hat damals (a. a. O.) den Einwand machen zu müssen geglaubt, daß der gegen den Körper sich ergießende Materiestrom nur beim Eintritt einseitig gerichtet sei, daß aber, sobald der Körper sich in der Wolke befinde, „von allen Seiten Teilchen der Wolke auf ihn zustürzen". Daß dieser Einwand auf einer Verwechslung der Begriffe Beschleunigung und Geschwindigkeit beruht, hat bereits Seeliger gezeigt [1]).

Zwei Fragen sind jetzt noch wichtig zu beantworten:

1. Wie ist es möglich, daß sich die Relativgeschwindigkeit zwischen dem eindringenden Körper und der Wolke trotz des Widerstandes durch Wochen, ja Monate hindurch nicht merklich verringert?

2. Wird, wenn der Widerstand wirklich so gering ist, auch genügend Wärme erzeugt,

1) Astr. Nachr. **133**, 305.

um den Körper in oberflächlichen Glühzustand zu versetzen?

Beide Fragen hat Seeliger bereits in der ersten der zitierten Arbeiten über die Nova Aurigae beantwortet, indem er die Bewegung der Nova mit der eines Meteors in unserer Atmosphäre verglich. Es werde ganz allgemein das Widerstandsgesetz angesetzt in der Form:

$$\frac{dv}{dt} = -\lambda v^n,$$

wo die Konstante λ proportional zur Dichte D der Wolke, zur Oberfläche O und zur reziproken Masse $1/m$ des Körpers ist. Für das Meteor gelte dieselbe Gleichung mit gestrichenen Buchstaben:

$$\frac{dv'}{dt'} = -\lambda' v'^n.$$

Stellt man zwischen beiden Gleichungen die Beziehungen her:

$$v' = \mu v;\quad t' = \nu t;\quad \lambda' = \nu^{-1}\mu^{-(n-1)}\lambda,$$

dann entsprechen sich die Bewegungen des Sternes und des Meteors Punkt für Punkt. Es seien noch R und R' die bezüglichen Radien, δ und δ' die Dichten von Stern und Meteor; dann hat man:

$$\frac{\lambda}{\lambda'} = \frac{D \cdot O \cdot m'}{D' \cdot O' \cdot m};\qquad \nu = \frac{\lambda}{\lambda'} \cdot \mu^{-(n-1)}\,\frac{t'}{t}$$

d. h.

$$t' = \left(\frac{v}{v'}\right)^{n-1} \frac{R'\delta' D}{R\delta D'} \cdot t.$$

Setzt man $R = R$ Sonnenradien ($7 \cdot 10^8$ m) und

$$R' = R' \text{ Meter},\quad \frac{v}{v'} = p,\quad t = 100^d$$

und für die einfachste Form des Widerstandsgesetzes $n = 2$, so erhält man:

$$t' = 0^s{,}0123 \cdot p \cdot f,$$

wo:

$$f = \frac{R'\delta' D}{R\delta D'}.$$

Da es sich nur um Abschätzungen handelt, kann man mit weitgehender Annäherung an die wirklich möglichen Verhältnisse

$$\frac{R'\delta'}{R\delta} = 1$$

setzen.

Es geht dann aus der Endgleichung deutlich hervor, daß selbst für ein ziemlich großes p (Seeliger setzt z. B. $v = 60$, $v' = 2$ in Einheiten der Geschwindigkeit der Erde in der Bahn) und für eine Dichte der Wolke, die der unserer Atmosphäre vergleichbar ist, sich die Bewegung des Sternes in 100^d relativ ebenso abspielt wie die des Meteors in wenigen Bruchteilen einer Sekunde. Innerhalb solcher Zeiträume hat man aber auch bei Meteoren keine Abnahme der Geschwindigkeit feststellen können. Überdies kann man das Dichteverhältnis wesentlich kleiner als 1 ansetzen und trotzdem noch, wie sogleich gezeigt werden soll, die gleiche Wärmemenge pro Oberflächeneinheit für Stern und Meteor erhalten, falls nur $p > 1$ ist.

Es verhalten sich nämlich die erzeugten Wärmemengen Q wie die Verluste an lebendiger Kraft P der Teilchen, also pro Flächen- und Zeiteinheit:

$$\frac{Q}{Q'} = \frac{P}{P'} \cdot \frac{O'}{O} \cdot \frac{t'}{t} = \frac{m \cdot v^2}{m' v'^2} \cdot \frac{R'^2}{R^2} \cdot \left(\frac{v}{v'}\right)^{n-1} \frac{R'\delta' D}{R\delta D'}$$

$$Q = p^{n+1} \cdot \frac{D}{D'} \cdot Q'.$$

Das Dichteverhältnis kann also mit der 3. Potenz von p abnehmen für den Fall $n = 2$.

Eine andere Vorstellung von der beim Aufschlag der Teilchen erzeugten Wärmemenge gewinnt man auf folgendem Wege:

Ist der mit der Wolke kollidierende Körper etwa von der Größe unserer Sonne, setzen wir also seinen Radius in runder Zahl zu $R = \frac{1}{200}$ (in astronomischen Einheiten), seine Masse zu $m = 1$ an, so folgt für die Teilchen, die in parabolischer Bahn auf den Körper zustürzen, die Aufschlagsgeschwindigkeit aus der Formel

$$v^2 = \frac{2k^2 m}{r}$$

für $r = R$ zu $v = 590$ km/sec. Dadurch wird eine Wärmemenge

$$Q = \frac{1}{J}\frac{\mu}{2}v^2$$

erzeugt, wenn J das mechanische Wärmeäquivalent, μ die Masse des Teilchens ist. Bezeichnen wir wieder die Dichte der kosmischen Wolke mit D, dann trifft in der Sekunde auf 1 qcm der Oberfläche des Körpers die Masse von $59 \cdot 10^6\, D$ (g), wodurch pro Flächeneinheit die Wärmemenge

$$Q = 24{,}2 \cdot 10^{15}\, D \text{ (g kal.)}$$

entwickelt wird. Wenn man für die kosmische Wolke die Dichte der Atmosphäre an der Erdoberfläche ansetzt, so wird $Q = 3{,}1 \cdot 10^{12}$ g-kal. also ein ganz erheblicher Betrag.

Unter Voraussetzung einer Solarkonstanten von 2,3 g kal./Minute findet man, daß die Sonne pro Einheit ihrer Oberfläche in 1 sec die Wärmemenge

$$Q' = 1{,}8 \cdot 10^3 \text{ (g kal.)}$$

ausstrahlt. Es entsteht also selbst für eine Dichte der kosmischen Wolke, die nur das

10^{-6} fache der Luft an der Erdoberfläche beträgt, bei der Kollision der Teilchen der Wolke mit dem Körper pro Flächeneinheit noch das 1700fache derjenigen Wärmemenge, die von der Sonne ausgestrahlt wird. Daraus dürfte mit aller Deutlichkeit hervorgehen, daß das Zusammentreffen eines Weltkörpers selbst mit sehr dünn verteilter Materie sehr wohl geeignet ist, eine Erklärung für das Aufleuchten neuer Sterne abzugeben. Denn die dabei entwickelten Wärmemengen sind hinreichend groß, um eine starke oberflächliche Erhitzung bis zu heller Glut — nur um eine solche kann es sich ja der ganzen Natur der Erscheinung nach handeln — hervorzubringen.

Die Theorien des typischen Novaspektrums.

Als man die ersten eingehenden spektralanalytischen Untersuchungen über die neuen Sterne anstellte, stand die Astrophysik noch ganz im Zeichen des Dopplerschen Prinzips. Man glaubte, alle Linienverschiebungen im Spektrum mit seiner Hilfe erklären zu müssen und fand auf diese Weise bei den neuen Sternen jene enorm hohen Radialgeschwindigkeiten, auf die schon an früherer Stelle hingewiesen wurde. Gerade die allen sonstigen Erfahrungen widersprechenden großen Geschwindigkeiten, deren Entstehung man auf verschiedenen Wegen zu erklären versuchte, — wir werden davon noch zu sprechen haben — erregten indessen Zweifel an der unbeschränkten Anwendbarkeit dieses Prinzips und forderten andere Erklärungsversuche heraus. Die durch die Versuche von Humphreys und Mohler zuerst exakt festgestellte Linienverschiebung durch Druckwirkungen stellte ein solches neues Prinzip dar, das in der Folge besonders von Wilsing zur Erklärung des typischen Novaspektrums herangezogen wurde. Außer der Linienverschiebung erheischt aber auch noch die Linienverbreiterung und das Auftreten der Absorptionsbande eine Erklärung. Als weitere physikalische Prinzipien bieten sich zu diesem Zwecke dar der Kirchhoffsche Satz über das Verhältnis von Absorption und Emission, sowie die Erscheinungen der anomalen Dispersion. Wie diese Prinzipien im einzelnen zur Verwendung gelangen, wird aus den folgenden Auseinandersetzungen hervorgehen. Der Kirchhoffsche Satz kommt dabei für alle Theorien in Frage.

1. Dopplersches Prinzip.

Will man die Linienverschiebungen auf Bewegungen in der Gesichtslinie zurückführen, dann ist das Spektrum der neuen Sterne als Überlagerung mindestens zweier Spektra aufzufassen, nämlich eines Emissionsspektrums und eines Absorptionsspektrums. Man könnte dann an den Zusammenstoß zweier Körper denken, von denen der eine das erste, der andere das zweite Spektrum liefert. In der Tat waren dies auch die ersten Erklärungsversuche des Novaspektrums. Als sich aber bei der Nova Aurigae mehrere Intensitätsmaxima nachweisen ließen, sah sich Vogel schon genötigt, von mehreren Körpern zu sprechen, deren Spektra sich übereinanderlagern sollten. Und als man dann in der Folge mehr und mehr zur Erkenntnis des typischen Novaspektrums gelangte, dessen wesentliches Charakteristikum es ist, daß die Absorptionsbande stets nach der brechbareren Seite verschoben sind, schien es doch höchst unwahrscheinlich, daß immer der Körper, der das Emissionsspektrum liefert, sich von uns weg, der andere sich auf uns zu bewegen sollte. J. Halm (a. a. O.) hat versucht, die typische Gestalt des Novaspektrums aus der Seeligerschen Hypothese abzuleiten und es dürfte ihm wohl gelungen sein, eine ganz plausible Erklärung zu finden. Nach Halm spielen sich die Vorgänge beim Aufleuchten der Nova, soweit sie das Spektrum betreffen, wie folgt ab:

Beim Auftreffen der ersten Teilchen der Wolke gerät der Körper in oberflächliche Glut-hitze und liefert zunächst ein kontinuierliches Spektrum. Bald aber bildet sich eine Gashülle um den Stern, die sich in radialer Richtung mit großer Geschwindigkeit ausdehnt. Im Spektrum treten daher die Absorptionslinien der in der Gashülle enthaltenen Stoffe auf, und zwar stark nach der brechbareren Seite verschoben. Wenn die Hülle infolge der Ausdehnung groß genug geworden ist, erscheinen auch die Emissionslinien der in ihr enthaltenen Stoffe. In diesem Stadium der vollsten Entwicklung ergibt sich das Aussehen des Spektrums aus Fig. 7. Es stelle *AA* den Kern des Sternes dar, *BB* die in radialer Ausdehnung begriffene Gashülle, *a b* die Richtung nach der Sonne. Die in dem Zylinder *a a*, *b b* enthaltenen Teile liefern das Absorptionsspektrum, die außerhalb das Emissionsspektrum. Die Absorptionslinien erscheinen verbreitert wegen der Divergenz der radialen Geschwindigkeiten innerhalb des Raumes *a a*, *c c* und sie sind zugleich nach Violett verschoben nach Maßgabe der Geschwindigkeit der radialen Ausdehnung. Die hellen Linien erscheinen verbreitert aus demselben Grunde, aber ihre Mitte ist — solange wir von der Rotation absehen — nicht verschoben, da sich die radialen Komponenten gegenseitig aufheben. Da die

Radialgeschwindigkeiten außerhalb *aa*, *bb* kleiner sind als innerhalb, so erkennt man auch, daß die Emissionslinien teilweise noch die Absorptionslinien nicht ganz aufzuhellen vermögen, daß diese vielmehr teilweise noch jenseits jener zu liegen kommen. Es kommt nun noch die Wirkung der auf den Körper unter Bevorzugung gewisser Richtungen zuströmenden Wolkenteilchen hinzu, die, wie wir sahen, einen Wirbel um den Stern erzeugen. Durch diese rotierende Atmosphäre wird einerseits der Aufschlag der Teilchen gemindert und der früher erwähnte Gleichgewichtszustand mit bereits beginnender Abkühlung hervorgerufen, andererseits ergibt sich daraus dann auch eine Verschiebung der hellen Linien, und zwar derart, daß wir zwei Intensitätsmaxima zu beiden Sei-

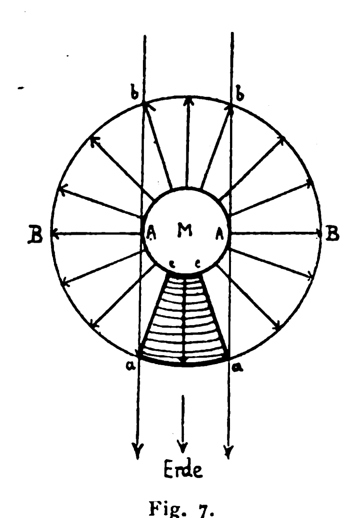


Fig. 7.

ten der normalen Stellung erhalten. Die aus der Größe der beobachteten Verschiebungen zu folgernde enorme Rotationsgeschwindigkeit hat durchaus nichts so sehr Unwahrscheinliches für sich, wenn man bedenkt, daß in dem oben benutzten Beispiel die in einer Kreisbahn in der Nähe der Oberfläche des Sternes sich bewegenden Teilchen eine Geschwindigkeit von 415 km/sec besitzen, welche Zahl sich durch Annahme größerer Dichte — entsprechend dem fortgeschritteneren Entwicklungszustande des Sternes gegenüber der Sonne — noch beträchtlich erhöhen kann.

Die fortschreitende Abkühlung bedingt eine Abschwächung des kontinuierlichen Spektrums, gleichzeitig aber auch eine Verminderung der radialen Ausdehnung. Infolgedessen rücken die Absorptionsbanden mehr und mehr in den Bereich der Emissionslinien und werden von diesen, die an Intensität zunehmen, überdeckt; ganz wie man das in Wirklichkeit beobachtet hat. Ist der Abkühlungsprozeß des Sternes genügend weit fortgeschritten, dann kann es sehr wohl sein, daß nur mehr das Spektrum der ihn umgebenden Gashülle übrigbleibt, d. h. das Novaspektrum ist in das eines Gasnebels übergegangen mit einigen wenigen diskreten Linien.

2. Linienverschiebung durch Druck.

Humphreys und Mohler haben durch Beobachtung der Spektren von im elektrischen Lichtbogen zum Glühen gebrachten Metalldämpfen gezeigt, daß die Linien der Spektren unter dem Einfluß des Gasdrucks eine Verschiebung nach Rot zeigen, die innerhalb der verwendeten Druckdifferenzen (bis 13 Atmosphären) dem Druck proportional zu setzen ist. Aber die Größe dieser Verschiebungen beträgt nur etwa 0,005 bis 0,006 $\mu\mu$, während es sich bei den Spektren der neuen Sterne um Abstände zwischen den hellen und dunklen Linien bis zu 2 $\mu\mu$ und mehr handelt. Man müßte also, wenn die Proportionalität auch weiter gilt, auf Gasdrucke von mehreren tausend Atmosphären in der Umgebung der Novae schließen. Wilsing[1]) hat derartige Drucke dadurch zu erreichen versucht, daß er den elektrischen Funken zwischen Metallelektroden unter Flüssigkeiten überspringen ließ. Es gelang ihm dadurch in der Tat, Spektren zu erzeugen, die denjenigen der neuen Sterne sehr ähnlich waren, sowohl was die Verbreiterung und Verdoppelung der Linien als auch deren Verschiebung anlangt. Allerdings versagten die Versuche an einem wichtigen Punkt insofern, als sie sich nur auf die Linien der Metalle beziehen, während die Wasserstofflinien, die ja im Spektrum der neuen Sterne so sehr dominieren, unter den genannten Versuchsbedingungen nicht zum Aufleuchten gebracht werden konnten. Man blieb also hier auf Analogieschlüsse von dem Verhalten bei niedrigen Drucken angewiesen, bei welchen in der Tat auch die Wasserstofflinien Verschiebungen zeigen. Die verschiedenen Intensitätsmaxima sind nach Wilsing auf das Vorhandensein von Gasschichten mit verschiedenem Druck zurückzuführen, die Linienverdoppelung darauf, daß das Absorptionsspektrum des Kernes teilweise aufgehellt wird durch das Hellinienspektrum jener Gasmassen, welche seitlich über den Kern herausragen — analog wie das ausführlich an Hand der Fig. 7 gezeigt wurde. Es hat indessen nicht an Stim-

1) Wilsing, Über die Deutung des typischen Spektrums der neuen Sterne. Sitzungsber. Berl. Akad. Nr. 24, 1899.



men gefehlt, die die Beweiskraft der Wilsingschen Versuche leugneten und die bestritten, daß die dabei beobachteten Linienverschiebungen ein Analogon zu den unter niedrigen Drucken angestellten Versuchen von Humphreys und Mohler seien. Hale, Lockyer, Konen, Ebert[1]) haben die Versuche von Wilsing wiederholt und variiert und kommen zu dem Schlusse, daß Drucksteigerungen allein nicht zur Erklärung der beobachteten Erscheinungen ausreichen.

3. Anomale Dispersion.

In der bereits zitierten Arbeit führt H. Ebert ein neues Prinzip heran zur Erklärung der Eigentümlichkeiten des Novaspektrums. Er geht aus von der bekannten Tatsache, daß der Brechungsexponent selektiv absorbierender Medien in der Nähe von Absorptionslinien Abweichungen zeigt gegenüber der normalen Abhängigkeit von der Wellenlänge. Bezeichnet λ_0 die Wellenlänge der Absorptionslinie, so ist für $\lambda > \lambda_0$ $n > n_0$ und für $\lambda < \lambda_0$ $n < n_0$. Da für Metalldämpfe n_0 nahezu $= 1$ ist, so ergibt sich, daß die Metalldämpfe sogar noch dem Vakuum gegenüber als optisch dünneres Medium erscheinen, und zwar umso dünner, je spezifisch dichter der Dampf wird. Für die neuen Sterne ergeben sich aus diesem Prinzip an Hand der Fig. 8 die nachstehenden Folgerungen.

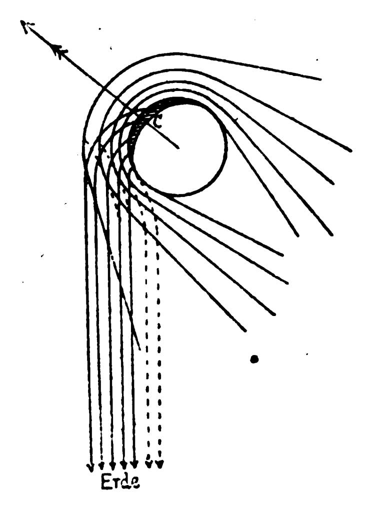


Fig. 8.

Der Stern bewege sich in der Pfeilrichtung; die größte Erhitzung finde bei C statt — etwa durch den Eintritt in die kosmische Wolke nach Seeliger —. Dann werden sich die ausbrechenden Gasmassen in der gezeichneten Form um den Stern lagern. Beobachtet man die Vorgänge von der Erde aus, so werden zweierlei Arten von Lichtwegen in Betracht kommen: die Strahlen $\lambda > \lambda_0$ kommen aus der Tiefe und bringen Licht von der ganzen leuchtenden Kalotte, die Strahlen $\lambda < \lambda_0$ dagegen vermögen nur von einem verhältnismäßig kleineren Teil von C Licht ins Auge des Beobachters zu senden. Die Helligkeitsverteilung im Spektrum ist also in der Nähe der Absorptionslinien etwa die in Fig. 9 wiedergegebene. Es legt sich auf der violetten Seite ein dunkler Schatten über das kontinuierliche Spektrum und täuscht eine Verbreiterung der Absorptionslinie und gleichzeitig eine Verschiebung ihrer Mitte nach Violett vor, während auf der weniger brechbaren Seite dem hellen Hintergrund noch ein helles Band aufgesetzt erscheint, dessen Helligkeit nach dem Rot zu sich langsam verliert, während sie gegen die Absorptionslinie ziemlich steil abfällt, ganz wie dies die Spektralbeobachtungen tatsächlich erfordern. Die ganze Erscheinung wird natürlich sehr variieren je nach der Bewegungsrichtung des Weltkörpers relativ zum Beobachter und man kann so eine Erklärung für die bei den einzelnen Novae auftretenden Verschiedenheiten finden.

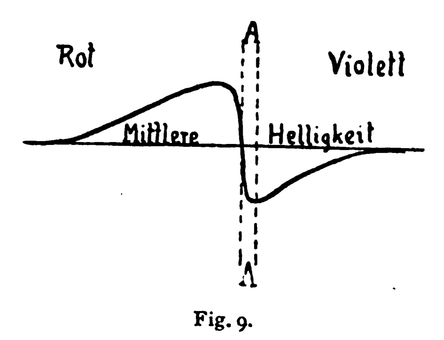


Fig. 9.

Welche von den vorgetragenen Theorien die richtige ist und die Erscheinungen am besten zu erklären vermag, darüber können wir wohl heute noch nicht entscheiden. Sie alle beruhen auf Prinzipien, die durch eine Reihe von Versuchen gestützt sind, deren Anwendbarkeit auf die neuen Sterne aber stets die eine Schwierigkeit begegnet, daß sie gewissermaßen Extrapolationen darstellen auf Verhältnisse, die unserer direkten Beobachtung im Laboratorium nicht zugänglich sind. So können wir eben nur so viel sagen, daß diese einzelnen Erklärungen möglich sind, daß sie wahrscheinlich alle zusammenwirken und in ihrer

1) Siehe hierüber: H. Ebert, Über die Spektren der neuen Sterne. Astr. Nachr. **164**, 65.

Gemeinsamkeit — vielleicht noch mit neuen, uns unbekannten Prinzipien — die Fülle von Erscheinungen hervorbringen, die uns gerade die neueren spektroskopischen Untersuchungen geoffenbart haben.

Die Theorien der Nebel um Nova Persei 2 (1901).

Die verschiedenen Versuche zur Erklärung der in der Umgebung der Nova Persei beobachteten Nebelerscheinungen gliedern sich in zwei scharf getrennte Gruppen: die einen wollen in den Nebeln leuchtende Materieteilchen sehen, welche von der Nova bei der Katastrophe mit der beobachteten großen Geschwindigkeit — die der des Lichtes vergleichbar ist — ausgeschleudert wurden; die anderen dagegen nehmen an, daß die Nebel an ihrem Orte bereits vorhanden waren und uns durch eine von

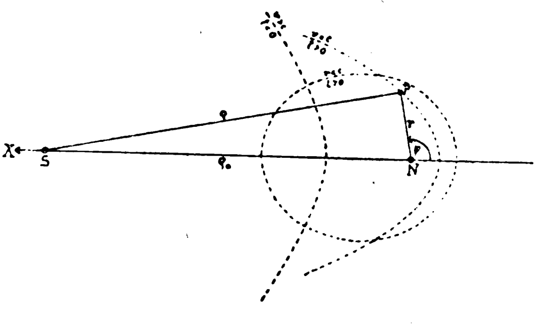


Fig. 10.

der Nova ausgehende Strahlung — sei sie nun elektrischer oder optischer Natur — sichtbar gemacht wurden. Bevor wir auf die Einzelheiten der Theorien eingehen, wollen wir die Entwicklungen geben, soweit sie Allgemeingültigkeit besitzen, welche Vorstellung man sich auch im besonderen von der Entstehung der Nebel macht. Die Grundlagen hierfür hat Seeliger in zwei Aufsätzen gegeben [1]), die leider nur in der englischen Übersetzung vorliegen und durch Druckfehler teilweise entstellt sind.

Wir gehen von folgenden Annahmen aus: Im Moment der Katastrophe, welche Ursache der Erscheinung der Nova ist, geht von dem Sterne einerseits eine Lichtwelle aus, die sich mit der Geschwindigkeit c ausbreitet und uns auf direktem Wege Kunde von dem Ereignis bringt; gleichzeitig wird noch ein zweiter Vorgang ausgelöst, der sich radial und gleichförmig mit der Geschwindigkeit v ausbreitet und in der Umgebung der Nova Materie aufleuchten läßt — sei es, indem er leuchtende Partikeln dahin schafft, sei es, indem er vorhandene Materie durch irgendwelche Strahlung zur Lichtaussendung anregt. Sei in Fig. 10 die Nova N der Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, dessen X-Achse die Richtung zur Sonne S sei. In P befinde sich ein leuchtendes Partikelchen. Zählt man die Zeit t vom Eintreffen der direkten Lichtwelle in S, so ist die Zeit, welche verstreicht, bis wir auf dem Wege über P Kenntnis von dem gleichen Ereignis erhalten, gegeben durch

$$t = \frac{r}{v} + \frac{1}{c}(\varrho - \varrho_0) \qquad (1)$$

(Schluß folgt.)

1) H. Seeliger, The nebulae in the vicinity of Nova Persei. Astrophys. Journal **16**, 4, 1902 und **20**, 2, 1904.

Tagesereignisse.

Vom 19.—25. September 1920 wird in Bad Nauheim die 86. Versammlung Deutscher Naturforscher und Ärzte stattfinden. Anfragen und Wünsche, Wohnungen betreffend, sind zu richten an Herrn W. Schaller, Palast-Hotel; Vorträge und Demonstrationen sind möglichst bis zum 15. Juli bei den Geschäftsführern Geh. Med.-Rat Prof. Dr. Groedel oder Realschuldirektor Dr. C. Zimmer oder bei dem Schriftführer Prof. Dr. Weber anzumelden.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: John B. Ferguson vom Geophysical Laboratory der Carnegie Institution in Washington zum Professor der Chemie an der Universität Toronto, der Dozent an der Universität Upsala Dr. Sven Ludvig Alexander Odén zum Professor der anorganischen Chemie an der Technischen Hochschule Stockholm.

Neuer Lehrauftrag: Der Direktor des Chemischen Instituts an der Forstakademie Hann.-Münden und frühere Professor an der Universität Straßburg Dr. Edgar Wedekind mit Vorlesungen und Übungen über die Chemie und Technologie der seltenen Elemente sowie die Stereochemie an der Universität Göttingen.

Verliehen: Den a. o. Professoren der Chemie an der Universität Wien Dr. Adolf Franke und Dr. Jakob Pollak Titel und Charakter als ord. Professor.

Gestorben: Der ord. Honorarprofessor für Physik an der Universität Hamburg und ehemaliger Direktor des Physikalischen Staatslaboratoriums daselbst Dr. August Voller.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 15. 1. August 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 17 am 10. August 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über Gesetzmäßigkeiten der α-Strahler.

Von Hans Th. Wolff.

F. G. Carruthers[1]) hat gefunden, daß die Logarithmen der Reichweiten der α-Strahlen für jede Gruppe von Isotopen angenähert lineare Funktionen der Logarithmen der Atomgewichte der strahlenden Körper sind[2]). Wie im folgenden dargelegt werden soll, kann man eine ganz ähnliche Beziehung für die Glieder je einer radioaktiven Zerfallsreihe aussprechen. An Stelle des Atomgewichtes tritt aber jetzt die Differenz $k - s$, wobei k eine Konstante und s diejenige Zahl bedeutet, welche angibt, das wievielte Zerfallsprodukt der betreffende Körper innerhalb der Zerfallsreihe ist. Nennt man die Reichweite R (es sollen hier die Werte von R zugrunde gelegt werden, welche in Zentimetern gemessen sind und für 0^0 und 760 mm Hg-Druck gelten), so ist

$$\log R = x \log (k - s) + y. \qquad (1)$$

x ist eine negative, y eine positive Konstante, und mit log sind immer Briggssche Logarithmen bezeichnet.

Gleichung (1) wird von den Gliedern der Th-Reihe mit Ausnahme von ThC erfüllt. Dieser Körper nimmt insofern eine Sonderstellung ein, als er nicht die Regel befolgt, daß die Reichweiten der aufeinanderfolgenden Glieder einer Reihe zunehmen. In der U-Ra-Reihe gilt Formel (1) zunächst für UI bis mit Ra. Von $RaEm$ bis mit RaC' ist sie ebenfalls erfüllt, doch haben die Konstanten x und y andere Werte. RaF fügt sich der Gleichung nicht. Es besitzt eine geringere Reichweite als die 3 ihm zunächst vorangehenden α-Strahler. In der Ac-Reihe wird die Beziehung (1) von $Prot\ Ac$, $RaAc$, $AcEm$ und AcA befolgt. AcX ist auszuschließen ($\log R_{beob.} = 0{,}606$ bez. $0{,}620$, hingegen $\log R_{ber.} = 0{,}662$). AcC besitzt eine geringere Reichweite als $AcEm$ und AcA und nimmt somit eine Sonderstellung ein.

Berechnet man die Größen x und y auf Grund der Beobachtungsergebnisse unter Ausschluß der erwähnten, das in Rede stehende Gesetz nicht befolgenden Körper nach der Methode der kleinsten Quadrate, so erhält man die Gleichungen:

Th-Reihe:

$$\log R = -6{,}844 \cdot \log (58 - s) + 12{,}476, \qquad (2)$$

UI bis mit Ra:

$$\log R = -3{,}183 \cdot \log (60 - s) + 6{,}033, \qquad (3)$$

$RaEm$ bis mit RaC':

$$\log R = -6{,}629 \cdot \log (54 - s) + 12{,}081, \qquad (4)$$

Ac-Reihe:

$$\log R = -6{,}777 \cdot \log (55 - s) + 12{,}291. \qquad (5)$$

Die Größe k wurde für UI und Th gleich dem vierten Teil des Atomgewichtes gesetzt. Man kann k erheblich verändern, ohne daß die Genauigkeit der Darstellung merklich beeinflußt wird (bei gleichzeitiger Neubestimmung von x und y). So wurde probeweise für die Th-Reihe $k = 83$ gesetzt. Nach der graphischen Darstellung ist dieser Wert nicht weniger günstig, als der obige Betrag $k = 58$. Den Grund für dieses Verhalten läßt eine Reihenentwicklung von $\log (k - s)$ erkennen. Diese liefert:

$$\log R = x \log k + y - \frac{xs}{k} (\log e) \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{s}{k} + \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{s}{k}\right)^2 + \ldots\right] \cdot \qquad (6)$$

Für ThC' ($s = 9$) lautet die Entwicklung:

$$\log R = 0{,}407 + 0{,}4612 \left(1 + \frac{9}{116} + \frac{37}{3364} + \ldots\right) = 0{,}407 + 0{,}4612 + 0{,}0358 + 0{,}0037 + \ldots.$$

Die anderen Werte von k wurden so gewählt, daß $k - s$ Beträge annimmt, wie sie den be-

1) F. G. Carruthers, Nature **96**, 565, 1916. Vgl. auch A. van den Broek, Nature **96**, 677, 1916.

2) Eine entsprechende Beziehung hat vorher K. Fajans in qualitativem Sinne ausgesprochen: K. Fajans, Le Radium **10**, 171, 1913.

treffenden Körpern als Gliedern der *U-Ra*-Reihe, bzw. der *Ac*-Reihe als Abzweigung der letzteren entsprechen.

Die Genauigkeit, mit welcher die Beziehung (1) erfüllt ist, kann man aus den Tabellen I bis III ersehen. Die Werte von $\log R$ wurden dem Lehrbuch der Radioaktivität von St. Meyer und E. R. v. Schweidler (Berlin 1916) entnommen,

Tabelle I.

	$\log R$	Δ
Th	0,412	— 0,005
Ra Th	0,565	0,000
Th X	0,611	+ 0,008
Th Em	0,676	— 0,001
Th A	0,732	0,000
Th C'	0,912	— 0,004

Tabelle II.

	$\log R$	Δ
UI	0,375	— 0,002
UII	0,439	+ 0,005
Io	0,470	— 0,002
Ra	0,496	— 0,003
Ra Em	0,596	+ 0,001
Ra A	0,653	— 0,002
Ra C'	0,818	+ 0,001

Tabelle III.

	$\log R$	Δ
Prot Ac	0,497	— 0,001
Ra Ac	0,602	+ 0,003
Ac Em	0,723	— 0,005
Ac A	0,774	+ 0,003

abgesehen von dem für *Prot Ac* gültigen Wert[1]). Δ gibt den Fehler an, welchen der nach (1) berechnete Betrag von $\log R$ aufweist.

Est ist bemerkenswert, daß *Ra* und *Prot Ac* dieselbe Reichweite besitzen (*Ra* 3,13; *Prot Ac* 3,14). Nach dem Zerfallsschema

$$UII \begin{cases} \xrightarrow{\alpha} Io \xrightarrow{\alpha} Ra \xrightarrow{\alpha} \text{usw.} \\ \xrightarrow{\alpha} UY \xrightarrow{\beta} Prot\ Ac \xrightarrow{\alpha} \text{usw.} \end{cases}$$

kann man sagen, daß das von *UI* ab gültige Gesetz (3) über *UII* hinaus von hier ab in seinen beiden Verzweigungen bis zur 2. Zerfallsstufe (*Ra* einerseits, *Prot Ac* andererseits) fortbesteht. Dieses Verhalten ist deshalb besonders auffällig, da doch das Abzweigungsverhältnis *Act*-Reihe : *U*-Reihe nur 3 Proz. beträgt[2]). Auch der doppelt zerfallende Körper *UII* selbst fügt sich der Regel (1), während dies von *ThC* und *AcC*, welche ebenfalls doppelten Zerfall aufweisen, nicht gilt, wie bereits oben erwähnt. Die Abzweigung bei *ThC* hindert aber nicht, daß *ThC'* das Gesetz wiederum erfüllt (65 Proz. von *ThC* zerfallen in *ThC'*). Auch *RaC'* befolgt Formel (1), obwohl *RaC*, welches ihm in der Zerfallsreihe vorausgeht, doppelt zerfällt. Allerdings verwandeln sich von diesem Körper nur 0,03 Proz. in RaC_2. Von *AcC* zerfallen 0,20 Proz. der Atome in *AcC'* (auch AcC_2 genannt[1])). Dieser Körper erfüllt Gleichung (1) nicht ($\log R_{\text{beob.}} = 0{,}787$, $\log R_{\text{ber.}} = 0{,}959$).

Die Reihenentwicklung (6) mit ihrer Anwendung auf die *Th*-Reihe zeigt, daß nur ein geringer Unterschied zwischen der logarithmischen und der linearen Darstellung von $\log R$ als Funktion von s besteht. Legt man ein lineares Gesetz zugrunde, so ergibt die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate für die *Th*-Reihe die Beziehung

$$\log R = 0{,}05567\,s + 0{,}4008. \qquad (7)$$

Tabelle IV zeigt, mit welchem Grade von Genauigkeit diese Gleichung erfüllt ist. Man sieht, daß die logarithmische Darstellung an Exaktheit entschieden überlegen ist. Für die Glieder der *U-Ra*-Reihe *UI* bis mit *Ra* erhält man die Beziehung:

$$\log R = 0{,}02407\,s + 0{,}3728. \qquad (8)$$

Das Ergebnis der Rückrechnung ist aus Tabelle V ersichtlich. Die lineare Formel ist

Tabelle IV.

	Δ
Th	— 0,011
Ra Th	+ 0,003
Th X	+ 0,012
Th Em	+ 0,003
Th A	+ 0,003
Th C'	— 0,010

Tabelle V.

	Δ
UI	— 0,002
UII	+ 0,006
Io	— 0,001
Ra	— 0,003

ungefähr ebenso genau wie die logarithmische. Da hier s nur bis 5 reicht, bei der *Th*-Reihe jedoch bis 9, kann jetzt der Unterschied der beiden Darstellungen nicht so stark ins Gewicht fallen. Schließlich ergibt sich für die *Ac*-Reihe:

$$\log R = 0{,}05606\,s + 0{,}4948. \qquad (9)$$

Den Vergleich von Beobachtung und Rechnung liefert Tabelle VI. Die beiden Darstellungsarten von $\log R$ besitzen die gleiche Genauigkeit. s reicht in diesem Falle bis 5. Man kommt zu dem Ergebnis, daß im ganzen die logarithmische Formel als genauer zu bezeichnen sein dürfte als die lineare.

1) Dieser entstammt einer Arbeit von O. Hahn und L. Meitner, diese Zeitschr. **19**, 208, 1918.

2) O. Hahn u. L. Meitner, Chem. Ber. **52**, 1812, 1919.

1) R. W. Varder u. E. Marsden, Phil. Mag. **28**, 818, 1914. Hier ist die Reichweite für 15° C angegeben.

Tabelle VI.

	Δ
Prot Ac . . .	— 0,002
Ra Ac	+ 0,005
Ac Em	— 0,004
Ac A	+ 0,001

Eine den Gleichungen (7) bis (9) ähnliche Beziehung hat A. van den Broek[1]) aufgestellt. Nach diesem Autor gilt angenähert:

$$\log v = A + nB.$$

v bedeutet die Anfangsgeschwindigkeit der α-Strahlen, n die Zahl der Elementarladungen, welche während des Zerfalls ausgetrieben worden sind, A und B sind Konstante [siehe unten Gleichung (11)].

R. Swinne[2]) hat gezeigt, daß der Unterschied zwischen der Anfangsgeschwindigkeit eines α-Strahlers einer Radiofamilie und der eines analogen α-Strahlers einer anderen Familie für diese zwei Familien angenähert konstant ist. Man kann auch den Satz aussprechen, daß der Quotient der beiden genannten Geschwindigkeiten für die zwei Familien konstant ist. Tabelle VII, welcher die in dem erwähnten Lehrbuch von Meyer und Schweidler aufgeführten α-Strahlgeschwindigkeiten (außer AcC') zugrunde gelegt sind, zeigt, inwieweit die beiden Regeln erfüllt sind.

dieser ist dann die Aussendung von α- oder β-Strahlen. Das Eintreten jener Änderung hängt von den Gesetzen des Zufalls ab. Man darf sich nun offenbar nicht vorstellen, daß eine gewisse zufällige Konstellation der Bestandteile des Kerns unmittelbar das Instabilwerden der Bewegung eines He-Atoms oder eines Elektrons im Kern zur Folge hat, sondern zunächst tritt die erwähnte Veränderung ein, welche dann erst die Aussendung eines α- oder β-Strahles bedingt.

Die U-Ra-Reihe hat die Eigentümlichkeit, daß von $RaEm$ ab die Konstanten x und y in Gleichung (1) andere Werte besitzen als bis zu Ra. Man hat sich wohl zu denken, daß beim Zerfall von $RaEm$ eine gewisse Umwandlung im Kern stattfindet, welche bewirkt, daß die α-Strahlung von $RaEm$ eine Reichweite besitzt, die dem bisherigen Gesetz nicht mehr Genüge leistet. Andererseits hat diese Umwandlung offenbar auch zur Folge, daß die regelmäßige Veränderung, welche im Kern bei jedem Atomzerfall eintritt, nunmehr gewissermaßen von anderer Größe ist als zuvor, so daß jetzt in Gleichung (1) neue Konstanten x und y einzusetzen sind.

Wir wollen jetzt annehmen, daß ein He-Atom von der Masse μ, welches als α-Strahl ausgesandt wird, zuvor im Kern auf einer Kreisbahn vom Radius ϱ umläuft und hierbei seine

Tabelle VII.

I.		II.		III.		II—I	III—II	III—I	II : I	III : II	III : I
	$v \cdot 10^{-9}$		$v \cdot 10^{-9}$		$v \cdot 10^{-9}$						
Io	1,46	*Ra Th*	1,58	*Ra Ac*	1,63	$0,12 \cdot 10^9$	$0,05 \cdot 10^9$	$0,17 \cdot 10^9$	1,08	1,03	1,12
Ra	1,50	*Th X*	1,64	*Ac X*	1,64	0,14	0,00	0,14	1,09	1,00	1,09
Ra Em	1,62	*Th Em*	1,72	*Ac Em*	1,79	0,10	0,07	0,17	1,06	1,04	1,10
Ra A	1,69	*Th A*	1,80	*Ac A*	1,86	0,11	0,06	0,17	1,07	1,03	1,10
		Th C	1,714	*Ac C*	1,74		0,03			1,02	
Ra C'	1,922	*Th C'*	2,06	*Ac C'*	1,88	0,14			1,07		
		Mittel				0,12	0,04	0,15	1,07	1,02	1,10

Es mögen nun einige theoretische Bemerkungen folgen. Wir hatten gesehen, daß die Reichweite der α-Strahlen eines Körpers eine Funktion der Zerfallsstufe ist, welche er innerhalb seiner radioaktiven Familie bildet. Hierbei sind die α- und β-Strahler in gleicher Weise als Zerfallsstufen zu rechnen. Es ist zu schließen, daß bei jeder radioaktiven Umwandlung eine Veränderung im Atomkern von derselben Art stattfindet, solange nicht in Formel (1) neue Konstanten x und y eintreten. Das Primäre ist somit wohl bei jedem Atomzerfall die genannte Änderung im Kern. Eine Folge von

1) A. van den Broek, Phil. Mag. **25**, 740, 1913.
2) R. Swinne, diese Zeitschr. **14**, 142, 1913.

Umlaufsgeschwindigkeit v den Bohrschen Ansatz

$$\mu v \varrho = \frac{hq}{2\pi} \qquad (10)$$

erfüllt, wobei q die Quantenzahl bedeutet[1]). Ferner möge v gleich der Anfangsgeschwindigkeit sein, mit welcher der α-Strahl zur Beobachtung gelangt. Da nun die Gleichung besteht

$$v = C \cdot \sqrt[3]{R}, \qquad (11)$$

so ist

$$\log R = -3 \log \varrho + 3 \log \frac{hq}{2\pi\mu C}.$$

1) Vgl. H. Th. Wolff, diese Zeitschr. **21**, 175, 1920.

Sonach gilt nach (1):

$$\log \varrho = -\frac{1}{3}\left[x \log(k-s) + y\right] + \log \frac{hq}{2\pi\mu C}. \qquad (12)$$

Setzt man voraus, daß die Quantenzahl q in den verschiedenen Zerfallsstufen denselben Wert besitzt, so folgt:

$$\varrho = (k-s)^{-\frac{x}{3}} \cdot \text{const.} \qquad (13)$$

Man kann sich denken, daß der Atomkern, bzw. dessen rein positiver Teil[1]), bei einem mit α- oder β-Strahlung verbundenen Atomzerfall eine Größenänderung erleidet, und daß Gleichung (13) über diese quantitativen Aufschluß liefert.

Zusammenfassung.

Bezeichnet man die Reichweite eines α-Strahlers mit R und gibt die Zahl s an, das wievielte Zerfallsprodukt der betreffende Körper innerhalb seiner Zerfallsreihe ist, so gilt die Beziehung:

$$\log R = x \cdot \log(k-s) + y, \qquad (1)$$

in welcher k, x und y Konstanten sind. Es werden die nach der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Werte von x und y, welche in den einzelnen Radiofamilien gelten, aufgeführt. Ferner wird angegeben, mit welchem Genauigkeitsgrade die Formel erfüllt ist und welche Ausnahmen bestehen. Auf die bei den Verzweigungen der Zerfallsreihen statthabenden Verhältnisse wird besonders eingegangen. Man kann $\log R$ auch durch eine lineare Funktion von s ausdrücken, doch ist diese Darstellungsweise wohl weniger genau.

Eine Tabelle läßt erkennen, inwieweit der Satz von R. Swinne, welcher besagt, daß der Unterschied zwischen der Anfangsgeschwindigkeit eines α-Strahlers einer Radiofamilie und der eines analogen α-Strahlers einer anderen Familie für die zwei Familien angenähert konstant ist, erfüllt ist, und zugleich auch, inwieweit der entsprechende Satz für die Quotienten der genannten Geschwindigkeiten gilt.

Schließlich wird die Gleichung (1) theoretisch gedeutet.

Anmerkung.

Es wurde oben für *AcA* $\log R = 0{,}774$ gesetzt. Gemäß der Bestimmung von Geiger und Nuttall ist $\log R = 0{,}790$. Dieser Wert fügt sich besser der von diesen Autoren aufgestellten Beziehung zwischen Zerfallskonstante und Reichweite. Mit dem letzteren Werte läßt sich Gleichung (1) ungefähr ebensogut befriedigen wie mit dem ersteren. Auf graphischem Wege erhält man jetzt die Gleichung

$$\log R = -7{,}13 \log(55-s) + 12{,}90.$$

In der Arbeit des Verfassers „Betrachtungen über den radioaktiven Zerfall des Atomkernes"[1]) lauten die ersten beiden Kolonnen von Tab. I (S. 176) besser so, wie beistehend angeführt ist.

U-Ra-Reihe	*B*
UI	53
Io	55
Ra	52
RaEm . . .	57
RaA	53
Mittel	54
$\overline{N}=$	81

In der 4. Kolonne ist der Wert bei *Th* zu streichen, da dieser Körper die Geiger-Nuttallsche Beziehung nicht erfüllt. Der Mittelwert von B wird dann für die *Th*-Reihe gleich 57 und $\overline{N} = 85$. Ferner ist die letzte Kolonne zu streichen sowie die 3. Fußnote auf der rechten Spalte von Seite 176.

1) Vgl. H. Th. Wolff, Ann. d. Phys. **60**, 685, 1919.

1) Diese Zeitschr. **21**, 175, 1920.

Dresden, im März 1920.

(Eingegangen 6. April 1920.)

Beiträge zur Farbenlehre. I.

Farbton und Sättigung der Pigmentfarben.

Von K. W. Fritz Kohlrausch.

In dem zusammenfassenden Bericht über seine Arbeiten an Pigmentfarben stellt W. Ostwald[1]) im 1. Kapitel „Bisheriger Stand der Farbenlehre" eine Reihe von Behauptungen auf, die ein ganz entstelltes Bild des auf diesem Gebiete bis jetzt Erreichten liefern und die, insbesondere wegen der wissenschaftlichen Autorität Ostwalds, geeignet sind, die Helmholtzsche Farbenlehre unberechtigterweise in Mißkredit zu bringen. Um einige Beispiele aus diesem ersten Kapitel herauszugreifen: es ist unrichtig, daß die Spektralfarbe als der Idealbegriff der gesättigten Farbe angesehen wird; sie ist die gesättigtste unter den objektiv herstellbaren Farben, weist beträchtliche Sättigungsunterschiede entlang dem Spektrum auf und wird nur im roten Teil ideal gesättigt. Es ist unrichtig, daß „durch den einfachen

1) Vgl. diese Zeitschr. **17**, 322, 1916.



Ausweg, nicht verschieden bunte Farben miteinander auf ihre Helligkeit zu vergleichen, sondern für jede einzelne ein Grau aufzusuchen, welches psychologisch denselben Helligkeitseindruck macht" die Schwierigkeiten der heterochromen Photometrie prinzipiell beseitigt werden; bunt gegen grau ist ebenso heterochrom, wie bunt gegen bunt. Auf diesem naheliegenden Wege, den bereits Fraunhofer und Brücke betreten haben, sind obige Schwierigkeiten leider nicht zu lösen. Es ist weiter unrichtig, daß nur „schüchterne Vorstöße" vorliegen, den Begriff der Reinheit zu definieren und zu messen, vielmehr liegen quantitative Angaben dafür vor. Es ist endlich unrichtig, daß es kein Prinzip gäbe, nach dem man den Farbton eindeutig und willkürfrei (allerdings nicht „objektiv", denn der Farbton ist individuell) festlegen kann. Man ist vielmehr sehr wohl imstande zu jeder vorgelegten Pigmentfarbe Farbton und Reinheit anzugeben; neuerdings[1]) gelang es auch — wovon Ostwald allerdings noch nichts wissen konnte — den Helligkeitsbegriff quantitativ in dem Helmholtzschen System unterzubringen, so daß nun jede Pigmentfarbe eindeutig festgelegt werden kann.

Die Gesichtspunkte, nach denen eine, das Ergebnis der Farbanalyse veranschaulichende Charakteristik eines vorgelegten Farbobjektes durchzuführen ist, liegen im Wesen der Farbendreiecksdarstellung, wie sie von Newton und Maxwell eingeführt und von Helmholtz und König zur Lokalisierung der Spektralfarben verwendet wurde. Ob die ganz analoge Lokalisierung von Pigmentfarben auch von anderer Seite durchgeführt wurde, ist mir nicht bekannt; jedenfalls ist es seit der Arbeit F. Exners[2]) „zur Charakteristik der schönen und häßlichen Farben" im Wiener Institut üblich, eine Farbe bezüglich ihres Farbtons und ihrer Sättigung durch Angabe konkreter Zahlen zu definieren[3]). Da der Vorgang dabei anscheinend weniger bekannt ist, als er es wegen seiner praktischen Verwendbarkeit verdient, werde ich mir im folgenden erlauben, ihn an einem aktuellen Objekt, an Pigmenten des Ostwaldschen Farbatlasses, zu demonstrieren.

1) Wien. Ber. IIa, **111**, 901, 1902.

2) Vgl. eine eben im Druck befindliche Arbeit F. Exners in den Wien. Ber. 1920 und des Verfassers in den Mitt. des Techn. Versuchsamtes IX, 1920.

3) Vgl. M. Topolanski, Wien. Ber. **112**, 67, 1903; F. u. S. Exner, Wien. Ber. I, **119**, 191, 1910; M. Gottlieb, Wien. Ber. **126**, 1299, 1917; G. Laski, diese Ztschr. **19**, 369, 1918. Anm. bei der Korrektur: Nachträglich finde ich noch die Arbeiten von B. Trolle, diese Zeitschr. **17**, 700, 1916 und von A. Wenzel, diese Zeitschr. **18**, 472, 1917, wo ebenfalls die Helmholtzsche Theorie auf physikalische Probleme angewendet wird.

1. Die Bestimmung der Remissionsfunktion, das ist diejenige Funktion $\psi(\lambda)$, die angibt, in welchem Verhältnis das Beleuchtungslicht mit der Energieverteilung $\varphi(\lambda)$ [„Beleuchtungsfunktion"] bei der Remission am bunten Pigment anders geschwächt wird, als bei der Remission an einem Normal-Weiß, erfolgt am bequemsten und genauesten mit einem der modernen Spektralphotometer. Hier wurde das von Martens und Grünbaum[1]) verbesserte Königsche Instrument benützt. Die beiden zu vergleichenden Farbblättchen waren durch eine starke Bogenlampe grell beleuchtet und wurden mit einem photographischen Objektiv in der Spaltebene des Photometers scharf abgebildet, so daß der eine Spalt nur Licht vom bunten, der andere nur Licht vom weißen Pigment erhält. Um die unvermeidlichen Ungleichmäßigkeiten der Beleuchtung, die infolge Wanderns der Glühstelle an der positiven Kohle auch zeitlich variierten, zu eliminieren, war der Ort der beiden Pigmente vertauschbar, so daß in rascher Folge derselbe Spalt einmal nur vom bunten, das andere Mal nur vom weißen Pigment beleuchtet wurde. Durch Einschlußmessungen konnte auf diese Art eine, wie sich zeigen wird, hinreichende Genauigkeit erzielt werden. Sind die beiden Winkelablesungen am Analysator-Nikol α und β, so gibt

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = \psi(\lambda_1)$$

den Remissionskoeffizienten für die betreffende Wellenlängenstelle λ_1. Die Messung an 14 passend verteilten λ-Stellen wiederholt, liefert in graphischer Darstellung die Remissionskurve. Da die immerhin zeitraubenden Messungen, bei denen ich in dankenswerter Weise von den Studierenden: Herrn A. Decastello, Frl. H. Piesch, Frl. A. Frankfurt unterstützt wurde, einerseits eine absolute Festlegung eines Teiles des schon recht verbreiteten Ostwaldschen Farbenatlasses darstellen und andererseits, wie ich an Beispielen zeigen werde, ein für viele Versuche mit Pigmentfarben willkommenes Zahlenmaterial bilden, so gebe ich in den folgenden Tabellen die Ergebnisse für drei Farbenkreise wieder. Die erste Tabelle gilt für den Kreis *ia* in der Bezeichnung Ostwalds, der ziemlich weißliche Farben enthält. Die zweite Tabelle für den Kreis *nc*, mit möglichst gesättigten aber etwas trüben Farben. Beide Kreise sind „vollständige", d. h. die Farbenfolge des Spektrums, ergänzt durch Purpur, ist durch 100 Pigmentfarben vertreten, die vom Gelb über Rot, Purpur, Violett, Blau, Grün (also im

1) Ann. d. Phys. **12**, 984, 1903.

Sinne zunehmender Wellenlänge, soweit das Spektrum in Betracht kommt) mit den Ziffern von 0 bis 99 bezeichnet sind. Je 24 in passenden Abständen liegende Vertreter wurden ausgemessen, die zwischenliegenden Farben können bezüglich ihrer Eigenschaften im Farbdreieck gegebenenfalls interpoliert werden. Die dritte Tabelle bezieht sich auf den Farbkreis *pa*, der die reinsten Farbtöne enthält, aber dafür unvollständig ist, weil im Gebiete des Blau Farbtöne gleicher Reinheit nicht herstellbar waren. Nach Ostwalds Terminologie sind die Kreise *ia* und *pa* „hellklar" (mit geringer Beimischung von Schwarz); *nc*, der gesättigste unter den vollständigen Kreisen ist „trüb", er enthält weiß und schwarz. —

2. Mit der Erlangung dieser Zahlen ist der objektive Teil der Aufgabe erledigt. Zwei Pigmentfarben können einander, ohne daß es für das Auge merkbar wäre, unter allen Umständen ersetzen, wenn sie gleiche Remissionskurven aufweisen. Doch ist diese Bedingung für das Gleichaussehen bekanntlich nur hinreichend, aber nicht notwendig. Denn nicht die Remissionsfunktion $\psi(\lambda)$ allein ist es, die das in das Auge gelangende Licht bestimmt, sondern die nach ihren Angaben modifizierte Beleuchtungsfunktion, also $\varphi(\lambda) \cdot \psi(\lambda) = f(\lambda)$, welches Produkt als „Lichtfunktion" bezeichnet werden möge. Nur wenn man sich auf eine vorgegebene Beleuchtung — gewöhnlich wird nicht näher definiertes „Tageslicht" vorausgesetzt — beschränkt, bedingen gleiche Remissionsfunktionen auch gleiche Lichtfunktionen. — Aber selbst dann noch ist obige Bedingung für die Gleichheit nur hinreichend und nicht notwendig. Infolge der eigentümlichen Funktionsweise des Auges gibt es sehr verschiedene Lichtfunktionen, die gleiche Empfindungen hervorrufen — man denke nur an die verschiedenen Paare von Komplementärfarben, die miteinander gemischt definitionsgemäß die gleiche Empfindung „weiß" erregen. Die Ursache für diese Tatsache liegt bekanntlich darin, daß die Mannigfaltigkeit der Lichtfunktionen von ungeheurer Dimensionszahl, die der Empfindungen nur dreidimensional ist. Daraus folgt notwendig, daß es sehr viele Lichtfunktionen geben muß, die ein und derselben Kombination der Empfindungskoordinaten entsprechen und daher gleich aussehen. Wohl kann man daher von Gleichheit der Lichtfunktion auf Gleichheit des Aussehens, nicht aber umgekehrt von gleichem Aussehen auf gleiche Lichtfunktion schließen. Um daher eine Aussage über die Empfindung machen zu können ist es nötig, zunächst jene drei Koordinaten zu bestimmen; sowie wir dies aber zu tun versuchen, wird die Aussage individuell, denn als Eigenschaften des Auges sind diese Koordinaten von Person zu Person verschieden.

Nach Helmholtz stellen wir uns drei Empfänger vor, die jeder wegen ihrer großen Resonanzbreite zwar auf fast alle Wellenlängen reagieren, aber jeder immer nur in ein und derselben, nur quantitativ abstufbaren Art zum

Tabelle I.

Farbkreis *ia*.

$\lambda =$	435	449	467	477	492	504	517	534	553	572	593	617	648	683
Nr. 0	0,151	0,211	0,372	0,	0,573	0,650	0,690	0,701	0,727	0,724	0,784	0,780	0,768	0,750
„ 4	167	172	205	252	310	442	593	701	757	808	817	818	820	823
„ 8	181	170	204	244	289	403	440	505	681	789	778	802	783	785
„ 13	206	188	211	197	266	264	254	305	398	703	777	783	764	768
„ 17	265	275	279	272	253	238	210	262	490	736	828	811	820	805
„ 21	382	435	368	325	302	240	194	169	440	719	810	847	811	777
„ 25	601	600	366	290	241	191	159	206	449	721	823	820	794	790
„ 29	628	484	398	277	236	187	161	198	335	523	730	800	817	845
„ 33	625	523	400	330	263	207	181	190	235	377	613	796	820	811
„ 38	626	600	501	428	351	254	202	173	153	195	332	488	606	735
„ 42	626	630	508	443	349	259	214	180	157	188	261	343	480	671
„ 46	625	626	531	470	389	293	228	201	183	191	233	287	399	599
„ 50	677	688	555	507	420	234	251	207	181	176	180	181	218	337
„ 54	654	688	662	592	520	428	339	289	233	203	181	172	174	233
„ 58	669	657	660	640	596	517	441	355	293	229	213	198	139	238
„ 63	609	711	735	704	695	656	599	504	412	326	257	214	191	229
„ 67	596	634	699	728	704	664	622	531	437	341	263	218	186	208
„ 71	484	585	666	673	704	658	626	552	456	358	283	229	200	239
„ 75	364	443	599	630	646	651	583	511	411	329	239	201	177	194
„ 79	326	440	582	638	651	646	600	515	425	316	241	202	171	211
„ 83	261	364	579	635	683	650	620	580	476	360	275	226	176	217
„ 88	157	236	417	567	634	717	710	685	612	521	427	337	299	322
„ 92	135	218	353	499	620	711	724	716	699	630	552	473	417	453
„ 96	159	199	357	470	650	724	750	756	761	756	714	657	608	629

Tabelle II.

Farbkreis *nc*.

λ =	435	449	467	477	492	504	517	534	553	572	593	617	648	683
Nr. 0	0.089	0,103	0,117	0,128	0,182	0,341	0,471	0,563	0,585	0,563	0,554	0,499	0,443	0,481
„ 4	102	100	122	132	143	323	426	538	611	604	636	619	626	611
„ 8	112	120	130	148	190	272	336	408	543	629	650	671	718	583
„ 13	113	103	120	126	135	161	152	184	341	548	623	624	661	619
„ 17	093	099	100	104	100	087	079	099	222	453	612	642	644	616
„ 21	174	149	130	106	094	092	074	092	209	425	563	599	595	574
„ 25	296	248	179	129	118	085	077	094	211	419	561	576	581	558
„ 29	404	312	205	186	115	095	083	104	201	387	551	611	598	612
„ 33	369	344	214	175	127	100	093	093	122	232	431	599	636	632
„ 38	429	418	344	265	202	139	107	096	088	133	254	408	513	716
„ 42	469	405	353	282	206	139	109	095	088	119	188	267	389	610
„ 46	480	458	371	301	207	146	112	095	091	098	131	175	264	480
„ 50	631	583	483	411	317	217	155	116	091	084	084	090	098	164
„ 54	555	619	576	472	403	304	238	168	127	109	097	099	100	131
„ 58	526	634	643	586	503	411	305	232	166	125	101	090	086	103
„ 63	541	647	703	650	594	518	415	297	233	159	115	094	083	089
„ 67	454	494	599	603	636	523	455	388	250	174	119	096	092	105
„ 71	375	406	484	529	584	555	431	339	250	167	117	099	086	096
„ 75	267	299	412	478	540	510	458	357	264	187	126	101	088	099
„ 79	199	278	326	387	497	486	449	366	265	184	120	095	080	086
„ 83	128	159	336	445	481	449	470	370	282	187	127	094	083	096
„ 88	094	136	172	194	269	398	476	467	387	268	202	153	130	139
„ 92	087	108	132	178	203	328	453	513	449	359	261	217	166	181
„ 96	121	108	124	145	196	332	474	539	546	498	426	344	297	308

Tabelle III.

Farbkreis *pa*.

λ =	435	449	467	477	492	504	517	534	553	572	593	617	648	683
Nr. 0	0,057	0,072	0,136	0,242	0,435	0,603	0,663	0,674	0,707	0,722	0,720	0,691	0,742	0,729
„ 4	058	075	099	128	197	333	502	655	729	761	771	778	767	779
„ 8	079	077	079	093	120	198	297	407	583	679	758	763	741	748
„ 13	063	070	072	094	116	160	202	241	432	626	711	729	710	754
„ 17	072	074	084	083	104	120	138	175	334	582	726	739	740	743
„ 21	122	104	090	076	077	069	069	078	160	398	645	701	693	720
„ 25	246	176	114	102	079	065	060	070	151	374	609	699	740	783
„ 29	329	224	140	099	083	067	061	072	102	217	483	699	717	731
„ 33	294	260	148	129	086	068	066	066	063	106	308	568	713	793
„ 88	057	065	158	264	461	569	551	493	413	327	245	171	131	134
„ 92	065	064	153	277	470	597	705	638	590	581	480	345	292	284
„ 96	051	068	138	260	386	525	615	643	643	622	550	531	467	453
blau	12,22	13,70	12,63	9,63	3,29	1,88	1,21	0,68	0,29	0,09	0,03	0,01	0	0
grün	0	0,20	0,62	1,14	2,38	4,06	6,73	10,12	11,40	9,30	5,58	2,22	0,48	0,04
rot	1,30	1,40	1,25	1,04	1,03	1,40	2,98	6,12	7,78	8,42	7,80	5,70	1,92	0,26
Sonne	1,0	1,3	2,1	2,7	4,3	7,9	14,6	23,5	27,1	26,7	21,6	13,5	4,9	1,0

Entstehen der Empfindung beitragen. Die mühsamen Versuche von König und Dieterici[1]) haben uns für mehrere Versuchspersonen die sog. „Grundempfindungskurven" („Erregungskurven") kennen gelehrt; sie geben die Abhängigkeit der Erregung jener drei Empfänger von der Wellenlänge des auffallenden Lichtes an, und zwar für die Energieverteilung im Interferenzspektrum der Sonne. Der Maßstab wurde so gewählt, daß der Flächeninhalt der drei Kurven gleich ist, wie wenn die Gesamterregung jedes Empfängers durch Sonnenlicht für alle drei dieselbe wäre. Welche Empfindungen der alleinigen Erregungen je einem dieser Empfänger entsprechen, also der Farbton der „Grundempfindung", wurde von König und Dieterici durch Versuche an partiell Farbenblinden ermittelt, deren Farbsystem als durch Ausfall einer Grundempfindung entstanden angesehen wurde. Daß mit dieser zunächst nur plausiblen Annahme das Richtige getroffen wurde, zeigten Versuche von F. Exner[1]),

1) Zeitschr. f. Psych. u. Phys. 4, 241, 1892.

1) Wien. Ber. 111, 857, 1902.



der durch ganz unabhängige Beobachtungen die Durchschnittspunkte der Grundempfindungskurven an eben jenen Stellen fand, wo sie die Königschen Versuche auf Grund dieser Annahme verlangen. Als diese ausgezeichneten Farbtöne ergeben sich ein ins Purpur spielendes Rot, ein Grün, und ein Blau an der Grenze zum Violett. Die Ordinaten der Erregungskurven — es sind die Königschen Zahlen, die von Exner kleine Korrekturen erfahren haben — für jene Wellenlängen, für die hier beobachtet wurde, sind in Tabelle III unter „blau", „grün", „rot" eingetragen.

Ist O_1 eine solche Ordinate an der Stelle λ_1, so ist $O_1 d\lambda$ der Erregungsbeitrag aus dem Bereich zwischen λ_1 und $\lambda_1 + d\lambda_1$, und zwar bezogen auf die Energieverteilung $\varphi(\lambda)$ des Sonnenlichtes. Bezogen auf die Energieeinheit demnach

$$\frac{O_1 d\lambda}{\varphi(\lambda_1) d\lambda},$$

und bezogen auf das remittierte Licht mit der Energieverteilung $f(\lambda)$

$$\frac{f(\lambda_1)}{\varphi(\lambda_1)} O_1 d\lambda = \psi(\lambda_1) O_1 d\lambda.$$

Die Gesamterregung des betreffenden Empfängers durch das ganze vom Pigment kommende Licht ist daher

$$\int \psi(\lambda) O d\lambda,$$

erstreckt über das ganze sichtbare Spektrum. Es wird also, um z. B. die Blau-Erregung b durch ein Pigment kennen zu lernen, jeder Remissionskoeffizient $\psi(\lambda_1)$ mit der zugehörigen Blau-Ordinate O_1 multipliziert, die Produkte liefern eine Kurve über der λ-Abszisse, und deren Planimetrierung gibt den gesuchten Wert für blau b; und analog ergeben sich die Zahlen für rot r und grün g. —

3. Damit wäre die erforderliche Reduktion der Dimension erreicht. Aber die drei neuen Koordinaten r, b, g, die die Parameter des physiologischen Zwischenapparates im Transformationsschema: objektives Licht—Empfänger—Empfindung darstellen, sind noch nicht anschaulich genug und erlauben in dieser Form noch keine Voraussage über die Art der Empfindung; wir werden sie vielmehr für diesen Zweck neuerlich zu transformieren haben in drei solche Koordinaten, die wir erfahrungsgemäß als eindeutig und anschaulich gefunden haben zur Beschreibung aller jener Verschiedenheiten, die eine Gesichtsempfindung aufweisen kann. Als solche wurden von Helmholtz gewählt: Farbton, Sättigung und Helligkeit. Ein Zwang, gerade diese Begriffe als Koordinaten einzuführen, besteht nicht und ist die Wahl und nähere Definition einigermaßen Geschmacksache; eine gewisse Garantie für die Angemessenheit dieser Wahl liegt wohl darin, daß sie von Helmholtz, diesem gründlichen Kenner und scharfen Beobachter, getroffen wurde; leider und anscheinend zum Nachteil der Sache wird dieser Umstand heute oft unterschätzt.

Die Überführung der drei Grunderregungswerte in zunächst zwei dieser Koordinaten, und zwar die Bestimmung der Sättigung (bzw. Reinheit) und des Farbtones geschieht mit Hilfe des Newtonschen Farbendreieckes. Man denkt sich die drei Grunderregungen r, b, g mit soviel Gewichtseinheiten als jeweils ihren Zahlenwerten entspricht, an drei Punkten der Papierebene parallel zueinander und senkrecht zum Papier angreifen und bestimmt den Schwerpunkt, dessen Ort als Symbol der erregten Farbempfindung angesehen wird. Der Sinn dieser Darstellung liegt darin, daß man, wenn einmal für eine Reihe von stets reproduzierbaren und definierten Standardfarben (das unzerlegte Sonnenlicht als „weiß" und die Spektralfarben) die Orte in der Farbebene gegeben sind, die zu klassifizierende Farbe auf die Standardfarben relationiert werden kann. Um einfache Verhältnisse zu schaffen, ist es üblich, die Angriffspunkte der ursprünglichen Koordinaten in die Eckpunkte eines gleichseitigen Dreieckes zu verlegen. Sind die Kräfte gleich groß, also $b = g = r$, so liegt der Schwerpunkt in der Dreiecksmitte und sein Ort repräsentiert definitionsgemäß das „weiß". Je nach dem Wert des Verhältnisses $b:g:r$ nimmt der Schwerpunkt verschiedene Lagen ein; ist (Fig. 1) der Rotpunkt Ursprung eines rechtwinkligen Koordinatensystems, so ergeben sich aus den Schwerpunktsbedingungen $MX = \Sigma mx$ und $MY = \Sigma my$ die Schwerpunktskoordinaten X und Y zu:

$$X = (b + \tfrac{1}{2} g) \frac{l}{b + g + r};$$

$$Y = \sqrt{\tfrac{3}{4}}\, g \frac{l}{b + g + r},$$

wenn l die Länge der Dreieckseite bedeutet. Auf diese Art werden zunächst die Orte der Spektralfarben eingetragen, deren Anteile r, b, g aus den Ordinaten der Grunderregungskurven (Tab. III) bekannt sind. Man erhält die stark ausgezogene Linie mit den beigeschriebenen Wellenlängen in $\mu\mu$; auf der Geraden, die ihre Endpunkte verbindet, liegen alle durch additive Mischung des spektralen Endrots mit dem spektralen Endviolett entstehenden Farben, also die Purpurtöne. Von der Spektralkurve und dieser Purpurgeraden wird die sog. „reelle

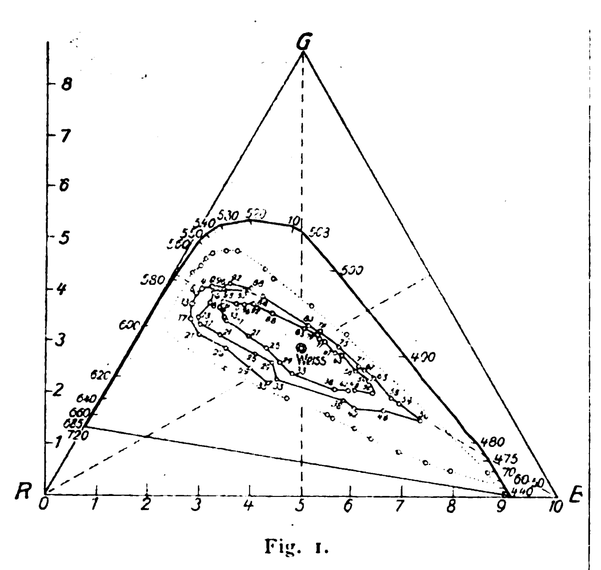


Fig. 1.

Farbfläche" umschlossen; aus leicht ersichtlichen Gründen liegen alle reellen Farben innerhalb derselben. Die analoge Einzeichnung der aus Tab. I, II und III nach dem früher beschriebenen Vorgange berechenbaren Orte für die Pigmentfarben ergibt (von innen nach außen) die beiden geschlossenen Farbkurven für *ia* und *nc*, die offene für den unvollständigen „Kreis" *pa*, und die punktierte äußerste für die errechnete Lage der sog. „Vollfarben", die in der Ostwaldschen Theorie einen ausgezeichneten Platz einnehmen.

Indem wir durch irgendeinen dieser Farbpunkte f eine Gerade legen, die ihn mit dem Weißpunkt W verbindet und die Dreieckseite in einem Punkte F trifft, können wir f als Schwerpunkt zweier in W und F angreifenden Gewichte, bzw. als gemischt aus W und F auffassen. Damit „weiß" empfunden wird, müssen alle 3 Grunderregungen einen gemeinsamen, gleich großen Betrag aufweisen; da eine Empfindung in F, weil diese auf der Dreieckseite liegt, aus dem Zusammenwirken von nur 2 Grunderregungen entstanden ist, so repräsentiert F eine völlig reine Farbe ohne „weiß". Da weiteres f aus F und W gemischt werden kann, so gibt F den Anteil an reiner Farbe, W den Anteil an Weiß. Die Größe des letzteren ist sofort gegeben durch den dreifachen kleinsten Erregungswert; ist z. B. b die kleinste unter den Zahlen für r, b, g, so ist $3b$ der Anteil an Weiß und

$$r + b + g - 3b = F$$

der Anteil an reiner Farbe; womit das quantitative Maß für die Reinheit bzw. für den Weißanteil gegeben ist. Ob diese Anteile absolut oder in Prozenten ausgedrückt werden, ist Sache des Übereinkommens und bestimmt sich lediglich nach der Zweckdienlichkeit. Ich schließe mich hier der von F. Exner vorgeschlagenen Definition an, wonach unter „Sättigung" der Anteil reiner Farbe in Prozenten des Gesamtwertes, also $\frac{F}{F+W}$ zu verstehen ist. Alle auf der Geraden $\overline{FW}$ liegenden Farben sind also aus derselben reinen Farbe F durch verschiedenen Zusatz von Weiß entstanden; auch der Schnittpunkt der Geraden mit der Spektralkurve hat den gleichen Farbton, der somit für die ganze Familie in Wellenlängeneinheiten angebbar ist. Trifft die Weißgerade auf den nicht durch Zahlenangaben definierten Purpurteil, so zeigt doch ihre Verlängerung nach rückwärts auf eine Spektralstelle, die, z. B. mit Klammerzeichen versehen, als komplementäre Wellenlänge den Farbton der betreffenden Purpurfarbe charakterisiert. — Die folgende Tabelle IV gibt für alle drei Farbkreise zunächst die Erregungsanteile r, b, g, ferner den Farbton und die Sättigung an. In den gleichen Einheiten ausgedrückt, ergäbe sich für die dem Vergleichsweiß zuzuschreibenden Erregungswerte die gemeinsame Zahl $b = g = r = 100$, so daß die Gesamterregung 300 wird; eine für später nötige Bemerkung. Da bei der Berechnung die von König bestimmten Grunderregungskurven verwendet wurden, so gelten die Angaben zunächst nur für das Auge Königs. Um zu sehen, inwieweit mein Auge in Übereinstimmung damit ist, wie stark also in diesem Falle die Individualität die allgemeine Gültigkeit der Aussage beschränkt, wurden zwei Proben vorgenommen, deren eine sich auf den Farbton allein bezieht, deren zweite Farbton und Sättigung zugleich betrifft.

Zur direkten Bestimmung des Farbtones wurde mit Hilfe eines „Polarimeters" die zum Farbpapier ähnlichste Spektralfarbe aufgesucht. Das Polarimeter besteht aus der Kombination eines Wollastonprismas mit einem Okularnikol derart, daß das erstere von zwei objektseitig gelegenen Öffnungen A und B vier Bilder $A_1 A_2 B_1 B_2$ gibt, von denen die zueinander senkrecht polarisierten A_2 und B_1 unmittelbar aneinanderstoßen und in bezug auf Helligkeit durch Verdrehen des Nikols gleich gemacht werden können. Das Auge erblickt jenseits von Nikol und Rochon durch die Öffnung A hindurch das von Tageslicht gut beleuchtete Farbblättchen und sah die Öffnung B durch eine mittels Kollimatorrohr, verdrehbares Prisma und Linse hergestellte Spektralfarbe homogen erleuchtet. Ohne die Nummern der in willkürlicher Folge eingelegten Farbblättchen zu kennen, also bei Ausschluß aller Voreingenommenheit,

wurde durch Verdrehen des Prismas und möglichste Abgleichung der Helligkeit mit dem Okularnikol die ähnlichste Farbe aufgesucht. Trotz des nicht unbeträchtlichen Sättigungsunterschiedes waren die vom Hilfsbeobachter abgelesenen Einstellungen überraschend genau. Das Resultat ist in Figur 2 wiedergegeben,

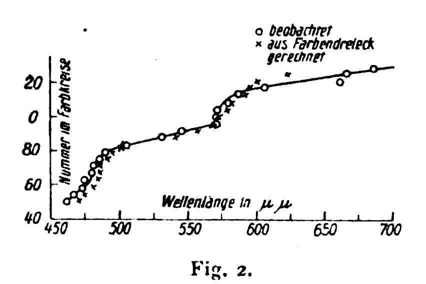


Fig. 2.

deren geringelte Punkte die direkte Beobachtung, deren gekreuzte Punkte die aus Tab. IV entnommenen Wellenlängen für den Kreis *nc* darstellen (vgl. auch die analoge Kurve in Fig. 4 auf S. 353 der zitierten Ostwaldschen Arbeit). Es zeigt sich im allgemeinen Übereinstimmung, im einzelnen aber immerhin merkbare Abweichungen, die im blauen Gebiet etwa — 10 $\mu\mu$, in grüngelben Null und im roten starke positive Werte annehmen; ich halte sie für reell und im Unterschied meiner Augen gegenüber den Königschen begründet. Denn die analogen Beobachtungen am Farbkreis *ia* und *pa* ergaben im wesentlichen dasselbe Resultat, wenn auch bei den sehr ungesättigten *ia*-Farben die Einstellungen ungenauer, bei *pa* dagegen genauer waren.

Zu einem ähnlichen Ergebnis führt die zweite Probe. Der Herstellung entsprechend sollten die um je 50 Einheiten auseinander liegenden Pigmente, also z. B. Nr. 4 und 54, angenähert (für das Auge Ostwalds) komplementär sein. Für das Auge Königs wäre es in diesem Beispiele exakt der Fall, wie Fig. 1 zeigt, wo diese beiden Farben des *nc*-Kreises auf ein und derselben durch den Weißpunkt gehenden Geraden liegen. Aus Tab. IV ergibt sich für Nr. 4 die Gesamterregung

$$r + b + c = 121,3,$$

für Nr. 54

$$r' + b' + c' = 78,3.$$

Wir fragen, wieviel von jeder Farbe zu nehmen ist, damit ihre additive Mischung ein neutrales Grau ergibt, also im Punkt W liegt. Nach dem Hebelgesetz offenbar solche Vielfache a und b obiger Mengen, daß $121,3 a x_1 = 78,3 b x_2$ ist, wenn unter x_1 und x_2 die mit dem Zirkel abzugreifenden Hebelarme, also die Entfernungen der Pigmente vom Weiß bedeuten. In diesem Beispiele ergäbe sich $\frac{a}{b} = 0,931$. Berechnet man in gleicher Weise für die anderen Farbenpaare 0/50, 8/58, 13/53 .... das Verhältnis $\frac{a}{b}$,

Tabelle IV.

	Farbkreis *ia*					Farbkreis *nc*					Farbkreis *pa*				
	b	*g*	*r*	*λ*	*s*	*b*	*g*	*r*	*λ*	*s*	*b*	*g*	*r*	*λ*	*s*
Nr. 0	26,7	71,4	68,2	573	0,520	12,3	52,0	48,2	572	0,699	13,8	67,9	63,7	571	0,715
„ 4	19,2	69,4	70,0	576	0,636	12,7	54,7	53,9	578	0,769	10,4	66,0	65,9	573	0,85
„ 8	18,8	61,7	65,3	581	0,616	12,5	50,5	53,7	581	0,654	8,2	53,3	56,5	580	0,79
„ 13	19,0	50,7	56,3	585	0,547	10,5	38,1	50,2	592	0,681	7,4	43,6	50,6	585	0,78
„ 17	19,1	48,2	54,4	587	0,531	8,4	29,5	38,4	594	0,670	7,6	38,6	48,0	590	0,76
„ 21	29,8	49,1	57,8	595	0,345	12,7	27,8	36,9	598	0,507	9,0	26,9	38,1	600	0,64
„ 25	38,8	48,4	59,1	610	0,203	21,7	27,5	37,1	622	0,273	14,8	26,1	37,8	608	0,44
„ 29	40,4	39,0	50,7	(497)	0,101	27,2	27,6	37,8	730	0,145	18,3	20,5	32,5	(495)	0,23
„ 33	41,6	32,9	45,5	(502)	0,178	25,1	20,4	32,2	(498)	0,235	18,6	14,9	25,8	(498)	0,25
„ 38	44,5	24,0	30,9	(552)	0,275	35,5	16,2	22,9	(550)	0,353					
„ 42	45,2	22,8	27,2	(566)	0,282	35,6	13,4	19,0	(556)	0,409					
„ 46	46,4	22,8	25,9	(571)	0,281	35,8	12,6	16,6	(568)	0,418					
„ 50	49,9	21,6	22,0	477	0,307	48,9	12,9	13,8	470	0,358					
„ 54	51,6	26,7	24,7	482	0,280	46,2	16,2	15,9	473	0,391					
„ 58	53,4	31,7	28,4	484	0,242	51,1	20,7	18,7	481	0,381					
„ 63	57,3	42,1	36,0	484	0,202	53,0	27,5	23,0	484	0,334					
„ 67	55,1	44,4	37,2	490	0,184	49,8	29,4	24,2	485	0,299					
„ 71	50,3	47,1	37,8	495	0,162	41,7	25,6	21,9	485	0,265					
„ 75	42,6	41,7	34,4	496	0,130	34,4	28,5	22,2	491	0,218					
„ 79	41,9	42,6	34,3	497	0,133	26,9	27,8	21,5	495	0,153					
„ 83	38,9	46,0	37,0	505	0,089	24,3	28,8	22,2	502	0,115					
„ 88	32,5	55,8	47,9	549	0,285	15,3	34,2	26,7	540	0,398	14,0	38,6	30,2	551	0,49
„ 92	28,4	64,5	56,1	563	0,427	13,2	38,5	31,3	557	0,542	14,6	55,2	46,0	564	0,62
„ 96	29,2	71,8	66,0	570	0,476	13,1	47,0	41,9	568	0,871	13,1	58,7	58,2	571	0,69

so erhält man in graphischer Darstellung die gestrichelte Kurve der Fig. 3. Die zur Kontrolle bestimmte direkte Beobachtung erfolgte nach dem Vorgange Ostwalds mit Hilfe des früher erwähnten, ein wenig modifizierten Polarimeters. Die Öffnungen A und B wurden vergrößert und in solcher Entfernung vom Rochon angebracht, daß die Bilder A_2 und B_1, die früher nebeneinander lagen, sich jetzt überdeckten. Unter A und B lagen die vom Tageslicht beleuchteten komplementären Pigmente; ihr Verhältnis in der additiven Mischung des Mittelfeldes konnte durch den Nikol meßbar variiert werden. Die Hälfte dieses mittleren Mischfeldes wurde durch ein graues Blättchen passender Helligkeit abgedeckt, daß quer über beide Farbpapiere gelegt und daher in seiner Intensität unabhängig von der Nikolverdrehung war. Diesem Grau wurde die Farbe des Mischfeldes möglichst gleich gemacht. Die dazu nötigen Neutralisationsverhältnisse $\frac{a}{b}$ — gegeben durch $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$, weil zur Eliminierung von eventuell ungleicher Beleuchtung die Pigmente vertauscht wurden — sind in Fig. 3 geringelt

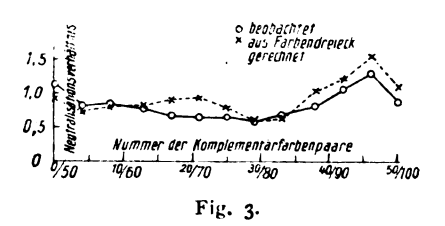


Fig. 3.

eingetragen und ergeben die ausgezogene Kurve. — Die Übereinstimmung zwischen Beobachtung und Berechnung ist hier, wenn auch der allgemeine Gang annähernd parallel verläuft, schlechter als in Fig. 2. — Schuld daran wird teilweise die Schwierigkeit der Beobachtung haben sowie Mängel in der Apparatur (zu kleine Gesichtsfelder). Zum Teil aber werden es wieder reelle Abweichungen sein, die in der Verschiedenheit der Augen begründet sind; so insbesondere um die Abszissenstelle 20/70 herum, wo rote Farben zur Verwendung kommen, die, wenn sie für Königs Auge (Fig. 1) komplementär sind, es für mein Auge (Fig. 2) nicht mehr sein können, da ich sie in anderem Farbton sehe.

Wenn aber die noch vorhandenen Unstimmigkeiten wirklich nur in der Individualität der Augen begründet sind — da solche Proben an homogenem Beobachtungsmaterial noch nicht durchgeführt wurden, ist der Schluß nicht sicher — so möge nur noch erwähnt werden, daß dies keineswegs eine Unvollkommenheit der Darstellung bedeuten würde. Im Gegenteil: Darstellungsversuche, die diesen Umstand verschleiern, werden zwar keine bessere Übereinstimmung in den Angaben der einzelnen Beobachter, wohl aber eine größere Verwirrung in den Begriffen und Anschauungen erreichen.

In bezug auf die erreichte Meßgenauigkeit, die sich ohne Schwierigkeit (günstigere Beleuchtung und Vermehrung der Beobachtungsstellen bei der Remissionsbestimmung) verbessern ließe, sei erwähnt, daß sich aus der wiederholten Analyse ein und derselben Farbe der mittlere prozentuelle Fehler in den Angaben für die Wellenlänge zu 0,5 Proz., für die Sättigung zu 2,6 Proz., für die Helligkeit (vgl. die nächste Mitteilung) zu 1,8 Proz. ergab. —

Wir rekapitulieren: Die spektralphotometrische Bestimmung der Remissionsfunktion bildet die Analyse der Pigmentfarben und liefert das Zahlenmaterial für ihre Klassifizierung. Mit Hilfe der bekannten Grunderregungskurven werden dann zunächst die Anteile b, g, r für jeden der drei im Auge tätigen Empfänger bestimmt und damit die Zahl der Farbkoordinaten auf drei reduziert. Statt dieser dem Empfindungsleben und dem Sprachgebrauch ungewohnten Koordinaten werden drei andere gewählt: Farbton F, Sättigung S und Helligkeit H, von denen die beiden ersteren mit Hilfe des Farbendreieckes aus den bekannten Werten r, b, g bestimmbar sind. Weil in der Dreiecksdarstellung sämtliche Farben des dreidimensionalen Farbenraumes auf einer zweidimensionalen Ebene Platz finden, so muß offenbar die bisherige Darstellung vieldeutig sein insofern, als zwei oder mehr Farben die ein und denselben Platz im Dreieck besetzen zwar im Farbton und Sättigung gleich sind, sich aber noch in der Helligkeit unterscheiden können. Da nun Farbton und Sättigung schon allein durch ihre Lage im Farbendreieck festgelegt sind, diese Lage aber nur von dem Verhältnis $r:b:g$ abhängt, so liegt der Versuch nahe, die Helligkeit als lineare Funktion von r, b, g darzustellen, also $H = \beta b + \gamma g + \varrho r$. — Der Inhalt der nächsten Mitteilung wird zeigen, daß dies, zumindest sehr angenähert, der Fall ist. —

Aus dem II. physikalischen Institut der Universität Wien.

(Eingegangen 22. März 1920.)



Ein einheitliches Dimensionssystem mit ungebrochenen Exponenten.

Von Robert Ettenreich.

Sehr viele Gesetze der Physik lassen sich auf die Form bringen

$$G = c \cdot G_1^{\alpha} \cdot G_2^{\beta} \cdot G_n^{\nu},$$

wobei die G physikalische Größen und c einen Proportionalitätsfaktor hedeuten. Aus der Zusammenstellung solcher Gesetze werden die Dimensionsformeln durch Weglassung der numerischen Beträge und willkürliche Festsetzung der Faktoren c gewonnen[1]).

Im C.G.S.-System wird die Dimension aller Größen auf Potenzprodukte von Länge, Masse und Zeit zurückgeführt, wobei sich auf elektrischem Gebiet Schwierigkeiten ergeben. Es wird nämlich über mehr Proportionalitätsfaktoren verfügt, als voneinander unabhängige Gleichungen vorhanden sind; so entsteht der Widerspruch zwischen dem elektrostatischen und elektromagnetischen Maßsystem.

Die Willkürlichkeit dieser Aufstellungen wird am besten aus einer Analogie klar. Mit der gleichen Berechtigung, mit der in den Coulombschen Gesetzen

$$K = \frac{1}{\delta} \cdot e^2 \cdot l^{-2} \text{ und } K' = \frac{1}{\mu} m^2{}_m l^{-2}$$

δ Dielektrizitätskonstante,
μ Permeabilität,
e elektrische Menge,
m_m magnetische Menge,
l Länge,

die Proportionalitätsfaktoren δ und μ dimensionslos gesetzt werden, kann man auch in der Newtonschen Formel

$$K = c m^2 \cdot l^{-2}$$

die Gravitationskonstante c gleich 1 wählen und aus der Beziehung

$$[m l t^{-2}] = [m^2 l^{-2}]$$

die Dimension der Masse

$$[m] = [l^3 t^{-2}]$$

ableiten[2]). Darauf läßt sich ein System aufbauen, das nur die zwei Grundgrößen Länge und Zeit enthält. In Tabelle I sind die wichtigsten Formeln dafür zusammengestellt. Es ist in sich ebenso widerspruchsfrei wie das elektrostatische oder das elektromagnetische C.G.S.-System, aber noch willkürlicher, da außer der Dimension der elektrischen Menge bzw. magnetischen Menge, auch die der mechanischen Masse vergewaltigt wurde.

Tabelle I.

Größe	Dimension	Größe	Dimension	Anm.
Länge	l	Elektr. Menge	$l^3 t^{-2}$	elektrostatisch
Zeit	t	Magn. Menge	$l^2 t^{-1}$	
Masse	$l^3 t^{-2}$	Strom	$l^3 t^{-3}$	
Dichte	t^{-2}	Spannung	$l^2 t^{-2}$	
Energie	$l^5 t^{-4}$	Widerstand	$l^{-1} t$	

Außerdem mangelt die Eindeutigkeit, indem wichtige verschiedene Begriffe wie Masse und Elektrizitätsmenge das gleiche Symbol erhalten, ähnlich wie im C.G.S.-System Länge und elektrische Kapazität. — Das Beispiel soll nur zeigen, daß außer den bestehenden Systemen noch sehr viele andere möglich sind[1]).

Man muß sich daher die Frage vorlegen: Welche Größen müssen als Grundgröße gewählt, und wie soll über die Proportionalitätsfaktoren verfügt werden, damit das Formelgebäude möglichst einfach wird?

Einen Versuch in dieser Richtung, durch den die gebrochenen Exponenten verschwinden, bildet die Einführung von Energie (E), elektrischer Menge (e) und magnetischer Menge (m_m) an Stelle von l, m, t.

In Tabelle II sind in die ersten beiden Spalten die Dimensionen wichtiger Größen im elektrostatischen und elektromagnetischen Maß im Länge-Masse-Zeitsystem eingesetzt, wobei die Proportionalitätsfaktoren der Coulombschen Gesetze, das sind Dielektrizitätskonstante δ und Permeabilität μ, offen gelassen sind. Die Auflösung der beiden Gleichungstripel

$$E = m l^2 t^{-2} \qquad E = m l^2 t^{-2}$$
$$e = \delta^{1/2} m^{1/2} l^{3/2} t^{-1} \qquad e = \mu^{1/2} m^{-1/2} l^{1/2}$$
$$m_m = \delta^{-1/2} m^{1/2} l^{1/2} \qquad m_m = \mu^{1/2} m^{1/2} l^{3/2} t^{-1}$$

nach l, m, t, und Einsetzung in die Formeln der ersten und zweiten Spalte der Tabelle, ergibt die dritte und vierte Spalte das System Energie—elektrische Menge—magnetische Menge. Wie man sieht, verschwindet in diesem der Gegensatz zwischen elektrostatisch und elektromagnetisch auf elektrischem Gebiet, taucht dafür aber im mechanischen wieder auf. Wir verfügen nun über die Dimensionen von δ und μ, die ja bisher offengelassen wurden, derart, daß

1) Siehe z. B. R. J. Sowter, Nature 68, 23, 1903 On dimension of physical quantitys.

2) Ein ähnliches System stellt A. E. Haas auf: „Über ein Maßsystem, das die Längeneinheit und die Lichtgeschwindigkeit als Grundeinheiten enthält". Diese Zeitschr. 6, 204, 1905.

1) Es sei hier hingewiesen auf die Systeme von K. Schreber (Verh. d. 76. Vers. deutscher Naturforscher und Ärzte 1904) und E. Mattenklodt, die als Grundeinheiten Kraft—Länge—Zeit, bzw. Kraft—Länge—Zeit—Winkel benutzen.

Tabelle II.

	1	2	3	4	5	6
Energie	ml^2t^{-2}	ml^2t^2	E	E	E	m
Elektrische Menge .	$\delta^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-1}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}$	e	e	e	e
Magnetische Menge	$\delta^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-1}$	m_m	m_m	m_m	mle^{-1}
Strom	$\delta^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-2}$	$\mu^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$	$m_m^{-1}E$	$m_m^{-1}E$	$m_m^{-1}E$	$l^{-1}e$
Spannung	$\delta^{-1/2}m^{1/2}l^{1/2}t^{-1}$	$\mu^{1/2}m^{1/2}l^{3/2}t^{-2}$	$e^{-1}E$	$e^{-1}E$	$e^{-1}E$	me^{-1}
Widerstand	$\delta^{-1}l^{-1}t$	μlt^{-1}	$e^{-1}m_m$	$e^{-1}m_m$	$e^{-1}m_m$	mle^{-2}
Kapazität	δl	$\mu^{-1}l^{-1}t^2$	e^2E^{-1}	e^2E^{-1}	e^2E^{-1}	$m^{-1}e^2$
Selbstinduktion . . .	$\delta^{-1}l^{-1}t^2$	μl	$m_m^2E^{-1}$	$m_m^2E^{-1}$	$m_m^2E^{-1}$	ml^2e^{-2}
Dielektr. Konstante	δ	$\mu^{-1}l^{-2}t^2$	δ	$\mu e^2m_m^{-2}$	em_m^{-1}	$m^{-1}l^{-1}e^2$
Permeabilität	$\delta^{-1}l^{-2}t^2$	μ	$\delta m_m^2e^{-2}$	μ	$e^{-1}m_m$	mle^{-2}
Länge	l	l	$\delta^{-1}e^2E^{-1}$	$\mu^{-1}m_m^2E^{-1}$	em_mE^{-1}	l
Zeit	t	t	em_mE^{-1}	lm_mE^{-1}	em_mE^{-1}	l
Masse	m	m	$\delta^2e^{-2}m_m^2E$	$\mu^2e^2m_m^{-2}E$	E	m
Geschwindigkeit . .	lt^{-1}	lt^{-1}	$\delta^{-1}em_m^{-1}$	$\mu^{-1}e^{-1}m_m$	1	1
Beschleunigung . . .	lt^{-2}	lt^{-2}	$\delta^{-1}m_m^{-2}E$	$\mu^{-1}e^{-2}E$	$e^{-1}m_m^{-1}E$	l^{-1}
Kraft	mlt^{-2}	mlt^{-2}	$\delta e^{-2}E^2$	$\mu m_m^{-2}E^2$	$e^{-1}m_m^{-1}E^2$	ml^{-1}
Bewegungsgröße . .	mlt^{-1}	mlt^{-1}	$\delta e^{-1}m_mE$	$\mu em_m^{-1}E$	E	m

auch dieser Unterschied verschwindet; die gemeinsame Bedingung hierfür lautet

$$\delta\mu^{-1} = e^2 m_m^{-2}.$$

Unter den unendlich vielen Lösungen dieser Gleichung sind drei durch Symmetrie ausgezeichnet

$$\delta = e^2,\ \mu = m_m^2 \qquad \delta = m_m^{-2},\ \mu = e^{-2}$$

$$\delta = \frac{e}{m_m},\ \mu = \frac{m_m}{e}.$$

Wenn wir die letztere verfolgen, ergeben sich die in Spalte 5 eingetragenen Werte als gemeinsames Maßsystem. In diesem wird die Geschwindigkeit dimensionslos, denn für Länge und Zeit ergibt sich die gleiche Formel. Es liegt daher nahe, diese gemeinsame Dimension als Grundgröße an Stelle des Hilfsbegriffes der magnetischen Menge in das System aufzunehmen. Da Masse und Energie ebenfalls gleiche Dimension bekommen, wird als gemeinsames Symbol für beide wieder m eingeführt.

$$e \cdot m_m \cdot m = l, \text{ daraus } m_m = l \cdot e^{-1} \cdot m,$$

das ergibt, in Spalte 5 eingesetzt, die Spalte 6, das System Länge—Masse—Elektrische Menge.

Die Vereinfachung gegenüber den jetzt gebräuchlichen Länge-Masse-Zeitsystemen ist nicht nur im elektrischen, sondern auch im mechanischen Teil weitgehend. Die gebrochenen Exponenten sind verschwunden, der Gegensatz zwischen elektrostatisch und elektromagnetisch ist ausgeglichen.

Daß die Geschwindigkeit dimensionslos erscheint, ist mit dem Beharrungsgesetz gut vereinbar. Die Gleichsetzung der Dimension von Länge und Zeit entspricht überdies dem Begriff des Minkowskischen Raumes, wenn man als Einheit der Geschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit wählt.

Um nun auch von der Willkür der den Erdmaßen entnommenen Einheiten des C.G.S.-Systems frei zu werden, könnte man als Einheiten für Masse das Wasserstoffatom ($8{,}4 \times 10^{-24}$ g), für Elektrizitätsmenge das Elektron

($4{,}6 \cdot 10^{-10}$ stat. E.)

wählen und die Zeiteinheit aus der Beziehung

$$[h] = [E \cdot t]$$

aus dem Wirkungsquantum gewinnen. Sie wäre gleich dem Wirkungsquantum

($h = 6{,}4 \cdot 10^{-27}$ g cm^2/sec)

gebrochen durch die Energie eines mit Lichtgeschwindigkeit bewegten Wasserstoffatoms ($3{,}8 \cdot 10^{-3}$ erg), d. i. $1{,}7 \cdot 10^{-23}$ sec. Die Längeneinheit ist dann jene Strecke, die vom Licht in dieser Zeiteinheit zurückgelegt wird, also $5{,}1 \cdot 10^{-13}$ cm.

Mit den vorstehenden Ausführungen wird keineswegs die praktische Durchführbarkeit des dargelegten Systems behauptet; diese ist ja schon dadurch ausgeschlossen, daß die gewählten Grundeinheiten bisher noch zu wenig genau bestimmt werden konnten. Auch ist es keineswegs frei von Willkürlichkeiten. Es sollte nur der antropomorphe Charakter des üblichen Maßsystems an einem Gegenbeispiel aufgezeigt werden; weil zufällig der menschlichen Erkenntnis die Mechanik am nächsten lag, hat man ihr die Grundgrößen entnommen und diese dann zwangsweise in andere Gebiete der Physik verpflanzt, dabei entsprechend dem historischen Fortschreiten

der Wissenschaft willkürlich Vereinfachungen aufstellend.

Der Ausdruck $m^{1/2} l^{3/2} t^{-1}$ sagt somit über das Wesen der elektrischen Ladung ebensowenig aus, als der Name Elektrizität und bedeutet nichts als ein konventionelles Symbol.

Zusammenfassung.

1. Durch Einführung der Grundeinheiten Energie, Elektrizitätsmenge und Länge (an Stelle von Länge, Masse, Zeit) gelingt die Aufstellung eines Dimensionssystems, das keine gebrochenen Exponenten aufweist und den Gegensatz zwischen elektrostatisch und elekromagnetisch überbrückt.

2. In Übereinstimmung mit der Relativitätslehre bekommen Weg und Zeit, Energie und Masse gleiche Dimensionen: die Geschwindigkeit erscheint dadurch dimensionslos.

3. Es wird vorgeschlagen, die Einheiten dieses Systems aus den universellen Naturkonstanten: Lichtgeschwindigkeit, Masse des H-Atoms, Elektron und Wirkungsquantum herzuleiten.

Wien, Radiotechnische Versuchsanstalt, am 1. Januar 1920.

(Eingegangen 12. Januar 1920.)

Bestimmung von Ort und Zeit des Ursprungs seismischer Oberflächenwellen.

Von C. Mainka.

In Nr. 1 dieser Zeitschr., S. 7 bringt K. Mack: „Über Weltbeben und lange Wellen" Ergebnisse einer Untersuchung, in der Absicht unternommen, um mit Hilfe der die Erde mehrfach umkreist habenden Oberflächenwellen einen brauchbaren Wert für die Entfernung Δ des Epizentrums vom Beobachtungsort B zu erhalten. Nach IVb und d S. 9 ist:

$$\Delta = \frac{V}{2}(t_3 - t_2) = \frac{U - V \cdot (t_4 - t_3)}{2}.$$

Da sich t_1 nicht immer einwandfrei bestimmen läßt, wird von IVa und c abgesehen; für V sollen genäherte Mittelwerte angenommen werden.

Lassen sich solche Δ-Bestimmungen nach Mack für mehrere geeignet gelegene B machen, so ist es in einfacher Weise möglich, den Ausgangsort der langen Wellen festzulegen, und zwar unter Benutzung der Daten t_2, t_3, t_4.

Sehr einfach geschieht dies, wie ersichtlich, mit Hilfe eines Globus. Statt eines solchen kann auch eine Karte benutzt werden. Einige Seismologen haben nach dem Beispiel von Grablovitz für ihre Erdbebenwarten Karten angefertigt, die in bezug auf die fragliche Warte B äquidistante Linien enthalten. Für eine dauernde Zusammenarbeit mehrerer bestimmter Erdbebenwarten B_1, B_2, B_3... empfiehlt sich die Anfertigung einer Karte mit den Systemen solcher Kurven für jede der Warten B_1, B_2, B_3.... Pausblätter mit Kurven gleicher Entfernung je für B_1, B_2... besonders gezeichnet, erleichtern an der Hand einer Grundkarte diese genügend genaue zeichnerische Methode noch mehr[1]).

Die übliche Bestimmung des Ausgangsortes seismischer Wellen mit Hilfe der einleitenden Wellen ist wegen der Ungenauigkeit des Einsatzes oder des Fehlens dieser oft nicht möglich. Nicht selten verzeichnen die Seismographen stundenlang langperiodische Wellen. Aus Mangel an geeigneten Hinweisen ließ sich sonst der Ausgangsort nicht ermitteln.

Die von K. Mack gegebenen Formeln lassen sich schließlich also auch für eine solche wertvolle Ortsbestimmung verwenden. Kann der Ort des Epizentrums auch auf andere Weise bestimmt werden, so ist es von Wert, zu untersuchen, ob beide Orte innerhalb der Genauigkeit zusammenfallen[2]).

Auch die Ausgangszeit t_0 der langen Wellen vom Ausgangsort läßt sich aus den von Mack gegebenen Beziehungen ermitteln. Wird V als konstant angenommen, so wird ohne Kenntnis von Δ:

$$t_0 = t_2 - \tfrac{1}{2}(t_4 - t_1)$$

oder

$$t_0 = \tfrac{1}{2}(3t_2 + t_3 - 2t_4).$$

Oft läßt sich t_0 mit Hilfe der einleitenden Wellen bestimmen, auch wäre ein Vergleich der beiden erhaltenen Zeitbestimmungen von Wert[2]).

Die Zeit t_1 läßt sich sowohl aus dem Seismogramm ablesen, als auch mit Hilfe der t_2, t_3, t_4 errechnen. Der erhaltene Unterschied kann als Anhalt für die Genauigkeit solcher Bestimmungen gelten.

1) Diese soweit bekannt noch nicht angewendete Arbeitsweise ist sehr einfach. Die Vorarbeiten müssen wie bei allen anderen graphischen Verfahren allerdings erst einmal getan sein.

2) Ob Ausgangsort und -zeit der langen Wellen mit dem Bebenort und der Bebenzeit zusammenfallen, wäre dann zu untersuchen.

Potsdam, 6. Februar 1920.

(Eingegangen 22. März 1920.)

Zur Quantentheorie des Viellinienspektrums des Wasserstoffs[1]).

Von M. Wolfke.

Bekanntlich besitzt Wasserstoff außer den Serienlinien noch das sogenannte Viellinienspektrum und das Schumannspektrum. Diese beiden Spektra enthalten zusammen in dem Intervall zwischen 1000 Å und 8000 Å ca. 1300 Linien, wobei wahrscheinlich damit die gesamte Linienzahl noch nicht erschöpft ist.

Die Leistungen des Bohrschen Atommodells auf dem Gebiete der Serienspektren, speziell bei Wasserstoff und Helium, lassen die Erwartung zu, daß auch der gesamte Emissionsvorgang dieser beiden Elemente auf diesem Wege zu deuten ist. Bereits vor drei Jahren beschäftigte sich Glitscher[2]) mit dieser Frage und wies auf einen gewissen Zusammenhang zwischen der Intensitätsverteilung im Viellinienspektrum und der Lage der Linien der Balmerserie hin. Glitscher und auch früher Nicholson[3]) versuchten den Vorgang der Assoziation zweier Wasserstoffatome zu quanteln, um daraus eine Erklärung für das Viellinienspektrum zu gewinnen. Es ist jedoch bis heute nicht gelungen, das Viellinienspektrum und die Linien im Schumanngebiet quantentheoretisch zu erklären.

In dieser Mitteilung soll auf eine Möglichkeit hingewiesen werden, wie man im Anschluß an das Debyesche[4]) Modell des Wasserstoffmoleküls ein Spektrum mit vielen tausenden Linien im sichtbaren, ultravioletten und Schumann-Gebiet erhalten kann. Es werden dabei die Bohrschen Quantenansätze nicht direkt auf das neutrale, sondern auf das positiv geladene Wasserstoffmolekül angewandt, was mit der Auffassung von Stark[5]), daß der Träger des Viellinienspektrums des Wasserstoffs das positive Molekülion H_2^+ ist, gut übereinstimmt.

Das positiv geladene Wasserstoffmolekül.

Das positive Molekülion des Wasserstoffs besteht aus zwei Wasserstoffkernen und einem Elektron. Es lassen sich verschiedene mehr oder weniger stabile Konfigurationen dieser drei Massen ausdenken, doch ist aus Symmetriegründen diejenige die natürlichste und einfachste, bei welcher die beiden Kerne auf einem Kreise rotieren, in dessen Zentrum sich das Elektron befindet.

1) Aus den Mitteilungen d. Phys. Ges. Zürich 1919.
2) K. Glitscher, Münchn. Ber. S. 125, 1916.
3) Nicholson, Monthly Not. of Roy. Astr. Soc. **74**, 425.
4) P. Debye, Münchn. Ber. S. 1, 1915.
5) J. Stark, Ann. d. Phys. (4) **52**, 221 u. **54**, 111, 1917.

Die Gleichgewichtsbedingung für die Kerne ist durch die Gleichung:

$$\frac{e^2}{R^2}=\frac{e^2}{4R^2}+\frac{Mv^2}{R} \qquad (1)$$

gegeben, wobei e die Elementarladung, R den Radius des Kernkreises, M die Masse eines Kernes und v die Peripheriegeschwindigkeit bedeuten.

Die statischen Bahnen werden durch den Bohrschen Ansatz:

$$Mv_iR_i=i\cdot\frac{h}{2\pi} \qquad (2)$$

bestimmt. Die Anwendung dieses Ansatzes auf die Wasserstoffkerne ist nicht neu und wurde bereits von Lenz[1]) zur Erklärung des Kernmechanismus der Atome höherer Atomgewichte herangezogen.

Aus den Gleichungen (1) und (2) ergibt sich der Radius des i^{ten} Ringes:

$$R_i=\frac{i^2h^2}{3\pi^2e^2M}. \qquad (3)$$

Die kinetische Energie E_K der beiden Kerne ist:

$$E_K=2\cdot\frac{Mv^2}{2}=\frac{3e^2}{4R_i}.$$

Die potentielle Energie E_P:

$$E_P=E_\infty-2\cdot\frac{e^2}{R}+\frac{e^2}{2R}=E_\infty-\frac{3e^2}{2R_i}.$$

Die gesamte Energie des Systems E_i, im Falle wo sich die beiden Kerne auf dem i^{ten} Kreis befinden, ist gleich:

$$E_i=E_\infty-\frac{3e^2}{4R_i}=E_\infty-\frac{9\pi^2e^4M}{4i^2h^2}, \qquad (4)$$

wo E_∞ die Energie des Systems bedeutet, wenn alle Ladungen unendlich voneinander entfernt sind.

1. Der innerste Kernring. Aus der Gleichung (3) ist ohne weiteres zu ersehen, daß die Radien der Kernkreise für gleiche Quantenzahl bedeutend kleiner sind, als diejenigen der Elektronenkreise beim Wasserstoffatom. So z. B. ist der innerste theoretisch mögliche Kreis mit der Quantenzahl $i=1$ von der Größenordnung des Elektrons selbst. Soll jedoch das positive Molekülion des Wasserstoffs Dimensionen von gleicher Größenordnung wie das Molekül selbst haben, so muß der innerste tatsächlich zulässige Kernkreis eine wesentlich höhere Quantenzahl besitzen. Wir wollen seine Quantenzahl mittels der Ionisationsspannung berechnen.

1) W. Lenz, Münchn. Ber. 1918.

Nach den neuesten Messungen[1]) (7) beginnt im Wasserstoff bei 11 Volt eine merkliche Ionisation. Diese Spannung von 11 Volt wird als Ionisationsspannung des Wasserstoffmoleküls aufgefaßt. Die Energie des neutralen Wasserstoffmoleküls vor der Ionisation ist[2]):

$$E_\infty - \frac{\pi^2 e^4 m (3\sqrt{3}-1)^2}{4h^2} = E_\infty - \frac{(3\sqrt{3}-1)^2}{4} \cdot hN.$$

Die Energie des positiven Wasserstoffmoleküls nach der Ionisation ist nach der Formel (4):

$$E_\infty - \frac{9\pi^2 e^4 M}{4 i^2 h^2} = E_\infty - \frac{9M}{4m} \cdot hN \cdot \frac{1}{i^2}.$$

Setzen wir die Differenz der beiden Energien, d. h. die durch die Ionisation gewonnene Energie, gleich der Arbeit des ionisierenden Elektrons, bzw. seiner kinetischen Energie, die er unter der Wirkung der Ionisationsspannung von 11 Volt erhalten hat, so folgt:

$$\frac{(3\sqrt{3}-1)^2}{4} \cdot hN - \frac{9M}{4m} \cdot hN \cdot \frac{1}{i^2} = e \cdot \frac{11}{300},$$

woraus:

$$i = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{3}-1}{3}\right)^2 \cdot \frac{m}{M} - \frac{44}{2700} \cdot \frac{em}{hNM}}}$$

Wenn unsere Hypothese richtig ist, so muß der obige Ausdruck für i einen ganzzahligen Wert ergeben. Wir setzen folgende bekannte Werte ein[3]):

$$h = 6{,}55 \cdot 10^{-27}, \qquad N = 3{,}29 \cdot 10^{15},$$
$$\frac{M}{m} = 1844 \qquad e = 4{,}774 \cdot 10^{-10}$$

und erhalten für i den Wert:

$$i = 34{,}0. \tag{5}$$

Dieser Wert variiert nur wenig mit der Ionisationsspannung; so z. B. würde sich für i bei 11,3 Volt Ionisationsspannung der Wert 34,1 und bei 10,7 Volt — 33,9 ergeben. Man erhält also für i mit großer Genauigkeit eine ganze Zahl, nämlich 34. Wenn auch dieses Resultat nicht als ein eindeutiger Beweis für unser Strahlungsmodell gelten kann, so ist doch sehr auffallend, daß gerade die Ionisationsspannung von 11 Volt zu einem genau ganzzahligen Wert für i führt.

Wir wollen noch die Größe des 34ten Ringes bestimmen. Nach der Formel (3) haben wir:

$$R_{34} = \frac{34^2 \cdot h^2}{3\pi^2 e^2 M} = 0{,}465 \cdot 10^{-8}\,\text{cm},$$

also ein Wert von der gleichen Größenordnung, wie das neutrale Molekül, was sich gut in die üblichen Vorstellungen hineinfügt.

2. **Das Spektrum des positiven Wasserstoffmoleküls.** Bei unserem Modell des positiven Molekülions des Wasserstoffes haben wir mit kreisenden Wasserstoffkernen und nicht mit Elektronen zu tun. Um also eine Strahlung im Bohrschen Sinne zu erhalten, müssen wir den Bohrschen Strahlungsansatz auf die Kerne erweitern. Da wir dabei mit zwei Kernen zu tun haben, so wollen wir in gleicher Weise, wie wir es bei dem neutralen Molekül getan haben, jedem Kern ein Quant $h\nu$ zuordnen, so daß:

$$E_{i_1} - E_{i_1} = 2h\nu \tag{6}$$

wird.

Ob eine solche Erweiterung des Bohrschen Strahlungsansatzes auf die Kerne überhaupt zulässig ist, und ob dies auf obige Weise geschehen muß, läßt sich nicht voraussagen, da uns bis heute jede Grundlage für den Mechanismus des Strahlungsvorganges selbst fehlt, und nur eine genaue quantitative Prüfung an Hand von Spektralmessungen diesen Ansatz als berechtigt erweisen kann.

Aus den Gleichungen (4) und (6) erhalten wir für die ausgestrahlte Frequenz:

$$\nu = \frac{9M}{16m} \cdot N \left(\frac{1}{i_1^2} - \frac{1}{i_2^2}\right), \tag{7}$$

oder in Wellenlängen:

$$\lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{0{,}8791}{\frac{1}{i_1^2} - \frac{1}{i_2^2}}\ \text{Å}. \tag{8}$$

Die prinzipielle Frage ist dabei die, ob unser Modell imstande ist, das ungemein reiche Viellinienspektrum nebst dem Schumannspektrum zu liefern. Um das zu entscheiden, wollen wir hier die Zahl derjenigen möglichen Linien abschätzen, die von unserem Modell in dem fraglichen Spektralgebiet zwischen:

$$1000\ \text{Å} \text{ und } 8000\ \text{Å} \tag{9}$$

geliefert wird.

Vor allem berechnen wir die Grenzlinie der 34sten Serie, indem wir als $i$te Serie diejenige bezeichnen, die durch alle möglichen Sprünge auf den $i$ten Kreis entsteht. Aus der Formel (8) ergibt sich:

$$\lambda_{34,\infty} = 1016\ \text{Å}.$$

Diese kürzeste Linie des Modells liegt also noch innerhalb des betrachteten Wellenintervalls (9). Mit wachsendem i verschiebt sich die Grenzlinie $\lambda_{i,\infty}$ nach Rot hin. Wir wollen jetzt

1) Bergen Davis & F. S. Goucher, Phys. Rev. (2) 10, 101, 1917.
2) M. Wolfke, diese Zeitschr. 17, 71, 1916, Formel (7).
3) Vgl. M. Wolfke, diese Zeitschr. 17, 198, 1916.

dasjenige i berechnen, bei dem die kürzeste Linie noch innerhalb des betrachteten Intervalls (9) liegt; das führt zu der Bedingung:

$$\frac{0{,}8791}{\frac{1}{i^2}} \leq 8000,$$

woraus für i folgt:

$$i \leq 95.$$

So liefert also jede Serie, zwischen $i_1 = 34$ und $i_1 = 95$, Linien in das fragliche Frequenzintervall (9).

Wir berechnen jetzt, wie viele Linien einer $i$ten Serie in das obige Intervall (9) zu liegen kommen. Für diese Linien muß folgende Beziehung erfüllt sein:

$$\lambda_{i,\,i+k} \leq 8000,$$

oder nach (8):

$$\frac{0{,}8791}{\frac{1}{i^2} - \frac{1}{(i+k)^2}} \leq 8000,$$

woraus folgt:

$$k \geq \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{i^2} - 0{,}00011}} - i.$$

Es werden selbstverständlich nicht beliebig große Werte von k möglich sein, denn das Modell wird bei höheren Werten von $i + k$ unstabil.

Wir nehmen z. B. an, daß unser Modell sich bis ungefähr auf das 20fache ausdehnen kann, ohne die Stabilität zu verlieren. Daraus ergibt sich für den Radius des äußersten Ringes:

$$R_i = \frac{i^2 h^2}{3\pi^2 e^2 M} = 20 \cdot 0{,}465 \cdot 10^{-8} = \text{ca. } 10^{-7}\text{ cm},$$

dieser ist also noch ca. 10mal kleiner, als der Radius der Elektronenbahn beim Wasserstoffatom, die der 30ten Balmerlinie entspricht. Aus der obigen Gleichung finden wir:

$$i = \text{ca. } 160.$$

Die Zahl n_i der Linien, welche von der $i$ten Serie in das fragliche Wellenintervall (9) hineinfallen, ist also:

$$n_i = 160 - i - k = 160 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{i^2} - 0{,}00011}}.$$

In der Tabelle I sind die Zahlen n_i nebst den theoretischen Grenzen $\lambda_{i,\infty}$ für einige Serien angegeben.

Eine einfache Überlegung zeigt, daß unser Modell unter obigen Voraussetzungen ca. 4000 Linien in das Intervall des Viellinienspektrums und des Schumannspektrums liefern kann.

Tabelle I.

i	n_i	$\lambda_{i,\infty}$ in Å
34	124	1016
42	114	1551
52	98	2377
62	79	3379
72	51	4557
82	0	5911

Sollte das positive Wasserstoffmolekül sich bis ungefähr zu der Größe des 30ten Ringes der Balmerserie ausdehnen können, so wäre dann:

$$R_i = \frac{i^2 h^2}{3\pi^2 e^2 M} = \text{ca. } 4 \cdot 10^{-6}\text{ cm},$$

woraus für $i = $ ca. 1000 folgt. Dementsprechend wäre in diesem Falle:

$$n_i = 1000 - \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{i^2} - 0{,}00011}}.$$

Die entsprechende Linienverteilung über die einzelnen Serien ist für diesen Fall in der Tabelle II angegeben.

Tabelle II.

i	n_i	$\lambda_{i,\infty}$ in Å
34	964	1016
35	963	1077
45	945	1780
55	933	2659
65	911	3714
75	879	4945
85	811	6352
95	0	7934

Wir hätten in diesem Falle mehr als 50000 Linien zur Verfügung!

Diese Abschätzungen zeigen, daß unser Modell des positiven Wasserstoffions eine enorme Anzahl von Linien in das Gebiet des Viellinienspektrums und das Schumanngebiet zu liefern vermag, eine Zahl, die bedeutend größer ist, als die tatsächlich beobachtete. Dies wird durch die Anwendung der Strahlungsansätze von Bohr auf die Kerne erreicht. Da die Kernmasse ca. 1800mal größer ist, als diejenige des Elektrons, so rücken dadurch die statischen Bahnen enger zusammen und die Zahl der möglichen Sprünge wird enorm erhöht.

Sollte sich diese Auffassung bestätigen, so müßte das Viellinienspektrum und das Schumannspektrum des Wasserstoffs mindestens zum Teil, wenn nicht ganz, aus sehr vielen übereinander gelagerten Serien bestehen. Eine diesbezügliche quantitative Prüfung soll einer späteren Publikation vorbehalten werden.

Aus dieser Arbeit geht hervor, daß die Erweiterung der Bohrschen Quantenansätze auf die Kerne zu außerordentlich linienreichen Spektren führt, so daß derartige Modelle zur Erklärung komplizierter und linienreicher Spektra möglicherweise mit Erfolg dienen können.

Zürich, Oktober 1919.

(Eingegangen 8. Februar 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neue Sterne.

Von Hans Kienle.

(Schluß.)

Es erscheinen uns also zur Zeit t alle jene Teilchen leuchtend, welche auf der durch (1) dargestellten Fläche liegen. Diese entsteht durch Rotation eines Cartesischen Blattes um die X-Achse. Infolge der Kleinheit von r gegen ϱ kann indessen gesetzt werden:

$$\varrho - \varrho_0 = x = -r\cos\varphi,$$

so daß die Gleichung (1) übergeht in:

$$r = \frac{vt}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi}. \tag{2}$$

Diese Fläche entsteht durch Rotation eines Kegelschnittes mit der Exzentrizität $e = \frac{v}{c}$ und dem Parameter $p = vt$ um die X-Achse. N ist der eine Brennpunkt. Ist $v > c$, so stellt (2) ein Rotationshyperboloid dar, so zwar, daß für negative Werte von t derjenige Ast in Betracht kommt, für den N äußerer Brennpunkt ist (siehe Fig. 10), für positive t dagegen der Ast, für den N innerer Brennpunkt ist. Im ersteren Falle würde uns also die Kunde von der Katastrophe auf dem Wege über P früher erreichen als auf dem direkten Wege, es müßten schon leuchtende Nebelteilchen in der Umgebung der Nova sichtbar sein, bevor der Stern selbst aufleuchtete. Prinzipiell ist dieser Fall der Diskussion ebenso zugänglich wie $v < c$. Dagegen ist es verständlich, daß die Beobachtungen keine Entscheidung über sein tatsächliches Zutreffen zu liefern vermögen, da begreiflicherweise keine genügend lang exponierten Aufnahmen der Novagegend aus der Zeit kurz vor ihrem Aufleuchten vorliegen. Andererseits geht unsere ganze physikalische Erfahrung dahin, daß die Lichtgeschwindigkeit die höchste bekannte — die Relativitätstheorie postuliert sie ja geradezu als die größtmögliche — Geschwindigkeit darstellt, so daß auch aus diesem Grunde von einer weiteren Verfolgung der Annahme $v > c$ abgesehen werden kann. Wir beschränken uns daher auf $v \leq c$ wobei dann nur positive Werte von t in Betracht kommen.

Breiten sich die Vorgänge mit Lichtgeschwindigkeit aus, dann ist zur Zeit t die Oberfläche des Rotationsparaboloids $r(1 + \cos\varphi) = ct$ beleuchtet. Für $v < c$ stellt (2) ein Rotationsellipsoid dar, das sich der Kugel um so mehr nähert, je kleiner v wird.

Nun wird aber die Katastrophe nicht ein momentanes Ereignis darstellen, sondern der Ausbruch wird vielmehr eine gewisse Zeit $\triangle t$ andauern. Dann liegen die zur Zeit t leuchtenden Teilchen zwischen den beiden Rotationsflächen:

$$\left.\begin{aligned} r &= \frac{vt}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi} \\ \text{und} \quad r &= \frac{v(t - \Delta t)}{1 + \frac{v}{c}\cos\varphi}. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Damit sind die Entwicklungen so weit geführt, als es möglich ist, ohne sich für eine bestimmte Hypothese über die Natur der Nebelerscheinungen selbst zu entscheiden. Wir wollen uns jetzt zunächst der zweiten Art der oben genannten Hypothesen zuwenden, die man zusammenfassend als

Strahlungshypothesen

bezeichnen kann. Der Grundgedanke ist der folgende: Bei der Katastrophe geht von der Nova eine primäre Strahlung aus — als welche im einfachsten Falle die Lichtwelle selbst zu betrachten ist — und diese löst in der die Nova umgebenden Nebelmaterie eine sekundäre Lichtstrahlung aus, die ins Auge des Beobachters gelangt. Die einfache Reflexionstheorie wurde damals gleichzeitig von Kapteyn[1]), Seeliger[2]) und W. E. Wilson[3]) aufgestellt, insbesondere aber von Seeliger in den obengenannten beiden Aufsätzen[4]) ein-

1) Astr. Nachr. **157**, 201.
2) Astr. Nachr. **157**, 255.
3) Nature **65**, 198.
4) Astrophys. Journal **16**, 4 und **20**, 2.

gehend diskutiert. Um die größere Allgemeinheit zu wahren, wollen wir indessen — wie dies auch Seeliger in der zweiten Arbeit tut — nicht von vornherein uns auf $v = c$ beschränken, sondern $v \leq c$ annehmen.

Die nächstliegenden weiteren Annahmen sind nun die, daß die von der Nova ausgehende primäre Strahlung allseitig gleiche und mit wachsendem r abnehmende Intensität besitze und daß die Nebelmaterie im wesentlichen homogen sei. Dann müßte auf den photographischen Aufnahmen das Bild des Nebels als eine kreisförmige Scheibe erscheinen mit der Nova als Mittelpunkt und nach außen zu abnehmender Helligkeit. Falls indessen v wesentlich kleiner als c ist, findet man, daß der Rand der Scheibe besonderes hell leuchten müßte. Denn in diesem Falle wächst die Dicke $\triangle x$ (siehe Fig. 11) der leuchtenden

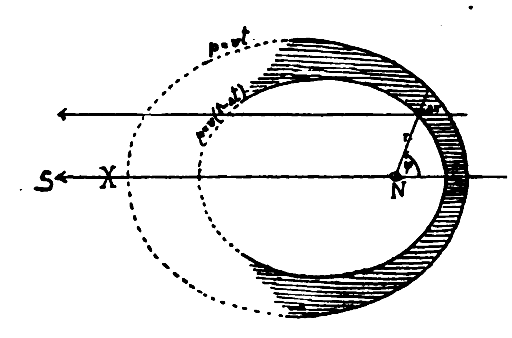


Fig. 11.

Schicht rasch mit Annäherung an die kleine Achse der Ellipse und überdies ändert sich r nur wenig, so daß die dadurch bedingte Abnahme der Intensität klein ist; sieht man von Absorption ab, so kann man die Helligkeit proportional der Dicke $\triangle x$ setzen und erhält also einen hellen Ring als Begrenzung des Nebelbildes.

Die tatsächlich beobachteten Erscheinungen entsprechen indessen keineswegs diesen Folgerungen, wie deutlich aus der eingangs gegebenen Beschreibung der Novanebel hervorgeht. Man muß zum mindesten die Annahme homogen verteilter Nebel fallen lassen, dann aber auch die, daß die Intensität der primären Strahlung nach allen Seiten die gleiche sei. Tragen wir diesen Umständen Rechnung und gehen nun umgekehrt von den photographischen Aufnahmen aus, so sehen wir die Bilder der Nebel zusammengesetzt aus elliptischen Ringen, die im wesentlichen als linienhaft betrachtet werden dürfen, und aus einzelnen Lichtknoten, die als Punkte angesprochen werden sollen. Die Gleichungen der „beobachteten Kurven", wie sie Seeliger nennt, werden sich darstellen als $\Phi(y, z, t) = 0$ oder $t = F(y, z)$. Die beleuchteten Nebelteilchen liegen also auf dem über dieser Kurve als Leitlinie senkrecht errichteten Zylinder und die Lage der Teilchen im Raume ergibt sich als Schnitt dieses Zylinders mit der durch (2) dargestellten Rotationsfläche. Um alles in Bogenmaß auszudrücken, hat man noch v zu ersetzen durch $v\pi$, wo π die Parallaxe, v die in linearem Maß gemessene Geschwindigkeit ist. Die leuchtenden Nebelteilchen bilden dann die Fläche:

$$r\left(1 + \frac{v}{c}\cos\varphi\right) - v\pi F(y, z) = 0. \qquad (4)$$

Aus dieser Gleichung läßt sich gar nichts weiter schließen, da sie noch zwei willkürliche Parameter enthält: das Verhältnis $\frac{v}{c}$ und die Parallaxe π. Für das erstere setzt die einfache Reflexionstheorie den Wert 1 und erhält so die Gleichung:

$$r - x - c\pi F(y, z) = 0. \qquad (5)$$

Aber auch dann gibt es immer noch zu jedem Werte von π eine bestimmte Fläche, auf der die Nebelteilchen liegen. Kann man aus anderweitigen Beobachtungen den Wert von π finden, dann läßt sich die Struktur des die Nova im Raum umgebenden Nebels konstruieren. Das hat z. B. Kopff (a. a. O.) getan und daraus sehr wichtige Stützen für die Seeligersche Theorie gewonnen, indem er nachweisen konnte, daß die hellsten Stellen im äußeren Nebelring gerade da liegen, wo das von der Nova ausgehende Licht durch Lücken im inneren Ringe hat hindurchgehen können.

Vielfach aber ist man umgekehrt vorgegangen: man hat aus den Beobachtungen der Nebel und ihrer Bewegung die Parallaxe der Nova bestimmen wollen. Aus unseren Gleichungen geht hervor, daß das nur möglich ist, wenn man bestimmte Annahmen über die Struktur der Nebel macht. Wir werden auf das Problem der Parallaxe in einem späteren Abschnitte noch zu sprechen kommen.

Was nun noch die Lichtknoten anlangt, so ist ihre Lage auf den Platten gegeben durch die beiden Gleichungen:

$$y = \Phi(t); \quad z = \Psi(t) \qquad (6)$$

und daher die Lage im Raume als Schnitt dieser Geraden mit der Fläche (2), die sich für den Fall $v = c$ spezialisiert auf:

$$z = \frac{y^2 + z^2 - c^2\pi^2 t^2}{2c\pi t}. \qquad (7)$$

Betreffs der Parallaxe gilt hier das gleiche wie oben, d. h. sie bleibt auch hier unbestimmt.

Die einzigen praktischen Schlüsse, die aus

den Beobachtungen auf der Grundlage der Reflexionshypothese gezogen werden können, dürften in dem von Kopff gemachten Versuche der Konstruktion der Struktur der Nebelmaterie mit Hilfe der bekannten Parallaxe bestehen. Alles andere beruht auf mehr oder weniger willkürlichen Annahmen; so z. B. auch, wenn Kapteyn die „beobachteten Kurven" als exzentrische Kreise auffaßt, deren Radien proportional der Zeit wachsen und deren Mittelpunkte sich in bestimmter Richtung mit gleichförmiger Geschwindigkeit fortbewegen. Man erhält dann:

$$\Phi(y, z, t) = y^2 + (z - a\,t)^2 - \gamma^2 t^2 = 0 \qquad (8)$$

und (5) geht über in die Gleichung eines Kegels:

$$\left.\begin{array}{c}(\gamma^2 - a^2 - c^2\pi^2)^2(y^2 + z^2) \\ + 4\{xzc\pi a(\gamma^2 - a^2 + c^2\pi^2) - a^2c^2\pi^2z^2 \\ - (\gamma^2 - a^2)c^2\pi^2x^2\} = 0.\end{array}\right\} \qquad (9)$$

dessen Spitze in N liegt und dessen Achse mit der X-Achse den Winkel bildet:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{2\,a\,c\,\pi}{\gamma^2 - a^2 - c^2\pi^2}. \qquad (10)$$

Der Winkel an der Spitze ist $2f$, wo:

$$\mathrm{tg}\,f = \frac{2\,\gamma\,c\,\pi}{\gamma^2 - a^2 - c^2\pi^2}.$$

Auch hier ist also die Gestalt des Kegels noch von der Parallaxe π abhängig und die Parallaxe selbst läßt sich erst dann bestimmen, wenn man Annahmen über f macht. Kapteyn nimmt den Nebel als Ebene, setzt also $f = 90^0$, was ganz und gar willkürlich ist.

An Einwänden gegen diese einfache Reflexionstheorie sind insbesondere die folgenden gemacht worden:

1. Das von der Nova ausgesandte Licht reiche nicht hin, um uns durch Reflexion die Nebel sichtbar zu machen.

All die Rechnungen, die zu diesem Resultate führen und über die Kopff eingehend berichtet, beruhen indessen auf ziemlich unsicheren Schätzungen. Die einzig exakte Berechnung hat Seeliger schon vor der Erscheinung der Nova im Anschlusse an seine Betrachtungen „Über kosmische Staubmassen und das Zodiakallicht"[1]) geliefert und diese hat ihn zu dem Resultate geführt, daß die Flächenhelligkeit eines Nebels, „welcher eine Parallaxe von 0",01 besitzt und von einem Sterne von der Größe 10,4 beleuchtet wird, der sich in einem Abstande von 10" befindet", unter Umständen vom Range 10^{-7} mal der mittleren Flächenhelligkeit des Vollmondes und damit genügend groß sein kann, um auf die photographische Platte einzuwirken. Für die Nova Persei ergeben sich daraus noch wahrnehmbare Flächenhelligkeiten der Nebel in Entfernungen bis zu 1100". Solange also diesen Feststellungen keine ähnlich exakten und bei anderen Gelegenheiten bestätigten Untersuchungen entgegenstehen, ist der gemachte Einwand nichtig.

2. Das Licht des Nebels müßte wegen der Reflexion Polarisation aufweisen. Perrine[1]) konnte eine solche nicht feststellen.

Abgesehen davon, daß Perrine seine Messungen selbst nicht für sehr beweiskräftig hält, weist Seeliger[2]) darauf hin, daß auch bei zweifellos reflektiertem Sonnenlichte, wie beim Monde oder bei Wolken, die Polarisation außerordentlich wechselt und zuweilen überhaupt nicht vorhanden ist.

3. Die Beständigkeit gewisser Lichtknoten, die die Reflexionstheorie dadurch erklärt, daß die Nebel in Bändern von ziemlich gleichförmigem Querschnitte angeordnet seien.

Eine gewisse Homogenität in der Struktur der Nebelmaterie erscheint keineswegs so unwahrscheinlich, wie sie die Gegner der Reflexionstheorie hinzustellen suchen.

Überdies wurde bereits auf S. 358 die Feststellung von Kopff besonders hervorgehoben, nach der die Nebel der inneren Ellipse, um die es sich hier besonders handelt (siehe Fig. 5), „lebhaften Form- und Helligkeitsveränderungen" unterworfen gewesen seien. Die Formbeständigkeit ist also durchaus nicht so überzeugend groß.

4. Der einzige Fall, bei dem man vielleicht wirklich gezwungen ist, andere Vorstellungen zu Hilfe zu nehmen, als die der einfachen Reflexionstheorie, betrifft den Nebel m, der durch Monate hindurch in nahezu der gleichen Helligkeit leuchtete. Bell[3]) hat schon die große Helligkeit als solche als mit der Reflexionstheorie unverträglich erachtet, indessen hat Seeliger[4]) diesen Einwand widerlegt und gezeigt, daß aus den einfachsten Beleuchtungsgesetzen die besonders große Helligkeit des genannten Nebels gegenüber den äußeren Ringen folgt. Eine Feststellung Perrines[5]) scheint sogar auch bei diesem Nebel zugunsten der Reflexionstheorie zu sprechen. Perrine sind nämlich Aufnahmen von dem Spektrum dieses Nebels gelungen und es stellte sich heraus, daß dieses Spektrum identisch war mit dem-

1) Sitzungsber. d. K. B. Akad. d. Wiss. **31**, 275.

1) Astrophys. Journal **16**, 257.
2) Astrophys. Journal **16**, 193.
3) Astrophys. Journal **16**, 39.
4) Astrophys. Journal **16**, 195.
5) Astrophys. Journal **17**, 310.

jenigen der Nova in den ersten Tagen ihrer Sichtbarkeit; woraus hervorgehen würde, daß der Nebel in dem von der Nova bei der Katastrophe ausgesandten Lichte geleuchtet habe. Indessen erregt doch die lange Dauer des Leuchtens Bedenken und man wird vielleicht bei diesem Nebel wirklich an selbstleuchtende Materie denken müssen.

Nachdem die einfache Reflexionstheorie ausführlich behandelt wurde, dürfte sich ein näheres Eingehen auf die anderen Strahlungshypothesen erübrigen. Soweit sie an elektromagnetische Vorgänge denken, die sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, — wie die Hypothesen von Bell[1]) und Nordmann[2]), nach denen die Leuchterscheinungen der Nebel mit den Nordlichtern vergleichbar sind — bringen sie kein wesentlich neues Moment in die Betrachtungsweise. Soweit sie aber andere Strahlenarten in Betracht ziehen, — man muß bedenken, daß die Erscheinung der Nova Persei in die erste Zeit nach der Entdeckung des Radiums fällt! — bedingen sie durch das Eingehen des Parameters $\frac{v}{c}$ in die Formeln eine Reihe von willkürlichen Annahmen, so daß diese Theorien im Grunde über das Gebiet vager Spekulationen nicht hinauskommen.

Wir wollen daher jetzt übergehen zu den

Hypothesen, welche eine reelle Ausbreitung von Materie annehmen.

Nach dem, was über die Parallaxe der Nova sowie über die scheinbare Bewegung der Nebel bekannt ist, kann die wirkliche Ausbreitungsgeschwindigkeit der Nebel nicht wesentlich kleiner sein als die Lichtgeschwindigkeit. Man kann aber nicht annehmen, daß glühende Gasmassen von der Nova mit derartig großen Geschwindigkeiten ausgeschleudert werden. Vielmehr spielen bei allen diesen Theorien die Repulsivkräfte eine Rolle, wie sie unter anderem auch zur Erklärung der Kometenschweife herangezogen werden. Wilsing[3]) z. B. „verlegt die Entstehung dieser Geschwindigkeiten bereits in größere Entfernung vom Stern an Stellen, in welchen die Materie infolge von Expansion nur noch eine sehr geringe Dichtigkeit besitzt". Wenn man mit μ die auf das Teilchen in der Entfernung 1 wirkende Repulsivkraft bezeichnet, so folgt aus:

$$\frac{d^2 r}{d t^2} = \frac{\mu}{r^2}$$

1) Astrophys. Journal **16**, 40.
2) Annales de l'Observatoire de Nice. Tome **9**, 147.
3) Astr. Nachr. **157**, 349.

die Geschwindigkeit:

$$v = \sqrt{2\mu}\sqrt{\frac{1}{a} - \frac{1}{r}}$$

wo die Integrationskonstante a den Wert von r repräsentiert, für den $v = 0$ wird. Für $\mu = 10$ (1. Typus von Kometenschweifen nach Bredichin) und $a = {}^1/_{200}$ (= Sonnenhalbmesser) findet man daraus:

$$v_\infty = 63 \text{ Erdbahnhalbmesser in } \frac{1}{k} = 58^d$$

wenn k die Gaußsche Konstante ist. Für $\pi = 0'',03$ würde das einem Winkelwerte von $1'',9$ entsprechen. Nach den Feststellungen, die wir S. 358 gemacht haben, legen die Novanebel aber diesen Weg bereits in 1^d zurück — einzelne Stellen weisen sogar noch weit größere Geschwindigkeiten auf, bis zu $9''$ pro Tag —, so daß man zu wesentlich größeren Repulsivkräften gelangt, als sie selbst die größten für Kometen bekannten, ergeben. Indem Wilsing Repulsivkräfte elektrischer Natur annimmt, kommt er zu annehmbaren Resultaten. Er findet für die elektrische Dichtigkeit δ der Nova unter Voraussetzung einer Wasserstoffatmosphäre und unter den Annahmen:

$$\pi = 0''\cdot 1;\; v = 65'' \text{ in } 58^d;\; \delta = 0,4,$$

während die nach den gleichen Prinzipien berechnete Dichte einer geriebenen Siegellackstange 64 ist. Die von Wilsing angesetzte Geschwindigkeit ist zu klein. Aber selbst für Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit steigt die Dichte erst auf $^1/_{10}$ des Wertes der Siegellackstange, so daß elektrische Abstoßung immerhin geeignet erscheint, die beobachteten Geschwindigkeiten zu erklären. Indessen setzen die verschiedenen Nebelringe verschiedene Geschwindigkeiten voraus, weshalb z. B. Véry[1]) drei verschiedene Arten von Ionen annehmen will, aus denen die Ringe bestehen sollen: der innerste aus Helium, der äußerste aus Wasserstoff, der mittlere aus einem unbekannten Stoffe mit dem Atomgewichte 2. Man sieht, der Willkür ist hier großer Spielraum gelassen. Ein anderer Einwand ist der, daß die Bewegung der Nebel nicht radial erfolgt, daß sie vielmehr eine Komponente im Positionswinkel besitzt. Véry (a. a. O.) betrachtet, um die tangentiale Komponente zu erhalten, die Nova als Magneten und glaubt die Bahnen der Nebelteilchen mit den Kraftlinien identifizieren zu können. In der Tat gelingt es durch Weiterführung dieses Gedankens sowohl die lange Sichtbarkeit des Nebels m, als auch die Abnahme der Helligkeit der äußeren Nebel und das Auf-

1) The American Journal of Science. 4. Series Vol. **16**, 54.



tauchen von Nebeln in größerer Entfernung zu erklären. Die Unregelmäßigkeit der Bewegung, die zuerst beschleunigt, dann verzögert war, ergibt sich aus der Zusammenwirkung von Schwerkraft und Repulsion. Indessen zeigt eine genauere Verfolgung der tatsächlichen Bewegungsverhältnisse, daß diese keineswegs den Ergebnissen der Theorie entsprechen. Auf ganz die gleichen Schwierigkeiten stößt die Anwendung des Lichtdrucks, wie sie von Arrhenius[1]) zur Erklärung der Novanebel herangeführt wurde.

Faßt man das Resultat aller Untersuchungen zusammen, so kommt man zu der Schlußfolgerung:

Die einfache Reflexionshypothese besitzt gegenüber allen anderen Hypothesen den Vorzug, daß sie unter den denkbar geringsten Voraussetzungen eine Erklärung für alle an den Novanebeln beobachteten Erscheinungen zu geben vermag. Nur im Falle des Nebels *m* bleibt es fraglich, ob sie vollkommen ausreicht oder ob nicht hier, in der nächsten Nähe der Nova, andere Ursachen für das Aufleuchten mit verantwortlich gemacht werden müssen.

Das Problem der Parallaxe der Nova Persei.

Der Versuche sind eine ganze Reihe, die aus den Bewegungen der Nebel die Entfernung der Nova Persei berechnen wollten. Sie könnten abgetan werden durch einen Hinweis auf unsere früheren Feststellungen, wonach aus den Formeln deutlich hervorgeht, daß eine Bestimmung der Parallaxe unmöglich ist, selbst unter einer bestimmten Annahme für die Geschwindigkeit v, solange man nicht noch weitere Annahmen über die Struktur der Nebelmaterie hinzufügt. Kapteyn z. B. setzt den Nebel als eine gegen die Gesichtslinie um 79° geneigte Ebene voraus, worauf wir früher schon hinwiesen. Zahlreich sind die Berechnungen, die die beobachtete scheinbare Geschwindigkeit mit der wahren Geschwindigkeit senkrecht zum Visionsradius identifizieren. Sie übersehen dabei die doch für alle Theorien gültige Tatsache, daß die zu gleicher Zeit beleuchteten Nebelteilchen jeweils auf einer Kegelschnittschale liegen, daß uns die Beobachtungen zu einer bestimmten Zeit t also immer nur eine Sehne (AC in Fig. 12) des Kegelschnitts ergeben — die Nebelmasse bezw. die ausgeschleuderten Massen als homogen angesehen und die Entfernung R als die Entfernung von der Nova, in der die Nebel für uns unsichtbar werden —, aber nicht den tatsächlich von der primären Strahlung in dieser Zeit zurückgelegten Weg (NB). Die scheinbare Geschwindigkeit ist größer als die wirkliche und die abgeleiteten

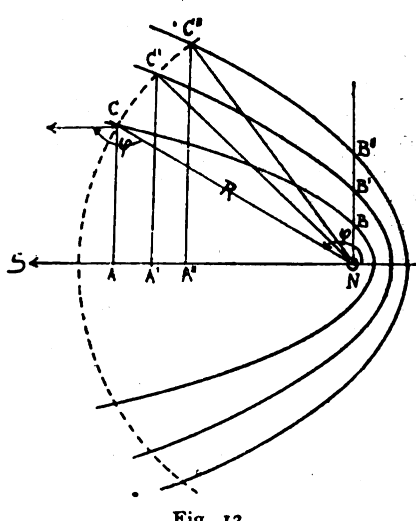


Fig. 12.

Parallaxen sind zu groß. Man erhält den richtigen Wert für π erst, wenn sich der Parameter p der Parabel dem Werte $2R$ nähert. Überdies ergibt die Anschauung aus der Figur, daß die Nebel von Anfang an eine scheinbar verzögerte Bewegung ausführen müßten, was durchaus nicht der Fall ist, so daß von einer regelmäßigen Verteilung der Nebelmaterie um die Nova nicht die Rede sein kann. Damit werden auch alle Ausführungen Luyties[1]) hinfällig, der wohl zuerst auf diese von ihm als „Distorsion" bezeichnete Erscheinung hingewiesen hat und gerade auf sie eine Methode zur Bestimmung der Parallaxe gründen wollte. Zudem geht Luyties noch von Annahmen aus, die Seeliger als vollkommen willkürlich zurückweist. Zunächst setzt er voraus, daß es stets möglich sei, den scheinbaren Abstand

$$\eta = \sqrt{y^2 + z^2}$$

der gerade noch sichtbaren Nebel (in der Entfernung R von N) auf der Platte zu bestimmen. Das ist eine reine praktische Frage. Es muß also dann einmal der Zeitpunkt eintreten, wo η nicht mehr wächst. Aus:

$$\eta^2 = R^2 - x^2 = R^2 - \left(\frac{c}{v}R - ct\right)^2 \qquad (11)$$

erhält man $\frac{d\eta}{dt}$. Dieses gleich 0 gesetzt gibt:

$$\left[R\left(1 - \frac{c^2}{v^2}\right) + \frac{c^2}{v^2}t\right]\frac{dR}{dt} + (R - vt)\frac{c^2}{v^2} = 0. \qquad (12)$$

Diese Gleichung enthält vor allem noch

1) Lehrbuch der kosmischen Physik II, 925.

1) Astrophys. Journal 19, 129.

$\frac{d\eta}{dt}$. Luyties nimmt R als unabhängig von der Zeit an (in der Fig. 12 entsprechend gezeichnet). Dann ergibt sich aus (12) $R = vt$ und damit aus (11):

$$\eta = R = vt. \qquad (13)$$

Unter bestimmten Annahmen über v, speziell $v = c$, ist dann in der Tat π bestimmt, da η in Bogensekunden gemessen ist. Aber R darf nicht als unabhängig von der Zeit angesehen werden. Denn die verschiedenen η gehören zu verschiedenen Phasenwinkeln φ; die Minimalhelligheit und damit R ist aber von φ abhängig.

Man sieht also: Ohne die weitestgehende Willkür gelangt man unmöglich zu einer Bestimmung der Parallaxe.

Die Stellung der Neuen Sterne im Milchstraßensystem.

Es ist schon frühzeitig aufgefallen, daß die neuen Sterne offenbar die Milchstraßengegenden bevorzugen. Man war daher versucht, den neuen Sternen eine besondere Rolle im Milchstraßensystem zuzuschreiben. Das hat Seeliger veranlaßt, die Sache näher zu untersuchen[1]), wobei sich herausstellte, daß sich die scheinbare Bevorzugung der Milchstraßengegenden ganz zwanglos aus der Konstitution des Milchstraßensystems ergibt. Diese Ausführungen hier in extenso wiederzugeben, dürfte zu weit führen. Nur soviel: Seeliger bestimmt die Wahrscheinlichkeit einer Kollision zwischen zwei Weltkörpern unter der vereinfachenden Annahme, daß es sich um Körper von gleicher Größe handle und daß in einem Raumelemente R n Weltkörper nach den Gesetzen des Zufalls verteilt seien. Er findet, daß diese Wahrscheinlichkeit mit hinreichender Annäherung proportional wird mit

$$\frac{(3-\lambda)^2}{3-2\lambda}(A_\infty)^2 h_n^{3/2} \cdot J.$$

Darin ist λ ein Parameter, der von der galaktischen Breite abhängt und aus Seeligers Untersuchungen über die räumliche Verteilung der Fixsterne bekannt ist. A_∞ ist die Anzahl aller leuchtenden Weltkörper auf der Flächeneinheit, J der Inhalt des betreffenden Flächenstückes und h_n die Helligkeit der hellsten Sterne an der Grenze des Systems. Für zwei verschiedene Annahmen über h_n — auch wieder aus den anderen Untersuchungen entnommen — ergeben sich die folgenden relativen Wahrscheinlichkeiten einer Kollision für die einzelnen Seeligerschen Zonen (β = galaktische Breite):

1) Astr. Nachr. **150**, 377.

Zone	β	w_1	w_2
I u. IX	80°	1,6	1,4
II „ VIII	60	6,8	6,2
III „ VII	40	22,6	16,8
IV „ VI	20	109,2	90,0
V (Milchstr.)	5	421,7	200,0
	Summa	561,9	374,4

Berechnet man mit diesen Zahlen die mittlere galaktische Breite, welche für die neuen Sterne zu erwarten ist, indem man die Produktsumme $\Sigma\beta w$ durch die Summe der w dividiert, so erhält man

$$\beta_{m_1} = 10^0{,}2; \; \beta_{m_2} = 11^0{,}4.$$

Zum Vergleich mit den tatsächlichen Verhältnissen standen Seeliger damals nur 15 Sterne zur Verfügung, die indessen die theoretischen Erwägungen schon vollkommen bestätigten. Denn die mittlere galaktische Breite ergab sich für sie zu 10°,2, und wenn 2 zweifelhafte Sterne ausgeschlossen wurden, zu 10°,0. Da inzwischen die Anzahl der neuen Sterne sich wesentlich vermehrt hat, habe ich für die 34 Sterne der Tabelle I die galaktischen Breiten berechnet. Für den Pol der Milchstraße wurde nach Kobold angenommen:

$$A_{1900} = 12^h\,45^m{,}7; \; D_{1900} = +27^0\,55'.$$

Der absolute Mittelwert sämtlicher β ist 10°,0, und wenn man die Sterne 9 und 14 ausschließt, da deren Natur als neue Sterne von verschiedenen Seiten angezweifelt wurde, 9°,1.

Die theoretischen Untersuchungen setzen ja nun allerdings die Verteilung der leuchtenden Weltkörper voraus, während es sich bei den neuen Sternen um Kollisionen nichtleuchtender Materie handelt. Aber man darf wohl annehmen, daß sich auch die nichtleuchtende Materie im großen und ganzen dem allgemeinen Verteilungsgesetze unterordnet. Ja, man kann vielleicht sogar umgekehrt diesen Schluß aus der nahen Übereinstimmung von Beobachtung und Rechnung ziehen.

Damit scheint mir auch noch einiges Licht auf eine oft ausgesprochene Vermutung zu fallen, die wir eingangs erwähnten: man glaubte aus der Ähnlichkeit des Novaspektrums, vor allem in seinem späteren Zustande, mit dem Spektrum der Wolf-Rayet-Sterne den Schluß ziehen zu dürfen, daß die Wolf-Rayet-Sterne den Endzustand der neuen Sterne darstellen. Die scheinbare Verteilung am Himmel spricht nicht zugunsten dieser Annahme. Denn für 55 Wolf-Rayet-Sterne, welche Scheiner[1]) anführt, erhält man als mittlere galaktische Breite nur 2°,6. Diese Sterne sind also ganz aus-

1) Populäre Astrophysik, S. 596.

gesprochene Milchstraßensterne, was auch schon darin zum Ausdruck kommt, daß die größten vorkommenden Werte von β -- 8° und + 18° sind.

München, Königl. Sternwarte. 1. August 1918.

Nachschrift bei der Korrektur (Mai 1919):

Über den Neuen Stern im Adler ist seit der Niederschrift des vorstehenden Aufsatzes an verschiedenen Stellen berichtet worden. Die ausgiebigen Beobachtungsreihen ermangeln indessen noch einer eingehenden Diskussion. Das Wichtigste aus den ersten Monaten der Sichtbarkeit des Sternes findet der Leser in einem Aufsatze des Hrn. Guthnick („Die Naturwissenschaften" 6, 593 ff.), zu dem ich mir noch eine kurze Bemerkung gestatten möchte. Es könnte merkwürdig erscheinen, daß ich die Zöllnersche Hypothese mit den übrigen alten Hypothesen in einen Topf werfe, während Herr G. sie der Seeligerschen Hypothese gegenüberstellt und s. E. „einige Umstände mehr zugunsten der Zöllnerschen sprechen". Daß ich den Namen Zöllner gar nicht erwähnte, mag als Versehen zugegeben werden. Indessen scheint mir in der Bemerkung G.s eine Verkennung des Schwergewichts der S.schen Hypothese zu liegen. Die Zöllnersche Vorstellung von der Eruption glühender Massen aus dem Innern des Sternes hat — man vergleiche darüber die obenstehenden Ausführungen! — sehr wohl Platz im Rahmen der S.schen Hypothese. S. geht aber doch noch einen Schritt weiter zurück als Z., indem er die Ursachen dieser Eruptionen zu erklären sucht und als solche den Eintritt des erkalteten Sternes in die kosmische Wolke annimmt. Beide Theorien können also nicht einander gegenübergestellt werden, sondern gehören einem gemeinsamen Vorstellungskomplex an.

(Eingegangen 15. August 1918.)

BESPRECHUNGEN.

A. Fraenkel, Einleitung in die Mengenlehre. Eine gemeinverständliche Einführung in das Reich der unendlichen Größen. 8°. VI u. 156 S. m. 10 Abbildungen. 1. Auflage. Berlin, Julius Springer. 1919. M. 10.—

Es ist ein Vorzug der Mengenlehre, daß sie sich ohne Benutzung höherer mathematischer Hilfsmittel entwickeln läßt, und daß es hier gelingt, aus ganz einfachen Betrachtungen weittragende Folgerungen zu ziehen. Dieser Charakter der Mengenlehre kommt bei dem vorliegenden Buch in erfreulicher Weise zur Geltung. In leicht faßlicher und anregender Form werden darin die wichtigsten Begriffe und Lehrsätze der Mengentheorie auseinandergesetzt.

Zur Erleichterung für diejenigen Leser, denen es nur auf einen allgemeinen Überblick ankommt, sind die Stellen, wo die Ausführung mehr ins einzelne geht, durch kleineren Druck kenntlich gemacht.

Dem Zweck der Gemeinverständlichkeit entsprechend müssen natürlich die Beweise vom Standpunkt der naiven Mengenbetrachtung geführt werden, so wie sie ursprünglich von Cantor erfunden sind. Es werden aber auch die neueren grundsätzlichen Untersuchungen, betreffend die Paradoxien und ihre Vermeidung durch Zermelos axiomatische Begründung der Mengenlehre, im letzten Abschnitte des Buches behandelt. Insbesondere wird auch das Auswahlaxiom des näheren erörtert, von welchem Fraenkel mit Recht bemerkt, daß kein ernstlicher Grund besteht, es als weniger einleuchtend zu betrachten als alle andern Axiome der Mathematik.

Auch von der Theorie der linearen Punktmengen werden die Hauptgedanken zur Darstellung gebracht.

Wenngleich die Cantorsche Mengenlehre mit den Problemen der Physik wohl kaum Berührungspunkte hat, so ist doch für jeden Forscher im Gebiete der theoretischen Wissenschaft eine gewisse Bekanntheit mit jener Gedankenwelt insofern von Interesse, als hier die Eigenart mathematischer Begriffsbildungen und Überlegungen in besonders prägnanter Form in Erscheinung tritt. Wer unter diesem Gesichtspunkt die Mengenlehre kennen zu lernen wünscht, dem kann die Lektüre des Fraenkelschen Buches als eine angenehme geistige Unterhaltung empfohlen werden.

P. Bernays.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Arnold Kohlschütter für Astronomie.

Ernannt: Der Privatdozent an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Karl Bunte zum etatsmäßigen a. o. Professor für Gastechnik und Brennstoffverwertung ebenda, der Direktor Dipl.-Ing. Viktor Engelhardt zum a. o. Honorarprofessor für elektrochemische Einrichtungen und Verfahren an der Technischen Hochschule Berlin, der Professor an der Queens Universität in Dublin Dr. Benjamin Moore zum Professor für Biochemie an der Universität Oxford, der a. o. Professor an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Paul Askenasy zum ord. Professor für chemische Technologie ebenda, die a. o. Professoren an der Universität Göttingen Dr. Robert Pohl (Physik), Dr. Walter Borsche (Chemie) und Dr. Karl Feist (pharmazeutische Chemie) zu ord. Professoren an derselben Hochschule, der Privatdozent an der Universität Leipzig Dr. Max Volmer zum a. o. Professor für physikalische Chemie an der Universität Hamburg, der ord. Professor an der Universität Bonn Dr. Hans Hahn zum ord. Professor der Mathematik an der Universität Wien, der Professor für physikalische Chemie an der Syracuse Universität Dr. Louis J. Gillespie zum Professor für physikochemische Untersuchungen am Massachusetts Institut für Technologie.

In den Ruhestand: Der a. o. Professor für anorganische und organische pharmazeutische, sowie für gerichtliche Chemie an der Technischen Hochschule Karlsruhe Dr. Emil Gustav Karl Dieckhoff.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

Fig. 4.

Spektren der Nova Geminorum No. 2 (1912)
vergrößert und verbreitert nach Aufnahmen mit dem großen Refraktor und Spektrograph I. des Kgl. Astrophysik. Observat. zu Potsdam.

Fig. 5.

Nebel um Nova Persei nach Aufnahme von Ritchey (Yerkes-Observ.).

1901 Sept. 20 (Expos. $3^h\ 50^m$). 1902 Jan. 7. u. 9. (Exp. $4^h\ 30^m$).

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 16. 15. August 1920. 21. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 18 am 24. August 1920

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Elektrische Kontakte.

Von Hermann Rohmann.

1. Der Stromübergang zwischen zwei einander stark genäherten Elektroden bei relativ niedriger Spannung, d. h. die Art der Kontaktbildung zwischen zwei Leitern, ist noch wenig untersucht, obgleich sich an diesen Punkt eine Anzahl auch praktisch wichtiger Fragen knüpfen, in bezug auf das Mikrophon u. a. So heißt es z. B. im Handbuch d. Phys. **5**, 792: „Als wesentlich für das Mikrophon muß die Herstellung mindestens eines der Kontaktteile aus Kohle gelten. Mikrophone mit reinen Metallelektroden geben keine praktisch brauchbaren Lautwirkungen". Und doch sieht man einen eigentlichen Grund dafür nicht ein.

Untersuchungen über den Kontaktwiderstand sind namentlich zur Lösung des Kohärerproblems geführt worden. Dabei wurde der Kontakt meist variiert durch Anwendung verschiedener Drucke zwischen den Elektroden (vgl. A. Blanc, Beibl. **30**, 327, 1906 und Ph. E. Robinson, Ann. d. Phys. [4] **11**, 754, 1903). Es ergaben sich dabei einige interessante Gesetze über die Abhängigkeit des Kontaktwiderstandes von Spannung und Stromstärke, sowie vom Druck. Bei der berüchtigten Launenhaftigkeit des Kohärers, gegen die auch diese Untersuchungen kein Mittel gaben, scheinen sie aber wenig Beachtung oder Bestätigung gefunden zu haben. — Hierher gehört auch das Edisonsche Mikrotasimeter, ein Mikrophonkontakt, gegen den eine Stange drückt, deren Ausdehnung den Mikrophonstrom ändert. Anscheinend sind darüber keine eingehenderen Untersuchungen veröffentlicht worden.

In neuerer Zeit hat F. Rother auf Vorschlag von O. Wiener den Elektrizitätsübergang bei sehr kleinen Kontaktabständen, 20 bis 280 $\mu\mu$, untersucht und findet in diesen Entfernungen den Übergang kleiner nur mit dem Elektrometer meßbarer Ströme, die von Material und Entfernung abhängen und eine Art Leitung durch freie Elektronen anzuzeigen scheinen (Ann. d. Phys. [4], **44**, 1238, 1914). Zur Änderung der Elektrodenentfernung benutzte er ein Interferometergestell, mit einer Schraubenganghöhe von 1 mm, an dem $^1/_{40000}$ mm Verschiebung abzulesen war.

Versucht man nun aber mit einer solchen Schraubenverschiebung, die sich für optische Zwecke durchaus bewährt, den Stromübergang zwischen Metallelektroden mit Hilfe eines Galvanometers von ca. 10^{-8} Amp./Sktl. zu verfolgen, so findet man damit in den meisten Fällen nur ein plötzliches Entstehen des Stromes; nur ganz zufällig erhält man einmal einen Zwischenwert und die Kontaktbildung selbst ist nicht zu verfolgen.

Die Schwierigkeit bei derartigen Untersuchungen besteht also offenbar darin, eine noch feinere Verschiebbarkeit der Elektroden herzustellen, die zugleich möglichst starr und Erschütterungen gegenüber genügend unveränderlich ist.

2. Feinverschiebung. Ich habe mir dazu eine Torsionsvorrichtung gebaut, die solche, optisch nicht mehr meßbare Verschiebungen gewährleistet und für deren Funktionieren sich aus dem elektrischen Verhalten des Kontaktes selbst ein gutes Kriterium ergibt.

Der Apparat ist in Fig. 1 skizziert. Eine Stahlstange von 2 mm Durchmesser ist an einem Ende in der Grundplatte eines festen Gestells befestigt. An ihrem oberen Ende, das sich mit eingeschliffenem Konus in der zweiten Platte des Gestells drehen kann, ist ein Hebel befestigt, der durch eine Mikrometerschraube S gedreht wird (Hebelarm b). Der Hebel wird dabei durch eine starke Gegenfeder gegen die Schraube gepreßt. Auf der tordierten Stahlstange ist in

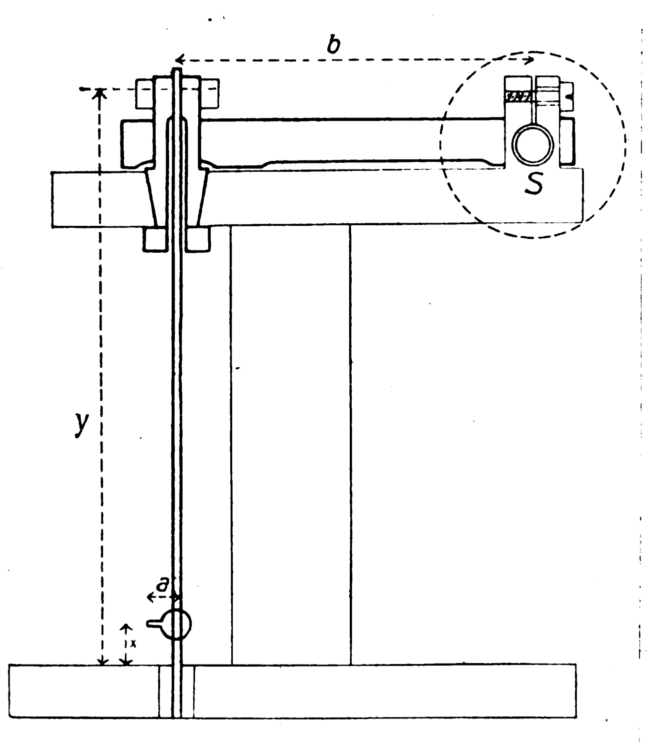


Fig. 1.

der Nähe des festen Endes mit kleinem Hebelarm a die Elektrode befestigt. Die Bewegung der Schraubenspitze wird also an der Elektrode verkleinert im Verhältnis $a \cdot x / b \cdot y$ (vgl. Fig. 1).

Die Dimensionen des Apparats waren folgende: $y = 120$ mm, $b = 62$ mm, $a = x = 5$ mm. Daraus berechnet sich ein Übersetzungsverhältnis von ca. $1/_{240}$. Die Mikrometerschraube S hatte eine Ganghöhe von 0,5 mm. An dem mit Zahntrieb versehenen Kopfe konnte $1/_{324}$ Umdrehung abgelesen werden. Für die Verschiebung der Elektrodenspitze bei der Schraubenumdrehung um 1 Sktl. ergibt sich also ca. 6 $\mu\mu$. Um diese Verschiebung noch kleiner zu machen, ohne mit der Elektrode zu nahe an das feste Ende des Stahlstabes gehen zu müssen, verwandte ich dickere Torsionsstäbe von 4 mm Durchmesser, die am oberen Ende auf eine gewisse Strecke auf 2 mm abgedreht waren (Fig. 2).

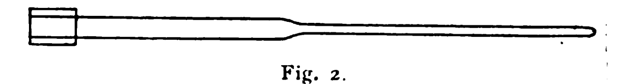


Fig. 2.

Mit diesen Stäben kam ich leicht auf 1 $\mu\mu$ pro Skalenteil, wobei die Festigkeit des ganzen Apparats noch zunahm.

Die Angaben über die Verschiebung pro Skalenteil sind nur der Größenordnung nach richtig, da die Lage der in Betracht kommenden Querschnitte des tordierten Stabes nicht genau bekannt ist. Eine genauere Eichung ließe sich ohne Schwierigkeiten erzielen durch Beobachtung von Interferenzerscheinungen an längerem Hebelarm.

Die bewegliche Elektrode bestand bei den verschiedenen Versuchen aus Stäbchen von Stahl, Nickel, Silber usw. von 2 mm Durchmesser mit spitzen oder halbkugelig geschliffenen und polierten Enden, ferner aus Platindraht von 0,7 mm Durchmesser, gefaßt in Stahl. Die festen Elektroden waren Metall- usw.-Stücke, angelötet an Messingzylinder von 5 mm Durchmesser und mit ebener Endfläche versehen. Sie wurden in einer kleinen Vorrichtung befestigt, in der sie durch eine feine Schraube verschiebbar und durch eine andere festklemmbar waren. Diese Vorrichtung wurde auf der Grundplatte des Apparats in geeigneter Stellung aufgeschraubt und war von ihr durch Glimmerblättchen isoliert. Der Apparat selbst war zuerst mit der Grundplatte auf den Tisch gestellt worden, später wurde er zweckmäßiger mit der oberen Platte in ein Stativ gefaßt.

Vor der Zusammensetzung wurden die Elektroden mit Diamantine auf Leder poliert. — Bei der Einjustierung wurde der Kontakt zunächst mit der gröberen Einstellung hergestellt, derart daß er durch die Mikrometerschraube am Torsionshebel wieder zu lösen war. Die nutzbare Verschiebung am Hebelende betrug etwa 0,75 cm entsprechend einer Elektrodenverschiebung von ca. 0,01 mm.

3. Abhängigkeit des Kontaktstromes von der Entfernung. Kontaktdistanz. Die Messungen wurden in einer Schaltung nach Fig. 3 vorgenommen. Das Drehspul-Spiegel-

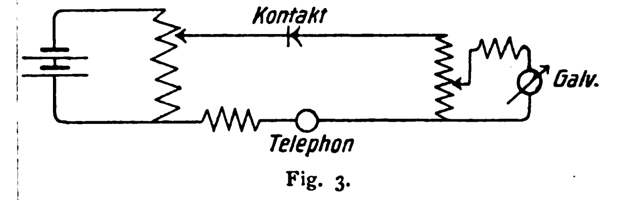


Fig. 3.

galvanometer gab für etwa 10^{-8} Amp. einen Skalenteil Ausschlag. Seine Empfindlichkeit wurde durch den Nebenschluß entsprechend den im Stromkreis verwandten Werten der Spannung und des Widerstandes eingestellt. Die Spannung selbst wurde durch Abzweigen von 2 Akkumulatoren hergestellt und war meist von der Größenordnung 0,1 Volt. Im Stromkreis des Kontaktes befanden sich außer diesem selbst immer Widerstände von mindestens 200 Ohm, so daß der Strom begrenzt blieb und keine Zerstörung der Kontaktflächen eintrat. Für die gut leitenden Materialien verschwindet

beim Zusammenpressen der Kontaktwiderstand gegen die 200 Ohm. Der Strom erreicht etwa den Wert, den er beim Kurzschließen der Kontaktstelle erhält.

Tabelle I.
Kohle-Platin-Kontakt.
E.M.K. 0,17 Volt.
Kurzschlußstrom 74,0 Sktl.

Verschiebung in $\mu\mu$	Galvanometerausschlag beim Hingang	Galvanometerausschlag beim Rückgang
0	0,0	0,0
1	0,0	
3	1,0	
4		2,5
5	2,0	
7	3,5	
9	7,0	
10		11,0
11	10,0	
13	17,0	
15	22,0	27,0
17	27,0	
19	33,0	
20		45,0
21	40,0	
23	43,0	
25	47,0	58,0
30	57,0	
34	65,0	70,0
39	68,0	73,0
44	73,0	

In Tabelle I und Fig. 4 ist eine Beobachtungsreihe wiedergegeben, die für einen Kontakt von

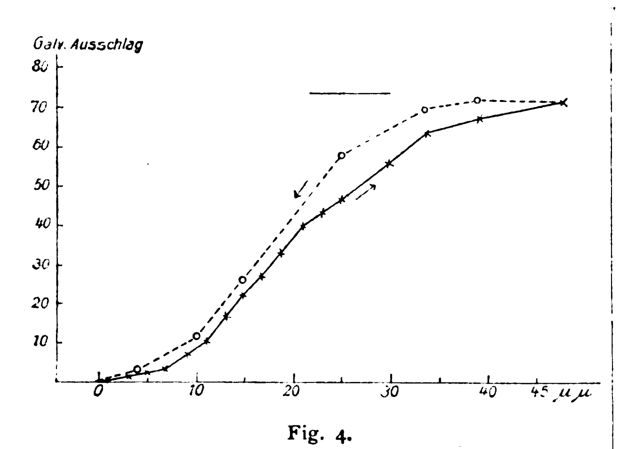


Fig. 4.

Platin als Spitze gegen Kohle von Mikrophonplatten erhalten wird. (Dabei sind als Abszissen die Verschiebungen in $\mu\mu$ genommen, die sich aus den Umdrehungen der Mikrometerschraube berechnen. Der Einfachheit halber soll auch im folgenden immer eine Ausdrucksweise benutzt werden, als ob diese Verschiebung wirklich voll zustande käme.)

Die punktierte Kurve in Fig. 4 ergibt sich beim Zurückdrehen der Mikrometerschraube. Aus ihr erhellt, daß der tote Gang des Apparats sehr klein ist und daß während der Versuchsdauer keine wesentlichen Änderungen aufgetreten sind. Kurz nach dem Zusammensetzen des Apparats sind die Wanderungen des Nullpunktes viel größer, vor allem durch Temperaturänderungen, wohl auch durch elastische Nachwirkung der geklemmten Metallteile. Dieses Wandern verschwindet aber nach mehrstündigem Stehen in geeigneter Hülle fast vollständig, ohne besondere Vorsichtsmaßregeln zur Konstanthaltung der Temperatur nötig zu machen. Auch gegen Erschütterungen, wie sie hier durch Vorbeifahren schwerer Lastautomobile stark vorhanden sind, brauchte der Apparat nicht besonders geschützt zu werden, wenn er in der angegebenen Weise im Stativ gehalten war. Konus und Schraube mußten allerdings mehrmals sorgfältig nachgeschliffen werden, dann war aber die Einstellung auf eine bestimmte Stromstärke ganz sicher möglich.

Tabelle II.
Stahl-Stahl-Kontakt.
E.M.K. 0,09 Volt.
Kurzschlußstrom 19,0 Sktl.

Verschiebung in $\mu\mu$	Galvanometerausschlag
0	0,0
1	0,2
2	0,4
3	1,7
5	4,0
7	5,3
9	9,2
11	11,8
14	16,0
19	17,5

Tabelle III.
Platin-Silber-Kontakt.
E.M.K. 0,04 Volt.
Kurzschlußstrom 30 Sktl.

Verschiebung in $\mu\mu$	Galvanometerausschlag
0	0,0
1	4,9
2	15,4
3	19,9
4	23,0
5	25,0
8	27,5

In Tabelle II und Fig. 5 ist eine ähnliche Beobachtungsreihe wie oben für Stahl gegen Stahl und in Tabelle III für Platin gegen Silber wiedergegeben. Wie daraus und aus der Unter-

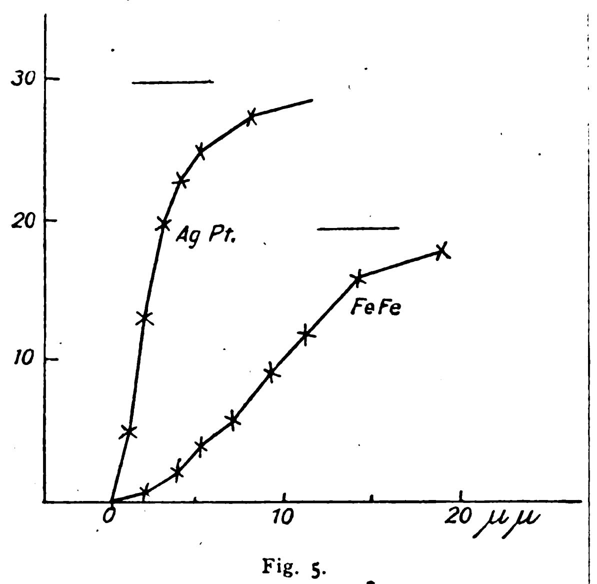


Fig. 5.

suchung einer ganzen Anzahl von Metall- usw. Kontakten hervorgeht, ist die Größe der Verschiebungen, für welche die Änderung des Stromes stattfindet, je nach den Metallen sehr verschieden. Diese Größe, die im folgenden als **Kontaktdistanz** bezeichnet werden soll, ist bei einer Spannung von ca. 0,1 Volt am kleinsten etwa für Silber, Messing, Platin (1—4 $\mu\mu$). Für Nickel, Kupfer, Wolfram, Eisen, Chrom, Kupferkies hat sie Werte zwischen etwa 5—30 $\mu\mu$, die größten Verschiebungen erfordern Kohle, Braunstein, Wolframbronze, oxydiertes Eisen usw. Die Angaben und die Reihenfolge können nur ganz ungefähr sein, zumal meine Versuche zunächst mehr qualitativer Art sind. Auch für ein und dasselbe Metall sind die Kontaktdistanzen verschieden, je nachdem es frisch poliert ist oder eine Zeitlang an der Luft gelegen hat. Die Art des Polierens ist ebenfalls von Einfluß. Eine Behandlungsweise, die sicher gleiche Verhältnisse liefert, habe ich noch nicht gefunden. Wahrscheinlich führt nur Erhitzen im Vakuum zu diesem Ziel; bei den mir hier zu Gebote stehenden Mitteln war das nicht ausführbar. (Aus diesem Grunde ist es auch bislang nicht möglich, etwas Sicheres über den Einfluß der Form und Größe der Elektroden zu ermitteln.) Trotz diesen Verschiedenheiten behält ein und dasselbe Elektrodenpaar, einmal in den Apparat eingesetzt, seine Kontaktdistanz ziemlich konstant bei; Änderungen treten nur auf, wenn starke Ströme, auch Schwingungen, den Kohärereffekt stark hervorrufen, so daß ein Abklopfen nötig wird. — Es erscheint also durchaus möglich mit dem Apparat Längenänderungen von der Größenordnung 1 $\mu\mu$ zu messen.

Benutzt man bei der Aufnahme der Strom-Entfernungskurven höhere Spannungen im Stromkreis, so werden die Kontaktdistanzen im allgemeinen kleiner gefunden. Für eine gegebene Einstellung des Kontaktes nimmt der Strom mit wachsender Spannung zunächst etwa linear zu, steigt dann schneller an, um beim Erreichen einer gewissen Spannung abrupt zu steigen, vgl. Tabelle IV und Fig. 6 für Kupferkies-Platin.

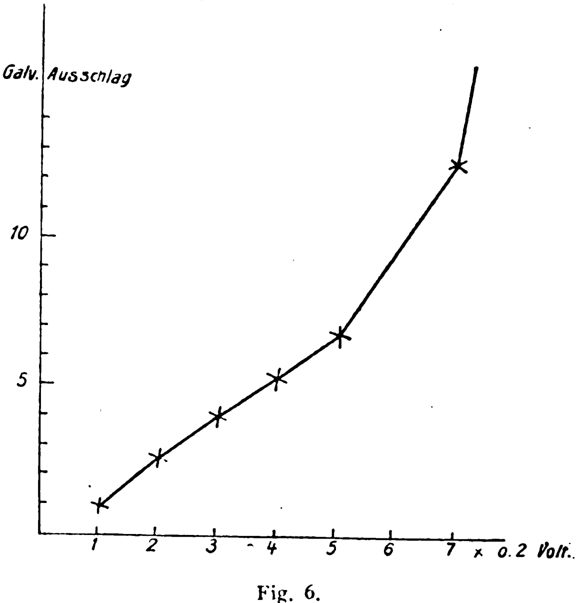


Fig. 6.

Tabelle IV.
Kupferkies-Platin-Kontakt.

Spannung 0,2 Volt ×	Galvanometerausschlag
1	1.0
2	2.7
3	4.1
4	5.3
5	6,8
6	8,9
7	12,5

Der nichtlineare Stromverlauf ist wohl nur die Folge der automatischen Zusammenpressung des Kontaktes durch elektrostatische Kräfte und wesensgleich mit der Kohärerwirkung. Die Spannung, für welche die eigentliche starke Kohärerwirkung eintritt, ist verschieden je nach der ursprünglichen Einstellung der Entfernung und außerdem im allgemeinen um so größer, je größer die Kontaktdistanz ist. Auch scheint die Zeitdauer der Einwirkung einer Spannung einigen Einfluß zu haben, wie schon früher in den Kohärerarbeiten gefunden.

4. Oberflächenschicht. Um die Frage zu untersuchen, ob bei der Kontaktbildung die



Elektroden sich einander wirklich nähern, oder nur wie starre Körper aufeinander drücken, habe ich für einige Versuche die zweite, feste Elektrode an einer dünnen Blattfeder befestigt, für die die Kraft, welche nötig war um den Kontaktpunkt um 1 $\mu\mu$ zurückzudrücken, zu 0,005 mg gemessen war. Für die Elektrode am 2-mm-Stab ergibt sich diese Kraft zu etwa 3 mg. — Wenn es sich um starre Körper handelte, müßten also die Verschiebungen, welche nötig sind um eine bestimmte Stromänderung einmal bei starrer und das andere Mal bei federnder zweiter Elektrode zu erzielen, im umgekehrten Verhältnis dieser Kräfte stehen.

Die Beobachtung wird nun allerdings mit der federnden Elektrode wesentlich ungenauer, da die Erschütterungen viel mehr Einfluß haben, außerdem verschiedene Stücke des Materials benutzt werden. Für Platin-Platin fand ich in einigen Versuchen etwa 60 gegen 4 $\mu\mu$, für Kohle-Platin 60 gegen 16 $\mu\mu$. Das Verhältnis der Verschiebungen ergibt sich also viel kleiner als das der Kräfte. Bei den Messungen mit dem 2 mm- und dem 4 mm-Torsionsstab, bei denen die betreffenden Kräfte ca. 3 und 48 mg sind, werden die Kontaktdistanzen bis auf die oben berührten Verschiedenheiten merklich gleich gefunden. Man wird also zunächst schließen können, daß die Kontaktdistanz in möglichst starren Apparaten einen vom Apparat unabhängigen Wert erhält, daß ihr also reelle Bedeutung zukommt und daß sie der Größenordnung nach bei den verwandten Apparaten richtig gemessen wird. Jedenfalls sprechen die Versuche nicht gegen die Annahme einer weicheren Schicht auf den Materialien, wie sie für die Erklärung der Kohärerwirkung früher angenommen wurde. Robinson glaubte sie in einer Oxydschicht zu finden, während Blanc in ihr eine lockere Schicht von Molekülen des Metalls selbst sah. Ich halte es für wahrscheinlicher, daß es sich um die Wasserhaut handelt, deren Existenz aus mannigfachen Versuchen in ähnlicher Dicke gefolgert wurde.

Gegen die Annahme, daß es sich bei der Kontaktbildung und damit auch beim Mikrophon um die durch Druck vergrößerte Berührungsfläche der reinen Stoffe selbst handele, scheint mir folgende Überlegung zu sprechen. Wäre dem so, so müßten die härtesten Elektroden die größten Drucke bzw. Verschiebungen erfordern. Wenn man nun eine „weiche" Elektrode mit einer „harten" kombiniert, müßte die Kombination die Kontaktdistanz der weichen Elektrode, also die kleine, haben. Dem widerspricht nun das Experiment ganz eklatant. Die Kontaktdistanz ist bei allen untersuchten Kombinationen immer von der Größenordnung derjenigen des „harten" Metalls. Im ganzen wird man also den Schluß ziehen können, daß eine weiche, vielleicht zähe Oberflächenschicht von geringerer Leitfähigkeit die Erscheinungen bedingt, wie es auch den weiter behandelten Tatsachen nicht widersprechen würde. — Dafür und gegen eine Leitung durch freie Elektronen spricht auch, daß bei Vergrößerung der Galvanometerempfindlichkeit das Einsetzen des Stromes immer bei etwa der gleichen Einstellung der Mikrometerschraube gefunden wird, so daß der Übergang zu den von Rother gefundenen Strömen scheinbar fehlt. Doch bedarf das noch weiterer Untersuchung.

5. Mikrophoneffekt. Um die Mikrophonwirkung der Kontakte zu untersuchen, wurde in den Stromkreis ein Telephon von ca. 170 Ohm eingeschaltet und an dem Stativ, das den Apparat hält, ein Uhrwerk befestigt. Die Erschütterungen durch die Uhr genügen auch bei dieser starren Anordnung vollkommen, um gut hörbare Stromschwankungen hervorzurufen, wenn die Einstellung des Kontaktes innerhalb der Kontaktdistanz liegt. Am Galvanometer tritt beim Ingangsetzen oder Anhalten des Uhrwerks nur dann eine merkliche Stromänderung auf, wenn die Einstellung so gewählt ist, daß der Strom gerade beginnt.

Es zeigt sich, daß alle Metalle und Kombinationen mehr oder weniger gut als Mikrophon wirken, und zwar, soweit man schätzen kann, für gleiche Spannung mit um so größerer Lautstärke, je kleiner die Kontaktdistanz ist. Die Kontakte mit großer Lautstärke erfordern also sehr scharfe Einstellung und ändern sich daher unter Wärme- usw. -Einflüssen leicht. Es gelingt aber mit Metallen von mittlerer Kontaktdistanz, Wolfram und Chrom etwa, Mikrophone zu bilden, die stundenlang unreguliert wirksam bleiben und die dabei für dieselbe elektromotorische Kraft größere Lautstärke haben als das Kohlemikrophon. Mit einer geeignet angeordneten Spule, die auf einen Eisenhebel am Torsionsstab wirkte, wurde eine Art Telephonrelais hergestellt, das gute Konstanz zeigte. Bisher nicht versucht, aber als sehr gut möglich erscheint die Messung von Schallstärken durch solche Mikrophone, deren Zustand sich durch Beobachtung des Stromes kontrollieren und eventuell einregulieren läßt.

Die Art und Lautstärke des im Mikrophon gehörten Uhrgeräusches hängt von der Einregulierung der Kontaktentfernung ab. Beim Nähern hört man zunächst nur die einzelnen Stöße, scheinbar die Spitzen der Oszillationen. Bei weiterem Andrehen erscheint das ganze Uhrgeräusch mit seinen Feinheiten und dann,

wenn die Kontakte fester werden, werden wieder bloß Stöße gehört.

Die Spannung, die an das Mikrophon anlegbar ist, wird durch die Kohärerwirkung begrenzt, ist also größer für größere Schichtdicken und macht daher für die praktische Verwendung den Nachteil der für gleiche Spannung geringeren Lautstärke wieder wett. Bei Spannungen, welche der kritischen sich nähern, tritt das vom Telephon bekannte Sausen auf, vielleicht bewirkt dadurch, daß die Elektroden selbst in schnelle mechanische Schwingungen geraten.

Wenn man zwischen die Elektroden Flüssigkeiten bringt, wie Wasser, Petroleum, Paraffinöl, Salzlösungen, wird die Mikrophonwirkung meistens etwas schwächer ohne eine charakteristische Änderung zu erfahren, ebensowenig wie die mit Gleichstrom beobachtete Kontaktbildung.

Durch Einbringen und Elektrolysieren von Kupfer- und Silberlösungen zwischen entsprechende Elektroden waren die Mikrophonwirkungen auch an Metallflächen bei oder kurz nach der Entstehung zu beobachten. Sie sind zwar etwas schwächer als bei den kompakten Metallen in Luft, aber deutlich vorhanden. Die hypothetischen Oberflächenschichten müßten also in diesem Zustande schon da sein.

6. Gleichrichtereffekt. Bei solchen Elektrolysierversuchen wurde eine merkwürdige Gleichrichterwirkung beobachtet, die hier beschrieben sein mag, da sie nur bei kleinen Kontaktabständen auftritt und insofern ein gewisses Interesse beansprucht, als sie ein mögliches Modell gibt für die Gleichrichterwirkung der Kristalldektoren. Die Erscheinung ist folgende: Elektrolysiert man zwischen Spitze und Platte bei geeignet gewähltem kleinen Abstand einen kleinen Tropfen Kupfersulfatlösung (auch Silbernitrat), der über die Platte ausgebreitet ist, und die Spitze nur in möglichst kleiner Fläche berührt, so tritt Kurzschluß des Kontaktes ein, wenn die Spitze Kathode ist. Wird der Strom dann kommutiert, so daß sich das Kupfer auf der Platte niederschlägt, so löst sich dieser Kurzschluß selbsttätig und das Spiel läßt sich beliebig oft, auch recht schnell wiederholen. — Die Kristalle mit ausgeprägter Detektorwirkung haben nun, wie ich bei früheren Versuchen oft fand, und wie auch wohl sonst bekannt sein dürfte, häufig ganz feine Schichten oder Spalten, die besser leiten als ihre Umgebung. Wenn man die Kristalle verkupfert, so überziehen sie sich zunächst mit einem feinen Netzwerk von Metall. Auch scheint nur in der Nähe solcher Spalten die Gleichrichterwirkung aufzutreten. — Diese schmalen gut leitenden Streifen könnten nun die Rolle der Spitze in dem oben geschilderten Modellversuch übernehmen. Allerdings werden an diesen Spalten auch die gewöhnlichen Polarisationserscheinungen auftreten und vielleicht für sich schon ausreichen, die Detektorwirkung zu erklären.

7. Kohärereffekt. Wie oben schon erwähnt, tritt beim Überschreiten einer gewissen elektromotorischen Kraft im Stromkreis eine plötzliche Widerstandsverminderung ein, die Kohärerwirkung; ebenso auch bei der Einwirkung von elektrischen Schwingungen, die ich mangels anderer Hilfsmittel durch Funken einer kleinen Elektrisiermaschine herstellte. Am sichersten, wenn auch nicht am empfindlichsten, schienen mir hier, wie bei der Mikrophonwirkung Wolfram und Chrom zu arbeiten, weil bei ihnen die Kontaktdistanz einen größeren Wert hat und daher zwar das Ansprechen nicht so empfindlich ist wie etwa bei Silber, dafür aber das Entfritten sich regelmäßiger gestaltet. Einem solchen Kohärer fehlt, was das Ansprechen betrifft, jede Unregelmäßigkeit des Funktionierens. Die Kontaktentfernung muß so eingestellt sein, daß schon ein kleiner Strom fließt. Für größere Entfernungen ist die Empfindlichkeit sehr gering. Ist aber ein gewisser kleiner Strom vorhanden, so ist das Ansprechen auf schwache Schwingungen absolut sicher; bei langem Experimentieren habe ich nicht einmal erlebt, daß der Effekt ausgeblieben wäre. Im Gegenteil scheint es möglich zu sein, die Stromänderung als ein quantitatives Maß für die Schwingung zu benutzen. Schwierigkeiten und Unregelmäßigkeiten entstehen nur durch das Entfritten (das ich durch einen leichten Schlag gegen das Gestell bewirkte), und zwar namentlich dann, wenn die erregende Schwingung so stark war, daß die Widerstandsänderung vollständig war und ein Zusammenbacken stattfand. Bei dieser Entfrittung kommt es leicht vor, daß der ursprüngliche Wert des Widerstandes sich nicht wieder herstellt; bei einer neuen Messung reagiert der Kohärer dann in anderer Weise. Wenn man dann aber unter Beobachtung des Galvanometers die Kontaktentfernung so ändert, daß der ursprüngliche Strom wieder hergestellt ist, so wird auch die Wirkung merklich wieder die gleiche. Nimmt man diese Komplikation in Kauf, so ist der Kohärer in dieser Form ein zuverlässiges Instrument. Vor Messungen ist es gut, zunächst die stärkste Schwingung einmal auf den Kohärer wirken zu lassen, weil sich durch solche Einwirkung die Kontaktdistanz etwas verkleinern kann. — Übrigens ist natürlich für viele Zwecke auch der einfach abgeklopfte Kohärer in dieser stabilen Form

recht gut verwendbar und sicher viel zuverlässiger als die bisher benutzten Formen.

Einige Besonderheiten der Kohärerwirkung wurden beobachtet. Wenn der Kontakt sehr lose eingestellt ist, tritt für schwache Funken eine Widerstandsverminderung, für größere dagegen eine Widerstandsvermehrung, die sogenannte Antikohärerwirkung auf. Bei stärkerem Anpressen ist aber im allgemeinen für beide Fälle nur die normale Wirkung vorhanden. Die Anomalität ist besonders merklich bei den Elektroden mit großer Kontaktdistanz; namentlich Kohle und Wolframbronze zeigen sie ausgesprochen und leicht reproduzierbar. Man darf sich wohl vorstellen, daß sie gleiche Ursache hat, wie das bei großen Spannungen im Mikrophon auftretende Sausen, daß nämlich mechanische Schwingungen eine Lösung des Kontaktes hervorbringen.

Die Kohärerwirkung kann auch ohne Galvanometer, einfach mit Hilfe der Mikrophonwirkung verfolgt werden. Der Uhrton wird in gleicher Weise verändert wie beim Verringern der Entfernung durch die Schraube. Bei nicht zu starker Erregung und entsprechender Einstellung tritt eine selbsttätige Entfrittung ein, in diesem Zustande ist die Beobachtung besonders bequem. Unter gewissen Umständen, die allerdings nicht leicht reproduzierbar oder konstant zu halten sind, wird die Entfrittung so schnell, daß die einzelnen Funken im Telephon als Knacken gehört werden, eine einst im Köpselschen Kohlenkohärer benutzte Erscheinung. Aus allem folgt, daß die Kohärerwirkung wohl nur eine Folge der elektrostatischen Anziehung der Elektroden sein kann, wie es z. B. Blanc aus seinen Versuchen geschlossen hat, und daß die übrigen Theorien der Kohärerwirkung nicht Stich halten.

Versucht man nach einer starken Erregung des Kohärers, bei der die Widerstandsverminderung bis zu Ende gegangen ist, durch Zurückdrehen der Mikrometerschraube zu entfritten, so tritt das erst nach starkem Zurückdrehen der Schraube auf, entsprechend einer relativ großen Kraft zwischen den aufeinander gepreßten Metallteilen.

8. Zusammmenfassung.

Es wird eine Torsionsvorrichtung beschrieben, die es gestattet, Verschiebungen von 1 $\mu\mu$ sicher vorzunehmen.

Mit ihrer Hilfe werden die Stromänderungen beim Nähern der Elektroden eines Kontaktes verfolgt; die „Kontaktdistanz" für verschiedene Materialien wird in der Größenordnung 1—50 $\mu\mu$ gefunden.

Es gelingt damit, wirksame Metallmikrophone und zuverlässige Kohärer herzustellen.

Es erscheint wahrscheinlich, daß die Erscheinungen weichen, schlecht leitenden Oberflächenschichten zuzuschreiben sind.

Elektrolyse von Metallsalzen zwischen einander nahen Elektroden verschiedener Größe ergibt eine eigenartige Gleichrichterwirkung.

Saarbrücken 3, 8. April 1920.

(Eingegangen 10. April 1920.)

Beiträge zur Farbenlehre. II.

Die Helligkeit der Pigmentfarben.

Von F. W. Fritz Kohlrausch.

Entsprechend der Bemerkung am Schlusse der 1. Mitteilung[1]) soll versucht werden, die Helligkeit als eine Funktion der drei Erregungswerte r, b, g, und zwar als eine lineare Funktion derselben darzustellen, also $H = \beta b + \gamma g + \varrho r$. Ist man imstande, für mindestens drei Farben sowohl die zugehörigen Grunderregungen, als auch die Helligkeiten anzugeben, so sind die drei „Koeffizienten" ϱ, β, γ, die man wohl auch die „spezifischen Helligkeiten der Grundempfindungen" nennen könnte, bestimmbar. Hierzu bedarf es also eines Beobachtungsmaterials, das dem System der Helmholtz-Königschen Dreikomponententheorie fremd ist, nämlich der Helligkeitsmessungen. Ein eventuelles Mißlingen dieses Erweiterungsversuches würde keinen Gegenbeweis gegen die Grundlagen der Helmholtzschen Theorie liefern. Das Gelingen dagegen wird unsere Überzeugung von der Brauchbarkeit dieser Theorie wesentlich bestärken.

In einer eben im Druck befindlichen Arbeit hat F. Exner[2]) auf folgendem Wege zum erstenmal[3]) den Wert der drei „Koeffizienten" bestimmt: „Es wurden in drei Pigmenten, deren Farben den Grundempfindungen entsprechen, mit Vermeidung heterochromer Photometrie die Helligkeiten der gesättigten Anteile bestimmt und dann durch Mischung der Pigmente am Farbenkreisel zu Weiß die Verhältnisse, in denen die Helligkeiten der Grundempfindung im Weiß enthalten sind. Diese fanden sich zu $\varrho : \gamma : \beta = 1 : 0{,}756 : 0{,}024$." — Die für mein Auge bestimmten Werte wurden auf etwas

1) Vgl. diese Zeitschr. **21**, 403, 1920.

2) Wien. Ber. IIa, **129**, 12. II. 1920.

3) Anm. bei der Korrektur. Nachträglich finde ich, daß bereits A. Wenzel, gestützt auf das Königsche Beobachtungsmaterial, diese Koeffizienten für das Auge Königs berechnete, und die Werte erhielt:

$$\varrho = 0{,}822, \quad \beta = 0{,}017, \quad \gamma = 0{,}161, \quad \text{also}$$
$$\varrho : \gamma : \beta = 1 : 0{,}195 : 0{,}021.$$

direkterem Wege gefunden und stützen sich auf größeres Beobachtungsmaterial. Ihr Verhältnis ergab sich, wie vorgreifend bemerkt sei, zu $\varrho:\gamma:\beta = 1:0{,}618:0{,}047$; der Unterschied gegen Exners Werte wird wohl größtenteils in der Verschiedenheit der Augen begründet sein. Und zwar halte ich meine Augen für normal, also dem Durchschnitt entsprechend, weil bei dreijährigen farbenphysiologischen Übungen (Farbenmischungen am Kreisel oder an eigens hierzu konstruiertem Apparat, Helligkeitsvergleiche, Schwellenversuche u. dgl.) meine Angaben von den Hörern (Kunstgewerbeschüler und Maler) meist bis in die eben merklichen Nuancen bestätigt wurden.

Als Versuchsobjekt für die vorliegende Aufgabe dienten wieder die Ostwaldschen Pigmente, deren Analysenergebnis in der 1. Mitteilung (l. c.) enthalten ist. Die Anteile r, b, g sind demnach bekannt und es erübrigte nur eine nicht heterochrome Bestimmung der Helligkeit. Nicht heterochrom deshalb, weil bei heterochromer Photometrie, wie immer man sie sich auch erleichtern mag, das Auge nur auf „größte Ähnlichkeit" einstellt, was nicht gleichbedeutend zu sein braucht und, wie meine bisherige Erfahrung sagt, auch nicht gleichbedeutend ist mit „gleicher Helligkeit", solange die Unterschiedsmerkmale nicht nur in Helligkeitsunterschieden bestehen. Ganz aus der Welt schaffen läßt sich die Verschiedenfarbigkeit allerdings nicht, aber man kann den Farbunterschied beliebig klein machen und durch das Einschalten von „kleinen Stufen" zwischen zwei zu vergleichende sehr verschiedenfarbige Lichter die geforderte einfarbige Photometrie prinzipiell beliebig approximieren (F. Exner, l. c.). Praktisch ist allerdings eine Grenze dadurch gegeben, daß die erzielte Verkleinerung des systematischen Fehlers schließlich durch das Anwachsen der zufälligen Fehler, die sich auf den einzelnen Stufen addieren, illusorisch gemacht wird. Die Möglichkeit, solche Stufen einzuschalten, bietet der Ostwaldsche Farbenatlas, der ja überhaupt für derartige Versuchszwecke von unschätzbarem Wert ist. — Um also irgend zwei Farbblättchen mit der Bezeichnung m und $m+n$ aufeinander zu relationieren, wird zunächst m mit $m+1$, dieses mit $m+2$ usf. verglichen, bis man zu $m+n$ aufgestiegen ist. In einem 24 stufigen Farbenkreise sind dabei die Farbunterschiede zweier benachbarter Nummern bereits meistens so gering, daß ihre Photometrierung ohne jenen für das heterochrome Arbeiten so charakteristischen Widerwillen durchgeführt werden kann. Als Meßinstrument wurde das früher beschriebene Polarimeter benutzt. Unter den Öffnungen A und B lagen die zwei vom diffusen Tageslicht beleuchteten Pigmente; das vom Rochon-Prisma entworfene ordentliche Bild A_2 lag unmittelbar neben dem außerordentlichen B_1 und wurde durch Verdrehen des Okularnikol diesem an Helligkeit gleich gemacht. Sodann wurden die Pigmente vertauscht und der Versuch wiederholt. Aus den beiden Nikolstellungen α und β (Mittel aus mehreren Ablesungen) ergibt sich als Helligkeitsverhältnis $\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta}$. Hat das Pigment mit der Nummer m die Bezugshelligkeit 1, so hat Nummer $m+n$ die Helligkeit

$$h_n = h_1 h_2 h_3 \ldots h_{n-1}.$$

Mißt man einen ganzen Farbkreis durch, bis man wieder zum Ausgangspunkt zurückkommt, so muß das Produkt aller gefundenen h-Werte 1 ergeben; ein gutes Kriterium für die prinzipielle Möglichkeit und für die Genauigkeit der Messung. Eine sorgfältige Durchmessung des Kreises *ia* (jedes h ist aus 18 Einzelbeobachtungen an verschiedenen Tagen bestimmt) ergab schließlich statt 1 den Wert 1,024; beim Kreis *nc* statt 1 den Wert 0,920. — Der jeweilig überbleibende Fehler — also 2,4 Proz. bzw. 8,9 Proz. wurde gleichmäßig auf alle Zwischenwerte verteilt. Auf diese Art wurden die relativen Helligkeiten innerhalb der Kreise *ia*, *nc*, *pa* erhalten. Um die „absoluten" Helligkeiten, bezogen auf irgendeinen gemeinsamen Standard (Normalweiß) zu bekommen, braucht man sich nur von einer, bzw. der größeren Genauigkeit zuliebe von mehreren passend verteilten Stellen der betreffenden Kreise aus über die ebenfalls im Atlas vorhandenen weißlichen Abkömmlinge bis zum reinen Weiß durchzumessen und mit Hilfe der so hergestellten Verbindungen zum Weiß die bereits bekannte Relativkurve in ihrer absoluten Höhe zu fixieren. Tabelle V enthält die Resultate; als Vergleichsweiß wurde dieselbe Papiersorte (weißer Karton), wie bei der Bestimmung der Remissionskurve benutzt.

Aus den Ergebnissen am Farbkreis *nc* wurden die Werte der Koeffizienten bestimmt, indem unter Hinzuziehung der in der 1. Mitteilung (l. c.) für jedes Papier bekannten r, b, g-Werte 24 Gleichungen der eingangs gegebenen linearen Form aufgestellt und aus ihnen die wahrscheinlichsten Werte der drei Unbekannten ϱ, β, γ mit kleinsten Quadraten gerechnet wurden. Wird die Helligkeit des Vergleichsweiß gleich 100 gesetzt, so sind die erhaltenen Zahlen:

$$\varrho = 0{,}683 \qquad \beta = 0{,}027_7 \qquad \gamma = 0{,}422.$$

Hat das Vergleichsweiß, wie dies bei der üblichen Darstellung der Königschen Grundempfindungskurven der Fall ist, den Wert 300, so sind obige Zahlen zu verdreifachen. In Fig. 1

Tabelle V.

Nr.	0	4	8	13	17	21	25	29	33	38	42	46
ia	76,2	76,7	70,8	66,3	66,1	67,0	66,3	58,1	49,2	35,6	29,2	28,0
nc	54,0	59,1	56,1	47,9	42,4	40,5	40,4	38,6	31,6	22,9	18,4	14,6
pa	73,0	68,7	64,7	55,2	50,9	43,2	42,8	36,6	27,4			

Nr.	50	54	58	63	67	71	75	79	83	88	92	96
ia	24,9	29,9	34,6	43,5	45,6	46,6	43,7	42,1	45,8	56,5	65,8	74,0
nc	14,0	18,5	22,9	29,2	30,1	29,1	30,1	28,8	29,7	32,6	38,6	47,4
pa										42,3	56,6	62,6

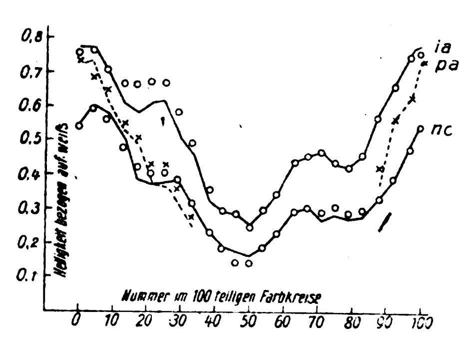


Fig. 1.

gibt die mit *nc* bezeichnete ausgezogene Kurve die Helligkeitsverteilung im Ostwaldschen *nc*-Kreis, gerechnet mit obigen Koeffizienten; die geringelten Stellen wurden beobachtet. Man sieht daraus, daß diese wahrscheinlichsten Werte mit Ausnahme von wenigen Abweichungen, insbesondere im roten Teil (Nr. 17—29), in der Tat eine gute Anpassung an alle Farben ermöglichen. Fast noch besser, wenn man wieder von den roten Farben absieht, ist die Übereinstimmung für den *ia*- und *pa*-Kreis, wo wieder die ausgezogene bzw. gestrichelte Kurve mit obigen Koeffizienten berechnet, die Ringe und Kreuze beobachtet wurden.

Man kann endlich noch versuchen, ob diese Koeffizientenwerte auch die Helligkeit der gesättigtsten unter allen objektiven Farben, nämlich der Spektralfarben, richtig wiedergeben. Direkte Bestimmungen der Helligkeitsverteilung im Interferenzspektrum der Sonne liegen vor für das Auge F. Exners, der dieselbe in der schon erwähnten neuesten Arbeit nach der Methode der kleinen Stufen bestimmte. Meine eigenen an der gleichen Apparatur durchgeführten Beobachtungen sind leider in Verlust geraten. Die Exnerschen Werte wurden so umgerechnet, daß die von der Helligkeitskurve umschlossene Fläche gleich ist der Summe der Flächen, die von den im gleichen Maßstab aufgetragenen Königschen Grundempfindungskurven umschlossen wird; d. i. 300. — In Tabelle III der 1. Mitteilung sind in der letzten Zeile einige Kurvenordinaten eingetragen. Werden weiter die ebenda gegebenen Ordinaten der drei Erregungskurven mit obigen Koeffizienten multipliziert, so sollte ihre dreifache (s. oben) Summe dieselbe Helligkeitsverteilung geben. Der Grad der Übereinstimmung ist aus Fig. 2 zu ersehen,

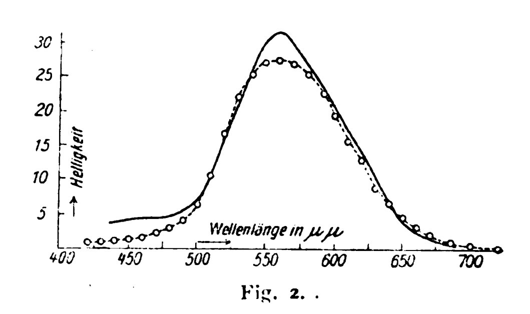


Fig. 2.

in der die ausgezogene Kurve auf diese Weise gerechnet, die gestrichelte Kurve von Exner beobachtet wurde. Die Abweichung bei den kleinen Wellenlängen $\lambda = 400$ bis $\lambda = 500$ rührt von der sekundären Erhebung in der Königschen Rotkurve her, die infolge des großen Wertes für ρ stärkeres Gewicht bekommt. Es ist möglich, daß dieses Nichtübereinstimmen von Theorie und Experiment prinzipieller Natur ist, indem die Additivität der heterochromen Helligkeiten, die bei der Berechnung vorausgesetzt wurde, eben nur eine erste Annäherung ist, die sich bei den weniger gesättigten Farben bewährt, bei den gesättigten aber sich zur Darstellung als nicht genügend erweist. Versuche zur Klarstellung dieses Sachverhalts sind im hiesigen Institute im Gange. — Andrerseits wäre diese Diskrepanz auch verständlich in Rücksicht auf die schon mehrfach erwähnte Unsicherheit in der verwendeten Rotkurve. Gerade diese Kurve ist es, die auch für mein Auge anders zu verlaufen scheint, als für das Auge Königs (vgl. Fig. 2, 3 und 4). Eine exakte Prüfung und eine bindende Aussage kann wohl nur von homogenem Beobachtungsmaterial (hier ist die Individualität dreifach:

König, Exner, Kohlrausch) erwartet werden. Wie diese Abweichung aber auch aufgefaßt werden mag, eine gute erste Näherung scheint erreicht zu sein, eine Näherung, die jedenfalls zur Beschreibung der Helligkeitseigenschaften von Pigmentfarben vollauf ausreicht.

Fassen wir den Inhalt der 1. und 2. Mitteilung zusammen, so hat sich ergeben: Die spektrophotometrische Untersuchung des von Pigmentfarben zurückgeworfenen Lichtes liefert ein Zahlenmaterial, von dem ausgehend man auf der Basis der Helmholtzschen Theorie und unter Hinzunahme des Exnerschen Prinzips von der Additivität heterochromer Helligkeiten die drei Eigenschaften einer Farbe, nämlich Farbton, Sättigung und Helligkeit, zahlenmäßig angeben kann, und zwar in befriedigender Übereinstimmung mit der Erfahrung. Die Aussage gilt nur für eine bestimmte, den Versuchsbedingungen gleiche Beleuchtung (hier Tageslicht); sie gilt ferner streng genommen nur für dasjenige Auge, für das auch die verwendeten Grundempfindungskurven gelten, und ist somit nur insofern von allgemeiner Natur, als dieses Auge ein „normales", also ein dem Durchschnitt der trichromatischen Augen entsprechendes ist, und insofern man die Abweichungen in den Angaben „normaler" Augen untereinander vernachlässigen kann und will. Sie gilt endlich nur für zentrales Sehen, genügende aber nicht blendende Lichtstärke, ausgeruhtes und nicht etwa durch vorhergehendes Fixieren eines Musters ermüdetes Auge, für neutrale Umgebung des Objekts usw. kurz für alle jene Beobachtungsverhältnisse, die jedermann instinktiv aufsuchen wird, wenn er über eine Farbe ein Urteil erlangen will. — Der dreifache Inhalt der Aussage ist notwendig, denn zwei Farben, die zwei der Parameter gleich haben, können sich noch durch den dritten unterscheiden; er ist hinreichend, denn wenn zwei Farben alle 3 Parameter, Farbton, Sättigung und Helligkeit gleich haben, ist keine weitere Eigenschaft aufzeigbar, in der sie sich noch unterscheiden könnten. Zur Diskussion stünde höchstens noch, ob gerade diese Koordinaten es sind, die den Empfindungsinhalt am anschaulichsten beschreiben, und ob es nicht drei andere gibt, die ebenso richtig, aber anschaulicher sind. Mir scheint dies nicht der Fall zu sein.

Aus dem II. Physikalischen Institut der Universität Wien.

(Eingegangen 22. März 1920.)

Schallgeber und Schallempfänger. IV.

Von W. Hahnemann und H. Hecht.

Wir haben vor kurzem[1]) Apparate als Schallgeber untersucht, deren Erregung durch eine in einem konstanten Magnetfelde schwingende Spule erfolgt. Wir wollen jetzt die Umkehrung eines solchen Spulenschallgebers betrachten und die Gesetze ableiten, die für ihn als Empfänger gelten, wenn er sich in einem Schallfelde befindet und die Abbremsung der aufgenommenen Energie durch die in der schwingenden Spule hervorgerufenen Ströme erfolgt. Wir benutzen dazu wieder die schon beim Geber mit Erfolg angewandte Ersatzkreismethode und werden uns zunächst das rein elektrische Abbild des Spulenschallempfängers im Schallfelde schaffen müssen.

Der Spulenschallempfänger.

I. Der elektrische Ersatzkreis.

Das für den Geber gültige Schema der a. a. O. dargestellten Fig. 2 erfährt beim Übergang zum Empfänger insofern eine Änderung, als die erregende Maschine — jetzt das Schallfeld — direkt an den Klemmen der die schwingende Spule darstellenden Kombination von Widerstand, Selbstinduktion und Kapazität angeschlossen zu denken ist. Wir erhalten auf diese Weise das Schema des durch einen Nutzwiderstand w_n geschlossenen Empfängers, wie es in Fig. 1 dieser Arbeit dargestellt ist.

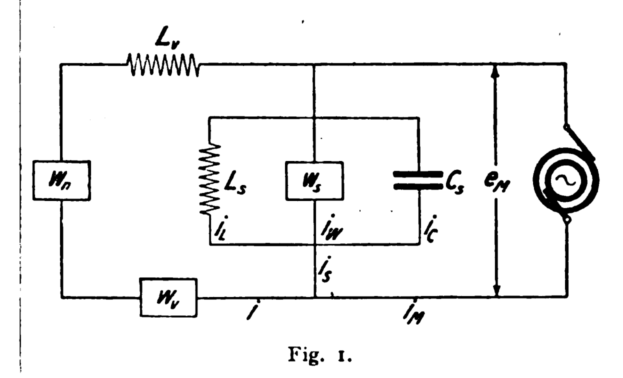


Fig. 1.

Wir sahen bereits früher, daß eine Erregung des Senders mit konstanter Kraft einer konstanten Stromstärke entspricht und, daß die mechanische Amplitude des Apparates mit der Spannung an dem elektrischen Ersatzkreise gleichbedeutend ist. Wird also der Empfänger mit konstanter Amplitude erregt, so müssen wir uns hierbei die Maschinenspannung e_M, d. h. die Spannung an dem elektrischen Ersatzkreise

1) Diese Zeitschr. **21**, 264, 1920; im folgenden mit a. a. O. bezeichnet.



konstant gehalten denken, während wir uns eine Erregung mit konstanter Kraft, d. h. eine Erregung durch ein Schallfeld, ähnlich wie beim Sender, durch einen konstanten Maschinenstrom i_M dargestellt denken müssen. Der Empfänger hat im Falle der Erregung durch konstante Kraft die größtmöglichste Amplitude, wenn er offen ist, da dann $i = 0$ ist und i_s seinen größten Wert gleich i_M annimmt. Bei allmählichem Schließen des Empfängers wird i_s und damit die Spannung am Ersatzkreise, d. h. die Amplitude immer kleiner. Nehmen wir L_v zu Null an, und betrachten einen Apparat mit steigendem Sender-Wirkungsgrade, so würde bei konstantem w_s, d. h. bei konstanten Strahlungsverhältnissen des Apparates w_v mit wachsendem η immer kleiner werden, um, wenn $\eta = 1$ ist, null zu werden. In diesem Falle wird für Kurzschluß, d. h., wenn auch noch $w_n = 0$ gemacht wird, $i = i_M$ und $i_s = 0$, und die Spannung am Ersatzkreise wird, da der Apparat vollständig kurz geschlossen ist, null, d. h., die mechanische Amplitude ist gleichfalls null geworden. Der Empfänger ist in diesem Falle vollständig schallhart und kann trotz seines Wirkungsgrades von 1 keine Energie aus dem Schallfelde aufnehmen.

II. Das Diagramm.

Während es für den Sender nur ein Diagramm gibt, und dieses ausreicht, um sein Verhalten unter allen Umständen darzustellen, hängt die Zahl der möglichen Empfänger-Diagramme von der Wahl des äußeren Schließungskreises ab. Da uns schließlich immer die Frage am meisten interessieren wird, wann der Empfänger die größte Nutzleistung abgibt, wollen wir das Diagramm aufstellen, das für fehlende oder durch eine passende Kapazität kompensierte Selbstinduktion L_v gilt, was, wie man wohl ohne jede nähere Untersuchung annehmen kann, Vorbedingung für höchste Ausnutzung des Empfängers im Schallfelde ist. Es wird also, um es nochmals ausdrücklich zu betonen, sowohl in diesem wie in dem folgenden Kapitel, das von der Dämpfung und der Nutzleistung handelt, die Selbstinduktion L_v zu Null angenommen. Das Diagramm der Fig. 2 gilt dann nur für einen Schließungskreis mit den beiden Widerständen w_n und w_v.

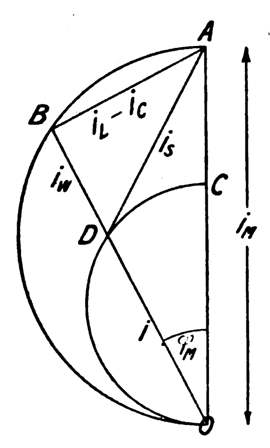


Fig. 2.

OA stellt nach Richtung und Größe den konstanten Strom i_M, d. h. die erregende Kraft des Schallfeldes dar. Die beiden Komponenten des Stromes i_M kann man entsprechend den a. a. O. gewählten und in Fig. 1 wiederholten Bezeichnungen schreiben:

$$i_M \cos \varphi_M = i_w + i$$
$$i_M \sin \varphi_M = i_L - i_C$$

mithin

$$\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{i_L - i_C}{i_w + i}.$$

Der Phasenwinkel des aus L_s, C_s und w_s bestehenden Kreises, der in elektrischer Form die mechanisch-akustische Strahlungsleistung und die mechanisch leerschwingende Energie des Apparates enthält, ist, wie bereits a. a. O. angegeben,

$$\operatorname{tg} \varphi_s = \frac{i_L - i_C}{i_w} = \frac{2\pi x}{\mathfrak{d}_s},$$

worin x die prozentuale Verstimmung, von der Resonanz aus gerechnet, und $\mathfrak{d}_s$ die mechanische oder Senderdämpfung ist. Es wird also

$$\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{1}{1 + \frac{i}{i_w}} \operatorname{tg} \varphi_s.$$

Da sich die Wattströme i und i_w umgekehrt wie die Widerstände ihrer parallel geschaltenen Zweige verhalten müssen, so wird, wenn wir noch w_s durch $\frac{\eta}{1-\eta} w_v$ ersetzen,

$$\operatorname{tg} \varphi_M = \frac{1 + \frac{w_n}{w_v}}{1 + \frac{w_n}{w_v} + \frac{\eta}{1-\eta}} \cdot \frac{2\pi x}{\mathfrak{d}_s}.$$

Diesen Winkel φ_M denken wir uns in O an OA angetragen. Da infolge Fehlens von L_v die Zustände symmetrisch zur Resonanzlage sind, beschränken wir uns auf die Zeichnung und Darstellung für die Verstimmung nach einer Seite. Ein über OA als Durchmesser beschriebener Halbkreis trifft den freien Schenkel des Winkels φ_M in B. Es ist daher

$$OB = i_w + i$$
$$AB = i_L - i_C.$$

Da, wie wir bereits sahen, unabhängig von der Frequenz

$$\frac{i}{i_w} = \frac{w_s}{w_n + w_v}$$

ist, so teilen wir die Strecke OA so, daß $OC:AC$ gleich diesem Verhältnis wird und beschreiben zu OC als Durchmesser einen zweiten Halbkreis, der, wie leicht nachzuweisen, die Strecke OB stets so teilt, daß

$$OD = i$$

und

$$BD = i_w$$

ist. Da der L_s, C_s und w_s durchfließende Strom i_s die vektorielle Summe von i_w und $i_L - i_C$ ist, so ist die Strecke $AD = i_s$. Im Resonanzfalle wird $i_L - i_C = 0$ und $\varphi_M = 0$, und das ganze Diagramm schrumpft zu der im Punkte C geteilten Geraden OA zusammen. Der wattlose Strom ist null geworden. Es ist

$$i_M = i + i_w$$

und i hat für gegebenes w_n und w_v seinen größtmöglichen Wert angenommen.

III. Dämpfung und Nutzleistung.

Wir behandeln auch in diesem Kapitel wieder nur den besonderen Fall, daß L_v von vornherein gleich null oder durch eine passende Kapazität kompensiert ist, da wir nur die Stelle größtmöglichen Energie-Entzuges aus dem Schallfelde betrachten wollen.

Die Dämpfungen bei offenem und geschlossenem Empfänger verhalten sich bei Erregung in konstantem Schallfelde umgekehrt wie die Resonanzamplituden. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{d}_n$ bzw. $\mathfrak{d}_v$ die Nutz- bzw. Verlustdämpfung und mit $\mathfrak{d}_s$ die mechanische oder Senderdämpfung, die gleichzeitig die Dämpfung des offenen Empfängers ist, so ist also

$$\frac{\mathfrak{d}_s}{\mathfrak{d}_s + \mathfrak{d}_n + \mathfrak{d}_v} = \left(\frac{i_w}{i_M}\right)_{\text{Resonanz.}}$$

Da aber

$$\left(\frac{i_w}{i_M}\right)_{\text{Res.}} = \frac{w_n + w_v}{w_s + w_n + w_v}$$

ist, so wird

$$\frac{\mathfrak{d}_n + \mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s} = \frac{w_s}{w_n + w_v}$$

oder in Worten, wie es bei parallel geschalteten Widerständen von vornherein zu erwarten war: die Dämpfungen verhalten sich umgekehrt, wie die entsprechenden Bremswiderstände.

Bei Empfängerkurzschluß ist $w_n = 0$ und $\mathfrak{d}_n = 0$. Führen wir den Wirkungsgrad η ein, so erhalten wir für diesen Fall die maximale Dämpfungserhöhung

$$\Delta \mathfrak{d} = \frac{\eta \mathfrak{d}_s}{1 - \eta} = K.$$

Es tritt hier die gleiche Konstante auf, der wir schon beim Spulenschallgeber begegnet sind, und die auch die Eigenschaften der nach dem Telephonprinzip gebauten Schallgeber und Schallempfänger bestimmte.

Diese Dämpfungserhöhungen bei Kurzschluß des kompensierten Empfängers sind experimentell leicht zu bestimmen und liefern in der Konstanten ohne weiteres ein Maß für die Güte des Apparates. Umgekehrt können sie, wenn Senderwirkungsgrad und -dämpfung auf andere Weise bestimmt sind, dazu dienen, die Theorie zu kontrollieren. So wurde beispielsweise bei einem Apparat, der als Schallgeber einen Wirkungsgrad von 0,60 und eine Dämpfung von 0,02 besaß, wenn er als Empfänger durch eine seine Selbstinduktion kompensierende Kapazität kurzgeschlossen wurde, eine Dämpfungserhöhung von 0,030 gemessen; und das ist der gleiche Betrag, der sich aus η und $\mathfrak{d}_s$ ergibt. Bei halber Kapazität betrug die Dämpfungserhöhung 0,019, bei doppelter 0,023.

Diese bei Kurzschluß eintretenden Dämpfungserhöhungen sind allerdings die größtmöglichen, die mit dem Empfänger zu erzielen sind. Nutzdämpfung und Nutzleistung aber, auf die es uns im allgemeinen wohl am meisten ankommen wird, sind hierbei null. Da

$$\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_v} = \frac{w_n}{w_v}$$

ist, können wir unsere obige Gleichung nach Ersatz von w_s durch w_v und den Wirkungsgrad auch schreiben

$$\frac{\mathfrak{d}_n}{\mathfrak{d}_s} = \frac{\eta}{1 - \eta} \cdot \frac{w_n \cdot w_v}{(w_n + w_v)^2}.$$

Dieser Ausdruck erreicht sein Maximum für $w_n = w_v$, und in diesem Falle wird

$$\left(\mathfrak{d}_n\right)_{\max.} = \frac{K}{4}.$$

Von gleicher Größe ist $\left(\mathfrak{d}_v\right)_{\max.}$ und daher im Falle der größten Nutzdämpfung

$$\left(\mathfrak{d}_n + \mathfrak{d}_v\right)_{\max.} = \frac{K}{2}.$$

Mit der Bedingung für die größte Nutzdämpfung ist die größte Nutzleistung, wie wir in einer früheren Arbeit[1]) gesehen haben, nur

1) Diese Zeitschr. **20**, 245, 1919.

so lange identisch, als $\frac{\mathfrak{d}_n + \mathfrak{d}_v}{\mathfrak{d}_s}$ klein gegen 1 ist, d. h. nur für ganz schwach abgebremste oder abbremsbare Empfänger.

Nennen wir die Nutzleistung W_n, so wird

$$W_n = i^2 w_n.$$

Da

$$\frac{i}{i_M} = \frac{w_s}{w_s + w_n + w_v}$$

ist, so wird

$$W_n = i_M^2 \frac{w_s^2 w_n}{(w_s + w_n + w_v)^2}.$$

Befindet sich der Empfänger in einem konstanten Schallfelde, so ist i_M konstant, und daher tritt das Maximum von W_n abhängig von w_n für

$$w_n = w_s + w_v = \frac{w_n}{1 - \eta}$$

auf.

Wir erkennen hieraus, wie wir einen gegebenen Empfänger bei nicht vorhandener oder kompensierter Selbstinduktion schließen müssen, um von ihm das Maximum an Nutzleistung zu erhalten. Wie man bemerkt, sind die früheren Bedingungen für maximale Nutzdämpfung und die jetzigen für maximale Nutzleistung praktisch gleich für sehr kleine η, d. h. für wenig abbremsbare Empfänger.

IV. Die Abstimmung.

Wie beim elektromechanischen Transformator ist auch beim Spulenschallempfänger mit vorhandener Selbstinduktion L_v die Resonanzlage vom äußeren Schließungskreise abhängig. Diese Abhängigkeit ist bei praktischen Ausführungen im allgemeinen wieder nur eine geringe, doch experimentell noch gut nachweisbar und zur Kontrolle der Theorie ebenso wie die Dämpfungserhöhung bei Kurzschluß sehr brauchbar.

Die mechanische oder Sender-Resonanz[1]) tritt ein, wenn die Spannung am elektrischen Ersatzkreise, d. h. entsprechend der a. a. O. dargestellten Fig. 2 der Strom i_w in w_s sein Maximum erreicht und gleich i wird. Mit dieser Resonanzfrequenz muß die Resonanzfrequenz des offenen Empfängers zusammenfallen. Verschieden hiervon wird aber die Resonanzfrequenz des geschlossenen Empfängers sein, da bei vorhandener Selbstinduktion L_v im Schließungskreise noch wattlose Ströme auftreten, die, wie wir sehen werden, eine Verschiebung der Resonanzfrequenz bedingen müssen. Wir wollen beispielsweise die Resonanzfrequenz des kurz, d. h. nur durch w_v und L_v geschlossenen Empfängers berechnen.

Während die Bedingung für die Resonanzlage des offenen Empfängers geschrieben werden kann

$$i_L = i_C,$$

ist diejenige des geschlossenen Empfängers

$$i \sin\varphi_v + i_L = i_C,$$

wenn φ_v die Phasenverschiebung im äußeren, vom Strom i durchflossenen Schließungskreise ist.

Nennen wir die Resonanzfrequenz des kurz geschlossenen Empfängers ω_e, so ist

$$\omega_e L_v = \frac{e_M}{i} \sin\varphi_v,$$

und daher die Bedingungsgleichung für Resonanz

$$\frac{e_M}{\omega_e L_v} \sin^2\varphi_v + \frac{e_M}{\omega_e L_s} = e_M \omega_e C_s.$$

Unter Benutzung der Beziehung

$$\omega_R^2 L_s C_s = 1$$

geht diese Gleichung über in

$$\left(\frac{\omega_e}{\omega_R}\right)^2 = 1 + \frac{L_s}{L_v} \sin^2\varphi_v.$$

Da, wie a. a. O. abgeleitet,

$$L_s = \frac{\eta \mathfrak{d}_s}{1 - \eta} \cdot \frac{w_v}{\pi \omega_R} = \frac{K w_v}{\pi \omega_R}$$

und

$$L_v = \frac{w_v \operatorname{tg}\varphi_v}{\omega_R}$$

ist, so wird

$$\frac{L_s}{L_v} = \frac{K}{\pi \operatorname{tg}\varphi_v}$$

und daher

$$\left(\frac{\omega_e}{\omega_R}\right)^2 = 1 + \frac{K \sin\varphi_v \cos\varphi_v}{\pi}.$$

Ist der letztere Ausdruck klein gegen 1, so erhält man für das Verhältnis der Resonanzfrequenz des kurz geschlossenen zu derjenigen des offenen Empfängers bzw. des Senders die Gleichung

$$\frac{\omega_e}{\omega_R} = 1 + \frac{K \sin\varphi_v \cos\varphi_v}{2\pi}\ ^{1)}.$$

Wie man erkennt, wird die Änderung der Resonanzfrequenz des Empfängers null, bei Apparaten mit verschwindender freier Selbstinduktion L_v oder bei sehr kleinem K, d. h. bei geringen Wirkungsgraden. Andererseits kann

1) Es ist im folgenden immer Amplitudenresonanz und nicht Leistungsresonanz gemeint.

1) Diese Verstimmungen des Empfängers, die im allgemeinen nur wenige Promille betragen, sind experimentell bestätigt.

man stets eine die Wirkung der freien Selbstinduktion kompensierende Kapazität in den Schließungskreis einschalten, wie sich schon gelegentlich der Maßnahmen zur Erhöhung der Dämpfung und der Nutzleistung als nützlich erwies, und hierdurch die Resonanzlage wieder zurückschieben. Macht man die kompensierende Kapazität jedoch kleiner, so daß der Strom i im äußeren Schließungskreise voreilend wird, so verschiebt sich die Resonanzlage nach der anderen Seite, d. h. wird kleiner als ω_R. Dies geht so lange, bis der Empfänger „zu offen" wird und wieder in seine eigentliche Resonanzlage zurückkehrt.

Zusammenfassung.

Nachdem in einer früheren Arbeit der Spulenschallgeber behandelt ist, haben wir in der vorliegenden Abhandlung die Umkehrung dieses Apparates als Schallempfänger im konstanten Schallfelde betrachtet, wobei die Abbremsung durch elektrische Ströme hervorgerufen wird, die eine in einem konstanten Magnetfelde schwingende Spule durchfließen. Es sind ein besonders einfaches Diagramm, das den Fall der größtmöglichsten Nutzleistung enthält, gegeben und die Bedingungen für die maximale Nutzdämpfung und die maximale Nutzleistung berechnet. Die Resonanzlage ist im allgemeinen abhängig vom Schließungszustande, indem wattlos schwingende elektrische Energien zu den mechanischen hinzutreten. Die hierdurch eintretenden Verstimmungen sind berechnet worden. Die theoretischen Resultate sind durch gelegentlich kurz mitgeteilte experimentelle Ergebnisse gestützt.

Kiel, im April 1920.

(Eingegangen 8. Mai 1920.)

Luftverflüssigung und Zustandsgleichung.

Von K. Schreber.

Die bekannte Thomsonsche Gleichung für die Drosselwirkung läßt sich leicht umformen zu:

$$\omega = \frac{A}{c_p}\left(T\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p - v\right),$$

$$\omega = \frac{AT^2}{c_p \cdot p}\left(\frac{\partial \frac{pv}{T}}{\partial T}\right)_p.$$

Aus dieser Form erkennt man, daß die Stellen, an denen ω zu 0 wird, zusammenfallen mit den Stellen, an denen $pv/T = P$ seinen Größtwert in bezug auf T hat.

Zeichnet man sich nun $P = f(T)$ auf, so verlaufen die Linienzüge in den Teilen des Feldes, wo die Beobachtungsbereiche der verschiedenen Beobachter übereinander fallen, sehr gut ineinander. Man kann sich, namentlich wenn man auch noch die Linienzüge anderer Stoffe unter Berücksichtigung der Lehre von den übereinstimmenden Zuständen zu Hilfe nimmt, ein sehr gutes Bild vom vollständigen Verlauf zwischen -140^0 und $+200^0$ machen.

Verbindet man die Größtwerte miteinander, so erhält man für die Umkehrpunktslinie die Gleichung

$$p^2 = a(T_u - T).$$

Sie ist also im p-T-Felde eine Parabel, deren Achse mit der T-Achse zusammenfällt und deren Scheitel in T_u liegt. Sie schneidet aus diesem Feld ein Stück heraus, welches von ihr und den beiden Achsen begrenzt wird. In diesem Stück tritt Abkühlen, außerhalb Erwärmung ein.

Die aus der van der Waalsschen Gleichung und ihren Abänderungen folgenden Umkehrpunktslinien sind, wenn man sich das P-t-Feld ansieht, ganz unmöglich. Sie sind im p-T-Feld Parabeln oder parabelartige Linien, deren Achse parallel der p-Achse und so weit verschoben ist, daß beide Äste die T-Achse in endlichen Temperaturen schneiden. Überträgt man diese Umkehrpunkte mit Hilfe der Thomsonschen Gleichung in das P-t-Feld, so sollte jede Isobare in diesem Felde 2 Größtwerte haben, zwischen denen natürlich ein Kleinstwert liegen müßte, für den dann $\partial P/\partial t$ ebenfalls zu 0 wird, so daß zu jedem Druck 3 Umkehrpunkte gehören würden, was bis jetzt noch nirgends beobachtet ist. Ein solcher wellenartiger Verlauf von $P = f(t)$ widerspricht aller Wahrscheinlichkeit; dazu ist, wie oben schon gesagt, das P-t-Feld zu sehr untersucht.

Jakob hat eine ähnlich parabelartig verlaufende Linie für die Umkehrpunkte abgeleitet, die also aus demselben Grunde unmöglich ist. Er stützt sie durch unmittelbare Verwertung der Beobachtungen Amagats. Die Art, wie er aus diesen die Größtwerte herleitet, erweckt Bedenken. Er zeichnet im P-p-Feld die Isothermen und bestimmt den zu einem Schnittpunkt gehörenden Druck. Diesem ordnet er das Mittel der Temperaturen der sich schneidenden beiden Isothermen zu. Geometrisch kommt das darauf hinaus, daß man im P-t-Feld durch die Isobaren Linien parallel zur t-Achse legt und die zum Mittelpunkt der Sehne gehörende Temperatur als die zum Druck der Isobare gehörende Umkehrpunktstemperatur ansieht. So lange der abgeschnittene Bogen als Kreisbogen betrachtet werden darf, ist das Verfahren genau

richtig, und wenn der Krümmungsradius zwischen den beiden Schnittpunkten sich nicht zu sehr ändert, darf man es auch noch gelten lassen, wenn kein Kreisbogen vorliegt. Die Anwendung dieses Verfahrens auf die Beobachtungen ist aber sonderbar. Amagat hat 4 Isothermen beobachtet, 0^0, 16^0, 100^0, 200^0. Das ergibt $4 \cdot 3/2 \cdot 1 = 6$ Schnittpunkte. Von diesen benutzt er nur die 3, welche in seine Linie passen. Zeichnen wir alle 6 in das P-t-Feld ein, so fallen 5 sehr schön in die Nähe der Linie, welche die oben angeführte Parabel ergibt; wie das ja auch selbstverständlich ist, denn es liegen beiden Bestimmungsverfahren dieselben Beobachtungen zugrunde. Nur der 6. fällt aus der Reihe und das ist gerade der, auf den Jakob sich besonders stützt. Es ist der Schnittpunkt der Isothermen 0^0 und 16^0. Bedenkt man, daß diese beiden Isothermen nahezu parallel verlaufen, so erkennt man, daß ein Beobachtungsfehler, entweder schon bei Amagat, wie ihn Holborn z. B. vermutet, oder beim Ausziehen der Linien, gerade hier von sehr großem Einfluß ist. Die Möglichkeit eines großen Einflusses der Beobachtungsfehler gerade bei diesem Punkt, auf den er sich so sehr stützt, hätte Jakob hervorheben müssen; so ist die Stelle geradezu irreführend.

Aus der Umkehrpunktslinie folgt, wenn zunächst einmal die spezifische Wärme als unveränderlich angesehen werden soll:

$$\omega = \frac{A - Bp^2}{T} - C.$$

Für die Linien unveränderter Temperatur erhalten wir hieraus: $-(\omega - a) = Bp^2/T$, wo $a = A/T - C$ ist. Die Linien gleicher Temperatur sind also Parabeln, deren Achse mit der negativen ω-Achse zusammenfällt, deren Parameter $^1/_2 T$ ist und deren Scheitel auf der ω-Achse mit der Temperatur veränderlich ist. Für kalte Temperaturen ist a groß und der Parameter klein, der in Frage kommende Parabelast hängt also sehr spitz von dem hoch gelegenen Scheitel herunter. Wird die Temperatur wärmer, so rückt der Scheitel weiter herunter, gleichzeitig wird der Parameter größer, also die Parabel breiter. Dieses gleichzeitige Herunterrücken des Scheitels und Verbreitern der Parabel veranlaßt, daß sich die Isobaren schneiden können. Im Beobachtungsbereich Noells kommt das bei den ausgewählten Drucken nicht vor, wohl aber, wenn man aus den Beobachtungen von Bradley und Hale nach der von Plank gegebenen Formel ω ausrechnet. Wird die Temperatur so kalt, daß $a = 0$ wird, so fällt der Scheitel mit dem Nullpunkt des Feldes zusammen und alle Punkte liegen im negativen Bereich von ω, d. h. es findet nur Erwärmung statt.

Gerade Linien, wie Noell im Anschluß an Vogel annimmt, sind die Isothermen nicht. Im Beobachtungsbereich ist allerdings die Abweichung kleiner als die Beobachtungsfehler, so daß die parabolische Form nicht zu erkennen war.

Um die Abhängigkeit der Linien gleichen Druckes von der Temperatur zu übersehen, schreiben wir die Gleichung in der Form

$$(\omega + C) \cdot T = -Bp^2 + A.$$

Die ω-T-Linien sind also Hyperbeln, deren eine Achse die ω-Achse ist, während die andere eine Parallele zur T-Achse im Abstand C ist. Für schwache Drucke, $p = 0$, ist die Halbachse der Hyperbel gleich A. Sie wird immer kleiner, je stärker die Drucke werden, und wenn $Bp^2 = A$ geworden ist, fällt die Hyperbel mit den Achsen zusammen. Bei noch stärkeren Drucken schlägt die ω-Achse nach der negativen Seite um: es gibt überhaupt keine Abkühlung mehr, nur noch Erwärmung. Ist für einen festgehaltenen Druck $A - Bp^2 = CT$ geworden, so ist $\omega = 0$, die Isobare schneidet die T-Achse und aus Abkühlung wird Erwärmung.

Auch hiermit stimmen die Beobachtungen von Noell sowohl wie von Bradley und Hale überein, namentlich die Werte für schwache Drucke zeigen sehr deutlich den hyperbolischen Verlauf. Bei den starken Drucken und kalten Temperaturen, welche Bradley und Hale erreicht haben, tritt aber eine Krümmung auf, welche der Hyperbel widerspricht. Das ist die Folge der Vernachlässigung der Veränderlichkeit der spezifischen Wärme. Der Zustandspunkt hat sich bei diesen Werten schon so sehr der Grenzlinie des Naßdampfgebietes genähert, daß die Veränderlichkeit der spezifischen Wärme von Einfluß ist. Nehmen wir die beobachteten Werte von ω mit der spezifischen Wärme mal, so wird der hyperbolische Verlauf der Linien wieder hergestellt, d. h. unsere Gleichung stellt nicht ω dar, sondern $\omega \cdot c_p$.

Setzen wir den gefundenen Ausdruck für ωc_p in die Thomsonsche Gleichung ein und fassen die Umrechnungszahl der Wärme in Arbeit mit den übrigen Festwerten zusammen, so erhalten wir:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_p = \frac{p}{T^2}\left[\frac{A - Bp^2}{T} - C\right].$$

Das ergibt:

$$P = \frac{pv}{T} = p\left[-\frac{A}{2T^2} + \frac{Bp^2}{2T^2} + \frac{C}{T}\right] + f(p).$$

Aus der Aufzeichnung der Beobachtungen, namentlich von Wittkowski und von Hollborn und Schultze, im P-t-Felde erkennt man, daß

für $p = 0$ der Grenzwert $P = R$ erreicht wird. Also ist

$$\frac{pv}{T} = R + \frac{p}{T}\left[-\frac{a}{T} + \frac{hp^2}{T} + c\right]$$

oder

$$v = \frac{RT}{p} - \frac{a}{T} + \frac{hp^2}{T} + c.$$

Ob diese neue Zustandsgleichung den allgemeinen Bedingungen genügt, die an eine solche gestellt werden müssen, soll an Beobachtungen geprüft werden, welche das Naßdampfgebiet durchschneiden. Ich nehme aus den Beobachtungen von Amagat die 20°-Isotherme. Diese besteht aus zwei Ästen, welche durch eine gerade Linie verbunden sind. Für den Vergleich der Zustandsgleichung mit der Wirklichkeit muß diese gerade Linie durch einen stetigen Linienzug ersetzt werden. Im Anschluß an Thomson hat van der Waals eine Schlangenlinie angewendet. Man kann aber auch einen Linienzug nehmen, welcher eine Schleife bildet. Eine solche hat den Vorzug, daß im P—p-Felde auf dem ganzen Linienzug von $p = 0$ bis $p = \infty$ der Krümmungsmittelpunkt stets auf derselben Seite der Linie bleibt. Amagat hebt ausdrücklich hervor, daß der die Flüssigkeit darstellende Ast eine Krümmung besitzt, deren Mittelpunkt nach der Seite der p-Achse liegt. Beide Ergänzungen verhalten sich zueinander wie die geschweifte zur verschlungenen Zykloide. Der Satz von Clausius-Maxwell, daß die zwischen Ergänzung und gerader Linie liegenden Flächen die Summe 0 haben, bleibt natürlich auch hier erhalten. Es ist nur zu beachten, daß die Fläche der Schleife das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie die an ihrem Scheitel stoßende Fläche. Für die hier vorzunehmende allgemeine Besprechung ist übrigens die Art der Ergänzung zunächst noch gleichgültig.

Für irgendeinen festgehaltenen Wert von P verlangt die Linie der Beobachtungen 2 Werte von p; dieser Bedingung genügt die Gleichung ohne weiteres. Ferner verlangt die Linie, daß für ein gewisses Gebiet von p jedem Wert von p 3 Werte von P entsprechen, während außerhalb jenes Gebietes nur 1 Wert von P auftreten darf. Die Gleichung muß also in bezug auf P vom dritten Grade sein und innerhalb des erwähnten Gebietes 3 reelle Wurzeln haben, außerhalb aber 1 reelle und 2 imaginäre. Diese Bedingung ist noch nicht erfüllt, sie wird es aber, wenn man im Verbesserungsglied der zweiten Form p mit Hilfe der einfachen Zustandsgleichung durch v ersetzt. Sie läßt sich dann leicht umformen zu:

$$v^3 - \left[\frac{RT}{p} - \frac{a}{T} + c\right] v^2 - bR^2T = 0,$$

also eine Gleichung dritten Grades in v wie verlangt.

Der Vergleich der neuen Zustandsgleichung mit der van der Waals läßt sich am besten an diese Form anknüpfen, der die aus der letzteren abgeleitete gegenübersteht:

$$v^3 - \left[\frac{RT}{p} + b\right] v^2 - \frac{a}{p} v + \frac{ab}{p} = 0.$$

Im Beiwert von v^2 tritt jetzt ein Glied a/T auf, welches die in so vielen Abänderungsvorschlägen gesuchte Abhängigkeit von T bringt. Ein von v linear abhängiges Glied fehlt und das von v unabhängige Glied enthält T an Stelle von p.

Den Einfluß der Temperatur bei unverändert gehaltenem Druck übersieht man am bequemsten, wenn man die Zustandsgleichung in der Form schreibt:

$$v - c = \frac{R}{p} T - \frac{a - bp^2}{T}.$$

Der gasige Ast ist also eine durch $v = +c$ gehende gerade Linie, von der ein hyperbolisch abnehmendes Glied abgezogen werden muß. Auch das entspricht den Beobachtungen. Will man den flüssigen Ast und die Verdampfung in die Besprechung einbeziehen, so muß man die Gleichung dritten Grades in v nehmen, welche sich natürlich schwerer übersehen läßt.

Sollten die drei aus den Beobachtungen zu errechnenden Festwerte a, b, c keinen hinreichenden Anschluß an die Beobachtungen ergeben, so daß man noch ein weiteres Glied hinzunehmen muß, so muß man dazu auf den Ausgangspunkt, auf die Umkehrpunktslinie zurückgreifen. Für deren Bestimmung steht zurzeit im P-t-Felde das doch nur recht schmale Gebiet zwischen 0° und 200° zur Verfügung, in welchem die Isobaren recht flach verlaufen. Die Festwerte in der Umkehrpunktslinie sind also nicht sehr genau. Deshalb kann die Frage entstehen, ob die Form an sich genau ist. Man kann daran denken, ein in p lineares Glied hinzuzunehmen. Das würde bedingen, daß die Achse der Parabel parallel mit sich verschoben wird. Eine solche Verschiebung ist nicht sehr wahrscheinlich, denn es ist naturgemäß, daß die Umkehrpunktslinie senkrecht in die T-Achse einschneidet. Tritt aber doch eine solche Parallelverschiebung der Achse ein, so darf sie nur nach der negativen Seite der p-Achse stattfinden, denn daß für einen endlichen Druck eine heißere Umkehrtemperatur vorhanden sein sollte als für $p = 0$, ist ganz unwahrscheinlich.

Möglich dagegen ist, daß ein Glied mit p^3 in die Gleichung eingeht. Leider sind die zurzeit vorliegenden Beobachtungen der Drosselwirkung nicht genau genug, um das leicht entscheiden zu lassen.

Die ausführliche Entwicklung der neuen Zustandsgleichung mit rechnerischen und zeichnerischen Belegen wird demnächst in der Zeitschr. f. kompr. u. flüssige Gase erscheinen.

(Eingegangen 10. April 1920.)

Mach und die „Realität der Außenwelt“.

Von Gabriele Rabel.

In einem in Dorpat gehaltenen und kürzlich im Druck erschienenen Vortrag über „Physik und Erkenntnistheorie“[1]) charakterisiert W. Wien die Machsche Weltanschauung in folgender Weise: „Machs Gedanke war der des sogenannten Konszientialismus, der nur den unmittelbaren Empfindungen Realität zuschreiben will“. Und weiterhin noch deutlicher: „Man wird zugeben müssen, daß der Mensch eines strengen Beweises für die Realität nicht fähig ist.... Auch der gewandteste Dialektiker wird zugeben müssen, daß er sich geirrt hat, wenn wir ihm einen Fehler beim Zusammenzählen nachweisen können. In diese Lage werden wir den Anhänger des Konszientialismus niemals bringen können. Wer den Machschen Positivismus annehmen will, wird auch das Recht beanspruchen können, seiner Meinung zu folgen. Allerdings ist diese dem physikalischen Standpunkt entgegengesetzt. Der Physiker muß nicht nur die Existenz der Außenwelt voraussetzen, sondern auch, daß sie von uns begriffen werden kann“.

Nach all dem muß offenbar jemand, der die Machschen Schriften nicht kennt, zu der Meinung kommen, daß Mach im Gegensatz zu den Physikern nicht nur die Begreifbarkeit der Außenwelt leugnet, sondern sogar ihre Existenz. Gegen diese Beschuldigung — anders kann ich es wohl nicht nennen — möchte ich den verstorbenen Gelehrten, der sich nicht mehr selbst wehren kann, durch Worte verteidigen, die er bei einer ganz ähnlichen Gelegenheit an mich gerichtet hat. Damals hatte Boltzmann in seinen an der Wiener Universität gehaltenen Vorlesungen über Naturphilosophie den Psychomonismus mit einiger Ironie besprochen und unter dessen Vertretern auch Mach genannt. Das veranlaßte mich zu einem Fragebrief, dessen Konzept ich mir aufbewahrt habe und den ich mit veröffentlichen muß, damit Sinn und Meinung von Machs Antwort deutlich zum Ausdruck kommt.

Hochverehrter Herr Hofrat! Zu meinem großen Erstaunen muß ich immer öfter die Erfahrung machen, daß selbst Ihre anscheinend so klaren und nicht mißzuverstehenden Worte verschiedenen Interpretationen ausgesetzt sind. Von seiten hervorragender Universitätslehrer hörte ich Sie wiederholt — und erst heute wieder — als einen Sensualisten oder gar Psychomonisten charakterisieren, als Einen, für den die Welt nur aus Empfindungen besteht und der nur das Psychische als real ansieht. Die Männer, die solches behaupten, stehen zu hoch als daß ich mich entschließen könnte, ohne weiteres ihre Auffassungen als falsch zu bezeichnen und ihnen meine eigene als die allein richtige gegenüberzustellen. Und doch! — so oft ich mir die einleitenden Seiten der Analyse der Empfindungen in die Erinnerung zurückrufe, so oft ich an die Elemente *ABC* usw. und deren Beziehungen denke, setzt sich aufs neue das Gefühl in mir fest, daß Ihnen nichts ferner liegt als psychomonistische Neigungen.

Avenarius soll gesagt haben: „es gibt weder ein Psychisches noch ein Physisches, es gibt nur das Dritte“. Was das Dritte sei, darüber hat er sich nicht ausgesprochen, und es ist ja auch so unendlich schwer in Worte zu fassen. Ist es die Energie? Ist es das Gesetz? Ist es — der Funktionsbegriff? Wenn meine Interpretation Ihrer Ansichten die richtige ist, dann würden Sie, h. H., den obigen Satz des Avenarius unterschreiben und dann wäre in der Tat der Funktionsbegriff für Sie das gesuchte Dritte. Und wenn dies der Fall ist, dann möchte ich Sie herzlich bitten, irgendeine Gelegenheit zu ergreifen, um Ihren Standpunkt nochmals und noch unzweideutiger als bisher kundzugeben. Usw.

Auf diese Interpellation erhielt ich folgende Antwort:

Hochgeehrte Frau! Wenn ein Gelehrter, in seine Gedanken eingesponnen, aus den Worten eines Autors nur seine eigenen Gedanken herausliest, nur bemerkt, was zu diesen stimmt oder nicht stimmt, so ist dies nach meiner 40jährigen Erfahrung nicht besonders erstaunlich, für den Autor nicht gerade beunruhigend. Denn es kommen immer andere nach, die genauer und unbefangener lesen, wie dies Ihr Brief zeigt, der nicht vereinzelt geblieben ist. Schließlich ist ein richtiger Gedanke auch nicht auf einen Autor, auf einen Kopf angewiesen; er tritt gewöhnlich in mehreren oder vielen Köpfen zugleich auf und dringt einmal durch, sobald er reif geworden und das Bedürfnis für denselben sich entwickelt hat.

Namen dürfen uns nicht schrecken. Den meisten Naturforschern und vielen Philosophen,

1) W. Wien, Neuere Entwicklung d. Physik, Leipzig, Barth 1919.



die es nicht eingestehen, ist der Gedanke insgeheim sehr sympathisch, alles Psychische sei aus dem Materiellen ableitbar. Wenngleich dieser Materialismus einen Haken hat, so ist er doch nicht das Schlechteste; er steht wenigstens mit einem Fuß auf ganz sicherem Boden. Wenn aber alles Psychische physisch verständlich sein soll, warum nicht auch umgekehrt? Warum soll diese Umkehrung der vermeintlichen Identität, der Psychomonismus, so schrecklich sein? Steht denn der andere Fuß in der Luft? — Ich habe allerdings ausdrücklich erklärt, daß ich weder Materialist noch Psychomonist bin, sondern auf beiden Füßen stehen möchte. Eine Notwendigkeit Dualist zu sein, besteht darum noch nicht für den, der beide Füße für gleichwertig und beide Bodenflächen unter den Sohlen nicht für zwei verschiedene Welten hält.

Ich glaube, daß man eine philosophische Überlegung nicht mit einer fertigen starren Theorie beginnen darf, die uns nicht mehr losläßt. Der Kern meiner Darlegung liegt in der Erläuterung der Fig. 1 der „Analyse". Wir gelangen zu derselben, indem wir unsere Kinder beobachten und uns selbst in unsere frühe Jugend versetzen, da wir eben anfangen, unsern Leib von dessen Umgebung zu unterscheiden. Wir wissen da noch nichts von Materie und Seele, von Physischem und Psychischem, von Objekt und Subjekt, von Reiz und Empfindung. Alles besteht noch aus gleichartigen Bestandteilen *ABCD* . . ., die an sich weder physisch noch psychisch, sondern neutral, indifferent sind. Physisch oder psychisch werden dieselben erst durch die besondere Art der Abhängigkeit, die wir in Betracht ziehen. Die neutralen Elemente möchten dem Avenariusschen Dritten entsprechen, die beiden geläufigsten wichtigsten Arten der Abhängigkeit dem Physischen und Psychischen. Den Ausdruck „ein Drittes" würde ich nicht gerne gebrauchen, weil man gleich wieder bereit wäre, darunter ein unbekanntes rätselhaftes, metaphysisches Drittes zu verstehen. . . . .

Indem ich Ihnen, hochgeehrte Frau, für Ihren Brief bestens danke, der mich sehr erfreut und interessiert hat, und indem ich hoffe, daß diese Zeilen Ihnen genügen werden, verbleibe ich in ausgezeichneter Hochachtung Ihr ergebenster Dr. Ernst Mach.

In meiner Antwort auf dieses Schreiben kam der Satz vor: „Wir meinen ein Phänomen erklärt zu haben, wenn wir es auf Physisch und auf Psychisch ausdrücken, etwa Schall ist gleich Bewegung. Aber wissen wir, was Bewegung sonst noch alles ist, das heißt, als was sie irgendwelchen anderen Wesen, etwa den Pflanzen erscheint? Das werden wir nie ergründen, weil wir eben dazu verdammt sind, in dem Winkel zwischen Physischem und Psychischem auf ewig eingeschlossen zu bleiben."

Darauf erwiderte Mach: „Jetzt müssen wir alles entweder von der physischen oder von der psychischen Seite untersuchen. Wenn aber einmal der Tunnel zwischen dem Physischen und dem Psychischen durch oder fast ganz durch sein wird, werden wir kaum darauf beschränkt sein. Dann werden wir wohl fragen dürfen, wie die Tiere empfinden. Das liegt freilich noch fern. Aber keine Beschränkungen, kein Ignorabimus für die, welche nach uns kommen und die klüger sein werden. — Die Astronomen von heute wissen, daß die Ptolemäische und die Kopernikanische Weltansicht beide konventionelle praktische Beschränkungen sind, und daß man sich eine freiere Fragenstellung erlauben kann."

Klingt das nach Einem, der die Existenz der Außenwelt nicht anerkennt oder nicht voraussetzt, daß sie von uns begriffen werden kann? Als seinen Gewährsmann für die Deutung der Machschen Schriften gibt W. Wien an der zitierten Stelle Külpe an, und Külpe hat allerdings im Mißverstehen Machs ganz Hervorragendes geleistet. Sein ausführliches Buch über die „Realisierung"[1]) ist zum großen Teil gegen den „Konszientialismus" gerichtet, von welchem der Solipsismus und die Immanenzphilosophie Spielarten sein sollen. Es ist gestattet, Mach unter die Immanenzphilosophen einzureihen, denn das hat er selbst gebilligt[2]). „Auch den Vertretern der immanenten Philosophie stehe ich recht nahe. Namentlich von Schuppe . . kann ich dies sagen". An derselben Stelle heißt es weiter: „Inbezug auf Avenarius ist die Verwandtschaft eine so nahe, wie sie bei zwei Individuen . . überhaupt erwartet werden kann". Bei Külpe werden nun Mach, Schuppe und Avenarius sämtlich als Konszientialisten traktiert, d. h. als Leute mit „antirealistischen Tendenzen", die die realen Gegenstände bloß „als Wirklichkeiten des Bewußtseins auffassen".

Ich weiß nicht, ob es einen Philosophen gibt, der sich selbst als Konszientialisten bezeichnet. Mir macht es eher den Eindruck, als sollte diese Bezeichnung etwa wie der „boche" ein Schimpfwort für den Gegner bedeuten. Jedenfalls kann ich sagen, daß Mach mit diesem sog. Konszientialismus, wie ihn Külpe schildert, nicht das geringste zu schaffen hat. Man lese aber auch bei dem angeblichen Antirealisten Schuppe nach, wie er in anmutig belebtem Zwiegespräch sich müht, einen

1) Külpe, Die Realisierung. I. Leipzig, S. Hirzel. 1912.
2) Mach, Anal. d. Empf., 6. Aufl. S. 38.

Solipsisten zur Raison zu bringen[1]). Also: Schuppe, Vertreter derjenigen Lehre, von der Wien behauptet, es wäre ein hoffnungsloses Unterfangen, ihr gegenüber einen Beweis für die Existenz der Welt antreten zu wollen, — siehe da, er führt diesen Beweis selber. Es ist die reinste Teufelsschaukel, man weiß schließlich nicht mehr, ob man auf dem Kopf steht oder auf den Beinen.

Wenn Külpe behauptet[2]), daß Mach unter den Tatsachen nur Bewußtseinsinhalte oder Empfindungen versteht, so ist diese Behauptung einfach falsch, und die ganze folgende Polemik Külpes ist ein Kampf gegen einen eingebildeten Feind. „Von einer rein subjektivistischen Auffassung der Empfindung, sagt Mach in dem gegen Planck gerichteten Aufsatz[3]), kann gerade nach meiner Ansicht keine Rede sein. Nur in ihrer physiologischen Abhängigkeit von KLM sind die ABC als Empfindungen zu bezeichnen, in ihrer Abhängigkeit voneinander sind sie physikalische Merkmale[4]). Die allgemeinste Aufgabe der Naturwissenschaft besteht nun hauptsächlich in der Ermittlung letzterer Abhängigkeiten voneinander." Deutlicher kann man kaum die Empfindungen als physiologische Tatsachen von den Abhängigkeiten der Umgebungsbestandteile voneinander als den physikalischen Tatsachen abtrennen. Nun hat freilich die $A-K$-Abhängigkeit (die Empfindung) vor der $A-B$-Abhängigkeit (dem physikal. Merkmal) einen Vorzug: „Während es keiner Schwierigkeit unterliegt, jedes physische Erlebnis aus Empfindungen, also psychischen Elementen aufzubauen, ist keine Möglichkeit abzusehen, wie man aus den in der heutigen (wohlgemerkt heutigen!) Physik gebräuchlichen Elementen (Massen und Bewegungen in ihrer für diese Spezialwissenschaft allein dienlichen Starrheit) ein psychisches Erlebnis darstellen könnte"[5]). Mit dem Aufbauen der physischen Elemente aus den Empfindungen ist gemeint, daß wir keine Gesetzmäßigkeiten in der Natur anders erkennen oder anders prüfen können, als indem wir Ablesungen an irgendwelchen Elektro-, Galvano-, Thermo- oder sonstigen Metern machen. Diese bilden also für uns den Zugang zur Physik. Daß wir hingegen an die psychologischen Gesetzmäßigkeiten nicht herankommen können, wenn wir von Massen und Bewegungen ausgehen, das ist eine einfache Tatsache, die heute niemand mehr bezweifeln wird. Wenn ich aber beim Betrachten eines Wohnungsplans feststelle, daß ich wohl durch das Zimmer 1 in das Zimmer 2 gelangen kann, nicht aber umgekehrt, habe ich damit erkannt, daß dem Zimmer 2 eigentlich gar keine Existenz zukommt? Oder daß das Zimmer 1 wirklicher ist als das Zimmer 2?

Kant sagt einmal: „Wenn zwei einander entgegengesetzte Urteile eine unstatthafte Bedingung voraussetzen, so fallen sie unerachtet ihres Widerstreits alle beide weg, weil die Bedingung wegfällt, unter der allein jeder dieser Sätze gelten sollte. Wenn jemand sagt: Ein jeder Körper riecht entweder gut oder schlecht, so sage ich, es kann auch ein drittes stattfinden, nämlich, daß er gar nicht rieche."

Ungefähr dieser Art ist der Gegensatz zwischen Mach und seinen Gegnern, die „unstatthafte Bedingung", die vorausgesetzt wird, geht aus dem folgenden Zitat hervor[1]): „Wer die Empfindung rot für seine eigene erklärt, der findet leicht, daß das unmittelbar und ursprünglich Gegebene das Bewußtsein, schließlich wohl nur sein Selbstbewußtsein sei, und daß man allmählich, aber unausweichlich zum theoretischen Idealismus, ja zum Solipsismus gelange. Avenarius entdeckte die Stelle, wo man vom richtigen Weg abweicht. Er nannte den Fehler, dem das Denken in seiner Entwicklung fast unvermeidlich verfällt, die Introjektion, die Einlegung. Diese besteht darin, daß ich die Empfindungen und Wahrnehmungen, die ich erfahre, für meine eigenen nehme. Damit wird der Gesamtheit des ursprünglich von dem noch vorurteilslosen Menschen Vorgefundenen sofort der Stempel des einen Teils dieser Gesamtheit aufgedrückt. Ich und Umgebung sind ursprünglich gleichberechtigte, in derselben Weise vorgefundene Teile der gesamten Erfahrung. Die Introjektion aber vernichtet diese Gleichberechtigung zugunsten des Ich und läßt schließlich die Umgebung im Ich aufgehen. So werden die Dinge zu meinen Dingen und damit den ursprünglich gegebenen gegenüber zu meiner Vorstellung. Dadurch aber werden die ursprünglich einfachen Dinge verdoppelt, werden nämlich einmal zu meiner Vorstellung, daneben aber existieren sie noch als Dinge an sich."

Diese Verdoppelung kommt in charakteristischer Weise zum Ausdruck bei Külpe, der drei Hauptarten von Objekten unterscheidet: wirkliche, ideale und reale Objekte. Von dem „künstlich naiven Standpunkt" aus, zu dem sich

1) Schuppe, Zeitschr. f. imman. Philos. **3**, 327.
2) Külpe, Die Philosophie der Gegenwart in Deutschland, Leipzig, Teubner 1911, S. 21.
3) Diese Zeitschr. **11**, 599, 1910.
4) Oder wie es in einer Parallelstelle, Anal. d. Empf. 6. Aufl. S. 13 heißt: physikalische Objekte.
5) Mach, Erkenntnis und Irrtum, Leipzig, J. A. Barth. 1905, S. 12.

1) Petzold, Solipsismus auf prakt. Gebiet, Vierteljahrsschr. f. wiss. Philos. **25**, 339.



Mach bekennt, hat eine solche Aufspaltung in Wirkliches und Reales offenbar überhaupt keinen Sinn, — die Bewußtseinserscheinungen, für Külpe die wirklichen Objekte darstellend, sind für Mach nicht wirklicher als die übrigen Erscheinungen, und wenn man ihn fragen würde, ob es neben der wirklichen Innenwelt noch eine reale Außenwelt geben soll, — dann allerdings würde er diese reale Außenwelt leugnen, die wirkliche „Innenwelt" dann aber auch.

Nun kann man freilich fragen: Wenn also die Immanenten nicht die Lehre vertreten, daß bloß die Bewußtseinserlebnisse, also die uns immanenten Tatsachen objektiven Wert haben, was wollen sie dann eigentlich mit ihrer Immanenz? „Der Gebrauch einer Idee, sagt Kant[1]), kann entweder in Ansehung der gesamten möglichen Erfahrung überfliegend (transzendent) oder einheimisch (immanent) sein, je nachdem ob man sie geradezu auf einen ihr vermeintlich entsprechenden Gegenstand richtet oder nur auf den Verstandesgebrauch überhaupt in Ansehung der Gegenstände, mit welchen er es zu tun hat." Dementsprechend behandelt die Immanenzphilosophie den „Verstandesgebrauch überhaupt"[2]). Über die transzendenten, d. h. die gesamte mögliche Erfahrung überfliegenden Gegenstände bestimmte Aussagen zu machen, hat Kant zwar der Philosophie verboten, er hat aber, wenigstens nach probabler Meinung, die Existenz solcher transzendenter, d. h. der Erkenntnis grundsätzlich unzugänglicher Gegenstände, die als Dinge an sich der erkennbaren Erscheinung „zugrundeliegen", angenommen. Dagegen wendet sich die Immanenzlehre. Mach betont wiederholt, daß seine Ansichten nur zu verstehen sind als Selbstbefreiung von dem Alp des unerkennbaren Dinges an sich[3]).

„Was uns allein interessieren kann"[4]), ist die funktionale Abhängigkeit (im mathematischen Sinn) der Elemente voneinander. Man mag diesen Zusammenhang der Elemente immerhin ein Ding nennen, er ist aber **kein unerkennbares Ding**. Mit jeder Beobachtung, mit jedem naturwissenschaftlichen Satz schreitet die Erkenntnis dieses Dinges vor". Hier ist zugleich Machs wissenschaftliches Ideal ausgesprochen, die funktionale Abhängigkeit im mathematischen Sinn zu ergründen. „Dies kann symbolisch so ausgedrückt werden, daß man der Spezialforschung das Ziel setzt, Gleichungen von der Form $F(A, B, C \ldots) = 0$ zu finden"[1]). Alles was real, was objektiv an den Dingen ist, muß sich in dieser Form aussprechen lassen. Nun gibt es freilich noch eine andere Art, in der Wissenschaft vorzugehen als daß man bloß funktionale Abhängigkeiten aufsucht, nämlich die, daß man anschauliche Bilder, die man sich auf Grund gewisser Erfahrungen gemacht hat, für „richtig" hält, oder wie Külpe sich ausdrückt, als Objekte „setzt". Dieses Setzen eben bezeichnet Külpe als Realisierung, und er meint, es sei verfehlt, daß man bisher immer das Problem der Realität mit dem Problem der Außenwelt identifiziert habe. Vielmehr habe das Problem der Realisierung, also die Frage: Ist eine Setzung von Realem zulässig? Sind die Objekte der Erfahrungswissenschaften reale Objekte?, eine viel ausgedehntere Bedeutung. Mich will es aber bedünken, als ob Külpe hier zwei Fragen von ganz verschiedener Rangordnung miteinander verquicke. Das Problem der Außenwelt ist ein metaphysisches Problem. Keine mögliche Erfahrung kann es lösen. Höchstens kann man damit fertig werden in der oben angedeuteten Art, indem man erklärt: Das Problem existiert gar nicht. Die Frage nach der Realität dieses oder jenes Objekts der Erfahrungswissenschaften hingegen ist eine rein praktische Frage, die einer Prüfung durch die Erfahrung durchaus zugänglich ist. Ein Beispiel mag dies erläutern. Unter den Äußerungen, die man Mach besonders übelgenommen hat, war auch die, daß die Materie nur ein Gedankensymbol für einen relativ stabilen Komplex sinnlicher Elemente sei. Fragen wir uns nun einmal unbefangen: Was ist heute die Materie? Materie ist Elektrizität, Elektrizität ist — vielleicht — verdichteter Äther, und den Äther gibt es nicht. Möglicherweise aber ist die Materie auch nur eine Form der Energie. Hat es unter diesen Umständen noch Sinn, auf die Realität der Materie zu schwören? In einigen Jahren oder in einigen Jahrhunderten wird man das wissen.

Wie die Entscheidung aber auch ausfallen mag, die Gleichungen, die die Beziehungen zwischen der Masse und anderen beobachtbaren Größen ausdrücken, die werden bleiben, wenn auch das anschauliche Bild, das wir uns machen, hundertmal wechselt, — wie die

1) Kant, Kr. d. r. Vern., Von dem regulativen Gebrauch d. Ideen, Anh. z. transz. Dialektik.

2) Der Begriff der Erkenntnis überhaupt, der Begriff der Wahrheit ergibt sich als der entscheidende Punkt". Schuppe, Imm. Zeitschr. 3, 15, 1897.

3) Manche Kapitel: „Kritik des Immanenz-Gedankens" wären ungeschrieben geblieben, wenn die Verfasser sich vor Augen gehalten hätten, daß Mach sowohl als Schuppe ihren Ausgangspunkt von Kant nehmen und das Wort transzendent in demselben Sinn gebrauchen wie er: als die gesamte mögliche Erfahrung überfliegend. Siehe z. B. Zeitschr. f. imm. Philos. 2, 100, 1897, wo Schuppe ausführlich aufzählt, was ihm alles nicht als transzendent gilt.

4) Erk. u. Irrt. S. 10.

1) Anal. d. Empf. 6. Aufl. S. 37.

Schwingungsgleichungen des Lichtes bereits zwei Lichttheorien oder besser gesagt zwei Lichtbilder überdauert haben. Im Interesse der Stabilität der Wissenschaft wünscht Mach darum, derartige temporäre „Realitäten" zu vermeiden. Charakteristisch ist dafür die oben zitierte Äußerung über die Ptolemäische und Kopernikanische Weltansicht, — eine Äußerung, die zu der Zeit, wo sie gemacht wurde, vielleicht als ein Verzicht auf jegliche Erkenntnis gedeutet worden wäre, die aber heute im Zeichen der Relativitätstheorie nichts Befremdendes mehr hat. Trotz dieses Vorteils größerer Solidität werden nicht viele sich entschließen können, die Wände ihrer wissenschaftlichen Werkstatt anstatt mit Bildern nur mit mathematischen Formeln zu behängen. Wir bauen ja auch nicht lauter viereckige Ziegelkasernen, obwohl wir wissen, daß sie wetterbeständiger sein mögen als anmutige Landhäuschen. Aber das ist schließlich mehr eine Geschmacks- und Temperaments- als eine Weltanschauungsfrage.

Auch Machs Weltanschauung möchte ich freilich nicht unbedingt zu verteidigen unternehmen. Mein Plaidoyer richtet sich bloß gegen die Behauptung, daß der Angeklagte „nur den unmittelbaren Empfindungen Realität zuschreibe und die Existenz der Außenwelt leugne". Von dieser Anklage wünschte ich den großen Naturforscher endlich freigesprochen zu sehen.

Greifswald.

(Eingegangen 5. April 1920.)

Über eine Methode, Geschwindigkeiten auf akustischem Wege zu messen.

Von W. Kunze.

In der Frage der Richtungsbestimmung von Schalleindrücken ist durch die Untersuchungen der Herren v. Hornbostel und Wertheimer in den letzten Jahren eine Klärung insofern eingetreten, als diese Herren erkannt haben, daß die Möglichkeit der Richtungsbestimmung auf der Fähigkeit des Ohres beruht, die kleinen Zeitunterschiede, mit denen die Schallwellen bei seitlicher Lage der Schallquelle an den Ohren ankommen, als Richtungseindruck zu empfinden. Da eine Veröffentlichung über den Gegenstand von den Herren noch nicht erschienen ist, hatte ich von der Tatsache selbst nur Kenntnis erhalten durch Beschäftigung mit Apparaten zur Schall-Richtungsbestimmung, wie sie im Kriege Verwendung fanden.

Ich kam hierbei auf den Gedanken, daß, wenn tatsächlich diese geringen Zeitdifferenzen, deren Größe zwischen etwa 0,00003 und 0,0006 Sekunden liegt, vom Gehör als Richtungseindruck empfunden werden, umgekehrt hier eine Möglichkeit gegeben ist, mittels des Gehörs kleinste Zeiten zu messen.

Als ich später gelegentlich einer Besprechung den Herren v. Hornbostel und Wertheimer davon Mitteilung machte, hörte ich, daß diese selbst bereits den Gedanken einer Verwendung dieser Tatsache zu chronometrischen Messungen gehabt und wie sie mir jetzt mitteilen, auch bereits zur Messung der Windgeschwindigkeit benutzt haben. Die Anordnung war dabei jedoch eine andere als die im Folgenden geschilderte. Die vorliegende Arbeit geht über diese spezielle Anwendung hinaus, indem sie eine Nutzbarmachung der Methode zur Bestimmung von Geschwindigkeiten bewegter Körper in ruhenden und strömenden Medien versucht.

Die Theorie und experimentelle Grundlagen ihrer neuen Erkenntnis beabsichtigen die Herren v. Hornbostel und Wertheimer demnächst selbst zu veröffentlichen[1]). Ich kann mich daher auf die Mitteilung der für das Verständnis des Folgenden notwendigsten Angaben beschränken.

Nach v. Hornbostel und Wertheimer ergeben Zeitunterschiede zwischen dem Ankommen des Schalles an beiden Ohren, die kleiner sind als etwa 0,00003 Sekunden, eine Mittenwirkung, d. h. die Schallquelle wird in die Medianebene verlegt. Zeitunterschiede zwischen etwa 0,00003 und 0,0006 Sekunden ergeben seitliche Wirkungen, d. h. sie lassen den Schall als aus bestimmten Richtungen von rechts oder links kommend erscheinen, und zwar entspricht jeder Größe des absoluten Zeitunterschiedes ein bestimmter Grad von Seitlichkeit. Man kann also umgekehrt sagen, daß, wenn die Schallquelle als in der Medianebene liegend empfunden wird, die Zeitdifferenz zwischen dem Eintreffen des Schalles an beiden Ohren kleiner ist als 0,00003 Sekunden. Die größte Seitlichkeit d. h. 90^0, wird erreicht, wenn zwischen dem Eintreffen der Schallwellen an den Ohren ein Zeitunterschied von etwa 0,0006 Sekunden besteht. Diese Zeit entspricht einem Schallweg in Luft von 21 cm und ist experimentell bestimmt. Allen Winkeln zwischen 0^0 und 90^0 entsprechen bestimmte Werte der Zeitdifferenz zwischen 0,00003 und 0,0006 Sekunden. Diese kann man nun in sehr einfacher Weise dadurch messen, daß man den Schallweg zu dem zuerst erregten Ohr um so viel vergrößert, daß

1) Die Arbeit ist inzwischen erschienen: „Über die Wahrnehmung der Schallrichtung" von E. M. v. Hornbostel u. M. Wertheimer. Sitzungsberichte der preuß. Akad. d. Wissensch. XX, 1920, 338—396.

er gleich dem Schallweg von der Schallquelle bis zum anderen Ohr wird. Gleichheit der Schallwege ist erreicht, wenn die Schallquelle als in der Medianebene liegend empfunden wird. Aus der Vergrößerung Δs des Schallweges und der Schallgeschwindigkeit c läßt sich die Zeit Δt durch die einfache Beziehung $\Delta t = \frac{\Delta s}{c}$ berechnen. Praktisch erreichen kann man eine Veränderung der Schallwege beispielsweise dadurch, daß man von irgendeiner Schallquelle kommenden Schall den Ohren mittels Schlauchleitungen zuführt, deren Länge durch eine tubusartige Anordnung veränderlich ist. Geht man mit der Verlängerung oder Verkürzung des Schallweges über 21 cm hinaus, so werden die Zeitdifferenzen größer als 0,0006 Sekunden und es ergeben sich Verhältnisse, wie sie beim natürlichen Hören nicht vorkommen. Die Schallquelle wird auch in diesem Falle auf die Seite des zuerst erregten Ohres verlegt, doch ist der Richtungseindruck nicht so klar, wie innerhalb des Bereiches von 0,00003 bis 0,0006 Sekunden Zeitdifferenz.

Verändert man die Weglänge während des Hörens, so hört man die Schallquelle wandern. Es werde z. B. die Schallweglänge von der Schallquelle bis zum linken Ohr konstant gehalten und die zum rechten Ohr führende kontinuierlich verändert, so erscheint bei Weggleichheit die Schallquelle in der Mitte, wandert kontinuierlich nach links, bei Vergrößerung des Weges rechts, bis sie bei einer Verlängerung um 21 cm die größte Seitlichkeit erreicht. Bei allmählicher Verkleinerung des Schallweges rechts wandert sie dann wieder zurück, geht bei Weggleichheit durch die Mitte hindurch und erscheint bei weiterer Verkürzung des Schallweges auf der rechten Seite, bis bei 21 cm Verkürzung der Eindruck größter Rechtsseitigkeit auftritt.

Werden die Zeitdifferenzen größer als etwa 0,03 Sekunden, so erhält man keinen einheitlichen Schalleindruck mehr, sondern nimmt das Nacheinander wahr.

Bemerkt sei noch, daß diese Richtungseindrücke eindeutig nur bei geräuschartigen Schallquellen auftreten. Bei Tönen komplizieren sich die Verhältnisse und es soll hier nicht darauf eingegangen werden.

Messung der Strömungsgeschwindigkeit schallübertragender Medien.

Nimmt man zwei Schallrichter A und B, von denen gleich lange Schlauchleitungen R_1 zum linken Ohre O_l und R_2 zum rechten Ohre O_r führen, und ordnet sie in einer Entfernung $AB = 2a$ so an, daß sie ihre Öffnungen einer Schallquelle S, die sich in der Mitte von AB befindet, zukehren (Fig. 1), so kommt der Schall

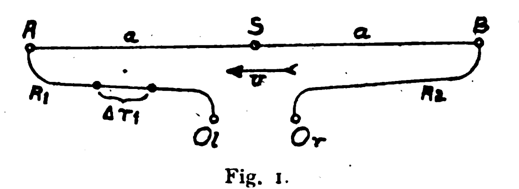


Fig. 1.

von S offenbar gleichzeitig in A und B an und die Schallquelle wird, ganz gleichgültig, wie sich der Beobachter zu der Versuchsanordnung stellt, als in der Medianebene liegend empfunden. Stillschweigende Voraussetzung ist dabei, daß das schallübertragende Medium (die Luft) sich relativ zur Versuchsanordnung in Ruhe befindet.

Was tritt nun ein, wenn das Medium sich in Bewegung befindet, wenn es etwa mit der Geschwindigkeit v in der Richtung von B nach A vorbeiströmt?

Offenbar kommt dann in der Richtung von S nach A zur Schallgeschwindigkeit die Strömungsgeschwindigkeit hinzu, während sie in der entgegengesetzten Richtung zu subtrahieren ist. Die Zeit, die in diesem Falle der Schall braucht, um von S nach A zu gelangen, ist

$$t_1 = \frac{a}{c + v},$$

um von S nach B zu gelangen

$$t_2 = \frac{a}{c - v}.$$

Die Differenz beider Zeiten ist

$$\Delta t = \frac{2av}{c^2 - v^2}. \qquad (1)$$

Diese Zeitdifferenz, die zwischen dem Eintreffen der Schallwellen am rechten und linken Ohr besteht, muß sich nun als Richtungseindruck bemerkbar machen, wenn sie der Größe nach in den Bereich zwischen 0,0006 und 0,00003 Sekunden fällt. Dies läßt sich aber durch geeignete Wahl des Empfängerabstandes $2a$, der als Basis bezeichnet werden soll, stets erreichen. Im vorliegenden Falle wird man, da der Schall früher in A als in B ankommt, also auch früher in O_l als in O_r, einen eindeutigen Linkseindruck haben.

Indem man nun den Schallweg AO_l um einen Betrag $\Delta r_1 = c \cdot \Delta t$ verlängert, kann man den Zeitunterschied Δt, der infolge der Strömungsgeschwindigkeit v zwischen dem Ankommen des Schalles in O_l und O_r besteht, kompensieren und den seitlichen Eindruck auf einen Mitten-

eindruck zurückführen. Δr_1 ist meßbar, und es ergibt sich, wenn man

$$\Delta t = \frac{\Delta r_1}{c}$$

in (1) einsetzt,

$$v = \frac{c}{\Delta r_1} \left(\sqrt{a^2 + \Delta r_1^2} - a\right). \qquad (2)$$

Zur Kompensation des Zeitunterschiedes, mit dem der Schall in O_l früher ankommt als in O_r, kann man auch so verfahren, daß man den Weg SA verlängert und gleichzeitig SB verkürzt, indem man die Schallquelle S auf AB nach B hin verschiebt. Die bis zur Herbeiführung des Mitteneindruckes erforderliche Verschiebung sei $SS_1 = \Delta s$ (Fig. 2). Wenn Mitteneindruck bei Lage der Schallquelle in S_1 hervorgerufen wird, so heißt das, die Zeiten t_1 und t_2, die der Schall braucht, um von S_1 nach A und B zu gelangen, sind gleich, da ja $R_1 = R_2$ ist.

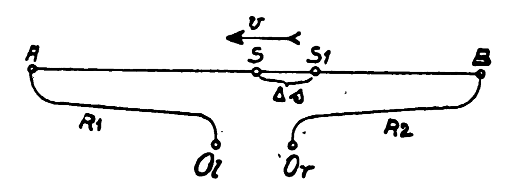


Fig. 2.

$$\frac{a + \Delta s}{c + v} = \frac{a - \Delta s}{c - v},$$

$$v = \frac{c \cdot \Delta s}{a}. \qquad (3)$$

Die Strömungsgeschwindigkeit v ist also in diesem Falle direkt proportional der zur Erreichung des Mitteneindruckes erforderlichen Verschiebung der Schallquelle und umgekehrt proportional der Basis.

Als untere und obere Grenze für die Basisgröße $2a$, über die nicht hinausgegangen werden darf, sofern man eindeutige Richtungseffekte erhalten will, ergibt sich

$$2a_{\min} = \frac{0{,}00001}{v}(c^2 - v^2); \qquad (4)$$

$$2a_{\max} = \frac{0{,}0006}{v}(c^2 - v^2). \qquad (5)$$

Wenn die Strömungsrichtung nicht mit der Basisrichtung zusammenfällt, sondern einen Winkel α mit dieser bildet, so tritt, wie leicht erkennbar ist, in den Formeln (2) und (3) der cos des Winkels α als Faktor zu der Strömungsgeschwindigkeit v hinzu. Um v berechnen zu können, ist es also stets notwendig, die Strömungsrichtung des Mediums zu kennen.

In dem allgemeinen Falle, daß die Schallquelle S nicht direkt auf der Verbindungslinie von A mit B, sondern irgendwo in der auf der Basis AB im Mittelpunkte M errichteten Normalebene liegt, erhält man, wenn die Schallquelle S von AB den Abstand $MS = b$ hat, und φ den Winkel, den die Schallstrahlen von S nach A bzw. B mit der Basis bilden, bezeichnet, eine Zeitdifferenz

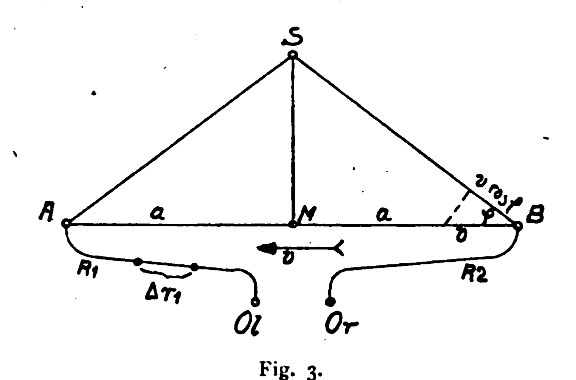


Fig. 3.

$$\Delta t = \frac{2v\cos\varphi \cdot \sqrt{a^2 + b^2}}{c^2 - v^2\cos^2\varphi}. \qquad (6)$$

Führt man den durch diese Zeitdifferenz hervorgerufenen Seiteneindruck durch Verlängern des Schallweges $O_l A$ um die Strecke Δr_1 auf den Mitteneindruck zurück, so heißt das, die Schallzeiten auf dem Wege $S—A—O_l$ und $S—B—O_r$ werden gleichgemacht. Daraus ergibt sich

$$v = \frac{c}{\Delta r_1 \cos\varphi}\left(\sqrt{a^2 + b^2 + \Delta r_1^2} - \sqrt{a^2 + b^2}\right). \qquad (7)$$

Für den Fall, daß die Schallquelle S in M liegt, wird φ und b zu 0 und die Formel (7) geht in (2) über.

Experimentelle Prüfung[1]).

Die Formeln (2) und (3) wurden zur Messung von Windstärken benutzt, und zwar dienten in einem Falle (2) zwei Mikrophone, die mit Telephonen verbunden waren, im Falle (3) zwei gewöhnliche Schalltrichter, von denen gleich lange Schlauchleitungen zu den Ohren führten, als Empfänger. Für den letzteren Fall ist die Versuchsanordnung aus Fig. 2 zu ersehen. Als Schallquelle diente eine einfache Klopfvorrichtung, da kurze Klopfgeräusche einen besonders guten Richtungseffekt ergaben. Die Schlauchleitungen waren 10 m lang, die Basis betrug $2a = 6$ m und war um den Mittelpunkt in der Horizontalebene drehbar angebracht. Sie wurde in die

1) Die Messungen wurden im Physikalischen Laboratorium der Atlas-Werke Aktiengesellschaft, Bremen, ausgeführt.

Windrichtung eingestellt, so daß der Schall von S nach dem Trichter A mit dem Winde, von S nach B gegen den Wind lief. A war mit dem linken, B mit dem rechten Ohr verbunden. Wurde das Klopfgeräusch in der Mitte zwischen den Trichtern A und B erzeugt, so hatte man deutlich einen Linkseindruck. Die Schallquelle schien nicht in der Medianebene, sondern um einen bestimmten Winkel gegen diese nach links geneigt zu liegen. Verschob man nun während des Klopfens die Geräuschquelle nach rechts von S nach B hin, so hatte man den Eindruck, als wanderte die Schallquelle nach rechts. Mitteneindruck war vorhanden bei einer Verschiebung, die sich als Mittel aus mehreren Beobachtungen zu 3,5 cm ergab. Setzt man diesen Wert in Formel (3) ein und setzt die Schallgeschwindigkeit in Luft $c = 343$ m, so ergibt sich eine Windgeschwindigkeit

$$v = \frac{c \cdot \Delta s}{a} = \frac{343 \cdot 0{,}035}{3} \sim 4 \text{ m/sec.}$$

Das hiesige meteorologische Observatorium meldete auf Befragen eine um 5 m/sec schwankende Windstärke. Messungen an einem anderen Tage mit einer Basis $2a = 10$ m ergaben Mitteneindruck bei einer Verschiebung der Schallquelle um 8 cm. Daraus errechnet sich eine Windstärke $v \sim 5{,}5$ m/sec. Das Observatorium hatte 5—6 m/sec gemeldet. Die Übereinstimmung war also gut.

Die Benutzung von Mikrophonen als Schallempfänger hatte gegenüber der eben beschriebenen Methode, wo der Beobachter immer in der Nähe der Versuchsanordnung im Freien sich aufhalten mußte, wenn man nicht Schlauchleitungen von erheblicher Länge zur Verfügung hatte, den Vorteil, daß der Beobachter irgendwo in einem geschlossenen Raume sitzen konnte, wo er die Klopfgeräusche direkt überhaupt nicht hören und infolgedessen störungsfreier beobachten konnte. Die mit den Mikrophonen verbundenen Telephone, die vorher auf möglichste Gleichheit in bezug auf Klangcharakter untersucht wurden, waren in zwei Röhren gleitend angeordnet, deren Enden an die Ohren gehalten wurden. Beide Telephone hingen an einer Schnur, die über eine Rolle führte, bei deren Drehung das eine Telephon im Gleitrohr dem Ohre sich näherte, während gleichzeitig das andere Telephon vom anderen Ohr sich um dieselbe Strecke entfernte. Die Schallquelle befand sich bei den Messungen dauernd in der Mitte zwischen A und B. Die Strecke, um die die Telephone verschoben werden mußten, um den ursprünglichen Seiteneindruck auf den Mitteneindruck zurückzuführen, war ablesbar und aus ihm nach Formel (2) die Windstärke v zu berechnen. Die sich ergebenden Resultate stimmten im allgemeinen mit den nach der ersten Methode gemessenen gut überein.

Erwähnt sei noch, daß bei stark böigem Winde direkt ein Hin- und Herschwanken der Schallquelle empfunden werden konnte.

Die Messungen gelangen nicht immer mit gleicher Deutlichkeit. Es gab Tage, an denen trotz gleichmäßigen Windes eine eindeutige Bestimmung nicht zu erreichen war. Die Art des Klopfgeräusches spielt eine Rolle von großer Wichtigkeit. Es kam vor, daß ein Schlag des Klopfers als von einer ganz anderen Stelle kommend empfunden wurde als ein nächstfolgender Schlag von etwas anderem Charakter. Der Gleichmäßigkeit der Geräuschquelle ist also besondere Aufmerksamkeit zu schenken.

Allgemein wurde festgestellt, daß die auftretenden Richtungseindrücke infolge der Windströmungen bei weitem nicht so deutlich waren wie die bei ruhender Luft. Der Charakter der Schallimpulse wird scheinbar durch die verschieden gerichtete Bewegung des Mediums in verschiedener Weise verändert, wodurch die Deutlichkeit der Richtungsempfindung leidet.

Es wurden ferner Versuche gemacht, die Strömungsgeschwindigkeit der Weser nach der beschriebenen Methode zu bestimmen. Da dieselbe etwa 0,5 m/sec betrug, war eine sehr große Basis erforderlich. Um bei dieser Strömungsgeschwindigkeit eine Verschiebung der Schallquelle um 10 cm zur Herbeiführung des Mitteneindruckes zu erhalten, mußte sein

$$a = \frac{c \cdot \Delta s}{v} = \frac{1435 \cdot 0{,}1}{0{,}5} = 71{,}75 \text{ m,}$$

wo $c = 1435$ die Schallgeschwindigkeit im Wasser ist.

Bei einer Basisgröße von 150 m gelang es jedoch nicht, den Mittelpunkt unter Wasser, wo die Schallquelle anzubringen war, mit genügender Genauigkeit festzulegen.

Bezüglich der Genauigkeit der Methode ergibt der Versuch, daß in Luft eine Verschiebung der Schallquelle um 1 cm aus der Nulllage heraus noch bequem wahrnehmbar ist. Die Grenze für den geübten Beobachter liegt bei etwa 0,5 cm. Das entspricht einer Zeitdifferenz von 0,0000145 Sekunden. Nimmt man als günstigsten Wert der Zeitdifferenz, der sich durch geeignete Wahl der Basisgröße erreichen läßt, den einem Richtungseindruck von 90° entsprechenden Wert 0,0006 Sekunden an, so erkennt man, daß unter günstigsten Bedingungen die größtmöglichste Genauigkeit der Methode etwa 2 bis 3 Proz. beträgt.

Messung der Geschwindigkeit eines bewegten Systems.

Im Vorstehenden ist gezeigt, wie vermittelst eines Richtungseindruckes die Geschwindigkeit eines in Bewegung befindlichen schallübertragenden Mediums gemessen werden kann. Es lag nun der Gedanke nahe, umgekehrt das akustische System von Schallquelle und Empfängern sich durch ein ruhendes Medium bewegen zu lassen und aus dem zu erwartenden akustischen Richtungseffekt die Geschwindigkeit des Systems zu berechnen.

Auf einem mit der Geschwindigkeit v relativ zur Erde sich bewegenden Fahrzeuge sind in der Fahrtrichtung zwei Schallempfänger A und B in der festen Entfernung $2a$ voneinander angebracht. In der Mitte der Verbindungslinie A mit B befindet sich die Schallquelle C. Das schallübertragende Medium (Luft) sei zunächst als relativ zur Erde ruhend angenommen. Da der Empfänger A sich den Schallwellen, die von C ausgehen, entgegenbewegt, während B sich von ihnen entfernt, müssen die Schallwellen die Empfänger A und B zu verschiedenen Zeiten erreichen, und zwar müssen sie in A früher ankommen als in B.

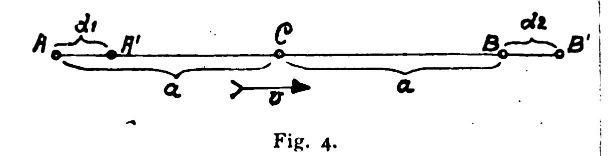


Fig. 4.

Es entsteht eine Zeitdifferenz, die als Richtungseindruck empfunden werden kann. Es bedeute c die Schallgeschwindigkeit, d_1 und d_2 die Strecken, um die sich das Fahrzeug weiter bewegt hat in der Zeit, die die Schallwellen brauchen, um von C ausgehend den Empfänger A in A' und B in B' zu erreichen.

Die Zeiten, die der Schall braucht, um nach A bzw. B zu gelangen, sind

$$t_1 = \frac{a - d_1}{c}; \quad t_2 = \frac{a + d_2}{c}.$$

Die Differenz ist

$$\Delta t = \frac{d_1 + d_2}{c}.$$

Nach der Definition ist

$$d_1 = v\frac{a - d_1}{c}; \quad d_2 = v\frac{a + d_2}{c}.$$

Also

$$\Delta t = \frac{2av}{c^2} + \frac{v}{c^2}(d_2 - d_1). \tag{8}$$

Das zweite Glied kann gegenüber dem ersten vernachlässigt werden, wenn d_2 nahe gleich d_1 ist, was praktisch der Fall ist; also

$$\Delta t = \frac{2av}{c^2}; \quad v = \frac{c^2 \Delta t}{2a}. \tag{9}$$

Um die Zeit Δt zu kompensieren und den seitlichen Richtungseindruck auf einen Mitteneindruck zurückzuführen, kann man wieder den Schallweg R, vom Empfänger A bis zum Ohr O_l um eine Strecke Δr_1 verlängern.

$\Delta t = \frac{\Delta r_1}{c}$ in (8) bzw. (9) eingesetzt, ergibt

$$v = \frac{c \cdot \Delta r_1}{2a + d_2 - d_1}, \tag{10}$$

bzw.

$$v = \frac{c \cdot \Delta r_1}{2a} \text{ für } d_2 = d_1. \tag{11}$$

Wird die Kompensation der Zeitdifferenz durch Verschieben der Schallquelle von C nach B

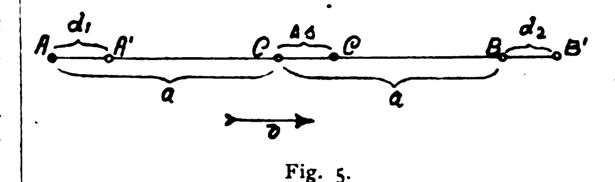


Fig. 5.

bewirkt (Fig. 5), so ergibt sich in Analogie mit dem früher betrachteten Falle

$$\frac{a - d_1 + \Delta s}{c} = \frac{a + d_2 - \Delta s}{c}; \quad 2\Delta s = d_1 + d_2$$

d_1 ist der Weg, den das Fahrzeug in der Zeit zurücklegt, die der Schall braucht um von C nach A zu gelangen, also

$$d_1 = v\frac{a - d_1 + \Delta s}{c}$$

und entsprechend

$$d_2 = v\frac{a + d_2 - \Delta s}{c}.$$

Das ergibt in obige Gleichung eingesetzt

$$v = \frac{2c \cdot \Delta s}{2a + d_2 - d_1}. \tag{12}$$

Mit genügender Annäherung kann man dafür schreiben

$$v = \frac{c \cdot \Delta s}{a}. \tag{13}$$

Diese Formel ist identisch mit der früher erhaltenen Formel (3), d. h. praktisch müßte es denselben Effekt ergeben, wenn sich das System im ruhenden Medium bewegt, oder das Medium am ruhenden System mit der Geschwindigkeit v vorbeiströmt.

Die Verhältnisse komplizieren sich etwas, wenn auch das schallübertragende Medium sich relativ zur Erde in Bewegung befindet. Seine Geschwindigkeit sei u. Bildet die Strömungsrichtung mit der Fahrtrichtung den Winkel α,

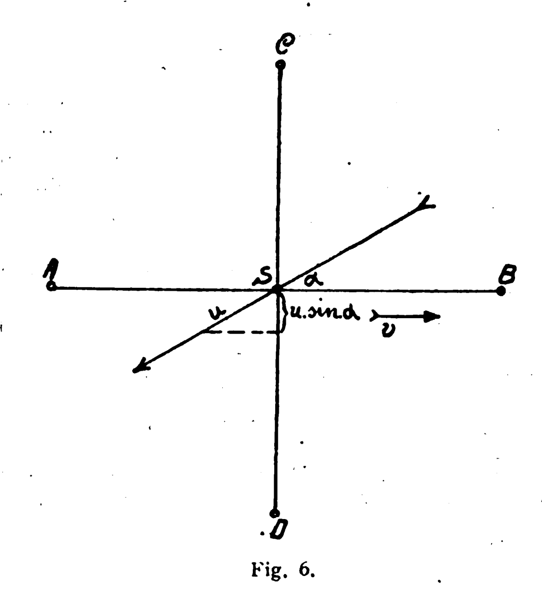


Fig. 6.

so könnte man daran denken, mit einer Empfängerbasis CD (Fig. 6), die senkrecht zu der Fahrtrichtung angeordnet ist und bei der infolgedessen die Bewegung des Fahrzeuges selbst keinen Richtungseffekt bewirken kann, zunächst die Komponente der Strömungsgeschwindigkeit, die in die Richtung CD fällt, zu berechnen und dann mit Hilfe des Winkels α die Geschwindigkeit u selbst zu bestimmen.

Mit der in der Fahrtrichtung angeordneten Basis AB könnte durch eine zweite Messung die Summe bzw. die Differenz der Fahrt- und Strömungsgeschwindigkeit bestimmt werden. Aus beiden Messungsresultaten wäre dann jede Geschwindigkeit einzeln zu errechnen.

Fällt die Strömungsrichtung des Mediums mit der Fahrtrichtung zusammen, so würde die eben beschriebene Methode versagen uud das Fahrzeug müßte, um sie doch anwenden zu können, seinen Kurs ändern.

Bei Fahrzeugen zu Lande und auf dem Wasser würde man praktisch so verfahren, daß man zunächst bei ruhendem Fahrzeug auf Mitteneindruck einstellt, d. h. den etwa infolge einer Strömungsgeschwindigkeit u des Mediums auftretenden Zeitunterschied zwischen dem Eintreffen der Schallwellen in A und B auf eine der angegebenen Methoden kompensiert und dann beobachtet, welchen Effekt man erhält, wenn sich das Fahrzeug mit der Geschwindigkeit v bewegt.

Experimentelle Prüfung der Methode.

Auf einem Schiffe, das sich mit der Geschwindigkeit von etwa 4 m/sec bewegte, waren in der Längsrichtung zwei Empfänger A und B im Abstande von $2a = 10$ m angebracht, während die Geräuschquelle S in der Mitte zwischen A und B befestigt war und ein lautes Knacken erzeugte. Als Empfänger dienten einmal wie im vorn beschriebenen Falle einfache Schalltrichter, ein ander Mal zwei Mikrophone. Zu erwarten bei Windstille war nach Formel (9) eine Zeitdifferenz

$$\Delta t = \frac{10 \cdot 4}{343^2} = 0{,}00034 \text{ sec.}$$

Das entspricht einem Richtungseindruck von etwa 33^0 Neigung gegen die Geradeausrichtung, der also deutlich wahrnehmbar sein mußte.

Es konnte jedoch bei sämtlichen Versuchen kein derartiger Effekt mit Sicherheit festgestellt werden. Zeitweilig schienen Richtungseindrücke aufzutreten, doch waren sie nicht deutlich genug, die Frage im positiven oder negativen Sinne zu entscheiden.

Die Gründe für das unsichere Resultat liegen vielleicht in der Versuchsanordnung begründet, da das Auftreten von störenden Reflexionen nicht zu vermeiden war. Möglich ist auch, daß die an den Ohren ankommenden Schallwellen entsprechend der verschiedenen Richtung so modifiziert waren, daß sie nicht mehr als dasselbe Geräusch empfunden werden konnten. Nach dem Dopplerschen Prinzip ist die Zahl der Schallwellen, die pro Sekunde an dem Empfänger, der sich ihnen entgegenbewegt, ankommen, eine größere als die pro Sekunde am anderen Empfänger ankommende. Infolgedessen ist der Charakter des Geräusches, das mit dem einen Ohr gehört wird, ein anderer als der Charakter des mit dem zweiten Ohr gehörten Geräusches. Hierdurch wird offenbar das Auftreten eines eindeutigen Richtungseindruckes erschwert. Immerhin ist dann nicht ohne weiteres zu verstehen, daß die Versuche zur Messung von Windstärken, bei denen ähnliche Verhältnisse vorliegen, positive Resultate ergaben, wenn sich auch dort die Eindrücke nicht so deutlich darstellten wie im Falle des ruhenden Systems im ruhenden Medium. Durch weitere Versuche soll versucht werden die Frage zu klären, die auch praktisch von Bedeutung ist, namentlich wenn man an eine Verwendung für Luftfahrzeuge denkt.

Zusammenfassung.

1. Es wird eine Methode angegeben, die Geschwindigkeit eines strömenden Mediums bzw. die eines sich in einem ruhenden oder strömenden Medium bewegenden Fahrzeuges relativ zur Erde aus einem akustischen Richtungseindruck zu bestimmen.

2. Die Methode wird durch Messung von Windgeschwindigkeiten praktisch erprobt.

3. Bei der Anwendung auf die Messung der Geschwindigkeit von Fahrzeugen konnten zweifelsfreie Resultate noch nicht erzielt werden.

Bremen, 14. Februar 1920.

(Eingegangen 22. März 1920.)

Kurze Zusammenstellung von Laufzeitdifferenzen der reflektierten Vorläufer der Erdbebenwellen.

Von Otto Meißner.

Vorliegender Aufsatz ist ein Auszug aus einer umfangreichen Arbeit über das im Titel genannte Thema, an deren Veröffentlichung unter den jetzigen Verhältnissen leider nicht zu denken ist.

Ich habe aus dem gesamten mir vorliegenden Material alle Beben herausgesucht, bei denen genauere Zeitangaben über direkte I. und II. Vorläufer (P und S) und über reflektierte gemacht sind, auch wo die Reflexionen nicht ausdrücklich als solche (PR_1, SR_1 usw. oder $PP = PR_1$, $SS = SR_1 \ldots$) bezeichnet wurden. Tabelle I gibt einen Überblick über das verwandte Material; auf eine eingehendere Nachweisung der einzelnen Beben selbst muß verzichtet werden.

Tabelle I.

Nr.	Station	Zeitraum	Bebenanzahl
1.	Potsdam	1902 – 1915	130
2.	Jena	April 1905—Mai 1913	325
3.	Göttingen	1905—1914	171
4.	Hamburg	1908—April 1915	107
5.	Aachen	Sept. 1906—Juli 1914	93
6.	Leipzig	1908—1911	13
7.	Krietern-Breslau .	April 1912—Juni 1914	3
8.	Graz	1907—1914	92
9.	Wien	1909—1914	35
10.	Triest	1911—1914	28
11.	Czernowitz	1913—1914	14
12.	Lemberg	1912—1914	9
13.	Pola	1911—1914	8
14.	Laibach	1911—1914	3
15.	Taschkent	Sept. 1912—Jnni 1914	75
16.	Baku	Jan. 1913—Juni 1914	65
17.	Pulkowa	Jan. 1914—Juli 1914	42
18.	Irkutsk	Juni 1912—Juni 1914	36
19.	Jekaterinburg . .	Okt. 1913—Juni 1914	24
20.	Tiflis	Jan. 1913—Juni 1914	18
21.	Upsala	Jan. 1907—Aug. 1912	45
22.	Ottawa, Canada .	April 1908—Juni 1914	62
23.	St. Louis (MO., U.St.A.)	1911—1913	5
24.	Zikawei (Shangai)	1912—1913	23
25.	Tsingtau (Kiautschau)	1909—1913	5
26.	Sidney	März 1909—April 1914	49
27.	Apia (Samoa) . .	Jan. 1905—Sept. 1913	32
		Gesamtzahl:	1512.

Für die einzelnen Arten reflektierter Wellen ergaben sich folgende Anzahlen von Einzelwerten:

PR_1: 794; PR_2: 328; PR_3: 179; PR_4: 48; PR_5: 7.

SR_1: 658; SR_2 maj.: 274; SR_2 min.: 110; SR_3: 119; (SR_3 min.: 17); SR_4: 40; SR_5: 12; SR_6: 1.

Da nun der Bebenbeginn nur in den seltensten Fällen mit hinreichender Genauigkeit bestimmbar ist, habe ich immer nur mit den viel sichereren, meist bis auf wenige Sekunden genau bestimmbaren Laufzeitdifferenzen gerechnet.

Unter SR_2 maj. verstehe ich Wellen, die bei beiden Reflexionen S-Wellen geblieben sind, SR_2 min. dagegen sind solche, die dabei ihren Charakter geändert haben, also nach etwas anderer, aber wohl auch verständlicher Terminologie als SSP oder SPS oder PSS zu bezeichnen wären, d. h. die einen Teil des Weges als Transversal-, einen anderen als Longitudinalwellen zurückgelegt haben. Die SP-Wellen treffen so kurz hinter den S-Wellen ein, daß sie selten angegeben werden, auch ist ihr Einsatz fast stets unscharf; PPS-, SPP- oder PSP-Wellen aufzufinden, ist schwierig, denn ich wollte gerade ohne vorausgefaßte theoretische Meinung an die Aufgabe herantreten: Konstruiert man a priori, auf Grund ganz weniger Beben, Laufzeitkurven, so findet man schließlich immer in der Nähe der theoretischen Zeiten mehr oder weniger auffällige Wellen, die man dann als Bestätigung seiner Ansicht deuten kann. Nur glaube ich nicht, daß man auf sichere Ergebnisse dabei kommt. Vielmehr muß man die Diagramme ganz unvoreingenommen betrachten, die auffälligen Einsätze notieren und erst dann ihren Charakter festzustellen suchen, was freilich nicht immer so glatt geht. Ich habe auch allen Beobachtungen gleiches Gewicht gegeben (auch wo nur Zehntelminuten oder ganze als Zeiten gegeben waren), um Willkür zu vermeiden.

Die Ergebnisse finden sich in Tabelle II zusammengestellt. Sie sind eine Folge doppelter Ausgleichung: zunächst rechnerischer, durch Zusammenfassung von je 10 Einzelwerten, dann nochmals graphischer Ausgleichung, wobei ich mich aber bestrebt habe, nicht „allzu glatte" Kurven zu ziehen, sondern die nun einmal vorkommenden Schwankungen des Anstiegs[1]) auch als solche wiederzugeben. (Nähere Einzelheiten kann ich hier leider nicht geben; das würde viel

1) Auf theoretische Überlegungen über die Ursachen dieser Unregelmäßigkeiten muß ich hier verzichten.

Tabelle II.

$S-P$	PR_1-P	PR_2-P	PR_3-P	SR_1-S	SR_2-S maj.	SR_2-S min.	SR_3-S
250^s	30^s	47^s	—	72^s	—	—	102^s
300	53	73	94^s	111	—	—	168
350	76	99	124	151	178^s	—	230
400	98	128	173	190	241	225^s	290
450	118	177	225	229	335	290	395
500	140	224	277	263	423	346	482
550	171	259	347	302	481	390	580
600	197	298	393	338	540	442	680
650	224	342	445	376	595	498	770
700	238	386	496	416	655	545	860
750	249	429	545	466	730	592	—
800	263	473	595	516	—	640	—
850	277	—	—	566	—	—	—

zu weit führen.) Für die nicht aufgeführten Reflexionen schien mir das Material nach Tabelle II zu gering.

Im Original schreiten die $S-P$ um je 10^s fort; es steht Interessenten zur Verfügung.

Potsdam, 10. April 1920.

(Eingegangen 14. April 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und Gittern.

Von H. Spohn.

Bis vor rund 12 Jahren wurde zur Berechnung von Beugungserscheinungen fast ausschließlich das Fresnel-Huygensche Prinzip benutzt. Bezeichnet s das allgemeine Integral der Wellengleichung, t die Zeit, r die Entfernung des Aufpunktes von der die Lichtquelle einschließenden Oberfläche S, n die nach innen weisende Normale zu dieser, v die Geschwindigkeit der Wellenausbreitung im von S umschlossenen Raume, so lautet dieses Prinzip in der Kirchhoffschen Fassung:

$$4\pi s_0 = \iint \left\{ \frac{\partial \frac{s(t-vc)}{r}}{\partial \nu} \cos(n_1 R) - \frac{1}{r} \frac{\partial s(t-so)}{\partial \nu} \right\} dS \quad {}^{1)}$$

Seine unmittelbare Verwendung als Lösung setzt, wie man sieht, die Kenntnis des Erregungszustandes an der geeignet zu wählenden Oberfläche voraus. Diese Verwendung muß daher überall dort unmöglich werden, wo diese Kenntnis nicht, bzw. nicht mit ausreichender Annäherung vorausgesetzt werden darf; sie kann i. a. immer vorausgesetzt werden, wenn die Wellenlänge sehr groß im Vergleich zur beugenden Öffnung bleibt. Das ist aber z. B. nicht mehr der Fall bei dem Hertzschen Gitterversuch vom Jahre 1888.

A. Sommerfeld[1]) [21] stellte als erster mittels funktionentheoretischer Entwicklungen die Lösung spezieller Beugungsprobleme durch Integrale dar, die von unbekannten Randwertfunktionen frei waren. Aber diese, wie auch eine Reihe von gleichwertigen Lösungen späterer Verfasser [18, 10], ist auf der Voraussetzung aufgebaut, daß die beugenden Körper von unendlicher elektrischer Leitfähigkeit, also absolut „blank" oder absolut „schwarz" sind, d. h. auffallende Strahlung entweder vollkommen reflektieren oder vollkommen absorbieren. Sie schlossen also die Erfassung spezifischer Materialwirkung der beugenden Körper von der Behandlung aus und schufen damit eine andere Einschränkung des Gültigkeitsbereichs der Lösungen.

Allein bald nach Hertz wurden an metallischen Gittern Erscheinungen beobachtet, die fraglos als Einfluß einer spezifischen Materialwirkung angesprochen werden mußten [2, 3, 12]. Freilich boten Größenordnung und Unsicherheit der elektromagnetischen Materialkonstanten der dabei benutzten Metalldrähte zunächst eine unsichere Grundlage für die quantitative Prüfung einer von den bisherigen Einschränkungen freien Theorie. Daher war es besonders wertvoll, daß es Cl. Schaefer und seinen Mitarbeitern [13—17] gelang, auch an dielektrischen beugenden Körpern spezifische Materialeinflüsse experimentell zu erfassen und mit der Zeit reich-

1) Vgl. etwa Drude, Lehrbuch der Optik. Leipzig, S. Hirzel. 1912.

1) Die eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schlusse.



haltige Einzelergebnisse nach dieser Richtung zu gewinnen. Für diese ließ sich ausnahmslos eine strenge Theorie entwickeln, die an sich nicht nur für den Fall dielektrischen Materials, sondern durchaus allgemein für jedes Material galt und auch sehr bald für spezielle Ergebnisse an metallischen Gittern angewendet werden konnte. Die besondere Form der Auswertung dieser Theorie in Gestalt von Fourierschen Reihen machte anfangs ihre quantitative Anwendung auf gerade die Experimente, die die ganze Frage aufgerollt hatten [2, 3, 12], unmöglich. Doch konnte auch dieser Mangel in der letzten Zeit behoben werden [22].

Haben so einerseits diese neueren einschlägigen Arbeiten die Gittertheorie zu ihrem (mindestens grundsätzlich) vollständigen Abschlusse im Sinne der durchgeführten Maxwellschen Theorie gebracht, so haben sich anderseits dabei fast automatisch wertvolle Ergebnisse für die Dispersionstheorie eingestellt (nebenbei ein erfreuliches Beispiel für die Vereinheitlichung konsequenter Naturforschung). Im weiteren Zusammenhange wird noch mit aller Klarheit hervortreten, daß sich die Dispersion als Beugungserscheinung mit spezifischer Materialabhängigkeit behandeln läßt. Die hier zu entwickelnden Dispersionsergebnisse bieten den Vorteil, daß für sie nicht ein Körper hingenommen zu werden braucht, über dessen innere Eigenschaften schwer oder unmittelbar überhaupt nicht prüfbare Hypothesen aufzustellen sind; vielmehr kann nach den Vorschriften der Theorie ein solcher dispergierender Körper so hergestellt werden, daß jede für die Dispersionserscheinung haftbare Einzelheit meßbarer Überprüfung zugänglich ist.

Die Fülle von Einzelergebnissen, die von der modernen Gittertheorie geliefert und durch Experimente bestätigt wurden, ist groß; trotzdem kann ein Überblick möglichst kurz gehalten werden. Zweimal nämlich gestattet das Problem eine Einschränkung bzw. Zusammenfassung ohne Schaden für die Allgemeinheit seiner Darstellung.

Erstens kann sich in der Hauptsache die grundsätzliche Betrachtung auf einen einzelnen Draht eines Beugungsgitters beschränken. Denn dessen Gesamtwirkung kann in verhältnismäßig einfacher Weise durch Superposition der Einzelwirkungen der einzelnen Elemente, d. h. Drähte, ermittelt werden. Der Grundgedanke dazu ist theoretisch in zweifacher Weise durchgeführt worden, einmal unmittelbar fußend auf der physikalischen Anschauung [16], ein zweites Mal, ohne jedes Zurückgreifen darauf, auf rein mathematischem Wege 1914 [8]. Auf beide Durchführungen braucht weiterhin nicht näher eingegangen zu werden. Denn die spezielle Behandlung eines Gesamtgitters liefert ja naturgemäß spezielle Ergebnisse, die am einzelnen Gitterdraht nicht zustande kommen können, aber grundsätzlich kommt dabei nichts Neues heraus. Die speziellen Eigentümlichkeiten bei einem Gesamtgitter brauchen daher nur kurz gestreift zu werden.

Zweitens hat sich gezeigt, daß in der weiterhin gewählten Darstellungsweise gar kein grundsätzlicher Unterschied für die Behandlung dielektrischer und leitfähiger Beugungskörper eintritt. Die grundlegenden Betrachtungen gelten daher gleichzeitig für beide Fälle. Nur der an sich belanglose Umstand, daß weitaus zahlreichere Einzelergebnisse für den dielektrischen Zylinder schon abgeleitet sind, läßt diesen bei der folgenden Darstellung eine nur äußerlich bevorzugte Stellung einnehmen.

Also ist es weiterhin möglich, in der Hauptsache nur über Theorie und Experiment für einen einzelnen Draht als Beugungskörper zu berichten. Spezielle Eigentümlichkeiten, die der Materialart der Beugungskörper und der Gesamtwirkung eines ganzen Gitters aus mehreren Drähten zukommen, brauchen nur akzessorisch dargestellt zu werden.

Schließlich können noch in der Hauptausführung, worauf hier nur hingewiesen zu werden braucht, weitere rein rechnerische Einschränkungen ohne Schaden für die Allgemeinheit eingeführt werden.

Ausgangspunkt der folgenden Darstellung ist nicht die Beschreibung der Experimente, worüber in der Hauptsache auf die zitierte Literatur verwiesen werden muß, sondern die Theorie. Sie geht aus von den Maxwellschen Grundgleichungen mit ihren Randbedingungen, stellt sich also als sogenanntes Randwertproblem dar. Dieser Problemstellung entsprechend, ergeben sich i. a. die Lösungen in der Gestalt von Fourierschen Reihen. Diese Lösungen werden sodann diskutiert an der Hand von Experimenten, die zu ihrer Prüfung in der Mehrzahl von Cl. Schaefer und seinen Mitarbeitern [14, 15] angestellt wurden.

§ 1. Die Beugung an einem einzelnen Zylinder.

Das Problem der Beugung elektromagnetischer Vorgänge muß, so lange die Räume, in denen sie sich abspielen, als homogene Continua vorausgesetzt sind, vollständig bestimmt sein durch die Maxwellschen Grundgleichungen und die Grenzbedingungen an den Oberflächen beugender Körper. Der rechnerischen Vereinfachung kommt es sehr zustatten, wenn man

neben den in der Einleitung genannten Einschränkungen fernerhin noch voraussetzt, daß mit monochromatischem, linear polarisiertem Lichte gearbeitet werden soll. Das bringt keine grundsätzliche Beschränkung mit sich. Unter solcher Voraussetzung gehört zur vollständigen Durchrechnung des Problems naturgemäß, daß der Einfluß des beugenden Stabes in zwei verschiedenen Stellungen zur Polarisationsebene (parallel und senkrecht) des einfallenden Lichtes ermittelt wird.

Zur schließlichen mathematischen Formulierung gehört jetzt nur noch eine Festsetzung über die Form des beugenden Stabes. Dieser soll ein Kreiszylinder sein, seine Länge ∞. Die zweite Festsetzung ist naturgemäß mathematisch von erheblicher Bedeutung. Das Experiment kann sie mit hinreichender Annäherung verwirklichen, so daß diese Festsetzung, die mathematisch große Vereinfachungen mit sich bringt, praktisch unbedenklich ist.

Zugrunde gelegt wird ein kartesisches Koordinatensystem, dessen Z-Achse in die Achse des beugenden Zylinders gelegt ist. Entsprechend den eben getroffenen Festsetzungen empfiehlt es sich nun, die Maxwellschen Gleichungen auf Zylinderkoordinaten (r, φ, z) zu transformieren, die mit den kartesischen (x, y, z) zusammenhängen durch

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z.$$

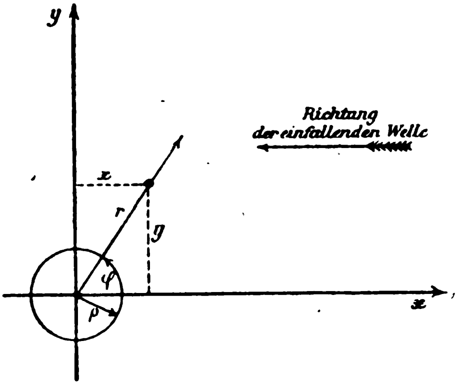


Fig. 1.

Der eben polarisierte, einfarbige Wellenzug falle parallel der x-Achse, und zwar in Richtung abnehmender x ein (siehe Fig. 1).

Die elektrische Kraft sei zunächst parallel zur x-Achse gerichtet. Unter diesen Bedingungen verschwinden:

1. Die elektrischen Komponenten $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{E}_\varphi$ identisch,

2. Sind alle Feldgrößen von z unabhängig, Danach lauten also für diesen Fall die auf Zylinderkoordinaten transformierten Maxwellschen Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\mathfrak{H}_\varphi) - \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial \varphi},\\ &\text{b)}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_r}{\partial t} = \frac{1}{r}\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \varphi},\\ &\text{c)}\ \frac{\mu}{c}\frac{\partial \mathfrak{H}_\varphi}{\partial t} = \frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

und diese Gleichungen gelten

1. für das Zylinderinnere,
2. für den Außenraum.

Dabei gelten als Bedingungen:

I. Die Grenzbedingungen der Maxwellschen Theorie; für den vorliegenden Fall also, wenn, wie auch weiterhin, Index 1 die auf den Außenraum, 2 die auf den Innenraum bezüglichen Größen kennzeichnen:

$$\left.\begin{aligned} &\text{a)}\ (\mathfrak{E}_z)_1 = (\mathfrak{E}_z)_2\\ &\text{b)}\ (\mathfrak{H}_\varphi)_1 = (\mathfrak{H}_\varphi)_2 \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\text{für } r = \rho,\\ &\varphi = \text{Zylinderradius} \end{aligned} \quad (2)$$

oder (2b) mittels (1c) ersetzt:

$$\frac{1}{\mu_1}\left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial r}\right)_1 = \frac{1}{\mu_2} = \left(\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial \pi}\right)_2 \text{ für } r = \rho; \quad (2c)$$

II. Die natürlichen Bedingungen des Problems:

a) die Erregung muß im Koordinatenursprung endlich bleiben,

b) die durch den Zylinder hervorgerufene Störung muß in unendlicher Entfernung vom Zylinder abgeklungen sein, d. h.:

$$\lim_{r=\infty} \mathfrak{E}_z = e^{\frac{2\pi i}{\lambda}(ct+x)} = e^{in\left(t+\frac{r}{c}\cos\varphi\right)} \quad (2d)$$

In diesen Gleichungen sind die in der heutigen Literatur allgemein üblichen Bezeichnungen benutzt. Nur die D. K. ε hat hier zunächst eine allgemeinere Bedeutung: ε soll nämlich (worüber speziell erst im Einzelfalle verfügt werden wird) auch komplex sein können. Denn da bei den hier zu erörternden Problemen $\mathfrak{E}$ naturgemäß eine rein periodische Funktion der Zeit, d. h. von der Form $Ae^{-\frac{2\pi i c}{\lambda}t}$ ist, so besteht die Gleichung:

$$\mathfrak{E} = -\frac{i\lambda}{2\pi c}\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial t}.$$

Wenn daher durch Eintritt der elektromagnetischen Erregung in ein leitendes Medium — bisher ist noch dahingestellt, ob der Zylinder aus absolut dielektrischer oder aus leitender Substanz besteht — Leitungsströme im Material auftreten, so ist mit Rücksicht auf die eben hergeleitete Beziehung lediglich an Stelle des reellen ε in den für ein dielektrisches Medium

gültigen Gleichungen (1) das komplexe $\left(\varepsilon - \frac{2i\sigma\lambda}{c}\right)$, wo σ die Leitfähigkeit ist, zu setzen.

Aus (1) folgt in der üblichen Weise für $\mathfrak{E}$ die Wellengleichung in Zylinderkoordinaten. Ihre Lösung für unseren rein periodischen, von z nach unserer Festsetzung unabhängigen Vorgang kann dementsprechend (die Konvergenz der Entwicklung vorausgesetzt) als Fouriersche Reihe angesetzt werden in der Form

$$\mathfrak{E} = e^{iut} \sum_{m}^{0,1\,\infty} Q_m(r) \cos m\varphi \qquad (3)$$

(n die Schwingungszahl in 2π Sekunden).

Diese Reihe ist von sin-Koeffizienten frei, weil hier die Nullrichtung des Azimuts in die Richtung des einfallenden Lichtstrahls bzw. in die entgegengesetzte Richtung fällt. Denn zu dieser Richtung muß ja der resultierende Vorgang symmetrisch werden, wenn man mit „parallelem" Lichte arbeitet, d. h. der Vorgang wird gegen einen Vorzeichenwechsel von φ indifferent.

Die Funktionen Q_m können nur noch von r abhängen. Zu ihrer Bestimmung setzt man (3) in die Wellengleichung ein und erhält für jedes einzelne Q_m die „Besselsche Differentialgleichung":

$$\frac{d^2 Q_m}{dp^2} + \frac{1}{p}\frac{dQ_m}{dp} + \left(1 - \frac{m^2}{p^2}\right) Q_m = 0, \qquad (4)$$

nachdem zur Abkürzung

$$p^2 = k^2 r^2 = \frac{4\pi^2 \varepsilon \mu}{\lambda^2} r^2 \qquad (5)$$

gesetzt worden ist.

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung ist nun in zwei verschiedenen Medien, nämlich dem des beugenden Körpers und im Außenraum zu integrieren.

Folglich treten für jedes m in die Lösung von (4) je 4 Konstanten ein, zu deren Bestimmung die unter I und II genannten Bedingungen gerade ausreichen.

Die Durchrechnung liefert für den elektrischen Kraft-Vektor

$$\left.\begin{array}{ll} \text{a)} & \mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_{e1}{}^{*)} + \mathfrak{E}_r = e^{iu(t + \frac{r}{c}\cos\varphi)} + e^{in} \Sigma a_m H_m^{(2)}(p_1) \cos m\varphi \\ \text{b)} & \mathfrak{E}_2 = \ldots\ldots\ldots - e^{iut} \Sigma b_m J_m(p_2) \cos m\varphi \\ \text{c)}^{1)} & a_m = 2 i^m \dfrac{J_m(\pi_1)\dot{J}_m(\pi_2) - \frac{k_1}{k_2}\dot{J}_m(\pi_1) J_m(\pi_2)}{\frac{k_1}{k_2}\dot{H}_m^{(2)}(\pi_1) J_m(\pi_2) - \dot{J}_m(\pi_2) H_m^{(2)}(\pi_1)}. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

*) $\mathfrak{E}_e$ bedeutet die einfallende, $\mathfrak{E}_1$ die reflektierte Welle.

1) Im übrigen vgl. Cl. Schaefer und F. Großmann [12] Gleichung (9a) und (9b). Die Bezeichnungen sind hier wie dort gewählt, nur ist Q_m mit Rücksicht auf die Funktionentafeln von Jahnke und Emde durch das tabulierende $H^2{}_m$ ersetzt, welches mit Q_m verbunden ist durch: $Q_m = -\frac{i\pi}{2} H^{(2)}{}_m$. $H^{(2)}{}_m$ ist die sog. zweite Hankelsche Zylinderfunktion.

(Fortsetzung folgt.)

Berichtigung.

In dem Aufsatze „Das Leitvermögen verdünnter mischkristallfreier Legierungen" von K. Lichtenecker (diese Zeitschr. **21**, 352, 1920) ist bei der Korrektur der Satz „Der nach Burgers Formel — um die Hälfte zu groß" auf Seite 353, Spalte 2 versehentlich stehen geblieben und muß in Wegfall kommen.

Tagesereignisse.

Naturforscher-Versammlung in Nauheim.

Für die Tagung der Naturforscher-Versammlung in Nauheim sind in der Abteilung 2 für Physik (Einführende: Prof. Dr. W. König (Gießen) und Prof. Dr. R. Wachsmuth (Frankfurt a. M.); Schriftführer: Prof. Dr. K. Uller (Gießen) und Prof. Dr. P. Cermak (Gießen)) bis jetzt folgende Vorträge angemeldet:

1. Bohumil Jörotka (Berlin): Neue Strahlen, dynamische Kräfte und ihre Messung, **2.** H. Rudolph (Coblenz): Über die Kantenlänge des Elementarwürfels einiger Metalle mit kubischem flächenzentriertem Gitter, **3.** R. Fürth (Prag): Die statistischen Methoden der Physik und der Begriff der Wahrscheinlichkeitsnachwirkung, **4.** C. Ramsauer (Heidelberg): Über den Wirkungsquerschnitt von Gasmolekülen gegenüber langsamen Elektronen, **5.** O. Stern (Frankfurt): Direkte Messung der Molekulargeschwindigkeit, **6.** M. Born (Frankfurt): Eine direkte Messung der freien Weglängen neutraler Atome (Versuche gemeinsam mit Frl. Dr. Bohrmann), **7.** A. Landé (Oberhambach): Über Würfelatome, **8.** Polanyi (Karlsruhe): Zum Ursprung der interatomaren (-molekularen) Kräfte, **9.** Fr. Dessauer (Frankfurt): Versuche über Zerstreuung von Röntgenstrahlen, **10.** H. Rausch von Traubenberg (Göttingen): Über den Durchgang von α-Strahlen durch Materie, **11.** A. Sommerfeld (München): Schwebende Fragen der Atomphysik, **12.** P. P. Ewald (München): Abweichungen vom Braggschen Reflexionsgesetz der Röntgenstrahlen, **13.** W. Pauli (München): Quantentheorie und Magneton, **14.** W. Lenz (München): a) Über einige mit Hilfe der Theorie der Bandenspektren erklärbare Erscheinungen, b) Beitrag zum Verständnis der magnetischen Erscheinungen fester Körper, **15.** F. Jentzsch (Gießen): Über den Grenzwinkel der regulären Reflexion, **16.** K. Uller (Gießen): Thema vor-

behalten; gemeinsam mit der 3. Abteilung, **17.** H. Busch (Göttingen): Widerstände mit rückfallender Charakteristik; gemeinsam mit der 4. Abteilung, **18.** F. Ehrenhaft (Wien): a) Über die Atomistik der Elektrizität, b) Erscheinungen an einzelnen radioaktiven Probekörpern der Größenordnung 10^{-5} cm, **19.** D. Vorländer (Halle): Ableitung der molekularen Gestalt aus dem kristallinisch-flüssigen Zustand: a) Abkömmlinge des Äthylens und Acetylens, b) Wasser- und Schwefelwasserstoff, **20.** J. Traube (Charlottenburg): Ältere und neuere Forschungen über den Bau der Moleküle und Atome, **21.** A. Reis (Karlsruhe): Über eine Methode zur Identifizierung der Träger von Emissionsspektren, **22.** E. Weitz (Münster): Atomaffinität und Komplexverbindung, **23.** O. Hahn (Berlin-Dahlem): Protactinium, seine Lebensdauer und sein Gehalt in Urmineralien (Versuche gemeinsam mit L. Meitner), **24.** R. Rüther (Paderborn): Neue Gesichtspunkte betreffs der Erhaltung des Stoffes; gemeinsam mit der 4. und 10. Abteilung, **25.** F. Rinne (Leipzig): Über den Feinbau der Kristalle, **26.** J. Valeton (Gießen): Kristallwachstum und chemische Affinität; gemeinsam mit der 8. Abteilung, **27.** A. Wigand (Halle): Messungen der Ionisation und Ionenbeweglichkeit bei Luftfahrten.

Geplant ist eine gemeinsame Sitzung mit der Abteilung für Mathematik, in der vornehmlich Fragen der Relativitätstheorie behandelt werden sollen. Die Abteilung für Physik wird ihre Sitzungen zusammen mit der Tagung der Deutschen Physikalischen Gesellschaft abhalten; letztere wird außerdem ihre internen Fragen, besonders die Neugestaltung des Zeitschriftenwesens in einer Geschäftssitzung ausführlich zur Erörterung stellen.

Der Mitgliedsbeitrag für die Teilnehmer der Versammlung beträgt 40 M., Wohnung wird allen Teilnehmern umsonst gewährt. Frühstück, Mittagessen und Abendessen kosten zusammen 20 M., oder 28 M., oder 34 M., Frühstück allgemein 3 M. Außerdem sollen Bürgerquartiere zur Verfügung gestellt werden mit Anrecht auf Mittags- und Abendtisch in gewissen Gasthäusern zu noch billigeren Preisen. Über Gewährung von Fahrpreisermäßigung auf den Eisenbahnen schweben Verhandlungen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Berlin Dr. Burkhardt Helferich für Chemie, an der Technischen Hochschule Charlottenburg der wissenschaftliche Mitarbeiter im Wernerwerk der Siemens & Halske A.-G. Dr. August Gehrts für Atomdynamik, an der Universität München Dr. H. Lecher für organische Chemie.

Ernannt: Zu ord. Professoren die a. o. Professoren an der Universität Bonn Dr. Alexander Pflüger (Physik) und Dr. Hans Beck (Mathematik), der a. o. Professor an der Universität Breslau Dr. Peter Danckwortt zum a. o. Professor für pharmazeutische Chemie an der Universität Greifswald, der a. o. Professor an der Universität Göttingen Dr. Max Reich zum ord. Professor für angewandte Elektrizität an derselben Hochschule, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Münster Dr. Richard Courant in gleicher Stellung an der Universität Göttingen, Dr. W. N. Haworth zum Professor für organische Chemie am Armstrong College in Newcastle-on-Tyne, der ord. Professor der Chemie an der Technischen Hochschule München Dr. Heinrich Wieland in gleicher Eigenschaft an der Universität Freiburg i. Br., der Professor der Chemie an der Universität Wisconsin Dr. A. E. Koenig in gleicher Eigenschaft an der Montana State School of Mines, Dr. Edward Bartow von der Illinois Universität zum Leiter der chemischen Abteilung an der Jowa Universität, Professor Dr. Thomas Martin Lowry von der Universität London zum Professor für physikalische Chemie an der Universität Cambridge, der Privatdozent an der Universität Königsberg Dr. Adolf Sonn zum a. o. Professor der Chemie und Abteilungsvorsteher am Chemischen Institut daselbst, der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Frankfurt a. M. Dr. Max Born zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Göttingen, der Privatdozent an der Universität Wien Dr. Hans Thirring zum a. o. Professor der Physik an der gleichen Hochschule.

Ehrung: Von der Technischen Hochschule Karlsruhe ist dem Verleger der Physikalischen Zeitschrift Dr. Georg Hirzel in Leipzig in Anerkennung seiner Verdienste um die Herausgabe chemischer und physikalischer Werke insbesondere auf dem Gebiete der Erdölforschung die Würde eines Dr.-Ing. ehrenhalber verliehen worden.

Gestorben: Der ord. Professor der angewandten Mathematik an der Universität Leipzig Geh. Hofrat Dr. Karl Rohn, der Begründer der Optischen Werke in Wetzlar Dr. Ernst Leitz, der ord. Honorarprofessor für angewandte Mathematik an der Universität Kiel Dr. Rudolf H. Weber, der frühere Professor der Ingenieurwissenschaften in Tokio und spätere Professor für Elektrotechnik in England Dr. John Perry, der ord. Professor der Astronomie an der Universität Berlin und Direktor der Sternwarte in Babelsberg Geh. Regierungsrat Dr. Hermann Struve.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Zurich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 17. | 1. September 1920. Redaktionsschluß für No. 19 am 24. August 1920. | 21. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Experimentelles zum Schalldruck.

Von E. Waetzmann.

Als experimentelle Ergänzung zu der Mitteilung[1]) des Verfassers „Theoretisches über den Schalldruck" wird im folgenden ein Versuch beschrieben, welcher die früheren theoretischen Ausführungen bestätigt. Die Anordnung des Versuches ist so einfach gehalten, und der beobachtete Effekt ist so stark, daß sich der Versuch auch als Demonstrationsversuch eignet.

Verf. hatte gezeigt, daß die gleichen Bedingungen, welche das Auftreten von Schalldruck veranlassen, zugleich die Ursache für die Entstehung neuer, von der Schallquelle noch nicht gegebener Töne sind. Besonders einfach war zu übersehen, daß ein Differenzton (D. T) $p-q$ entstehen muß, wenn die Schallquelle primär zwei Sinusschwingungen mit den Schwingungszahlen p und q liefert, welche Schwebungen bilden. Als Schallquelle sollen beispielsweise zwei Stimmgabeln p und q dienen. Sie wirken auf eine schwingungsfähige Platte, welche für sich linearem Kraft- und Dämpfungsgesetz gehorche. Trotzdem zeigt die Platte einen D. T. $p-q$ an, wenn die Verhältnisse im einzelnen so liegen, daß der Schalldruck merklichen Einfluß erhält. Das Auftreten dieses D. T. soll der im folgenden beschriebene Versuch beweisen.

Das prinzipiell Wichtige desselben tritt besonders deutlich hervor, wenn die Schwebungen so langsam gewählt werden, daß man einerseits die Stöße hört und andererseits die objektive Schwingung $p-q$ beobachtet. Letzteres ist direkt ohne jede Analyse der Gesamtschwingung des erregten Körpers möglich, wenn derselbe auf die schnellen Schwingungen p und q überhaupt nicht reagiert, sondern nur die langsame Schwingung $p-q$ anzeigt. Durch diese Forderungen sind die günstigsten Bedingungen für die Ausführung des Versuches festgelegt.

Zunächst ist darauf zu achten, daß der schwingungsfähige Körper, welcher den D. T. anzeigen soll, für sich linearen Gesetzen gehorcht. Andernfalls könnte gemäß der Helmholtzschen Theorie in ihm ein D. T. entstehen, der mit dem Schalldruck nichts zu tun hat. Bei verschiedenen Versuchsanordnungen trat diese Schwierigkeit auf. Es wurde deshalb als Druckanzeiger ein Manometer gewählt, wie es schon vielfach zur Messung des konstanten Überdruckes[1]) in Kundtschen Röhren, Resonanzkästen von Stimmgabeln usw. benutzt worden ist. In einem horizontal liegenden Glasrohr von wenigen Millimetern Durchmesser befindet sich ein kurzer Flüssigkeitsfaden (Alkohol). Wird das Rohr ein wenig durchgebogen, so daß die beiden Schenkel einen stumpfen Winkel miteinander bilden, so ist die Empfindlichkeit immer noch genügend groß, und außerdem besitzt jetzt der Alkoholfaden eine, wenn auch sehr langsame, Eigenperiode. Er folgt für sich weitgehend linearen Schwingungsgesetzen und hat ferner die für unsere Zwecke erwünschte Eigenschaft, nur langsame Druckschwankungen anzuzeigen.

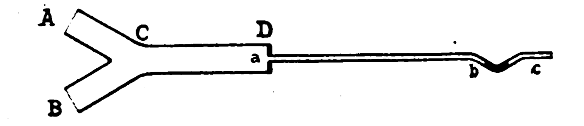
Um keine besonderen Hilfsmittel für den Versuch zu brauchen, wollen wir als Tonquelle zwei Stimmgabeln auf Resonanzkästen mit den Schwingungszahlen 256 wählen. Die eine Gabel kann durch ein Laufgewicht verstimmt werden. Zwei derartige Stimmgabeln sind wohl in jedem Institut vorrätig. An sich sind natürlich konstant tönende Tonquellen vorzuziehen. Außerdem ist eine größere Höhe derselben vorteilhaft, da die Größe des Schalldruckes pro-

1) E. Waetzmann, diese Zeitschr. **21**, 122, 1920.

1) Dvořák, Pogg. Ann. **157**, 42, 1876; Ann. d. Phys. **22**, 606, 1907.

portional dem Quadrat der Schwingungszahl wächst.

Die beiden Stimmgabeln stehen vor den beiden Enden A und B (s. Figur) eines in



horizontaler Ebene aufgestellten gabelförmigen Rohres aus Zinkblech von rund 40 mm Durchmesser. Die Resonanzkästen der Gabeln werden ein wenig über die Rohrenden übergeschoben. Die Gesamtlänge $AC + CD$ beträgt etwa ein Viertel der Wellenlänge λ des Tones 256. Das Rohr ist bei D durch eine feste Wand (gut schließende Korken) verschlossen, so daß hier ein Knoten der Bewegung entsteht. Das eine Ende a des Manometerrohres ist durch den Korken durchgeführt, so daß seine Öffnung in dem Schwingungsknoten des Hauptrohres liegt. Die Länge des Manometerrohres ab bis zum Alkoholfaden beträgt ebenfalls $\frac{\lambda}{4}$ des Tones 256[1]).

Wird jetzt eine der beiden Stimmgabeln mit dem Bogen kräftig angestrichen, so gibt der Alkoholfaden einen den Überdruck anzeigenden Ausschlag. Die Stimmgabeln sollen vor den Rohrenden so aufgestellt sein, daß jede für sich etwa den gleichen Ausschlag verursacht. Tönen nun beide Stimmgabeln gleichzeitig, und ist die eine gegen die andere ein wenig verstimmt, so pendelt der Alkoholfaden im Tempo der Schwebungen $p-q$ mit. Zur objektiven Demonstration wird der Alkoholfaden gefärbt und auf einen Schirm projiziert.

Da der Alkoholfaden weder auf p für sich, noch auf q mitschwingt, kann er auch die Schwebungen p q nicht anzeigen. Also beweist sein Mitschwingen die Existenz einer sinusförmigen periodischen Druckkomponente von der Periodenzahl $p-q$. Man kann den Ton $p-q$ entweder als Nebenprodukt zu dem Schalldruck, wie ihn Rayleigh definiert, auffassen, oder aber als Teil des Schalldruckes, indem man denselben, im Gegensatz zu Rayleigh, nicht mehr als zeitlich konstante, sondern variable Größe definiert[1]).

Auf den ersten Blick scheinen Anordnung und Deutung des Versuches so einfach und selbstverständlich zu sein, daß jede weitere Bemerkung überflüssig erscheinen könnte. In Wirklichkeit liegen die Verhältntsse aber recht verwickelt. Zunächst ist bei der tiefen Lage der benutzten Stimmgabeln wichtig, daß die Luft in den Resonanzkästen kräftig mitschwingt, und daß die Gabeln gut aufgestellt und bedient werden. Ferner gibt für die von A kommende Tonwelle das Rohrstück CB Veranlassung zur Schwächung infolge von Interferenz, und entsprechend für die von B kommende Welle das Rohrstück CA. Man macht deshalb das Rohrstück CA bzw. CB verhältnismäßig kurz. Die Länge von CD wird zwecks bequemer Einstellung posaunenartig veränderlich gemacht. Wie schon Dvořák durch seine Druckmessungen im Kundtschen Rohr gezeigt hat, ist der Überdruck in den Knoten der Bewegung besonders stark. Infolgedessen sind die Längen $AC + CD$ und ab entsprechend abgestimmt. Das Manometer mißt also nicht den Druck in D, sondern in b. Die Luftsäule ab wird durch die Druckschwankungen in D zum Mitschwingen erregt, wodurch verständlich wird, daß ab ungefähr gleich $\frac{\lambda}{4}$ (für hohe Töne auch $\frac{3}{4}\lambda$, $\frac{5}{4}\lambda$ .....) sein muß. Die von Dvořák u. a. bei Druckmessungen mit dem Flüssigkeitsmanometer zuweilen beobachteten negativen Ausschläge, die ich in einigen Fällen unter anderen Versuchsbedingungen auch erhielt, traten bei der beschriebenen Versuchsanordnung nicht auf. Auf weitere Einzelheiten (Strömungserscheinungen bei a usw.) einzugehen, würde hier zu weit führen. Auf die Größe der Neigung der beiden Schenkel des Manometerrohres gegen die Horizontale kommt es nicht so genau an. Sie darf ziemlich bedeutend sein (1 : 5 oder dergl.).

Die ganze Frage des Schalldruckes und der damit im Zusammenhang stehenden Fragen ist noch so wenig geklärt, daß man bei der Deutung entsprechender Versuche äußerst vorsichtig sein muß. Das gilt noch besonders für eine wesentlich vereinfachte Ausführung des besprochenen Versuches, die andererseits aber auch ihre Nachteile hat. In die Resonanzkästen der beiden Stimmgabeln wird bis möglichst nahe an

1) Praktisch wird das Rohrsystem auf ein gemeinsames Brett montiert, welches zwei Stützen trägt. Auf der einen ruht in passender Fassung, die durch ein Kugelgelenk mit der Stütze verbunden sein kann, das Hauptrohr, während auf der anderen, deren Höhe ein wenig geändert werden kann, das Ende c des Manometerrohres ruht. Statt durch einen Korken kann das Blechrohr durch eine in der Mitte durchbohrte, aufgelötete Platte verschlossen sein. Das Bohrloch findet seine Fortsetzung in einem aufgelöteten kurzen Metallröhrchen, mit welchem das Ende a des Manometerrohres durch ein kurzes Schlauchstück verbunden wird. Mit wenigen Handgriffen ist dann das Ganze justiert.

1) E. Waetzmann, l. c. S. 124 und F. Küstner, Ann. d. Phys. 50, 941, 1916.



den Schwingungsknoten je ein Glasrohr von einigen Millimetern Durchmesser eingeführt. Die beiden Rohre werden durch kurze Schlauchstücke an ein gabelförmiges Verbindungsstück angeschlossen, welches in ein schwach gebogenes kurzes Rohr ausläuft, in welchem sich der Alkoholfaden befindet. Sein Abstand von den Enden der Rohre beträgt wieder $\frac{\lambda}{4}$. Geben die beiden Stimmgabeln Schwebungen, so zeigt der Alkoholfaden die vorher besprochenen sinusförmigen Druckschwankungen an.

Zusammenfassung.

Es wird ein Versuch beschrieben, bei welchem man die Stöße zweier getrennter Tonquellen hört, und gleichzeitig an einem Körper, der weitgehend linearen Schwingungsgesetzen gehorcht, die objektive Existenz einer sinusförmigen Druckkomponente von der Periodenzahl der Stöße beobachtet. Der Versuch ist wichtig für die Theorie des Schalldruckes und die damit im Zusammenhang stehenden Fragen.

Anmerkung bei der Korrektur. Zur Bemerkung des Herrn Budde in Heft 10 des laufenden Jahrganges dieser Zeitschrift: Meine früheren Darlegungen in der — nicht von mir sondern von Herrn Budde begonnenen — Polemik halte ich voll aufrecht.

Breslau, Physikalisches Institut, April 1920.

(Eingegangen 10. Mai 1920.)

Die Rotverschiebung der Sonnenlinien.

Von A. H. Bucherer.

Bei einer so radikalen Rekonstruktion der physikalischen Begriffe, wie die allgemeine Relativitätstheorie sie fordert, ist das Bedürfnis nach experimentellen Beweisen besonders dringlich. Von dem Erfahrungsgrunde der Identität von Schwere und Trägheit bis zum Äquivalenzprinzip und seinen weiteren Konsequenzen ist ein kühner Sprung und die Fehlerquellen der Urteilsbildung sind nicht so leicht zu übersehen. Ob den bisher vorgebrachten Beweisen entscheidende Bedeutung zukommt, ist daher wohl eine der Prüfung werte Frage.

Drei Beweise wurden bisher zugunsten der allgemeinen Relativitätstheorie angeführt: Die Ablenkung eines Lichtstrahls im Gravitationsfelde der Sonne, die Perihelbewegung des Merkurs und die Rotverschiebung der Linien des Sonnenspektrums. Was die Ablenkung eines Lichtstrahls betrifft, so ist der Betrag der Ablenkung noch nicht hinreichend genau festgestellt, um als Beleg für die allgemeine Relativitätstheorie gelten zu können. Auch nach anderen Theorien ist eine Ablenkung zu erwarten. Bekanntlich hat Eddington, indem er den Lichtstrahlen Trägheit und Schwere zuordnete, auf Grund der Newtonschen Gravitationstheorie eine Ablenkung berechnet, die die Hälfte des von Einstein gefundenen Wertes ausmacht, während die Beobachtung zwischen beiden Beträgen schwankt[1]).

Von Wichtigkeit ist die Übereinstimmung der Perihelbewegung des Merkurs mit der Einsteinschen Theorie dieser Bewegung. Keine andere Theorie hat bisher eine Erklärung für die Perihelbewegung geliefert. Die Anwendung der speziellen Relativitätstheorie führt zu einem viel zu kleinen Wert. Es ist aber gegen eine solche Berechnung einzuwenden, daß der benutzte Flächensatz streng genommen in der Relativitätstheorie keinen Platz hat und daß es schwer ist, abzuwägen, welche Fehler hierdurch in die Rechnung eingeführt werden. Ich habe mich bemüht, andere Wege zur Berechnung zu finden und langwierige Rechnungen zu diesem Zwecke ausgeführt; bisher ohne Erfolg. Die Perihelbewegung des Merkurs ist heute tatsächlich ein Beweis für die allgemeine Relativitätstheorie.

Ein besonderes Interesse darf die Theorie der Rotverschiebung beanspruchen, da in ihr das Äquivalenzprinzip einen direkten Ausdruck findet. Dieses Prinzip besagt, daß Gleichwertigkeit zwischen zwei Bezugssystemen besteht, von denen das eine in einem homogenen Schwerefelde ruht und das andere in einem schwerelosen Felde gleichförmig beschleunigt ist. Das Licht von einem sehr großen, relativ zur Erde ruhenden Himmelskörper muß daher eine Art von Dopplereffekt aufweisen, der von demselben Betrag wäre, wie der eines sehr kleinen Sternes, der sich mit einer gewissen aus dem Schwerefelde des großen Sternes berechenbaren Geschwindigkeit von der Erde fortbewegt. In der Tat weist das Spektrum der Sonnenlinien eine derartige Rotverschiebung auf, die von der verlangten Größenordnung ist.

Es soll nun gezeigt werden, daß dieser Effekt auch auf anderem Wege seine Erklärung findet. Wir gehen dabei von folgender Er-

1) Die Veröffentlichung der Protokolle hat seitdem den Einsteinschen Wert mit hoher Wahrscheinlichkeit bestätigt. Wie ich demnächst zeigen werde, läßt sich aus meiner Theorie der Rotverschiebung dieser Wert ableiten.

fahrungstatsache aus. Wir nehmen durch die Versuche von Southerns als erwiesen an, daß der Energieinhalt eines Körpers mit Schwere verknüpft ist, nachdem sich aus dem Verhalten des Elektrons ergeben hatte, daß mit seiner Energie Trägheit verbunden ist. Es ergibt sich dann aus der Maxwellschen Theorie sowohl wie aus der speziellen Relativitätstheorie, daß die ruhende Masse darstellbar ist durch

$$\mathfrak{m} = \frac{E}{v^2}, \tag{1}$$

wo E die Energie und v die Lichtgeschwindigkeit bedeutet. — Wir wollen folgendes Gedankenexperiment ausführen: Auf der Sonne füllen wir einen Hohlraum mit vollkommen spiegelnden Wänden mit monochromatischem Licht von der Wellenlänge λ. Die Energie dieser Strahlung sei E und die damit nach (1) verbundene Masse sei $\mathfrak{m}$. Diesen Behälter bringe ich auf die Erde und leiste damit eine Arbeit gegen die Gravitationskraft der Sonne:

$$W = \frac{E}{v^2}\left(\frac{\mu}{R} - \frac{\mu}{r}\right). \tag{2}$$

Der zweite Term ist zu vernachlässigen, weil der Sonnenradius R klein ist gegen den Abstand r der Erde von der Sonne. Läßt man dieselbe Strahlungsenergie, die in dem Hohlraum sich befand, hinüberstrahlen, d. h. ohne Arbeit von der Sonne zur Erde gelangen, so muß die übermittelte Energie um den durch (2) bestimmten Betrag vermindert sein.

$$-\Delta E = \frac{E}{v^2}\frac{\mu}{R}. \tag{3}$$

Bei der Ableitung dieser Gleichung war zu erwägen, daß $\frac{\mu}{v^2 R}$ gegen E sehr klein ist.

Wir sind zum Schluß gelangt, daß die Strahlungsenergie auf der Sonne geringer ist, als auf der Erde unter sonst gleichen Verhältnissen. Die weitere Frage ist nun, worin äußert sich diese Energieverminderung. Sie kann sich nur in einer Änderung der Amplitude oder der Wellenlänge äußern. Die Amplitude kann sich nicht ändern, weil die Gravitationskraft senkrecht auf der Schwingungsrichtung der nach der Erde gesandten Strahlen steht. Die Wirkung der Schwerkraft ist nämlich so, als ob sie nur auf die ihr parallel sich bewegenden Strahlenmassen bzw. nur auf die Komponenten der Strahlen einwirkte, die mit ihr gleichgerichtet sind. So müssen wir denn folgern, daß die Schwerkraft die Wellenlänge verändere. Setzen wir die Energie der Masseneinheit der Strahlung $\frac{h}{\lambda^3}$, indem ja die Strahlungsenergie umgekehrt proportional der dritten Potenz der Wellenlänge ist, so schreiben wir der Masse $\mathfrak{m}$ die Energie:

$$E = \frac{\mathfrak{m} h}{\lambda^3} \tag{4}$$

zu. Wie wir soeben gezeigt haben, wirkt die Schwerkraft aber nur auf die in ihre Richtung fallenden Komponenten der Strahlen. Die durch Gl. (3) angegebene Energieverminderung betrifft daher nur ein Drittel der Strahlungsmasse. Die Wirkung auf dieses Drittel ist deshalb dreimal so groß, als wenn die gesamte Masse $\mathfrak{m}$ eine Wellenlängenänderung erlitte. Es folgt:

$$-\Delta E = \frac{E}{v^2}\frac{\mu}{R} = \Delta\frac{1}{3}\frac{\mathfrak{m}h}{\lambda^3} \tag{5}$$

und vermittelst (4)

$$-\frac{\mu}{v^2 R} = -\frac{1}{3}\frac{\Delta\lambda^3}{\lambda^3} = -\frac{\Delta\lambda}{\lambda}. \tag{6}$$

Durch Einsetzen der Werte für μ, v und R ergibt sich für die Rotverschiebung:

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2 \times 10^{-6}. \tag{7}$$

Es ist das derselbe Wert den Einstein gefunden hat.

Es würde sich aus diesen Ergebnis folgern lassen, daß das Äquivalenzprinzip durch die Rotverschiebung keinen entscheidenden Beleg erhält. Wahrscheinlich lassen sich andere Konsequenzen dieses Prinzips in analoger Weise ableiten. Damit wären einfachere Methoden zur Berechnung einer bestimmten Klasse physikalischer Erscheinungen gewonnen.

Bonn a/Rh., im April 1920.

(Eingegangen 3. Juni 1920.)

Notiz zur Geiger-Nuttallschen Gleichung.

Von Gerhard Kirsch.

Der empirisch gefundene Zusammenhang zwischen den Reichweiten der α-Strahlen und den Zerfallskonstanten der radioaktiven Stoffe wurde zum ersten Male von H. Geiger und J. M. Nuttall durch die Formel

$$\log\lambda = A + B\log R \tag{1}$$

Tabelle I.

Element	*Th*	*Rd Th*	*Th X*	*Th Em*	*Th A*	*Th C*	*Th C'*
Zahl der α-Teilchen	58	57	56	55	54	53	53
Zahl der Elektronen	26	24	24	24	24	23	22
Summe der Bestandteile	84	81	80	79	78	76	75
$-a\,10^3$	490	476	479	475	479	503	—

dargestellt. Nachdem H. Rausch v. Traubenberg[1]) versucht hatte, auf Grund bestimmter Vorstellungen über die Bewegung der α-Teilchen im Innern des Atoms, sowie wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen den Charakter dieser Gleichung zu begründen, gab F. A. Lindemann[2]) eine theoretische Ableitung dieser Gleichung, unter der Annahme, daß die Teilchen, von deren Lage die Stabilität des Atoms abhängt, mit einer mittleren Energie $E = h\nu$ rotieren oder oszillieren. Jedes Teilchen passiert eine für das Unstabilwerden kritische Stellung ν-mal in der Sekunde, so daß die Wahrscheinlichkeit der Anwesenheit in dieser kritischen Stellung innerhalb der Zeit τ gleich $\tau\nu$ ist. Bewegen sich N Teilchen unabhängig voneinander, so ist die Wahrscheinlichkeit, daß sie alle sich innerhalb der Zeit τ durch ihre kritische Stellung bewegen,

$$\lambda = (\tau\nu)^N. \qquad (2)$$

Durch Einführung der Beziehung zwischen Reichweite und Anfangsenergie der α-Teilchen

$$R = kE^{3/2}$$

kann man diese Gleichung weiter umformen:

$$\log\lambda = N(\log\tau + \log h\nu - \log h),$$

$$\log E = {}^2/_3 \log\frac{R}{k},$$

$$\log\lambda = N\left(\log\tau + {}^2/_3\log\frac{R}{k} - \log h\right) = = Na + {}^2/_3 N\log R, \qquad (3)$$

worin $a = \log\frac{\tau}{h\,k^{2/3}}$ ist. Da in der Gleichung (1) nach der Ansicht von Geiger und Nuttall B eine für alle 3 Zerfallsreihen konstante Größe sein sollte, so war damit die Folgerung gegeben, daß N für alle radioaktiven Stoffe gleich groß und ungefähr gleich 80 sei.

Im Jahre 1914 waren aber im Institut für Radiumforschung in Wien von St. Meyer, V. F. Heß und F. Paneth[3]) von vielen Radioelementen besonders der Actiniumfamilie neue Reichweitemessungen vorgenommen worden. Auf Grund dieser neuen Daten konnte die Konstanz von B in der Geiger-Nuttallschen Beziehung

1) Götting. Nachr. 28, 1915.
2) Phil. Mag. **30**, 560, 1915.
3) Wien. Ber. **123**, 1459, 1914.

nicht mehr aufrecht erhalten werden und St. Meyer[1]) berechnete aus den neuen Werten von B die Zahl N für die 3 Zerfallsreihen:

für die Uran-Radiumreihe $N = 81$,
für die Thoriumreihe $N = 77$,
für die Aktiniumreihe $N = 71$.

Wir möchten diese Zahlen bloß als Mittelwerte für jede Zerfallsreihe betrachten, da es von vornherein doch wohl nicht wahrscheinlich ist, daß die Zahl der zum Zerfall zusammenwirkenden Teilchen durch die ganze Zerfallsreihe konstant bleibt, um so weniger, als die Gesamtzahl der den Kern aufbauenden Teilchen überhaupt nur von der Größenordnung der errechneten N sein dürfte.

Um zu bestimmten Werten von N für jedes Radioelement zu gelangen, schließen wir uns der Auffassung von W. Kossel[2]) an, daß die Atomkerne im wesentlichen nur aus Heliumkernen nebst den sog. Bindeelektronen bestehen.

Der Thoriumkern würde sich demnach aus 58 He-Kernen aufbauen. Da diese insgesamt nach außen mit der Ladung $+116e$ wirken, der Thoriumkern aber nur die Ladungszahl 90 besitzt, so muß er noch 26 Elektronen enthalten. Jedes folgende Zerfallsprodukt des Thoriums enthält dann immer je einen Kernbestandteil weniger, als das vorhergehende. Tabelle I enthält für die α-Strahler der Thoriumfamilie die Anzahl der Kernbestandteile jeder Gattung, sowie deren Summe.

Da der radioaktive Zerfall wahrscheinlich nur von der relativen Lage der Kernbestandteile abhängt, so ist das N in Gleichung (3) um 1 kleiner zu setzen, als die Zahl der Teilchen, welche zum Zerfall zusammenwirken. Wie wir aus der dritten Zeile der Tabelle sehen, liegt die von St. Meyer berechnete Zahl $N = 77$ dem Mittel der Summen der Kernbestandteile beträchtlich nahe. Wir machen daher als die einfachste Annahme die, daß sich alle Kernbestandteile unabhängig voneinander bewegen und alle beim Zerfall des Kernes zusammenwirken.

Wenn wir die nach unserer Annahme berechneten N in die Gleichung (3) einsetzen,

1) Wien. Ber. **125**, Mitt. Ra.-Inst. Nr. 89, 1916.
2) Diese Zeitschr. **20**, 265, 1919.

Tabelle II.

Element	*UI*	*UII*	*Jo*	*Ra*	*RaEm*	*RaA*	*RaC*	*RaC'*	*Po*
Zahl der *He*-Teilchen	59	58	57	56	55	54	53	53	52
Zahl der *H*-Teilchen	2	2	2	2	2	2	2	2	2
Zahl der Elektronen	28	26	26	26	26	26	25	24	22
Summe der Kernbestandteile	89	86	85	84	83	82	80	79	76
$-a\ 10^3$	448	—	464	463	466	465	—	—	471

so bedeutet sie, geometrisch gedeutet natürlich nicht mehr eine Gerade im $\log\lambda = \log R$-Diagramm. Die einzige Größe, über die wir noch nicht verfügt haben, ist jetzt das a. Ihre Konstanz oder Veränderlichkeit verspricht weitere Auskunft über den Kernbau. Die letzte Zeile der Tabelle I enthält die Größe a, berechnet für alle α-Strahler, ausgenommen *ThC'*, dessen λ ja eben erst auf Grund der Geiger-Nuttallschen Gleichung bestimmt werden kann. Es fällt sofort auf, daß das a für die 4 aufeinanderfolgenden α-Strahler mitten in der Reihe merklich konstant ist, während für *Th* und *ThC*, die von diesen α-Strahlern durch dazwischen liegende β-Zerfälle getrennt sind, a einen deutlich anderen Wert annimmt. Für die Berechnung bei *ThC* ist natürlich nur die α-Zerfallswahrscheinlichkeit zugrunde gelegt. Die Konstanz von a für die mittleren Glieder der Reihe in Verbindung mit der ziemlich gleichmäßigen Abnahme der Lebensdauer bei diesen Gliedern läßt die Punkte derselben im $\log\lambda - \log R$-Diagramm in eine Gerade fallen. Diese 4 Elemente werden also, was den Zusammenhang zwischen λ und R betrifft, ebensogut von der Geiger-Nuttallschen Gleichung mit konstant angenommenem N, wie mit dem nach unserer Annahme variabel genommenem N zusammengefaßt. In einem Punkte jedoch leistet unsere Auffassung mehr. Für Thorium gibt die Geiger-Nuttallsche Gleichung mit konstantem N eine um mehr als 2 Zehnerpotenzen zu kleine Lebensdauer, während bei variablem N und konstant genommenem a, nur eine etwa 10mal zu kleine Lebensdauer resultiert. Da aber das a auch für *ThC*, dessen Daten zuverlässig bekannt sind und das auch eine in keiner Hinsicht extreme Lebensdauer hat, deutlich vom a der anderen Elemente abweicht, so dürfte auch die Abweichung beim *Th* reell sein und darauf hinweisen, daß die α-Emission beim *Th* und beim *ThC* auf etwas andere Weise zustande kommt, als bei den übrigen Elementen, wofür auch noch besonders beim *ThC* der Umstand spricht, daß es die ziemlich regelmäßige Abnahme der Lebensdauer der anderen Elemente mit fortschreitendem Zerfall nicht fortsetzt. Wir werden in einer weiteren Arbeit auf diese Einzelheiten bei der Aufstellung eines Kernmodelles der radioaktiven Atome noch zurückkommen und wenden uns jetzt der Betrachtung der Radiumreihe zu.

Die den Elementen der Thoriumreihe entsprechenden Elemente dieser Reihe haben ein um 2 Einheiten größeres Atomgewicht, das also nicht durch 4 teilbar ist, dementsprechend müssen diese Elemente im Kern neben den Bestandteilen der analogen Elemente der Thoriumreihe noch je 2 *H*-Teilchen und 2 die positive Ladung derselben kompensierende Elektronen enthalten. (Tabelle II.)

Die Summe der Bestandteile ist also um je 4 größer als bei den Elementen der Thoriumreihe. Unsere Annahmen erzielen also hier volle Übereinstimmung mit den von St. Meyer berechneten Zahlen für N und damit auch mit der Wirklichkeit. Ferner finden wir wieder deutliche Konstanz von a für die 4 aufeinanderfolgenden α-Strahler von *Jo* bis *RaA*. Die Abweichungen vom Mittelwert sind sogar noch geringer als bei der Thoriumfamilie und betragen im Mittel weniger als $^1/_4$ Proz.; das ist eine so geringe Streuung, als sie bei der derzeitigen Genauigkeit der Reichweitebestimmungen nur verlangt werden kann.

Vom *Jo* wurde die Bestimmung des Stromes, den ein hochprozentiges *Th-Jo*-Gemisch in unendlich dünner Schicht zu unterhalten vermag, zugrunde gelegt, wie sie von St. Meyer[1]) ausgeführt wurde und für die mittlere Lebensdauer 145 000 Jahre lieferte. Der *Jo*-Gehalt dieses Gemisches wurde von O. Hönigschmid und St. Horovitz[2]) durch Bestimmung des Atomgewichtes ermittelt. Umgekehrt liefert natürlich die Reichweite (2,95 cm $= R_0$) mit dem Mittelwert von a einen von 145 000 Jahren nur wenig abweichenden Wert, während die Gleichung (1) mit konstantem A und B für τ den Wert 74 000 Jahre ergibt.

Da für unmittelbar aufeinanderfolgende α-Strahler a tatsächlich eine Konstante zu sein scheint, so sei an dieser Stelle die mittlere

1) Wien. Ber. **125** (Mitt. Ra.-Inst. Nr. 88), 1916.
2) Wien. Ber. **125** (Mitt. Ra.-Inst. Nr. 87), 1916.

Tabelle III.

Elemente	*Pa*	(*Ac*)	*RdAc*	*AcX*	*AcEm*	*AcA*	*AcC*	*AcC'*
Zahl der *He*-Teilchen	57	56	56	55	54	53	52	52
Zahl der *H*-Teilchen	1	1	1	1	1	1	1	1
Zahl der Elektronen	24	24	23	23	23	23	22	21
Summe der Kernbestandteile	82	81	80	79	78	77	75	74
$-a. 10^3$	(>490)	—	482	483	492	483	490	—

Lebensdauer von *UII* angegeben, wie sie sich bei variablem N ergibt: $\log \lambda = N\,(a + {}^2/_3 \log R_0)$

$$= 85\,(-0{,}464 + {}^2/_3\, 0{,}439) = -14{,}6,$$

$$\lambda = 2{,}52{,}10^{-15},\ \tau = 3{,}96{,}10^{14}\,\text{sec} = 1{,}3{,}10^7\ \text{Jahre.}$$

Für *UI* erhalten wir ein verhältnismäßig kleines a, während *Po*, *Th*, *ThC* und wie wir sehen werden auch *AcC* und *Pa* ein größeres a ergeben, als die α-Strahler mitten in der Reihe. Es ist natürlich möglich, daß dies den Tatsachen entspricht. Da aber von *UI*, dessen α-Strahlung mit der gleich starken 4 mm weiter reichenden von *UII* untrennbar verbunden ist, unseres Wissens nur die Reichweitebestimmung von H. Geiger und J. M. Nuttall[1]) vorliegt, die bereits älteren Datums ist, und wohl mit einem Fehler von 1 bis 1,5 mm behaftet sein könnte, soll hier nicht näher auf dieses Element eingegangen werden. Auch ist die Frage noch nicht entschieden, aus wieviel Isotopen das Uran besteht (Actinouran).

Von *RaC* ist noch keine Reichweite beobachtet worden, von *RaC'* ist eine direkte Bestimmung von λ derzeit unmöglich, daher müssen diese beiden Elemente ebenfalls aus diesen Betrachtungen ausgeschieden bleiben.

Po gehört, sowohl, was λ, als auch, was die Reichweite betrifft, zu den am besten erforschten Radioelementen. Die Abweichung des Wertes von a vom Mittel der übrigen α-Strahler der Radiumreihe ist daher zweifellos als wirklich aufzufassen.

Was das Atomgewicht der Actiniumreihe betrifft, so sind wir derzeit auf Vermutungen angewiesen. Die meisten Autoren nehmen heute wohl an, daß die *Ac*-Reihe beim *UII* von der *U-Ra*-Reihe abzweigt und daß *UY* die unmittelbare Muttersubstanz des *Pa* ist. Diese Annahme steht erstens im Einklang mit dem Atomgewicht des „Uranbleis"; zweitens macht St. Meyer[2]) für dieselbe geltend, daß im $\log \lambda - \log R$-Diagramm die durch die Punkte *RdAc*, *AcX*, *AcEm*, *AcC* gezogene Gerade beim Punkte *UII* die der *U-Ra*-Reihe entsprechende Gerade schneidet. Wir möchten gegen diese Annahme einmal geltend machen, daß es sich mit der wahrscheinlichkeitsstatistischen Auffassung der Zerfallserscheinung nur schwer vereinbaren läßt, anzunehmen, daß die Actiniumreihe als Zweigreihe durch alle Zerfallsstadien parallel neben der Hauptreihe herläuft, ohne daß eine von den beiden auch nur zum Teil irgendwo in die andere übergeht. Weiters erhält man bei Zugrundelegung der Punkte *RdAc*, *AcX*, *AcEm* und *AcC* für N den Wert 71 für die *Ac*-Reihe, also einen so kleinen Wert, daß demselben bei Anwendung unserer an der *Th*- und *Ra*-Reihe bewährten Annahmen ein Atomgewicht der *Ac*-Elemente entsprechen würde, das um etwa 8 Einheiten kleiner wäre, als das der *Th*-Elemente der gleichen Plejaden. Wir möchten daher folgendermaßen überlegen: *AcC* soll, da es durch β-Zerfall von den übrigen α-Strahlern der Reihe getrennt ist, nicht berücksichtigt werden. Für die mittleren 4 α-Strahler der Reihe soll a konstant werden. Dies ist jedoch nur für 3 derselben erreichbar; entweder *AcEm* oder *AcA* fällt heraus. Wir lassen die *AcEm* herausfallen und erzielen damit:

1. Die Größe a wird für *RdAc*, *AcX*, *AcA* konstant.

2. N wird für die *Ac*-Reihe um 1 kleiner als für die *Th*-Reihe. Infolgedessen besteht zwischen den Größen $\frac{1}{N}$, $\log \lambda$ und a nicht nur Symbasie, sondern auch angenäherte Proportionalität von Reihe zu Reihe. (Tabelle III.)

3. Das Atomgewicht $4n + 1$ und zwar für $Ac = 225$, das zu diesem N führt, gibt für das bleiisotope Endprodukt der Reihe das Atomgewicht 205, das von dem des *RaG* nur um eine Einheit abweicht und von dem 4 Proz. das Atomgewicht des Gemisches nur um 0,04 Einheiten erniedrigen würden.

4. Das wichtigste Argument gegen einen genetischen Zusammenhang zwischen *Ac*- und *Ra*-Reihe und für ein ungerades Atomgewicht der *Ac*-Elemente möchten wir darin sehen, daß weder dem *AcB* noch dem *UY* ein β-Strahler folgt, dessen β-Zerfallsgeschwindigkeit größer wäre, als die der Muttersubstanz, während den β-Strahlern der *Ra*- und *Th*-Reihe mit gerader Kernladungszahl stets ein weniger stabiler β-Strahler folgt. Dies möchten wir dem Streben

1) Phil. Mag. (6) **23**, 445, 1912.
2) Wien. Ber. **123**, 1459, 1914.

nach Symmetrie bei den Elektronenanordnungen zuschreiben, wie es sich in dem vorzugsweisen Auftreten gerader Valenzzahlen bei Elementen mit gerader Kernladungszahl und ungerader Valenzzahlen bei Elementen mit ungerader Kernladungszahl wirksam zeigt. Die β-Strahler der *Ra* und *Th*-Reihe mit gerader Kernladungszahl, die stets stabiler sind als ihre unmittelbaren Folgeprodukte, enthalten nach unseren Annahmen sämtlich eine gerade Zahl Elektronen. Für *UY* und *AcB* jedoch möchten wir eben den Umstand, daß ihre Stabilität gegen β-Zerfall geringer ist, als die ihrer unmittelbaren Folgeprodukte, mit dem Vorhandensein einer ungeraden Zahl von Elektronen im Kern dieser Elemente, wie sie sich bei Annahme eines ungeraden Atomgewichtes ergibt, begründen. Die letztangeführte Tatsache erscheint uns sogar schwerwiegender, als die Konstanz des Verhältnisses $Ac:U$[1]) und $UX:UY$[2]), die nur als ein strenger Beweis für die Abstammung der *Ac*-Reihe von einem Uranisotop gelten kann. Denn es könnte sehr wohl alles uns zugängliche Uran in gleicher Weise aus Isotopen zusammengesetzt sein.

Unsere Annahmen ziehen jedoch zunächst noch die Folge nach sich, daß das Stammelement der Actiniumreihe ein Uranisotop mit dem Atomgewicht 233 ist, die mit dem Atomgewicht des Urans 238,18 unvereinbar ist. Darum ist wohl die Möglichheit ins Auge zu fassen, daß aus dem *UY* über ein etwas langlebigeres UY_2 zunächst ein Uranisotop entsteht, das über ein ebenfalls langlebiges, wohl praktisch strahlenloses *UZ* (*Th*-Isotop) erst das *Pa* liefert. Doch bleibt immer noch die Unstimmigkeit um eine Atomgewichtseinheit in Muttersubstanz und Endprodukt bestehen. Die experimentell gefundenen Werte für *U* und *RaG* lassen eher ein um eine Einheit größeres Atomgewicht, als ein um eine Einheit kleineres für Actinouran und „*Ac*-Blei" vermuten. Eine überraschende Möglichkeit, diesen Tatsachen gerecht zu werden, ergibt sich auf folgende Art:

Da wir den drei heute bekannten radioaktiven Zerfallsreihen die allgemeinen Atomgewichte $4n$, $4n+1$ und $4n+2$ zuschreiben, erhebt sich unwillkürlich die Frage nach der bei ausschließlicher Zulassung von α- und β-Zerfall theoretisch noch möglichen vierten genetisch selbständigen Reihe mit dem allgemeinen Atomgewicht $4n+3$. Bei Annahme von 3 selbständigen *H*-Teilchen im Kern der Elemente dieser Reihe, erhält man für die *N* derselben Werte, die für diese vierte Reihe einen selbständigen radioaktiven Charakter erwarten lassen, so daß uns dieselbe, wenn sie existiert, nicht hätte verborgen bleiben können. Wenn jedoch die 3 *H*-Teilchen mit 2 Elektronen einen α-teilchenartigen Komplex bilden, dessen Bewegung als Ganzes für die Stabilität in Betracht kommt, so würden die *N* der Elemente dieser Reihe mit denen der *Ac*-Reihe identisch, ja die Kerne beider Reihen wären vollkommen identisch zusammengesetzt, nur 1 Teilchen, nämlich das mit der Ladung $+1$ hätte in dem einen Fall eine dreimal so große Masse als in dem anderen, und damit ist die Möglichkeit gegeben, daß die Elemente beider Reihen je so ähnliche oder vielleicht praktisch identische Lebensdauern haben, so daß man es mit einer Isotopie zu tun hätte, die sich nicht nur auf die Kernladung, sondern auch auf die Kernstabilität erstreckt. Vielleicht sind die 2 Reichweiten des *RdAc* als ein Anzeichen für die komplexe Beschaffenheit der *Ac*-Reihe aufzufassen. Die Annahme, in Erwägung zu ziehen, daß 2 *H*-Teilchen im Kern der Elemente der *Ra*-Reihe selbständig bleiben, während 3 sich mit 2 Elektronen zu einem Gebilde mit der Masse 3 und der Ladung $+1$ vereinigen, glauben wir uns berechtigt durch den experimentellen Befund J. J. Thomsons[1]), dessen eingehende Untersuchungen seiner X_3-Teilchen die Existenz eines solchen Komplexes von verhältnismäßig großer Stabilität sehr wahrscheinlich gemacht haben. Auch aus dem vorzugsweisen Auftreten von Atomgewichten $4n+3$ bei den Elementen mit kleinem Atomgewicht ließen sich Gründe zugunsten dieser Annahme ableiten. Eine solche komplexe Actiniumreihe würde es gestatten, den selbständigen, von dem der Radiumreihe deutlich verschiedenen Charakter derselben einerseits und das mit dem der Radiumreihe nahezu übereinstimmende Atomgewicht von Stammsubstanz und Endprodukt andererseits zu erklären.

Zusammenfassung: Bei konsequenter Anwendung der Annahme, daß die Atomkerne ausschließlich aus *He*- und *H*-Kernen, sowie Elektronen aufgebaut sind, ergeben sich mit Hilfe der Geiger-Nuttallschen Gleichung in der von Lindemann gegebenen Form gewisse Regelmäßigkeiten in der *Ra*- und *Th*-Reihe, deren Übertragung auf die *Ac*-Reihe Schlüsse auf das Atomgewicht derselben zu ziehen erlaubt.

Mit Hilfe einer weiteren Annahme wird versucht auch eine Begründung dafür zu geben, daß es gerade 3 radioaktive Zerfallsreihen gibt.

1) St. Meyer und V. F. Heß, Wien. Ber. **128**, (Mitt. Ra.-Inst. Nr. 122) 1919.

2) G. Kirsch, Wien. Ber. **129** (Mitt. Ra.-Inst. Nr. 127), 1920.

1) Proc. Roy. Soc., London (A), **89**, 1, 1913.

(Eingegangen 10. Mai 1920.)



Eine graphische Darstellung der Zustandsgleichung.

Von R. Mollier.

Schreibt man die van der Waalssche Zustandsgleichung:

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2} \tag{1}$$

in der Form

$$\frac{pv^2}{T} = \frac{Rv^2}{v-b} - \frac{a}{T} \tag{2}$$

und trägt man die Größe $\frac{pv^2}{T}$ — die wir im folgenden mit y bezeichnen wollen — als Ordinaten gegen irgendeine Volumfunktion oder gegen eine Temperaturfunktion als Abszissen auf, so erhält man zwei Diagramme, in denen die Isothermen bzw. Isochoren kongruente, in der Ordinatenrichtung verschobene Kurven werden.

Dasselbe gilt auch für die zahlreichen anderen Zustandsgleichungen, die sich in der Form:

$$p = \varphi(v)T + \frac{\psi(T)}{v^2} \tag{3}$$

schreiben lassen.

Am einfachsten wird die Darstellung, wenn man neben y die Dichte ϱ und $1/T$ als Koordinaten wählt. Schreiben wir noch l für die Grenzdichte, $1/b$, so lautet die Gleichung von van der Waals:

$$y = \frac{Rl}{\varrho(l-\varrho)} - \frac{a}{T}. \tag{4}$$

Da bei konstanter Temperatur y sowohl für sehr kleine wie für sehr große Dichten unendlich wächst, so besitzt es ein Minimum, das für alle Isothermen bei derselben Dichte ϱ_M liegt. Für die van der Waalssche Gleichung ist $\varrho_M = l/2$, gleich der halben Grenzdichte und die Isothermen im y, ϱ-Diagramm sind symmetrisch zu der Ordinate durch ϱ_M, Fig. 1.

In reduzierter Form lautet die van der Waalssche Gleichung:

$$\mathfrak{y} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{t}} = \frac{8}{\mathfrak{v}(3-\mathfrak{v})} - \frac{3}{\mathfrak{t}} \tag{5}$$

oder

$$\mathfrak{y} = \frac{8}{[1{,}5 + (\mathfrak{v} - 1{,}5)]\,[1{,}5 - (\mathfrak{v} - 1{,}5)]} - \frac{3}{\mathfrak{t}}. \tag{6}$$

Im y, $\frac{1}{T}$-Diagramm werden die Isochoren parallele Gerade.

Die van der Waalssche Gleichung wird daher durch eine y, ϱ, $\frac{1}{T}$-Fläche in besonders einfacher Weise dargestellt. Der kritische Punkt

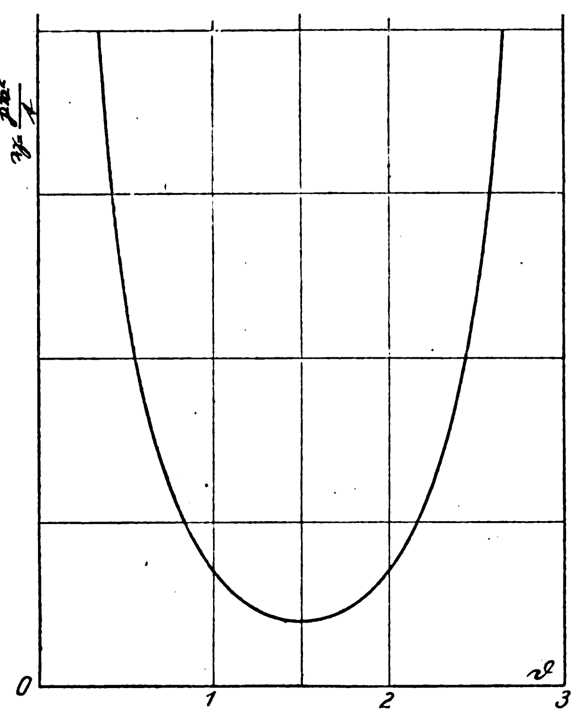


Fig. 1.

und das labile Gebiet treten in dieser Darstellung nicht hervor.

An Stelle von y kann man auch

$$y/R = \frac{pv^2}{RT}$$

wählen, diese Größe ist von der Dimension eines Volumens, und zwar ist $y/R = v^2/v_0$, wo v_0 das Volumen in vollkommenem Gaszustand (Avogadroschen Zustand) bei gleichem Druck und gleicher Temperatur bedeutet. Für das Minimum von y ist

$$\frac{p}{v}\left(\frac{dv}{dp}\right)_T = -\frac{1}{2}.$$

Die thermodynamische Bedeutung von y folgt aus der Gleichung:

$$T\,ds = du + p\,dv, \tag{7}$$

es wird

$$ds = \frac{1}{T}du - y\,d\varrho \tag{8}$$

$$d\left(\frac{u}{T} - s\right) = u\,d\left(\frac{1}{T}\right) + y\,d\varrho \tag{9}$$

$$\left(\frac{du}{d\varrho}\right)_T = \left(\frac{dy}{d\,1/T}\right)_\varrho \tag{10}$$

$$\left(\frac{dc_v}{d\varrho}\right)_T = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{d^2y}{d\,1/T^2}\right)_\varrho. \tag{11}$$

Damit folgt aus der Symmetrie der Iso-

	t	$\mathfrak{t}$	ϱ_M	T_K	p_K	$\frac{RT_K}{p_K v_M}$	$\Re = \frac{RT_K}{p_K v_K}$	$\mathfrak{d}_M$
Wasserstoff	47,3	9,65	800	33,18	12,8	7,60	3,27	2,32
(Amagat)	15,4	8,69	790			7,50		2,29
	0	8,23	780			7,40		2,26
Helium . . . . (Kamerlingh-Onnes)	258,8	2,60	710	5,5	2,75	5,21	2,68	1,94
Stickstoff	99,45	2,96	368	126	33,5	5,08	3,421	1,49
(Amagat)	16,03	2,29	369			5,09		1,49
	0	2,17	369			5,09		1,49
Luft	99,4	2,81	388	132,3	37,2	5,06	3,42	1,48
(Amagat)	15,7	2,18	386			5,03		1,47
	0	2,06	387			5,04		1,47
Sauerstoff	99,5	2,42	453	154,25	49,7	5,14	3,419	1,50
(Amagat)	15,65	1,87	446			5,06		1,48
	0	1,77	445			5,05		1,48
Kohlensäure	198	1,55	345	304,35	72,9	5,28	3,61	1,46
(Amagat)	100	1,23	349			5,35		1,48
	40	1,03	357			5,46		1,51
Kohlensäure . . . . (Keesom)		1	370	304	72,93	5,66	3,45	1,64
Äthylen	198	1,67	250	282,5	50,65	5,10	3,42	1,49
(Amagat)	100	1,32	250			5,10		1,49
	20	1,04	256			5,22		1,53
Isopentan . . . . (Young)		1	0,362	460,8	32,92	5,77	3,73	1,55
Äther . . . . (Ramsay u. Young)		1	0,406	467	35,6	5,90	3,81	1,55

thermen im y, ϱ-Diagramm auch eine Symmetrie für die Energie u und die spezifische Wärme c_v. Die Isothermen im u, ϱ und im c_v, ϱ-Diagramm sind symmetrisch zu ϱ_M und haben bei dieser Dichte einen Wendepunkt.

Da für die Isothermen die Expansionsarbeit $\int p dv = - T \int y d\varrho$ ist, so wird auch diese und damit auch die Wärme durch ϱ_M symmetrisch geteilt.

Das Minimum von y läßt sich aus einer Anzahl von Isothermenbeobachtungen mit Sicherheit entnehmen. Besonders kommen hierfür die Versuche von Amagat[1]) an Wasserstoff, Sauerstoff, Stickstoff, Luft, Kohlensäure und Äthylen in Betracht, da sie bis zu sehr hohen Dichten reichen, aber auch die Versuche von Keesom[2]) mit Kohlensäure, Ramsay und Young[3]) mit Äther, Young[4]) mit Isopentan und Kamerlingh-Onnes[5]) mit Helium schließen ϱ_M ein.

In der Zahlentafel sind die gefundenen Werte zusammengestellt. ϱ_M ist in den Einheiten der Versuchsberichte gegeben. Die Werte für CO_2 (Keesom), $C_4H_{10}O$ und C_5H_{12} sind Mittelwerte aus mehreren benachbarten Isothermen. ϱ_M zeigt bei N_2, O_2 und Luft keine bestimmte Abhängigkeit von der Temperatur, bei CO_2 und C_2H_4 nimmt es mit wachsender Temperatur ein wenig ab.

1) Ann. d. Chim. et Phys. **29**, 68, 1893.
2) Leiden. Comm. Nr. 88.
3) Phil. Trans. **178**, 57, 1887.
4) Zeitschr. f. phys. Chem. **29**, 193, 1899.
5) Leiden. Comm. Nr. 102.

Um die verschiedenen Stoffe miteinander vergleichen zu können, ist in die Tafel die reduzierte Größe $\frac{RT_K}{p_K v_M}$ aufgenommen. Der Wert dieser Größe ist nach van der Waals $= 4$ und ihr Verhältnis zum kritischen Koeffizienten $\Re = \frac{RT_K}{p_K v_K}$ liefert die reduzierte Dichte $\mathfrak{d}_M$.

Für $\Re$ wurden für H_2, N_2 und O_2 und He die Werte von Kamerlingh-Onnes[1]), für CO_2 zum Vergleich die beiden verschiedenen Werte von Amagat und von Keesom, im übrigen die Werte von Young[2]) verwendet.

Im ganzen weichen die Werte von $\mathfrak{d}_M$ nicht sehr von dem van der Waalsschen Wert $= 1,5$ ab. Nur Wasserstoff und Helium machen eine Ausnahme. Hierzu ist aber zu bemerken, daß sich für H_2 zwar die Werte von ϱ_M mit großer Sicherheit aus den Angaben Amagats ergeben, daß aber die gesamte Änderung von y zwischen ϱ_M und der größten Versuchsdichte nur etwa 3,5 Proz. beträgt, so daß möglicherweise die Lage des Minimums durch den von Amagat vorgenommenen graphischen Ausgleich der Versuchsergebnisse beeinflußt sein kann. Nach der mittleren empirischen Zustandsgleichung von

1) Leiden. Comm. Nr. 151, 145 u. 119.
2) Young, Dublin Proc. **12**, 1910.

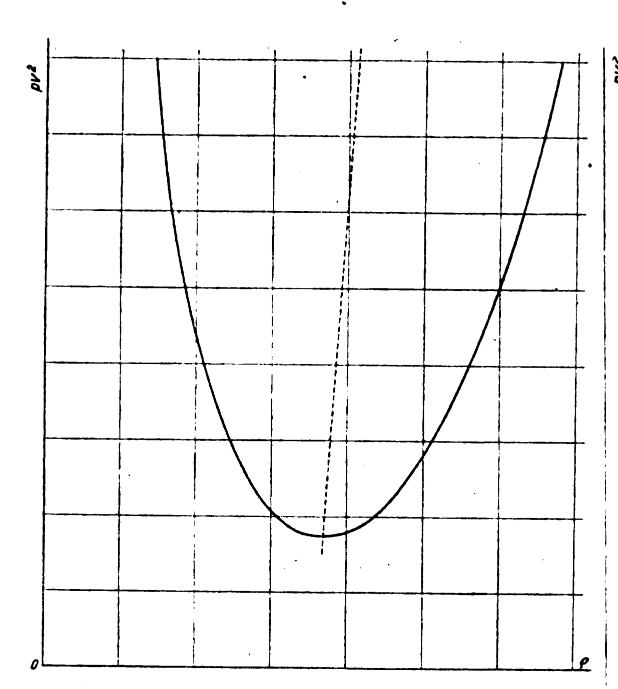


Fig. 2.

Kamerlingh-Onnes[1]), die sich in dem fraglichen Temperaturgebiet ausschließlich auf die Versuche Amagats über H_2 stützt, ist ϱ_M wesentlich kleiner. Es beträgt nach dieser Gleichung:

bei $\mathfrak{t} =$	0,8	1	3,16	10
$\mathfrak{d}_M =$	1,66	1,73	1,66	1,66

Bei Helium steht zur Bestimmung von ϱ_M nur eine Isotherme mit 4 Versuchspunkten zur Verfügung.

Zur Untersuchung der Isothermen im y, ϱ-Diagramm in bezug auf Symmetrie, wurde ein mittlerer Durchmesser eingezeichnet. Für N_2, O_2 und Luft ergab sich dieser Durchmesser ziemlich geradlinig, aber nicht parallel der y-Achse, sondern im positiven Sinne geneigt wie Fig. 2 für Stickstoff zeigt. Bei CO_2 und C_2H_4 sind die Isothermen in der Nähe der kritischen Temperatur fast genau symmetrisch, während jene für 100° schon eine merkliche Neigung des Durchmessers im früher erwähnten Sinne aufweisen. Fig. 3 gibt einige Isothermen der Kohlensäure nach den Versuchen von Amagat wieder.

Die experimentellen Isothermen und Isochoren zeigen im y, ϱ und y, $1/T$-Diagramm nicht die Kongruenz, die nach der van der Waalsschen und nach Gleichung (3) bestehen würde. Um diese Abweichungen möglichst deutlich zum Ausdruck zu bringen, kann man

1) Art. V, 10 der Enzykl. d. Math. Wiss., S. 727, auch Leiden. Comm., Suppl. Nr. 23, S. 113.

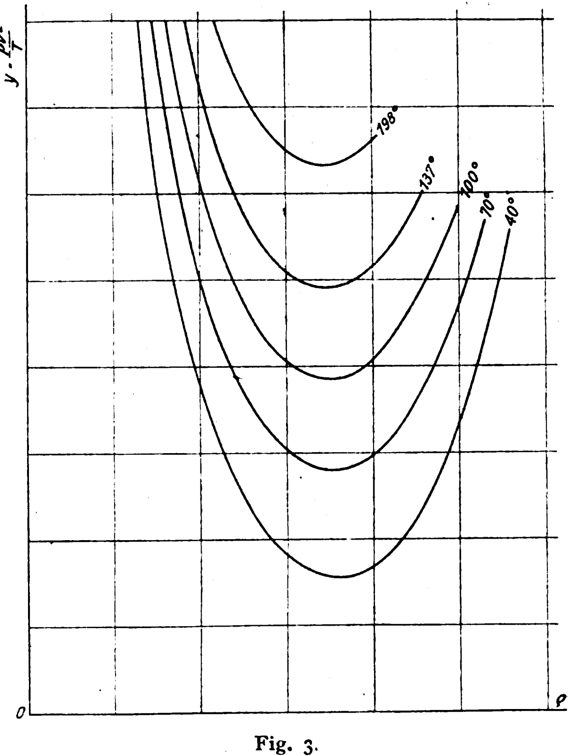


Fig. 3.

unsere graphische Darstellungen noch etwas abändern. Wählt man als Ordinaten anstatt

$$y,\ y - Rv = z$$

oder

$$\frac{z}{R} = \frac{y}{R} - v = \frac{pv^2}{RT} - v,$$

so ist der Nachteil beseitigt, der der ursprünglichen Darstellung dadurch anhaftet, daß y für kleine Dichten unendlich groß wird.

Für die Punkte der Abszissenachse gilt jetzt $\frac{pv}{RT} = 1$ und der Ursprung im z, ϱ-Diagramm ist der Boylepunkt.

Die Größe z steht in einfacher Beziehung zu der empirischen Zustandsgleichung von Kamerlingh-Onnes:

$$pv = RT\left[1 + \frac{B}{v} + \frac{C}{v^2} + \frac{D}{v^4} + \frac{E}{v^6} + \frac{F}{v^8}\right] \quad (12)$$

oder

$$\frac{z}{R} = \frac{pv^2}{RT} - v = B + C\varrho + D\varrho^3 + E\varrho^5 + F\varrho^7, \quad (13)$$

indem

$$\left(\frac{z}{R}\right)_{\varrho=0} = B \text{ und } \left(\frac{dz/R}{d\varrho}\right)_{t,\varrho=0} = C$$

den zweiten und dritten Virial-Koeffizienten darstellen.

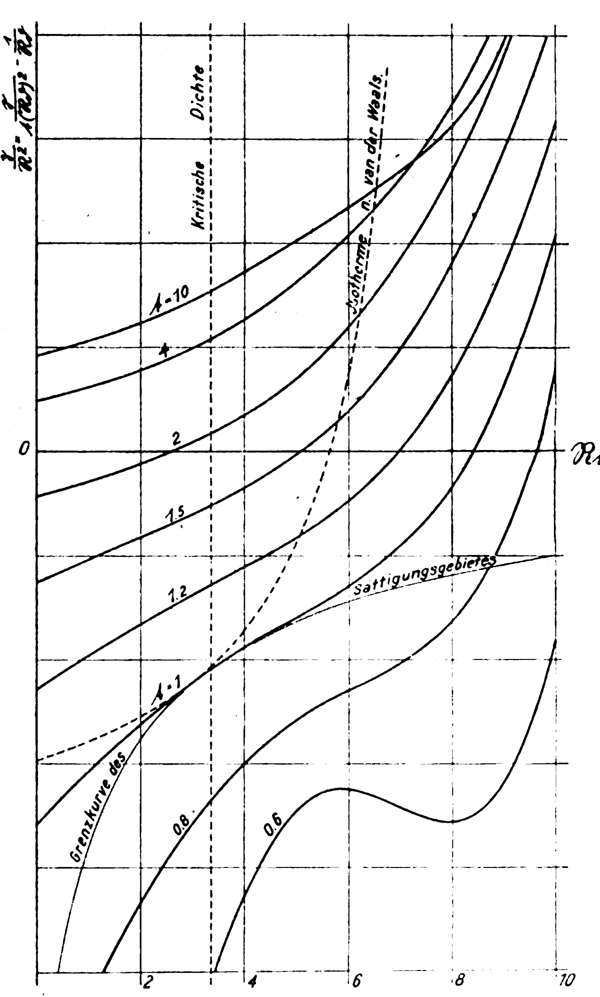


Fig. 4.

Für die van der Waalssche Gleichung wird in reduzierter Form:

$$\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{d}^2}{\mathfrak{R}t} - \mathfrak{d} = \frac{1}{3-\mathfrak{d}} - \frac{9}{8t}. \qquad (14)$$

Die Isothermen werden im z, ϱ-Diagramm kongruente gleichseitige Hyperbeln.

Die Bedingungen für den kritischen Punkt werden in dieser Darstellung:

$$\left(\frac{d\,\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{R}}}{d\mathfrak{d}}\right)_t = \mathfrak{R} - 2 \quad \text{und} \quad \left(\frac{d^2\,\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{R}}}{d\mathfrak{d}^2}\right)_t = 6 - 2\mathfrak{R}.$$

Aus der letzteren ist ersichtlich, daß so lange die Isothermen positive Krümmung haben, wie z. B. bei den Hyperbeln von van der Waals, der kritische Koeffizient nie mehr als 3 betragen kann.

Im $\frac{z}{R}, \frac{1}{T}$-Diagramm stellt die Isochore für $\varrho = 0$ den Verlauf des zweiten Virialkoeffizienten dar, ihr Schnittpunkt mit der Abszissenachse ist der Boylepunkt.

Um ein Bild des wirklichen Verhaltens der Gase zu geben, ist in Fig. 4 und 5 die mittlere empirische Zustandsgleichung in der reduzierten Form:

$$\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{R}^2} = \frac{\mathfrak{p}}{t(\mathfrak{R}\mathfrak{d})^2} - \frac{1}{\mathfrak{R}\mathfrak{d}} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}(\mathfrak{R}\mathfrak{d}) + \mathfrak{D}(\mathfrak{R}\mathfrak{d})^3 + \mathfrak{E}(\mathfrak{R}\mathfrak{d})^5 + \mathfrak{F}(\mathfrak{R}\mathfrak{d})^7 \qquad (15)$$

im $\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{R}^2}, \mathfrak{R}\mathfrak{d}$ und $\frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{R}^2}, \frac{1}{t}$-Diagramm dargestellt. Zum Vergleich ist in ersterem die kritische Isotherme nach der Gleichung von van der Waals

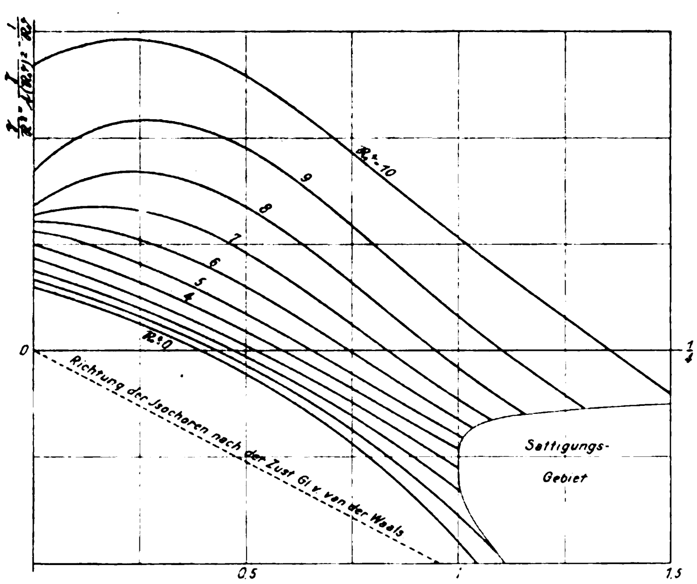


Fig. 5.

hinzugefügt und in letzterem die Richtung der Isochoren nach dieser Gleichung angedeutet.

Daß sich die beiden höchsten Isothermen schneiden und die oberen Isochoren für kleine Werte von $\frac{1}{\mathfrak{t}}$ ansteigen, beruht auf dem Verhalten des Wasserstoffes, der sich nach den Amagatschen Versuchen vor anderen Stoffen dadurch auszeichnet, daß $\left(\frac{d y}{d\, 1/T}\right)_\varrho$ in einem großen Teil des Versuchsgebietes positiv ist.

Zum Studium der Zustandsgleichung wurden mehrfach Prüfungsmethoden angewendet, die auf der Untersuchung des Verlaufes von verschiedenen den Versuchen entnommenen Differentialquotienten beruhen. Manche dieser Methoden erhalten durch unsere Darstellungsweise einen besonders einfachen Ausdruck.

Reinganum[1]) hat den Ausdruck

$$a = v^2 \left[T\left(\frac{dp}{dt}\right)_v - p\right]$$

untersucht und gefunden, daß er bei einem Volumen von ungefähr 0,75 des kritischen ein Minimum hat. Nun ist aber

$$a = -\left(\frac{d y}{d\, 1/T}\right)_\varrho$$

und da im Gebiete der kritischen Temperatur, in dem Reinganum seine Untersuchung anstellte, die y, ϱ-Isothermen, wie erwähnt, symmetrisch zu ϱ_M sind, so folgt daraus, das von Reinganum gefundene Gesetz von selbst, das Volumen, bei dem a ein Minimum wird, ist v_M.

Nach einer Regel von Young wechselt der Quotient $\left(\frac{d^2 p}{dt^2}\right)_v$ beim kritischen Volumen sein Vorzeichen, indem er für größere Volumina negativ, für kleinere positiv ist. Nach Reinganum wird er für noch kleinere Volumina wieder negativ, ist also nur in einem beschränkten mittleren Volumengebiet positiv.

In unserer Darstellung ist:

$$\left(\frac{d^2 p}{dt^2}\right)_v = \frac{\varrho^2}{T^3}\left(\frac{d^2 y}{d\, 1/T^2}\right)_\varrho,$$

die eben erwähnte Beziehung von Reinganum weist wieder auf die Symmetrie der Isothermen hin. Die Dichte, für die der zweite Zeichenwechsel sattfindet, würde die zu ϱ_K symmetrische Dichte $2\varrho_M - \varrho_K$ sein.

Happel[2]) hat die Zustandsgleichung in der Art geprüft, daß er den Ausdruck:

$$\frac{1}{T}\left[p + \frac{v}{2}\left(\frac{dp}{dv}\right)_T\right],$$

1) Ann. d. Phys. (4) 18, 1008, 1895.
2) Ann. d. Phys. 13, 340, 1904.

der bei van der Waals oder nach der Gleichung (3) unabhängig von der Temperatur sein müßte, untersucht hat. Dieser Ausdruck wird in unserer Darstellungsweise $= \left(\frac{dy}{dv^2}\right)_T$.

Tragen wir y als Funktion von v^2 auf, so folgt für den kritischen Punkt:

$$\left(\frac{dy}{dv^2}\right)_{T_K} = \frac{y_K}{v_K^2} = \frac{p_K}{T_K} \text{ und } \left(\frac{d^2 y}{d(v^2)^2}\right)_{T_K} = 0.$$

Der kritische Punkt ist also durch einen Wendepunkt der Isotherme gekennzeichnet und die Isobaren-Isothermen des Sättigungsgebietes werden durch den Urspung gehende Gerade.

Es möge noch untersucht werden, wie sich die Zustandsgleichung von Clausius:

$$p = \frac{R \cdot T}{v - b} - \frac{f(T)}{(v + c)^2} \qquad (16)$$

zu den hier berührten Fragen verhält. Wir schreiben sie zu diesem Zweck in reduzierter Form und mit Einführung der Grenzdichte $\mathfrak{l}$:

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{R}\mathfrak{t}} = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{d}(\mathfrak{l} - \mathfrak{d})} - \frac{\frac{27}{16}\frac{\mathfrak{l} - 1}{\mathfrak{l}} f(\mathfrak{t})}{\left[1 + \frac{\mathfrak{l} - 2}{2\mathfrak{l}}\mathfrak{d}\right]^2} \qquad (17)$$

oder

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{R}^2} = \frac{\mathfrak{p}}{\mathfrak{t}(\mathfrak{R}\mathfrak{d})^2} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{l}}{\mathfrak{R}\mathfrak{d}(\mathfrak{R}l - \mathfrak{R}\mathfrak{d})} - \frac{\frac{27}{64} f(\mathfrak{t})}{\left[1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{l} - 8}{8\mathfrak{R}\mathfrak{l}}\mathfrak{R}\mathfrak{d}\right]^2}, \qquad (18)$$

worin $f(\mathfrak{t})_K = 1$, $\mathfrak{R} = 4\frac{\mathfrak{l} - 1}{\mathfrak{l}} = \frac{4\mathfrak{R}\mathfrak{l}}{\mathfrak{R}\mathfrak{l} + 4}$,

$$\mathfrak{l} = 1 + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{l}}{4}.$$

Die Gleichung ergibt für verschiedene Grenzdichten folgende Werte:

$\mathfrak{l}$	$\mathfrak{R}\mathfrak{l}$	$\mathfrak{R}$	$\mathfrak{t} = 1$		$f(\mathfrak{t}) = 0$	
			$\mathfrak{d}_M$	$\mathfrak{R}\mathfrak{d}_M$	$\mathfrak{d}_M$	$\mathfrak{R}\mathfrak{d}_M$
4	12	3	1.66	4,98	2	6
4,5	14	3,11	1,73	5,38	2,25	7
5	16	3,2	1,87	5,83	2,5	8

Das Minimum von y rückt also mit wachsender Temperatur zu größeren Dichten und die kritische Isotherme ist stark unsymmetrisch.

Man kann den symmetrischen Verlauf, den die Isothermen in der Nähe der kritischen Temperatur zeigen, durch eine empirische Gleichung darstellen, wenn man der van der Waalsschen Zustandsgleichung in der Schreibweise (2) noch ein Glied hinzufügt, das unter Erhaltung der Symmetrie dem tatsächlichen Ver-

lauf der Isothermen Rechnung trägt. Man erhält sehr gute Übereinstimmung mit den Versuchen, wenn man schreibt:

$$\frac{y}{R} = \frac{pv^2}{RT} = \frac{l}{\varrho(l-\varrho)} + b + c\varrho(l-\varrho). \quad (19)$$

In reduzierter Form:

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{v}^2}{\mathfrak{R}\mathfrak{t}} = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{d}(\mathfrak{l}-\mathfrak{d})} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}\mathfrak{d}(\mathfrak{l}-\mathfrak{d}) \quad (20)$$

oder

$$\frac{\mathfrak{y}}{\mathfrak{R}^2} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{l}}{\mathfrak{R}\mathfrak{d}(\mathfrak{R}\mathfrak{l}-\mathfrak{R}\mathfrak{d})} + \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{R}} + $$
$$+ \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{R}^3}\mathfrak{R}\mathfrak{d}(\mathfrak{R}\mathfrak{l}-\mathfrak{R}\mathfrak{d}). \quad (21)$$

Aus den Bedingungen des kritischen Punktes folgt:

$$\mathfrak{b}_K = -\mathfrak{l}^2\frac{3(\mathfrak{l}-1)(\mathfrak{l}-3)+1}{(3\mathfrak{l}-8)(\mathfrak{l}-1)^3},$$

$$\mathfrak{c}_K = \frac{\mathfrak{l}^2(\mathfrak{l}-3)}{(3\mathfrak{l}-8)(\mathfrak{l}-1)^3}, \quad \mathfrak{R} = \frac{3\mathfrak{l}-8}{\mathfrak{l}}\left(\frac{\mathfrak{l}-1}{\mathfrak{l}-2}\right)^3,$$

$\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ sind im übrigen als Temperaturfunktionen zu betrachten. Sie stehen mit dem 2. und 3. Virialkoeffizienten der Zustandsgleichung von Kamerlingh Onnes in folgender Beziehung:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{\mathfrak{R}}\left(\mathfrak{b}+\frac{1}{\mathfrak{l}}\right) \text{ und } \mathfrak{C} = \frac{1}{\mathfrak{R}^2}\left(\mathfrak{l}\mathfrak{c}+\frac{1}{\mathfrak{l}^2}\right),$$

ferner ist:

$$l = \mathfrak{R}\mathfrak{l}\frac{p_K}{RT_K}, \quad b = \frac{\mathfrak{b}}{\mathfrak{R}}\frac{RT_K}{p_K}, \quad c = \frac{\mathfrak{c}}{\mathfrak{R}^3}\left(\frac{RT_K}{p_K}\right)^3.$$

Die folgende Zahlentafel gibt die kritischen Werte der verschiedenen Koeffizienten in Abhängigkeit von der Grenzdichte:

$$\frac{1}{\mathfrak{R}}\left(\frac{d^2\mathfrak{y}}{d\,1/\mathfrak{t}^2}\right)_v = \mathfrak{b}'' + \mathfrak{c}''\mathfrak{d}(\mathfrak{l}-\mathfrak{d}) \text{ für } \mathfrak{d}=1 \text{ gleich } 0$$

werden, also:

$$\mathfrak{b}'' + \mathfrak{c}''(\mathfrak{l}-1) = 0$$

und weiter

$$\mathfrak{b}' + \mathfrak{c}'\cdot(\mathfrak{l}-1) = K_1$$
$$\mathfrak{b} + \mathfrak{c}\cdot(\mathfrak{l}-1) = \frac{K_1}{\mathfrak{t}} + K_2.$$

K_1 kann man in Beziehung zu dem Spannungskoeffizienten des gesättigten Dampfes im kritischen Punkt bringen, es ist:

$$\left(\frac{d\mathfrak{p}}{d\mathfrak{t}}\right)_K = \left(\frac{d\mathfrak{p}}{d\mathfrak{t}}\right)_{v,K} = \mathfrak{d}^2\left[-\frac{1}{\mathfrak{t}}\left(\frac{d\mathfrak{y}}{d\,1/\mathfrak{t}^2}\right)_v + \mathfrak{y}\right] =$$
$$= -\mathfrak{R}[\mathfrak{b}_K' + \mathfrak{c}_K'(\mathfrak{l}-1)] + 1 = -\mathfrak{R}K_1 + 1$$
$$K_1 = \frac{1}{\mathfrak{R}}\left[1-\left(\frac{d\mathfrak{p}}{d\mathfrak{t}}\right)_K\right].$$

K_2 folgt aus dem Ausdruck für $\mathfrak{y}$ im kritischen Punkt:

$$\frac{1}{\mathfrak{R}} = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{l}-1} + \mathfrak{b}_K + \mathfrak{c}_K(\mathfrak{l}-1) = \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{l}-1} + K_1 + K_2$$
$$K_2 = \frac{1}{\mathfrak{R}}\left(\frac{d\mathfrak{p}}{d\mathfrak{t}}\right)_K - \frac{\mathfrak{l}}{\mathfrak{l}-1}.$$

Da:

$$\left(\frac{du}{d\varrho}\right)_T = \left(\frac{dy}{d\,1/T}\right)_\varrho \text{ und } \left(\frac{dc_v}{d\varrho}\right)_T = -\frac{1}{T^2}\left(\frac{d^2y}{d\,1/T^2}\right)_\varrho$$

ist, so ergeben die obigen Annahmen für c_v ein Maximum bei der kritischen Dichte und ein Minimum bei $2\varrho_M - \varrho_K$, wie es die Regel von Reinganum verlangt.

Argon verhält sich nach den Versuchen von Kamerlingh-Onnes und Crommelin[1]) anders. Nach diesen Versuchen, die etwas über

$\mathfrak{l}$	3	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6
$\mathfrak{b}_K$	— 1,125	— 1,394	— 1,446	— 1,475	— 1,490	— 1,497
$\mathfrak{c}_K$	0	0,1202	0,1413	0,1520	0,1568	0,1581
$\mathfrak{R}$	2,667	3,081	3,140	3,189	3,260	3,338
$\mathfrak{R}\mathfrak{l}$	8	9,86	10,52	11,08	11,57	12,02
$\mathfrak{B}_K$	0,2969	0,3510	0,3596	0,3623	0,3641	0,3657
$\mathfrak{C}_K$	0,0156	0,0508	0,0549	0,0568	0,0577	0,0590

Die mittlere empirische Zustandsgleichung liefert $\mathfrak{B}_K = 0{,}3591$ und $\mathfrak{C}_K = 0{,}0508$. Guten Anschluß an die experimentellen kritischen Isothermen erhält man mit $\mathfrak{l}$ ungefähr $= 3{,}4$.

Die früher erwähnten Regeln von Young und von Reinganum über das Vorzeichen von $\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)_v$ und über die damit zusammenhängende Änderung von c_v mit der Dichte, lassen sich durch diese Form der Gleichung erfüllen. Damit $\left(\frac{d^2p}{dt^2}\right)_v$ für das kritische Volumen 0 wird, muß:

die kritische Dichte hinausreichen, aber das Minimum von y nicht erreichen, wird $\left(\frac{d^2y}{d\,1/T^2}\right)_v$ für die kritische Dichte nicht gleich Null. $\left(\frac{dc_v}{d\varrho}\right)_T$, das sich bis etwa ϱ_K nur wenig ändert, nimmt von da ab merklich zu. Wollte man dies Verhalten an der Grenze des Versuchsbereiches vernachlässigen, so könnte für diesen Stoff in erster grober Annäherung $\left(\frac{dc_v}{d\varrho}\right)_T$ als

1) Leiden. Comm. Nr. 131.

unabhängig von der Dichte und damit in der Gleichung (19) c als eine lineare Funktion von $\frac{1}{T}$ angenommen werden.

Gleichung (19) und die an sie geknüpften Betrachtungen gelten nur in der Nähe der kritischen Temperatur.

(Eingegangen 12. Mai 1920.)

Ein Schwingungsapparat für Vorlesung und Praktikum nach H. Th. Simon.

(Mitteilung aus dem Institut für angewandte Elektrizität der Universität Göttingen.)

Von Otto Oldenberg.

Um die in so vielen Gebieten der Physik hervortretenden, typischen Schwingungsvorgänge demonstrieren und ihre Gesetzmäßigkeiten experimentell verfolgen zu können, konstruierte H. Th. Simon vor längerer Zeit den im folgenden beschriebenen Apparat[1]). Dabei leitete ihn der Gesichtspunkt, möglichst mannigfaltige, elektrische Versuche mechanisch nachzubilden, andererseits aber auch Einzelheiten, die sich beim elektrischen Vorgang zunächst der Beobachtung entziehen, die jedoch für das Verständnis wesentlich sind, zur Anschauung zu bringen. Da dieser Demonstrationsapparat sich durch seine Übersichtlichkeit, Präzision und Vielseitigkeit beim Gebrauch in der Vorlesung vortrefflich bewährte, zugleich aber auch einen für das physikalische und elektrotechnische Praktikum äußerst lehrreichen Meßapparat darstellt, entschloß sich Simon, ihn weiteren Kreisen zugänglich zu machen und zu empfehlen[2]). Die Ausführung dieser Absicht war Simon nicht mehr vergönnt. Die folgende kurze Beschreibung des Apparats und seiner Verwendung lehnt sich im Anfang an ein von Simon begonnenes Manuskript an. Eine eingehendere Mitteilung erscheint in der Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr.

Der Apparat (s. Fig. 1) besitzt zwei gleiche schwingende Systeme, die miteinander gekoppelt werden können. Das einzelne System ist ein der Schwere entzogenes Pendel folgender Konstruktion: Ein Pendelkörper P aus Aluminium ist vertikal stehend auf Schneiden drehbar gelagert. In Schlitzen sind zwei gleiche Blei-

1) Eine andere Konstruktion und Angabe weiterer Literatur s. Breisig, Jahrb. f. drahtl. Tel. 13, 2, 1918.

2) Der Apparat wurde zunächst von dem Institutsmechaniker Herrn W. Müller meisterhaft ausgeführt. Für die Zukunft hat die Firma E. Leybolds Nachf., Köln a. Rh. seine Anfertigung übernommen.

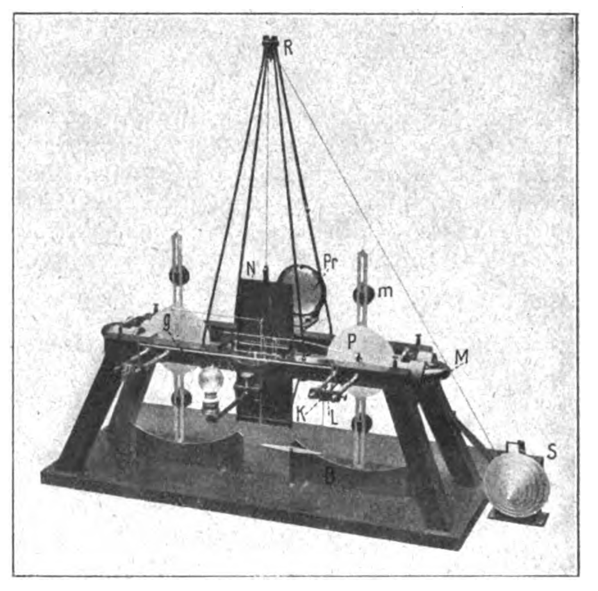


Fig. 1.

gewichte m symmetrisch zur Achse festgeklemmt. Ihr Abstand von der Achse ist an einer Skala ablesbar; daraus ist ihr Trägheitsmoment zu berechnen. Die Direktionskraft wird durch die Torsion einer in der Verlängerung der Achse angebrachten Flachfeder aus Uhrfederstahl hervorgebracht, die in einem Klemmklotz K endigt. Dieser Klemmklotz ist in dem längs einer Skala verschiebbaren Lagerbock L vermittelst eines Hebels drehbar, sei aber zunächst durch eine Schraube darin festgeklemmt. Die jeweilige wirksame Länge der Flachfeder, die für den Wert der Direktionskraft bestimmend ist, wird an der Skala abgelesen. Die Dämpfung kann dadurch willkürlich eingestellt werden, daß in den Kreisscheiben der Pendelkörper P, die zwischen den Polen von Elektromagneten M schwingen, Wirbelströme induziert werden. Zur absoluten Messung der Direktionskraft der Feder kann dem einen Pendel durch ein Gewicht, das durch einen Faden über eine Rolle hinweg am Pendel angreift, eine dauernde Ablenkung aus seiner Ruhelage erteilt werden.

Zur Demonstration erzwungener Schwingungen wird an einem der beiden Pendel die Drehung des Klemmklotzes K durch Lockerung der Schraube freigegeben; sodann wird dem mit dem Klemmklotz verbundenen Hebel eine Pendelbewegung von willkürlicher Frequenz durch einen Motor und Excenter aufgezwungen.

Die Koppelung zwischen beiden Pendeln wird durch das Gestänge G hergestellt, dessen senkrechte Hebelarme mit Schlitzen auf die Flachfedern aufgeklemmt werden. Verschieden feste Koppelung kann leicht durch Verschiebung des Gestänges auf den Flachfedern hergestellt

werden. Ein Vorzug dieser Koppelung ist, daß ihre Wirkung ohne weiteres dem Zuhörer anschaulich ist.

Der Ausschlag eines jeden Pendels als Funktion der Zeit kann an der Bogenskala B abgelesen, kann aber zugleich durch eine Schreibvorrichtung auf einer berußten Glasplatte N als Schwingungskurve aufgeschrieben werden. Die Glasplatte N wird durch eine Schnur, die über eine Rolle R hinweg auf der Scheibe S durch ein Uhrwerk aufgerollt wird, gleichförmig bewegt. Diese Kurven können mit Schellack fixiert und wie photographische Negative kopiert werden.

Eine einfache Projektionsvorrichtung Pr gestattet, das Entstehen dieser Schwingungskurven einer beliebig großen Hörerschaft sichtbar zu machen.

Anschließend sei eine Reihe der wesentlichsten Demonstrations- und Praktikumsversuche genannt; ihre eingehendere Beschreibung findet sich in der genannten Arbeit in der Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr.

Von den Schwingungsgesetzen eines einzelnen schwingenden Systems läßt sich zunächst die Formel für die Eigenschwingungsdauer (entsprechend der Thomsonschen Formel) und für die Dämpfung demonstrieren. In einem Praktikumsversuch kann nach absoluter Messung der Apparatkonstanten der Wert der Eigenschwingungsdauer voraus berechnet werden; der entsprechende elektrische Versuch ist die absolute Eichung eines Wellenmessers durch Messung von Kapazität und Selbstinduktion. Bei der Demonstration erzwungener Schwingungen eines Pendels sieht der Zuhörer die Resonanzkurve entstehen; die Besonderheiten der Phasenverschiebung beiderseits des Resonanzmaximums werden ohne weiteres anschaulich. Dieser selbe Versuch ist im Praktikum zu einer Dämpfungsmessung aus der Resonanzkurve zu verwerten, eine Vorübung zur entsprechenden, wichtigen Messung der drahtlosen Telegraphie. Wird das eine Pendel zunächst festgehalten und dann plötzlich der periodischen Kraft überlassen, beobachten wir einen typischen Einschaltvorgang.

An gekoppelten Systemen lassen sich vor allem die Schwebungen, die nach dem Anstoßen des einen Pendels zustande kommen, demonstrieren, insbesondere auch der Einfluß der mehr oder weniger festen Koppelung auf ihren Verlauf. Die Entstehung einer Schwebung durch Übereinanderlagerung zweier Sinusschwingungen benachbarter Frequenz, die dem Zuhörer wohl zunächst lediglich als Rechenoperation erscheint, wird an unserem Apparat anschaulich dadurch, daß diese beiden Sinusschwingungen jede für sich hergestellt werden können. Hierzu müssen die beiden Pendel gleichzeitig gleich stark angestoßen werden entweder beide in gleichem oder beide in entgegengesetztem Sinne. Dieser mechanische Versuch gibt einen Fingerzeig dafür, wie auch in elektrischen gekoppelten Systemen trotz beliebig fester Koppelung reine Sinusschwingungen anzuregen sind: der gleichzeitige, gleich starke Anstoß geschieht durch eine für beide Kreise gemeinsame Funkenstrecke.

In zwei weiteren Demonstrationsversuchen führt uns der Schwingungsapparat den Zweck der einzelnen Stromkreise einer Sendestation der drahtlosen Telegraphie vor Augen. Zunächst wird die Wirkungsweise der Wienschen Stoßerregung gezeigt, in einem weiteren Versuch der Schwingungsvorgang im Braunschen gekoppelten Sender.

Gegen unseren Schwingungsapparat läßt sich der Einwand erheben, daß seine Koppelung nicht genau der induktiven Koppelung entspricht, die in der drahtlosen Telegraphie weitaus die wichtigste ist[1]). Vielmehr zeigen die Differentialgleichungen, denen die Bewegung unseres Apparates gehorcht, daß seine Koppelung eine genaue, mechanische Nachbildung der kapazitativen Koppelung ist. Um Unterschiede zwischen den Schwingungen unserer gekoppelten Pendel und den elektrischen Schwingungen zweier induktiv gekoppelten Kreise zuverlässig festzustellen, rechnen wir die Bewegung der Pendel durch Integration ihrer Differentialgleichungen aus. Dabei beschränken wir uns zur Vereinfachung auf den Fall, daß die Pendel aufeinander abgestimmt sind und zwar so, daß alle Apparatkonstanten beider Pendel die gleichen sind; jedoch machen wir über die Festigkeit der Koppelung keine beschränkende Annahme. Hier sei nur folgendes Ergebnis mitgeteilt: Die Gleichung unserer mechanischen Schwingung stimmt fast völlig mit der Gleichung der elektrischen Schwingung bei induktiver Koppelung überein. (Der einzige, jedoch ganz unwesentliche Unterschied besteht darin, daß bei induktiver Koppelung die beiden einzelnen Sinusschwingungen, aus denen sich die Schwebung zusammensetzt, verschieden starke Dämpfung haben; bei unserem Apparat sind sie dagegen gleich stark gedämpft.) Damit ist bewiesen, daß unser Apparat auch die Schwingungen induktiv gekoppelter Kreise in den wesentlichen Zügen richtig zur Anschauung bringt.

Weiterhin ergibt die Theorie des Apparates

1) Wegen der Einzelheiten der folgenden Überlegungen sei auf die in der Zeitschr. f. d. phys. u. chem. Unterr. erscheinende Arbeit verwiesen.



leicht Formeln, durch die der Schwingungsverlauf in den gekoppelten Systemen und damit auch die Häufigkeit der Schwebungen vollständig voraus berechnet werden kann, wenn einmal die Apparatkonstanten (Trägheitsmoment, Länge und Torsionskonstante der Flachfedern, Ort des Koppelungsgestänges auf den Flachfedern) mit Zentimetermaß und Wage ermittelt sind.

Schließlich sei auf eine andere Verwendung des Apparates hingewiesen, bei der es sich nicht so sehr um die Demonstration physikalischer als vielmehr geometrischer Gesetze handelt, auf die Herstellung Lissajousscher Figuren. Ein Schreibstift, der vor der berußten Glasplatte N (Fig. 1) spielt, wird von dem einen Pendel durch eine Stange horizontal hin und her bewegt. Gleichzeitig bewirkt die Schwingung des anderen Pendels durch Vermittlung eines einfachen Gestänges eine vertikale Schwingung des Schreibstiftes[1]). Infolgedessen beschreibt der Stift eine Lissajoussche Figur. Durch Änderung der Pendelfrequenzen und der Phasen können mannigfaltige, sehr schöne Figuren hergestellt werden. Fig. 2 zeigt hierfür drei Beispiele mit dem Frequenzverhältnis nahezu 1:2, zugleich als Beispiel für die Wirkungsweise der Schreibvorrichtung.

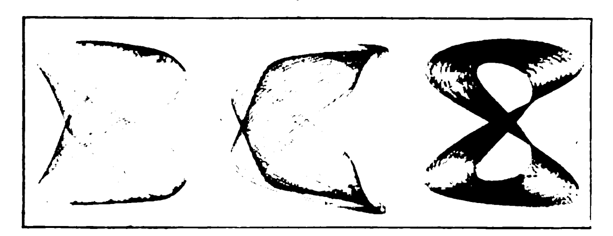


Fig. 2.

Über die hier geschilderten, wichtigsten Versuche hinaus läßt der Apparat freies Feld für eine weitere, große Reihe mannigfaltiger, lehrreicher Beobachtungen.

Zusammenfassung.

Ein mechanischer Schwingungsapparat für Vorlesung und Praktikum wird beschrieben. In einer Reihe von Versuchen werden die Schwingungsgesetze eines einzelnen Systems und zweier gekoppelter Systeme demonstriert. Dabei wird auf die mechanische Nachbildung von Versuchen der drahtlosen Telegraphie besonderer Wert gelegt. Der Apparat dient ferner zur Demonstration Lissajousscher Figuren.

1) Auf Fig. 1 ist auch diese Koppelung angebracht, obwohl sie nicht gleichzeitig mit der gewöhnlichen Koppelung durch das Gestänge G zu verwenden ist.

Göttingen, Institut für angewandte Elektrizität, April 1920.

(Eingegangen 20. Juni 1920.)

Die Anwendung der Smoluchowskischen Theorie auf die zeitliche Veränderlichkeit der Teilchenzahl einer Emulsion.

Von P. C. v. Arkel.

In seinen Studien über „Molekularstatistik von Emulsionen und deren Zusammenhang mit der Brownschen Bewegung", Akad. Wien 1915, 2401 und diese Zeitschr. 1916, Nr. 22 und 23 sagt Smoluchowski, daß ein Vergleich der von ihm aus seiner Theorie abgeleiteten Formeln mit der Svedbergschen Beobachtungsreihe (Existenz der Moleküle, 1912, S. 148) eine recht befriedigende Übereinstimmung ergibt.

Das Ziel dieser Mitteilung ist, nachzuweisen, daß diese Übereinstimmung nicht genügend geachtet werden kann, wenn man alle von Smoluchowski abgeleiteten Beziehungen prüft an dem experimentellen Material. Der Grund davon liegt wahrscheinlich mehr in der Unvollkommenheit der Zahlenreihe als in der Theorie. Smoluchowski leitet für die durchschnittliche, in gewisser Zeit t erfolgende, Veränderung $\triangle$ der Teilchenzahl in einem Elemente, in dem sich anfangs eine Anzahl n aufhält, die Formel

$$\overline{\triangle}_n = (\nu - n) P \qquad (1)$$

ab, in welcher P die Wahrscheinlichkeit ist für den Austritt eines Teilchens, das zur Zeit 0 in dem Elemente liegt und ν die Teilchenzahl, welche bei gleichmäßiger Verteilung auf das in Betracht gezogene Volum entfallen würde. Er findet für das durchschnittliche Quadrat der Änderung

$$\overline{\triangle^2} = 2 \nu P . \qquad (2$$

Bei der Svedbergschen Reihe erhält man $\overline{\triangle_2} = 2{,}25$, also würde $P = 0{,}726$ betragen.

Wir wollen P berechnen aus der Formel (1). Bei der Berechnung der $\triangle$ kann man die Reihe in zwei Richtungen durchlaufen und der Umkehrbarkeit wegen müssen die in dieser Weise gefundenen P-Werte für beide Richtungen dasselbe sein. Wir geben durch einen Pfeil die betreffende Richtung an. So ergibt sich

			→	←
aus	$\overline{\Delta}_0$	für P	0,66	0,60
	$\overline{\Delta}_1$		0,82	0,80
	$\overline{\Delta}_2$		0,60	0,65
	$\overline{\Delta}_3$		0,81	0,73
	$\overline{\Delta}_4$		0,69	0,85
	$\overline{\Delta}_5$		0,81	0,70

Der größte der hier gefundenen Werte weicht mehr als 30 Proz. ab von dem kleinsten, während eine Abweichung von 10 Proz. von dem oben gefundenen Werte $P = 0{,}726$ nach beiden Seiten vorkommt.

Wir nennen das Zeitintervall (39 mal pro Minute) bei den Untersuchungen Svedbergs τ. Wir können aus der gegebenen Zahlenreihe dann auch nachgehen, was P wird nach (1) und (2) bei Zeitintervallen 2τ, 3τ usw. Man wird sehen, daß auch dann für P bei einem bestimmten Intervall nicht dieselben Werte erhalten werden. Bei dem Intervall 2τ werden wir aus der gegebenen Zahlenreihe

$a\ b\ c\ d\ e\ f\ g\ h\ i\ k$ usw.

die zwei Teilreihen benutzen müssen

$a\ c\ e\ g\ i$ usw.

und $b\ d\ f\ h\ k$ usw.,

welche gleichwertig sind, weil ja bei einem Zeitintervalle 2τ eine dieser beiden Reihen von Svedberg beobachtet sein würde, wenn er 2τ als Beobachtungsintervall gewählt hätte. Bei einem Intervall 3τ bekommen wir in dieser Weise die 3 Reihen

$a\ d\ g\ k$ usw.,

$b\ e\ h$ usw. und

$c\ f\ i$ usw.

die auch wieder gleichwertig sind; im allgemeinen bei $m\tau$ also m gleichwertige Teilreihen.

Wir finden nun bei 2τ für P die folgenden Werte, während wir die bei der Berechnung von $\overline{\Delta}$ gefolgte Richtung wieder mit einem Pfeile angeben:

	Erste Teilreihe		$t = 2\tau$ Zweite Teilreihe	
aus $\overline{\Delta}^2$:	0,885		0,83	
	→	←	→	←
aus $\overline{\Delta}_0$:	0,90	0,71	0,83	0,83
aus $\overline{\Delta}_1$:	0,78	> 1	0,90	0,94
aus $\overline{\Delta}_2$:	0,77	> 1	0,79	0,42
aus $\overline{\Delta}_3$:	0,92	> 1	0,81	> 1
aus $\overline{\Delta}_4$:	0,96	0,62	0,90	> 1

Die Übereinstimmung ist wieder nicht schön, während die Werte > 1 für P gar nicht zu verteidigen sind.

Bei dem Intervalle 3τ finden wir für P:

Erste Teilreihe: P aus $\overline{\Delta}^2 = 0{,}87$

Zweite „ 0,90

Dritte „ 0,79,

während folgende Werte für P berechnet werden aus $\overline{\Delta}_n$ bei diesem Intervalle:

	1. Reihe	2. Reihe	3. Reihe	1. Reihe	2. Reihe	3. Reihe
	→	→	→	←	←	←
aus $\overline{\Delta}_0$	0,77	0,90	0,86	0,85	0,80	0,72
„ $\overline{\Delta}_1$	> 1	0,93	0,89	0,77	> 1	0,94
„ $\overline{\Delta}_2$	0,70	1,—	0,84	0,23	0,73	> 1
„ $\overline{\Delta}_3$	0,85	1,—	> 1	1,—	> 1	0,87
„ $\overline{\Delta}_4$	0,63	0,78	0,62	0,89	0,75	0,78

Bei größeren Intervallen berechneten wir noch die P-Werte, welche mit $\overline{\Delta}^2$ folgen:

	Intervall 4τ	5τ	6τ
1. Teilreihe	0,93	1,—	> 1
2. „	0,69	0,91	0,83
3. „	0,84	0,90	0,94
4 „	0,96	0,95	0,85
5. „	—	0,78	> 1
6. „	—	—	0,82

Im allgemeinen ist also bei einem bestimmten Intervall eine in manchen Fällen große Differenz nachzuweisen zwischen den P-Werten, namentlich zwischen den, welche aus Formel (1) für $\overline{\Delta}_n$ hervorgehen, welche eben nicht von Smoluchowski geprüft wurde in dem oben genannten Artikel. Hätte er dies getan, so hätte sich erwiesen, daß die Übereinstimmung, welche er meinte, bestand, in der Tat nicht anwesend ist. Wir können aus diesen Tatsachen auch die Folgerung ziehen, daß es gewissermaßen möglich ist aus einer Zahlenreihe (wie die Svedbergsche) Größen abzuleiten, welche übereinstimmen mit den theoretisch berechneten, doch daß wir in der Formel (1) ein scharfes Kriterium haben, um zu entscheiden, ob auf eine Zahlenreihe die Smoluchowskische Theorie anzuwenden ist und dieses scheint bei der Svedbergschen Reihe also nicht der Fall.

Auch kann noch bemerkt werden, daß die berechneten P-Werte sich bei zunehmender Intervallgröße nicht in bestimmter Weise dem Grenzwerte $P = 1$ nähern, was doch der Fall sein muß.

Noch eine andere Formel ist von Smoluchowski abgeleitet worden, nämlich

$$W(n, m) = P\,W(n-1, m) + \\ + (1 - P)\,W(n-1, m-1), \qquad (3)$$

wo $W(n, m)$ die Wahrscheinlichkeit ist, daß die Zahl m auf die Zahl n folge. Er gebraucht diese Rekursionsformel zur Berechnung der $W(n, m)$ und findet daraus wieder die theoretisch zu erwartenden Häufigkeitszahlen der verschiedenen Ambo-Gruppen (n, m), welche er vergleicht mit den beobachteten. Wir können in der Svedbergschen Reihe die experimentellen Wahrscheinlichkeiten $W(n, m)$ bestimmen und mit Hilfe von (3) P berechnen. Wir finden P-Werte berechnet aus Formeln (3) für $W(n, m)$

$t = \tau$	$m =$					
	1	2	3	4	5	6
$n = 1$	0,786	0,500	0,620	0,111	0,867	—
2	0,901	0,703	0,408	> 1	0,818	< 0
3	> 1	0,130	0,970	0,820	> 1	> 1
4	0,662	> 1	0,717	0, –	0,125	—
5	0,733	> 1	< 0	< 0	> 1	—

Während die so berechneten P-Werte alle dasselbe liefern sollten für einen bestimmten Intervall (hier $1\,\tau$), sind leider sehr große Differenzen nachzuweisen.

Noch sei mitgeteilt, daß eine zweite von Svedberg gegebene Reihe (Existenz der Moleküle) dieselben schlechten Resultate gab.

Universität Utrecht, Institut für theoretische Naturkunde, April 1920.

(Eingegangen 15. Juni 1920.)

Die Energieverhältnisse in einem Stromkreise mit Selbstinduktion.

Von P. Terpstra.

Wenn in einem Stromkreise mit einem Widerstand R und einer Selbstinduktion L eine konstante elektromotorische Kraft V eingeschaltet wird, so gilt für die Stromstärke die Gleichung

$$i = \frac{V - L\dfrac{di}{dt}}{R}.$$

Diese Gleichung läßt sich leicht umformen zu:

$$V i\,dt = i^2 R\,dt + i L \frac{di}{dt}\,dt,$$

d. h. die Arbeit, die von der elektromotorischen Kraft V geleistet wird = Wärmeentwicklung in dem Stromkreise + Arbeit gegen die „elektromotorische Gegenkraft". Letztere findet sich im Äther wieder als magnetische Energie M_0. Von diesen Energieverhältnissen liefert die Fig. 1 ein anschauliches Bild. Die Kurve OPA in der Ebene iOt stellt den Verlauf der Stromstärke dar, und ebenso die Kurve Vst in der Ebene VOt den der „elektromotorischen Gegenkraft". Man denke sich nun einen senkrechten Zylinder, der OPA und einen wagerechten Zylinder, der Vst als Leitlinie hat. Der Punkt R z. B. wird dann ein Punkt der Schnittkurve dieser zwei Zylinder sein. Der über der Ebene iOt liegende gemeinsame Teil der beiden Zylinder stellt dann die magnetische Energie M_0 dar. Ergibt sich doch für den Inhalt dieses Teiles: $\int_0^\infty PQSR\,dt =$

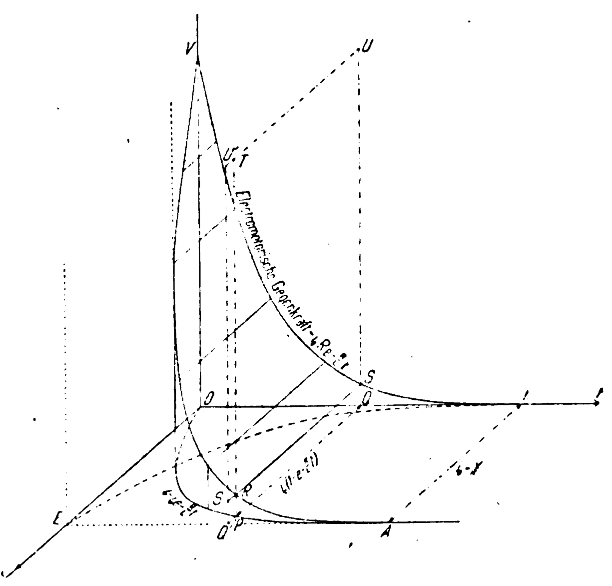


Fig. 1.

$= \int_0^\infty$ Stromstärke $\times$ elektromotorische Gegenkraft $\times\, dt$ = Arbeit, die nötig ist zum Überwinden der elektromotorischen Gegenkraft = im Felde aufgespeicherte magnetische Energie M_0. Aus den in der Figur angegebenen Werten der Stromstärke und der elektromotorischen Gegenkraft ergibt sich, daß

$$M_0 = \int_0^\infty PQSR\,dt =$$

$$= \int_0^\infty i_0^2 R \left(e^{-\frac{R}{L}t} - e^{-\frac{2R}{L}t}\right) dt =$$

$$= i_0^2 R \left(\frac{L}{R} - \frac{L}{2R}\right) = \tfrac{1}{2} L i_0^2.$$

In derselben Weise findet man für den Raum, der durch die drei Koordinatenebenen, eine Ebene in $E \perp Oi$ und den horizontalen Zylinder begrenzt wird, als Inhalt $L i_0^2$. Dieser Raum wird also von dem vertikalen Zylinder OPA in zwei gleiche Teile geteilt. Dieses Resultat kann symbolisch durch die Gleichung

$$[PRS'Q'] = [PQSR]$$

wiedergegeben werden. In derselben Weise halbiert der horizontale Zylinder den Raum der von dem vertikalen Zylinder und von den Ebenen tOi, iOV, der Ebene in $E \perp Oi$ und der horizontalen Ebene durch UT eingeschlossen wird; oder

$$[PRS'Q'] = [S'RTU'],$$

so daß also

$$[PQSR] = [PRS'Q'] = [S'RTU'] = \tfrac{1}{2} L i_0^2.$$

Ebenso wie $PQSR \cdot dt$ die in dt im Äther aufgenommene magnetische Energie be-

deutet, stellt $PQUT \cdot dt$ die von der konstanten elektromotorischen Kraft geleistete Arbeit und also $RSUT \cdot dt$ die entwickelte Wärme dar. Die Figur zeigt deutlich, wie nach dem Schließen des Stromes die Arbeit, die die konstante elektromotorische Kraft pro Zeiteinheit leistet, allmählich zunimmt und wie zu gleicher Zeit der Bruchteil, der davon im Felde aufgespeichert wird, allmählich abnimmt, bis, wenn der Strom konstant geworden ist, alle Stromenergie in Wärme umgewandelt wird. In Fig. 2

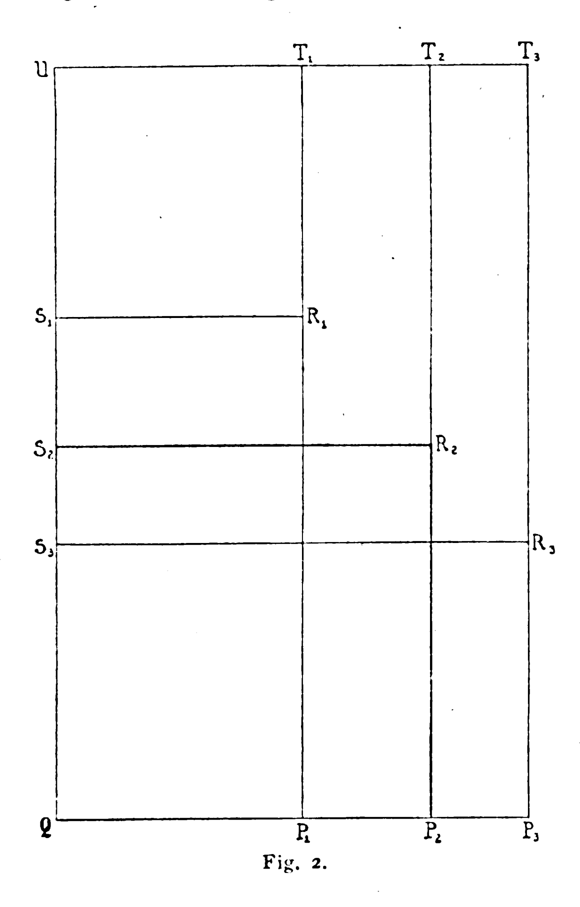


Fig. 2.

sind für den Fall $R = 1\,\Omega$, $i_0 = 1$ Amp., $L = 0{,}01$ Henry diese Durchschnitte dargestellt in den Augenblicken $t_1 = 0{,}004$ Sek.; $t_2 = 0{,}007$ Sek. und $t_3 = 0{,}010$ Sek. Das die magnetische Energie bezeichnende Rechteck $QS_1R_1P_1$ geht über in das Quadrat $QS_2R_2P_2$ (maximaler Durchschnitt) usw.

Mittels der obengenannten Halbierungseigenschaften kann man aus der Fig. 1 zugleich den Zusammenhang herleiten zwischen der Wärmeentwicklung in dem betrachteten Stromkreise und dem Wärmeeffekt, der auftreten würde, wenn unter übrigens gleichen Umständen der Stromleiter induktionsfrei gewickelt wäre. In diesem Falle hat der Strom von Anfang an die volle Stärke i_0, während die elektromotorische Gegenkraft immer gleich null ist, so daß die ganze von der elektromotorischen Kraft V geleistete Arbeit in Wärme umgesetzt wird. In Fig. 1 wird diese Wärmemenge durch das Parallelepiped $OEAt_1V$, oder $[QQ'U'U]$ dargestellt. Die im Falle $L \neq 0$ auftretende Wärmeentwicklung wird durch $[UTRS]$ wiedergegeben, die in diesem Falle von der elektromotorischen Kraft geleistete Arbeit durch $[UTPQ]$. Aus der Figur sieht man also, daß zwischen den beiden Fällen folgender Zusammenhang besteht: Wenn $L \neq 0$, dann leistet die elektromotorische Kraft V weniger Arbeit als im Falle $L = 0$, und zwar

$2 \times {}^1/_2 Li^2$ weniger; $\{[PRS'Q'] + [S'RTU']\}$;

die Wärmeentwicklung ist im ersten Falle aber

$3 \times {}^1/_2 Li^2$ weniger, $\{[PRS'Q'] + [S'RTU'] + [PQSR]\}$

so daß dabei doch noch ${}^1/_2 Li^2$ als magnetische Energie im Äther aufgenommen werden kann.

Es ist interessant, als zweiten äußersten Fall den Fall $R = 0$ zu betrachten; d. h. also den Fall eines supraleitenden Kreises, in dem eine konstante elektromotorische Kraft eingeschaltet worden ist. Man kann sich dafür z. B. ein bleiernes, in sich selbst geschlossenes Solenoid denken, das sich in flüssigem Helium zwischen den Polen eines Elektromagnets befindet, während das von letzterem an der Stelle der Spirale erzeugte magnetische Feld allmählich abgeschwächt wird. Da $R = 0$, ist die Joule-Wärme in diesem Falle notwendigerweise gleich null, so daß also in Fig. 1 $[UTRS] = 0$ werden

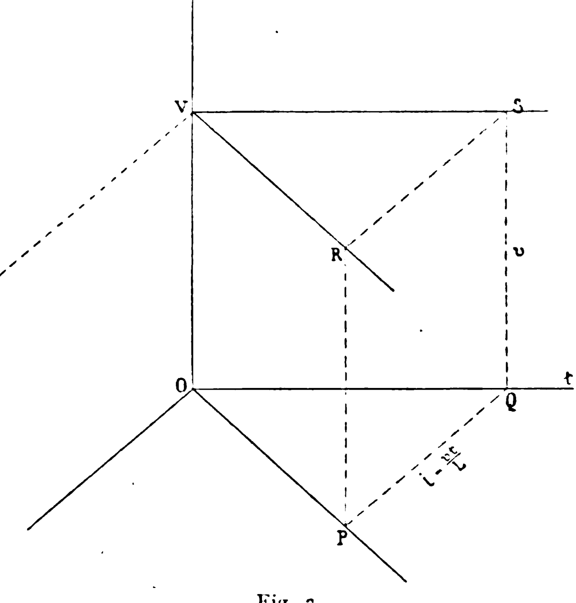


Fig. 3.

muß, d. h. der horizontale Zylinder muß eine horizontale Ebene werden, die Kurve Vst eine horizontale Gerade durch den Punkt V. Das bedeutet, daß die elektromotorische Gegenkraft fortwährend der konstanten elektromotorischen Kraft gleich ist, ebenso wie in der Mechanik, wenn die Reibung gleich null ist, fortwährend Masse $\times$ Beschleunigung $=$ Kraft ist[1]). Die von einer konstanten Kraft erzeugte gleichförmige beschleunigte Bewegung findet im elektrischen Falle ihr Analogon in der gleichmäßig ansteigenden Stromstärke. Die Kurve OPA wird also eine Gerade durch O werden.

Tatsächlich ist $\lim\limits_{R=0} i_0 \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right) = \frac{vt}{L}\Big)$.

1) Diese Übereinstimmung ist weiter ausgearbeitet von Lippmann, C. R. 109, 1889.

Der Raum $[PQSR]$, der die magnetische Energie darstellt, wird also in diesem Falle ein dreieckiges Prisma (Fig. 3), von dem man sofort einsieht, daß der Inhalt gleich

$$\tfrac{1}{2}i \times t \times V = \tfrac{1}{2}i \times Li = \tfrac{1}{2}Li^2 \text{ ist.}$$

Wenn man von der experimentellen Tatsache ausgeht, daß die Induktionserscheinungen unabhängig sind von der chemischen Art, also auch von dem Widerstand der Leiter, so daß die magnetische Energie in einem willkürlichen Falle der magnetischen Energie des supraleitenden Stromkreises gleich sein muß, so enthält obiges einen sehr einfachen graphischen Beweis für den Satz $M_0 = \tfrac{1}{2}Li^2$.

Groningen, Physikalisches Institut der Universität.

(Eingegangen 10. Mai 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und Gittern.

Von H. Spohn.

(Fortsetzung.)

Der Faktor 2 auf der rechten Seite von (6c) ist für $m = 0$ zu streichen. Es ist $\pi_1 = p_{1\,r=\varrho}$; $\pi_2 = p_{2\,r=\varrho}$; die für den Vorgang im Innern des Zylinders kennzeichnenden Koeffizienten b_m werden weiterhin explizite nicht benutzt. Der Punkt über den Funktionen J bzw. H bedeutet, daß die Ableitung dieser Funktionen nach dem Argument p_1 bzw. p_2 zu nehmen ist.

Für die zeitlichen Mittelwerte der vom Zylinder ausgestrahlten Energie E_2 und der von ihm absorbierten E_3 ergibt sich mit Hilfe von (6a) bis (6c):

$$E_2 = -\frac{\lambda}{16c}\left[\alpha^2_0 + \beta^2_0 + \sum_1^\infty(\alpha^2_m + \beta^2)_m\right] \quad (6\text{d})$$

$$E_3 = +\frac{\lambda}{16c}\left[\frac{2}{\pi}\beta_0 + \frac{4}{\pi}\sum_1^\infty \beta_m\right] \quad (6\text{e})$$

wenn $-\frac{2i}{\pi} a_m = \alpha_m + i\beta_m$ gesetzt wird.

Unter der — weiterhin erfüllten — Voraussetzung der Konvergenz ist mit den Reihen (6) die Lösung des zunächst vorgelegten Problems fertig.

Die Form der Lösung als unendliche Reihe, der verwickelte Aufbau der Koeffizienten Q_m verlangt zur Ermöglichung einer ins einzelne gehenden Diskussion natürlich geeignet gewählte Spezialisierungen, die die Beschränkung auf nur wenige Glieder der Reihe und einfache Koeffizientenwerte ermöglichen.

Vorher aber können doch schon aus der allgemeinen Form eine Reihe wertvoller Einzelergebnisse abgelesen werden.

Zunächst ist es möglich, einen Einblick in den inneren Mechanismus des Vorganges zu gewinnen [17], der durch das Einbringen des Zylinders in den Strahlengang erzwungen wird: Schon die unmittelbare Anschauung läßt erkennen, daß als Folgeerscheinung der Grenzbedingungen beim Einfallen elektromagnetischer Energie an der Zylinderoberfläche elektrische Ladungen gestaut werden müssen, und zwar jedenfalls zeitlich veränderliche Ladungen, da ja die einfallende Energie zeitlich veränderlich ist, d. h. an der Grenzfläche müssen elektrische Strömungen auftreten, gleichviel ob der begrenzende Zylinder dielektrisch oder leitend ist. Über die Natur dieser Strömungen unterrichtet hier am besten ihr magnetisches Feld, und zwar das magnetische Feld in der nächsten Umgebung des Zylinders.

In hinreichender Nähe des Zylinders ist aber, wenn $\varrho << \lambda$ (eine Einschränkung, deren Bedeutung weiterhin noch vielfach hervortreten wird) jedenfalls $p_1 = k_1 r$ beliebig klein; und daher dürfen dort die zweiten Hankelschen Funktionen $H_m^{(2)}$, die den Störungsanteil im Außenraum kennzeichnen, durch ihre Näherungswerte für sehr kleines Argument ersetzt werden; das sind die Werte:

$$\lim \dot{H}^{(2)}{}_0(x) = -\frac{2i}{\pi x}, \quad \lim \dot{H}^{(2)}{}_1(x) = -\frac{2i}{\pi x^2},$$

$$\lim \dot{H}^{(2)}{}_2(x) = -\frac{8i}{\pi x^3}, \text{ usf.}$$

Mit dieser Ersetzung wird Glied für Glied des Störungsfeldes einer einfachen physikalischen Deutung fähig. Aus der Lösung (6a) für den elektrischen Vektor folgt nämlich vermöge (1c) durch Differentiation nach r und folgende Integration nach t für den hier allein interessierenden Störungsanteil:

$$\mathfrak{H}_\varphi = -i e^{int} \Sigma a_m \dot{H}^{(2)}{}_m(p_1) \cdot \cos m\varphi,$$

also nach der angezeigten Ersetzung für das Feld der ersten Partialwelle:

$$\mathfrak{H}_{\varphi 0} = -\frac{2a_0}{\pi k_1 r} e^{int}.$$

Das ist aber offenbar das magnetische Feld eines unendlich langen Wechselstromes.

Das zweite Glied wird:

$$\mathfrak{H}_{\varphi 1} = -\frac{2a_1}{\pi k_1^2} \frac{1}{r^2} e^{int} \cos \varphi$$

$$= -\frac{2a_1}{\pi k_1^2} e^{int} \frac{1}{r^2} \frac{x}{r} = +\frac{2a_1}{\pi k_1^2} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right) e^{int}.$$

Nun ist das Feld zweier paralleler, entgegengesetzt gerichteter Ströme, deren Querschnittsmittelpunkte um das sehr kleine Stück h gegeneinander verschoben sind:

$$\left(\frac{1}{r}\right)_{x+h} - \left(\frac{1}{r}\right) = h \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right),$$

wenn h klein genug ist, um das Abbrechen der zugehörigen Entwicklung nach Taylor mit dem ersten Gliede zu gestatten. (Siehe Fig. 2.)

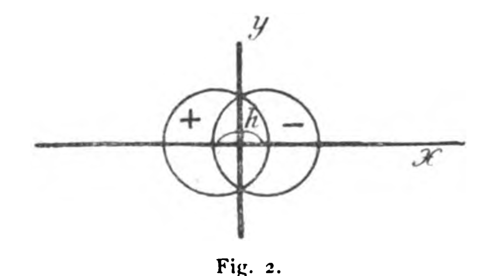


Fig. 2.

Die zweite Partialwelle kann also auf die Wirkung eines „Doppelwechselstromes" zurückgeführt werden.

Ebenso läßt sich

$$\mathfrak{H}_{\varphi 2} = -\frac{8a_2}{\pi k_1^3} e^{int} \frac{1}{r^3} \cos 2\varphi$$

$$= \frac{8}{3\pi k_1^3} \left(\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} \right) e^{int}$$

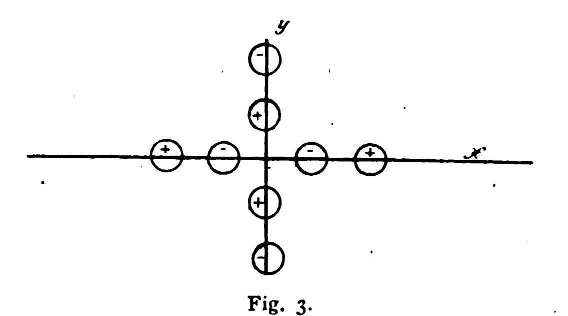


Fig. 3.

schreiben, und dieser Ausdruck entspricht dem Felde von vier Doppelströmen, die in folgender Weise angeordnet sind (Fig. 3).

Hier ist eine zweimalige Verschiebung eingetreten, sowohl in Richtung der x-Achse wie auch der y-Achse, aber, wie das wechselnde Vorzeichen zeigt, in beiden Richtungen im entgegengesetzten Sinne. (Das Feld eines Doppelstromes war proportional $h \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r}\right]$; werden also zwei Doppelströme gegeneinander verschoben, so ist auf der x-Achse

$$h\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r}\right]_{x+h} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{r}\right]_x\right\} = h^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2},$$

und entsprechend auf der y-Achse.)

Ganz entsprechend können die höheren Glieder gedeutet werden, ein vollkommenes Analogon für das Auftreten der „Dipole" bei bekannten anderen Problemstellungen [7], mit denen der nähere Zusammenhang im folgenden Paragraphen besprochen werden soll bei Gelegenheit besonderer Dispersionserscheinungen.

Dabei wird die hier entwickelte Deutungsmöglichkeit besonders nützlich.

Auch über die meßbaren Erscheinungen des vorgelegten Problems können aus der Lösung (6) schon ohne Berechnung einige besondere Aussagen herausgelesen werden, unabhängig von den weiterhin sehr wesentlichen Unterscheidungen, ob der Zylinder dielektrisch oder leitend, die Wellenlänge groß oder klein im Vergleich zum Zylinderradius ist.

a) Die Koeffizienten a_m hängen nach (6c) nur von den Größen $\pi_1 = \pi \varrho \lambda$ (die D.-K. des Außenraumes = 1 gesetzt) und

$$\pi_2 = 2\pi \frac{\varrho}{\lambda} \sqrt{\varepsilon},$$

also solange ε konstant ist bzw. gehalten werden kann, nur vom Verhältnisse ϱ/λ, nicht von ϱ und λ einzeln ab. Also gilt innerhalb der Gebiete von der Wellenlänge praktisch unabhängiger D.-K., d. h. experimentell für weite Bereiche bei dielektrischen Zylindern und für ab-

solut leitende Zylinder, der folgende Ähnlichkeitssatz [14]:

Die Koeffizienten a_m, d. h. die Qualitäten der Erscheinung bleiben dieselben, wenn Zylinderradius und Wellenlänge im nämlichen Verhältnisse geändert werden, vorausgesetzt, daß dabei die D.-K. konstant bleibt. Die Wirksamkeit dieses Satzes wird weiterhin noch mehrfach in Erscheinung treten.

Wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, wird natürlich der Ablauf der Erscheinung erheblich verwickelter. Dort hat dann speziellere Diskussion einzusetzen.

b) Die messende Beobachtung wird nun i. a. aus meßtechnischen Gründen in erheblicher Entfernung vom Zylinder erfolgen, d. h. in Punkten, für welche p_1 eine sehr große Zahl wird. Für großes Argument (mit bedeutender Näherung schon für $p = 5$) kann die zweite Hankelsche Funktion durch den Näherungsausdruck ersetzt werden:

$$\lim_{x=\infty} H_m^{(1)}(x) = i^m \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\, e^{i(\pi/4 - x)},$$

also wird nach (6a)

$$\overline{\mathfrak{E}_1} = e^{int}\{e^{ip_1 \cos\varphi} + e^{i(\pi/4 - p_1)} \Sigma i^m a_m \cos m\varphi\},$$

oder

$$\text{pars real } \mathfrak{E}_1 = \cos[nt + p_1 \cos\varphi] + \sqrt{\frac{2}{\pi p_1}}\{B_\varphi \sin[nt - p_1 + \pi/4] + A_\varphi \cos[nt - p_1 + \pi/4]\},$$

wo zur Abkürzung

$$\Sigma i^m a_m \cos m\varphi = A_\varphi - i B_\varphi$$

gesetzt ist.

Bei den durchgeführten Messungen wurde stets der zeitliche Mittelwert der zuletzt hingeschriebenen Größen gemessen, d. h.

$$\frac{1}{T}\int_0^T \mathfrak{E}_1{}^2\, dt = \mathfrak{E}^2,$$

und für diesen folgt aus der letzten Formel [14]:

$$\overline{\mathfrak{E}^2} = \frac{1}{2}\Big[1 + \frac{3}{\pi p_1}(A_\varphi{}^2 + B_\varphi{}^2) + 2\sqrt{\frac{2}{\pi p_1}}\Big\{A_\varphi \cos\Big(\pi/4 - 2p_1\cos^2\frac{\varphi}{2}\Big) + B_\varphi \sin\Big(\pi/4 - 2p_1 \cos^2\frac{\varphi}{2}\Big)\Big\}\Big]. \qquad (7)$$

Der dritte Summand rechts ist außer für $\varphi = \pi$ eine periodische Funktion der Entfernung vom Ursprunge, d. h. also: es bilden sich Interferenzen aus, außer hinter dem Zylinder in der Richtung der erregenden Welle. Die Intensitätsmaxima folgen am dichtesten aufeinander vor dem Zylinder in der Richtung der erregenden Welle (d. h. $\varphi = 0$), nämlich im Abstande $\frac{\lambda}{2}$; seitlich vom Zylinder (für $\varphi = \frac{\pi}{2}$) wird dieser Abstand gerade eine volle Wellenlänge. Die Intensität der Interferenzerscheinungen nimmt ab wie $r^{-1/2}$. Die Interferenzstreifen verschieben sich sowohl, wenn bei konstanter D.-K. das Verhältnis ϱ/λ, wie auch, wenn bei festgehaltenem ϱ und λ das Material des Zylinders geändert wird. Namentlich dieses Ergebnis reicht über die Ergebnisse der alten Beugungstheorie hinaus.

Für $\varphi = \pi$, d. h. hinter dem Zylinder, sind drei Fälle auseinanderzuhalten [14]; hier ist

$$\overline{\mathfrak{E}_1{}^2}_{\varphi=\pi} = \frac{1}{2}\Big[1 + \lambda\frac{A_\pi{}^2 + B_\pi{}^2}{\pi^2}\frac{1}{r} + (2\lambda)^{1/2}\frac{A_\pi + B_\pi}{\pi}\frac{r}{\sqrt{r}}\Big]. \qquad (8)$$

I. $A_\pi + B_\pi > 0$; dann ist der ganze Klammerausdruck positiv und größer als 1. Berücksichtigt man, daß bei „freier" Strahlung die Ausdrücke mit A_π und B_π gar nicht vorhanden sind, der Klammerausdruck also $= 1$ ist, so erkennt man: In diesem Falle wird durch das Einbringen des Zylinders in den Strahlengang eine Verstärkung der Strahlung erzeugt, die mit wachsendem r sich der Null nähert (Typus I).

II. $A_\pi = B_\pi < 0$ und schon für $r = \varrho$, a fortiori für $r > \varrho$ gelte die Umgleichung:

$$|A_\pi + B_\pi| > \sqrt{\frac{\lambda}{2r}}\,\frac{A_\pi{}^2 + B_\pi{}^2}{\pi}.$$

Dann ist der Klammerausdruck in (8) stets < 1, d. h.: Hinter dem Zylinder entsteht jetzt eine Schwächung („Schatten"), die mit wachsendem r sich der Null nähert.

Jedoch ist hierbei im Vergleich mit I zu beachten, daß die Schattenwirkung nicht von vornherein monoton mit r abnehmen muß, sondern i. a. an der Stelle

$$r = \frac{2\lambda}{\pi}\left(\frac{A_\pi{}^2 + B_\pi{}^2}{A_\pi + B_\pi}\right)^2$$

durch ein Maximum hindurchgeht (Typus II).

III. $A_\pi + B_\pi < 0$, aber für $r = \varrho$ sei

$$|A_\pi + B_\pi| < \sqrt{\frac{\lambda}{2r}}\,\frac{A_\pi{}^2 + B_\pi{}^2}{\pi}.$$

Der Klammerausdruck in (8) ist dann zunächst > 1, wird für ein bestimmtes $r = r_0$ selbst $= 1$ und danach, d. h. für $r > r_0$ wieder < 1. Also gilt:

1. Für $r < r_0$ wird die Strahlung hinter dem Zylinder verstärkt.

2. Für $r = r_0$ herrscht die ursprüngliche Helligkeit.

3. Für $r > r_0$ herrscht asymptotisch verschwindender Schatten.

Der Punkt $r = r_0$ soll der „Indifferenzpunkt" genannt werden. Seine Lage ist der Definition zufolge bestimmt durch

$$r_0 = \frac{\lambda}{2\pi^2}\left(\frac{A_\pi{}^2 + B_\pi{}^2}{A_\pi + B_\pi}\right)^2 \qquad (9)$$

(Typus III).

(Fortsetzung folgt.)

Tagesereignisse.

Naturforscher-Versammlung in Nauheim.

In Ergänzung der Angaben: diese Zeitschr. **21**, 392, 1920 und **21**, 447, 1920, kann noch Folgendes mitgeteilt werden.

An Vorträgen sind nachträglich gemeldet: **28.** H. Weyl (Zürich): Elektrizität und Gravitation, **29.** G. Mie (Halle): Das elektrische Feld eines um ein Gravitationszentrum rotierenden geladenen Partikelchens, **30.** M. v. Laue (Berlin): Über neuere Versuche zur Optik bewegter Körper, **31.** H. Rudolph (Coblenz): Die Masse der Sonne in ihrer Beziehung zur Herkunft der Sonnenenergie, **32.** F. Skaupy (Berlin): Elektrizitätsleitung und Konstitution flüssiger Metalle und Legierungen, **33.** E. Wagner (München): a) Präzisionsmessungen der Quantenkonstante h, b) Das kontinuierliche Röntgenspektrum, **34.** W. Hallwachs (Dresden): Über Lichtelektrizität, **35.** F. G. Archenhold (Treptow): Umkehrung der C-Linie im Sonnenspektrum, **36.** H. Schering (Leutzsch bei Leipzig): Photometer der Firma Goerz zur Messung schwacher Lichtquellen, speziell zur Sternphotometrie, **37.** L. C. Glaser (Berlin): a) Technische Spektralanalyse, b) Optische Beugungsgitter, **38.** W. Nernst (Berlin): a) Zur experimentellen Prüfung der Strahlungsformel, b) Beiträge zur Kenntnis der photochemischen Prozesse, **39.** P. Debye (Zürich): Zerstreuung von Röntgenstrahlen durch Flüssigkeiten, **40.** F. Dammeyer (Hamburg): Über Elektrizität als Kraftquelle auf Leuchtschiffen mit besonderer Berücksichtigung optischer und elektrischer Probleme, **41.** B. Rosenbaum (Berlin): Neuere Ergebnisse der Funkentelegraphie und Vakuumröhren, **42.** S. Herweg (Halle): Die Dipole in flüssigen Dielektrizis.

Die zeitliche Einteilung ist die folgende:

Montag, 20. Sept. Vorstandssitzung, Dienstag, 21. Sept. vorm. Zusammenfassende aneinander anschließende Vorträge: Neuere Forschungen über den Bau der Moleküle und Atome von P. Debye (Zürich), W. Kossel (München) und J. Frank (Berlin); nachm. Geschäftssitzung der D. phys. Ges., Mittwoch, 22. Sept. vorm. Vortrag von Timerding (Braunschweig): Die Reichsschulkonferenz und der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht an den höheren Schulen; nachm., sowie Donnerstag, 23. Sept. vorm. und nachm., Freitag, 24. Sept. vorm. und nachm. Sitzungen der physikalischen Abteilung.

Wünsche in bezug auf Veranstaltung der Vorträge zu richten an Studienrat Dr. Schäfer, Lehrerseminar in Friedberg; Wohnungskarten abzuholen in Seegers Hotel Imperial; Valutaaufschläge für Ausländer werden nicht berechnet.

Ein kurzes Protokoll der Sitzungen erscheint in den Verhandlungen der D. phys. Ges., der ausführliche Bericht der Vorträge und Diskussionen wird von der Physik. Zeitschrift, alter Gewohnheit gemäß, in einer besonderen Nummer gebracht.

Physiker-Kongreß in Moskau. Ein 1919 in Petrograd abgehaltener Physiker-Kongreß hat den „Verein russischer Physiker" gegründet mit dem Ziel: „die Bedingungen der wissenschaftlichen Arbeit zu erleichtern, die Beziehungen zwischen den Gelehrten zu fördern, die Vereinheitlichung und Verbreitung der wissenschaftlichen Publikationen zu bewirken". Vom 1. bis 6. September 1920 findet der erste Kongreß dieses Vereins in Moskau statt unter dem Ehrenpräsidium von A. A. Eichenwald und dem Präsidium von G. W. Wulf. Teilnehmer haben sich zu wenden an das Organisationskomitee Moskau, Moskowaja, Physik. Inst. d. Universität, welches die Quartierzettel verteilt und jedem Teilnehmer 12 000 Rubel aushändigt zur Bestreitung seiner Kosten. Der Verein strebt u. a. an: „die Erlangung ausländischer, wissenschaftlicher Literatur und die Herstellung der Beziehungen mit ausländischen Gelehrten und wissenschaftlichen Instituten".

Preis George Montefiore. Das „Institut électrotechnique Montefiore" in Lüttich, Rue Saint Gilles 31 schreibt für das Jahr 1921 einen internationalen Preis aus im Betrage von etwa 4500 frcs. Preisgekrönt wird die beste Originalarbeit über die wissenschaftlichen Fortschritte und die technischen Anwendungen der Elektrizität. Populäre oder Sammel-Schriften sind ausgeschlossen. Die einzureichenden Arbeiten müssen französisch oder englisch abgefaßt sein und gedruckt oder mit der Maschine geschrieben eingereicht werden.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Tübingen Dr. Rudolf Weinland zum ord. Professor für angewandte Chemie an der Universität Würzburg, Dr. J. E. Coates von der Universität Birmingham zum Professor für Chemie an der Universität Swansea, der Privatdozent an der Universität Berlin Professor Dr. James Franck zum ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Göttingen, die a. o. Professoren an der Universität Breslau Dr. Erich Waetzmann (Physik) und Dr. Julius Meyer (Chemie) zu ordentlichen Professoren an der gleichen Hochschule.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. P. Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 18. 15. September 1920. 21. Jahrgang.
Redaktionsschluß für No. 20 am 10. September 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Beiträge zur Farbenlehre. III.

Bemerkungen zur Ostwaldschen Theorie der Pigmentfarben.

Von K. W. Fritz Kohlrausch.

Von der Voraussetzung ausgehend, „daß man sich bis jetzt außerstande gesehen hat, eine Farbe nach Maß und Zahl zu kennzeichnen" und „daß ein grundsätzlicher Aufbau der Farbenlehre von ihren Elementen aus notwendig ist, um dieses Gebiet der exakten Wissenschaft anzugliedern", hat W. Ostwald[1]) versucht eine Theorie der Pigmentfarbe aufzustellen. In den beiden vorhergehenden Mitteilungen[2]) habe ich gezeigt, daß diese Voraussetzung eine irrige ist und daß Maß und Zahl der Farbe sehr wohl ihren Platz haben in der Helmholtzschen Theorie. Gerade diese ihre Fähigkeit zu quantitativen Aussagen ist es ja, die sie vor der phänomenologischen Auffassung Herings auszeichnet. Eine Neuorientierung der Farbenlehre aus diesem Grunde ist daher nicht nötig. Und daß im speziellen die von Ostwald vorgeschlagene Neuorientierung keine glückliche ist, glaube ich im folgenden zeigen zu können.

Grundlage für eine Systematik der Pigmentfarbe muß selbstverständlich die Remissionsfunktion sein. Als Beispiel, an welchem die notwendigen Erläuterungen durchgeführt werden sollen, betrachte man Fig. 1, in der die ausgezogene Kurve die Remissionsfunktion darstellt für das reinste goldgelbe Pigment pa Nr. 13, das der Ostwaldsche Farbenatlas enthält und dessen Farbton (vgl. Tab. IV in der 1. Mitteilg.) einem Spektrallicht der Wellenlänge $\lambda = 585$ entspricht. Es sind deutlich zwei Bezirke zu unterscheiden, das Remissionsgebiet (abgekürzt: R.G.) für $\lambda > 570\,\mu\mu$, wo etwa 75 Proz. derjenigen Lichtmenge reflektiert wird, die das weiße Vergleichspapier reflektiert, und das Absorptionsgebiet (A.G.) für $\lambda < 570\,\mu\mu$, wo der reflektierte Betrag nur 8 Proz. erreicht und 92 Proz. absorbiert werden. Nun versteht Ostwald unter einem idealen Pigment ein solches, wo im R.G. die Remission dieselbe ist, wie die eines ideal weißen Körpers, also die Ordinate den Wert 1 bekommt, und wo im A.G. die Absorption dieselbe ist, wie die eines absolut schwarzen Körpers, also das ganze Licht verschluckt und die Ordinate gleich Null wird. Die Abweichungen von diesem Idealfall werden als Schwärzlichkeit bzw. Weißlichkeit definiert. Denn würde das remittierte Licht dadurch geschwächt, daß ein Teil der Pigmentkörner durch absolut schwarze Körner ersetzt wird, so werden die Ordinaten der ganzen Kurve gegen Null streben; im A.G. sind sie bereits Null, hier ändert sich nichts. Im R.G. geht die gemeinsame Ordinate um so mehr zurück, je mehr von den idealen Pigmentkörnern durch lichtloses Schwarz verdrängt werden. In Wirklichkeit werden die Verhältnisse ein wenig geändert dadurch, daß vollkommen schwarze Pigmente nicht zur Verfügung stehen und außerdem die stets vorhandene Remission an der äußersten Oberfläche, die cet. par. für bunte und unbunte Pigmente gleich ausfällt, nicht vermieden werden kann. Statt dem idealen Werte Null werden alle Ordinaten einem kleinen positiven Wert zustreben, so wie dies in Fig. 1 der Fall ist, wo die punktierten Kurven an solchen schwärzlichen Abkömmlingen, bezeichnet mit pc, pe, pg ...., des Goldgelb pa gemessen wurden. Bestimmt man demnach auf irgend einem Wege die Höhe h_r der Ordinate im R.G., so gibt ihre Abweichung vom idealen Wert, das ist also $1 - h_r = s$, jenen Bruchteil sämtlicher Körner an, die absolut schwarz sind. Ist z. B. $h_r = 0{,}75$, so ist ein Viertel der Körner

1) Diese Zeitschr. 17, 322 u. 352, 1916.
2) Diese Zeitschr. 1920.

schwarz; die anderen drei Viertel können weiß oder bunt sein, da beide Kernarten im Idealfall die Ordinate 1 im Remissionsgebiet haben. — Ersetzt man andererseits einen Teil der Körner eines idealen Pigmentes durch weiße Körner, so kann sich im R.G., wo die Remission ohnedies schon ideal ist, nichts ändern, und nur im A.G. wird die Ordinate im selben Maße gehoben, als die hier lichtlosen Pigmentkörner durch Weiß verdrängt werden; sind sie gänzlich ersetzt, dann ist auch im A.G. die Ordinate überall eins. Erfolgte die Zumischung von Weiß nicht zu einem idealen Pigment, sondern zu einem solchen, das bereits Schwarz enthielt ($h_r < 1$), so wird der Erfolg nicht nur eine Erhöhung der Ordinate im A.G., sondern auch im R.G. sein, da die Remission auch hier durch das allmähliche Verdrängen der schwarzen Körner verbesserungsfähig ist. Man vergleiche die gestrichelten, mit *la, ia, ga* . . . beschriebenen Kurven der Fig. 1, die für die weißlichen Ab-

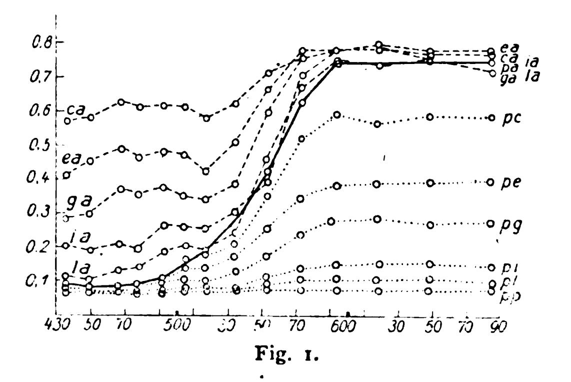


Fig. 1.

kömmlinge des *pa* aufgenommen wurden. Mißt man also wiederum die Abweichung der Ordinate h_a im A.G. vom Idealwerte Null, so erhält man in $h_a = w$ ein Maß für die Anzahl der zugemischten weißen Körner. Ist z. B. $h_a = 0{,}33$, so ist ein Drittel der Körner weiß. Die anderen zwei Drittel können bunt oder schwarz sein, da beide Arten sich im A.G. gleichartig verhalten, nämlich lichtlos sind. Hat man aber sowohl h_a als h_r bestimmt, so ist der Aufteilungsschlüssel gegeben, denn in unserem Beispiel wären 25 Proz. schwarze und 33 Proz. weiße Körner, also muß der Rest, das sind 42 Proz., der Körner bunt sein. — Ist Oberflächenreflexion vorhanden, oder sind die verwendeten Kernarten nicht ideal schwarz, weiß oder bunt, so wird man aus den Größen h_a und h_r nicht mehr auf die wahre Kernverteilung schließen, sondern nur sagen können: das Pigment remittiert so, wie wenn 25 Proz. der Körner ideal schwarz, 33 Proz. ideal weiß, 42 Proz. ideal bunt wären. Oder man gibt das Resultat direkt in Farbanteilen an und sagt:

$$h_a = w = \text{Weißgehalt},$$
$$1 - h_r = s = \text{Schwarzgehalt},$$
$$1 - s - w = h_r - h_a = f = \text{Farbgehalt}.$$

So entsteht die Beziehung

$$s + w + f = 1,$$

welche Grundgleichung das ganze Ostwaldsche Farbensystem beherrscht und in ihrer Bedeutung für die Farbenlehre wohl nicht ganz zutreffend mit der Stellung des Ohmschen Gesetzes in der Elektrizität verglichen wird. — Verallgemeinernd wird nun jede Pigmentfarbe als eindeutig definiert angesehen, für die der Farbton durch Vergleich mit einem numerierten Standardfarbkreis, der Weißgehalt durch Bestimmung der kleinsten Ordinate h_a, der Schwarzgehalt durch Bestimmung der größten Ordinate h_r gegeben ist. Dabei erfolgt die Eruierung von h_a und h_r durch den Vergleich des Pigmentes mit einer Grauskala unter Vorschaltung von Sperr- und Passier-Filtern. Diese experimentelle Durchführung ist zwar primitiv, aber jedenfalls rasch und einfach und führt zu Zahlenwerten, die denen der exakten und gleich verwerteten Messung nicht viel nachstehen, wie folgendes Beispiel zeigt. Aus Fig. 1, bzw. den dazu gehörigen Zahlen, wurden die Werte für h_a (Minimalwert) und h_r (Maximalwert) aufgesucht und die daraus sich ergebenden Daten für $w = h_a$ und $s = 1 - h_r$ zusammengestellt mit den Angaben, die auf der Rückseite der untersuchten Farbblättchen angeführt sind. Erstere sind unter F.K., letztere unter W.O. eingeschrieben. Bis auf die mit * bezeichneten Zahlen ist die Übereinstimmung recht gut, für praktische Zwecke jedenfalls genügend. — Man wird zugeben müssen, daß diese Beschreibung des Pigmentes und seiner Abwandlungen eine anschauliche und im ersten Moment bestechend einfache ist. —

		weißliche Abkömmlinge							schwärzliche Abkömmlinge					
		ca	*ea*	*ga*	*ia*	*la*	*na*	*pa*	*pc*	*pe*	*pg*	*pi*	*pl*	*pn*
F.K.	w	0,57	0,42	0,28	0,19	0,10	0,08	0,08	0,06	0,05	0,07	0,06	0,05	0,05
		0,60	0,44	0,27	0,16	0,10	0,06	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04	0,04
F.K.	s	0,20	0,21	0,23	0,22	0,25	0,25	0,25	0,41	0,60	0,72	0,85	0,89	0,92
W.O.		0,20	0,16	0,15	0,19	0,08*	0,23	0,07*	0,40	0,60	0,75	0,84	0,90	0,94

Trotzdem ist sie grundsätzlich zu verwerfen. Denn die obige Definitionsgleichung stützt sich nur auf zwei ausgezeichnete Punkte der Remissionskurve; von der übrigen Kurvenform weiß die Farbenprüfung nichts. Zweifellos ist es aber der ganze Funktionsverlauf, der die Eigenschaften des Pigmentes bestimmt, und nicht nur ihr größter und kleinster Wert. Um daher der Grundgleichung die Daseinsberechtigung zu schaffen, ist Ostwald gezwungen, allen vorkommenden Pigmenten eine bestimmte Form der Remissionskurve vorzuschreiben, u. zw. derart, daß die Funktion überhaupt nur jene zwei Werte annehmen darf und daß die Breite der beiden Bezirke ganz bestimmten Bedingungen genügt. Man denke sich die Spektralfarben ergänzt durch die Purpurtöne und denke sich dieses in sich zurücklaufende Farbenband zu einem Farbenkreis zusammengebogen, auf dem die Farbtöne so verteilt werden, daß, wie wir dies gewohnt sind, komplementäre Farben auf den Enden der Durchmesser zu liegen kommen und so den Kreis in zwei gleiche Hälften, „Farbenhalbe", teilen. Und nun verlangt Ostwald: „daß zu einer gesättigten Farbe sämtliche Farben zusammenwirken müssen, welche innerhalb einer Hälfte des Farbenkreises liegen". Es ist nicht ganz klar, ob dieser Satz, der zwar (l. c. S. 328) ausdrücklich als Definition der gesättigten Farben deklariert wird, auch wirklich als Definition gemeint ist. Wäre das der Fall, so müßte darin einerseits etwas über den Grad des Zusammenmischens ausgesagt werden, andererseits müßte die Grundgleichung sich auf sie beziehen und eventuelle Abweichungen von der so definierten Sättigung berücksichtigen können. Beides trifft nicht zu, wohl erwähnt Ostwald an einigen Stellen, daß manche Pigmente Absorptionen zeigen, die über ein Farbenhalb hinausgehen: „Die Farbe ist alsdann ein Gemisch von gesättigter Farbe mit vorwiegend Schwarz" (S. 360). Diese Konstatierung ist aber offenbar eine außerhalb seines Meßprinzipes gewonnene Erfahrung, denn aus der Bestimmung von h_a und h_r ist sie nicht zu gewinnen. Es muß somit die Vorschrift über die Form der Remissionsfunktion, weil weder in der Grundgleichung noch in ihrer praktischen Verwendung bei der Farbenprüfung Abweichungen von der Vorschrift vorgesehen sind und berücksichtigt werden, als eine Voraussetzung aufgefaßt werden, und zwar als eine zur Existenzberechtigung der ganzen Theorie unbedingt nötige Voraussetzung.

Es ist mir nun nicht verständlich, wie Ostwald bei seiner gewiß sehr großen Erfahrung diesbezüglich zu dem Schluß kommen kann: „daß er (der Farbenhalb-Satz) im allgemeinen die Tatsachen richtig darstellt, scheint mir außer Zweifel zu stehen". Denn daß dies nicht, und zwar bei den blauen und grünen Pigmenten, die gut 40 Proz. aller Farben im Atlas einnehmen, auch nicht angenähert zutrifft, sieht man aus Fig. 2, wo für einige, den ganzen Farbkreis umfassende Repräsentanten die Remissionskurven eingezeichnet sind. Es

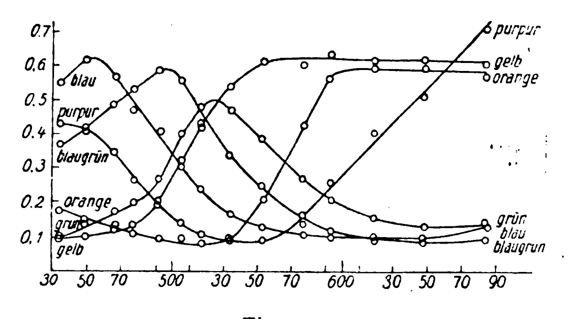


Fig. 2.

sind die Farben aus dem Farbkreis *nc* mit der Bezeichnung: Nr. 4 (gelb); Nr. 21 (orange); Nr. 38 (purpur); Nr. 54 (blau); Nr. 71 (blaugrün); Nr. 88 (grün). Weitere Beispiele sind aus den Tabellen I, II, III (1. Mitt.) erhältlich. Die Gruppe von gelb bis orange erfüllt die Voraussetzung, abgesehen von dem wenig schroffen Übergang zwischen A.G. und R.G., ganz gut; es sind „Vollfarben"; alle anderen Farben aber nicht mehr. Wie nun, wenn man tatsächlich ein Grün herstellt, das gleichen Farbton wie Nr. 88 hat und bei gleichem h_r und h_a eine Vollfarbe mit dem vorgeschriebenen breiten R.G. ist? Die Farbenprüfung wird keinen Unterschied machen, da sie nur das unveränderte h_a und h_r bemerkt. Wohl aber wird das Auge einen Unterschied bemerken, denn die Erregung im Auge hängt von der ganzen Kurvenform, nicht nur von den extremen Ordinaten ab. Ob man eine grüne Vollfarbe wirklich aufzeigen kann oder nicht, ist natürlich irrelevant für die prinzipielle Frage. Es kann ja morgen schon der Fall sein, wenn es auch heute noch nicht zutrifft; grundsätzliches Hindernis besteht keines. Und jedenfalls wird nach der Grundgleichung eine Farbe ganz in der gleichen Weise behandelt, ob sie eine Vollfarbe ist oder nicht; das Reinheitskriterium ist für das Gelb Nr. 4 und das Grün Nr. 88 dasselbe, trotz ihrer ganz verschiedenen Eigenschaften. Allein schon dieser Umstand, das Nichtzutreffen einer notwendigen Voraussetzung, scheint mir genügend zu sein, um vom prinzipiellen Standpunkt aus die Ostwaldsche Theorie abzulehnen.

Hätte man es aber selbst nur mit Vollfarben zu tun, so bleiben immer noch eine Reihe schwerwiegender Einwände. Es wird z. B. der nach Abzug des gemeinsamen kleinsten Wertes h_a überbleibende Remissionsrest $h_r - h_a = f$ als „reine Farbe" angesehen. Hier liegt eine Begriffsverwechslung vor, die dem Leser dieser Zeilen vielleicht weiter oben schon aufgefallen ist. Wohl darf man schließen, daß nach Abzug des dem weißen Kornanteiles proportionalen h_r nunmehr nur noch (ideal) farbige Pigmentkörner remittieren, daß die Remission des Pigmentes gereinigt ist von der Remission zugemischter weißer Körner. Deswegen braucht aber diese so gereinigte Remission noch nicht eine von weiß freie Empfindung hervorzurufen, also selbst „rein" zu sein. Nun steht das Definieren ja in gewissem Grade frei, soll aber doch im Einklange mit der Erfahrung bleiben. Unsere Erfahrung sagt aber, daß, wenn zwei benachbarte Spektralfarben (außer wenn sie in den geradlinigen Endstrecken, vgl. Fig. 1, 1. Mitt., liegen) additiv gemischt werden, das Ergebnis immer weißlicher ist, als jene Spektralfarbe, deren Farbton mit der Mischung übereinstimmt; die Mischung liegt also im Innern der reellen Farbfläche (1. Mitt.) und dem Weiß näher. Je breiter ein zusammenhängendes Spektralgebiet, das gemischt wird, ist, desto weißlicher wird die Mischfarbe. Und zwar um so deutlicher, aus je stärker gekrümmten Teilen der im Farbdreieck (Fig. 1) eingetragenen Spektralkurve die Komponenten genommen werden. Diese Erfahrung kann man sich jederzeit am Helmholtzschen Farbenmischapparat oder am Farbenkreisel verschaffen. Und entgegen dieser Erfahrung werden alle Farben, für die $h_r - h_a$ gleich ist, als gleich rein bezeichnet; es wird nicht berücksichtigt, daß das überall um h_a verkleinerte Remissionsgebiet immer noch weiß produziert und es werden z. B. alle Vollfarben als völlig rein mit dem gemeinsamen Reinheitswert 1 angesehen. Man vergleiche dazu die in Fig. 1, 1. Mitt., eingetragene Lage der Vollfarben im Farbendreieck, die in Übereinstimmung mit der Erfahrung die Inkonstanz der Weißlichkeit entlang dem Farbenkreis sofort erkennen läßt.

Ebensowenig nimmt die Definitionsgleichung, die den manuell gleichartigen Vorgang eines Zumischens von Pigment-Weiß oder Pigment-Schwarz auch gleichartig wertet, Rücksicht darauf, daß in den optischen Konsequenzen zwischen beiden Handlungen ein grundlegender Unterschied besteht: Das Zumischen von Schwarz bedeutet nur eine quantitative Änderung der Remissionskurve, indem alle Ordinaten um den gleichen Bruchteil verkleinert werden, die Remissionsfunktion also mit einem gemeinsamen Faktor multipliziert wird. Das Zumischen von Weiß dagegen bewirkt eine qualitative Änderung, indem die Proportionen der Ordinaten untereinander geändert werden, also eine neue Funktion entsteht. Erstere Veränderung kann stets durch eine entsprechende Änderung der Lichtstärke rückgängig gemacht werden, letztere nie. Daß die Empfindung dementsprechend sehr wohl einen Unterschied macht, konstatiert Ostwald selbst auf S. 359: Farben, deren unbunter Anteil aus 50 Proz. Weiß besteht, sehen viel farbloser aus als solche, die 50 Proz. Schwarz enthalten. Das ist keine „Sache der mangelnden Erfahrung" vielmehr ein Hinweis auf die mangelhafte Anpassung der Beschreibung an die Tatsachen.

Es scheint mir, als ob Ostwald in dem Umstand, daß sich experimentell die Neutralisationsverhältnisse zweier Komplementärfarben gleich ergeben haben mit ihren Reinheitsverhältnissen, einen Beweis gefunden zu haben glaubt, daß dem Reinheitsbegriff in der von ihm eingeführten Definition eine gewisse Realität zukäme. Doch ist diese experimentelle Tatsache eine selbstverständliche Folgerung seiner der Definition zugrunde liegenden Voraussetzung über das „Farbenhalb". Denn zwei komplementäre Vollfarben, die also jede exakt ihr Farbenhalb reflektieren, stückeln, additiv gemischt, ihre Remissionsgebiete zu einem das ganze Spektrum umfassenden R.G. zusammen; sie geben also dann miteinander weiß, wenn die Summe der Remissionsordinaten für alle Wellenlängenstellen die gleiche ist. Es sei

h_r die Ordinate im R.G.,
h_a die Ordinate im A.G. für die erste Farbe.
h'_r die Ordinate im R.G.,
h'_a die Ordinate im A.G. für die zweite Farbe,

so muß bei Mischung gleicher Anteile

$$h_r + h'_a = h_a + h'_r$$

sein, wenn die Mischung neutral sein soll. Daher

$$h_r - h_a = h'_r - h'_a$$

oder nach der Reinheitsdefinition

$$r = r'.$$

Das heißt, zwei Vollfarben geben nur dann im Verhältnis 1 : 1 gemischt weiß, wenn ihre nach Ostwald definierten Reinheiten gleich sind. In der Tat geben die in Fig. 1, 1. Mitt., eingetragenen Vollfarben, die durch entsprechendes Planimetrieren der Grundempfindungskurven erhalten wurden, Neutralisationsverhältnisse, die — berechnet aus ihren Abständen vom Weißpunkt und aus der ihnen zukommenden Gesamterregung $r + b + g$ — zwischen 1,00 und 1,04 liegen, während die Reinheitsverhältnisse

definitionsgemäß 1 sind. [Ein Widerspruch in der Hinsicht, daß die Reinheitsbestimmung absoluten, die Neutralisationsbestimmung individuellen Charakter hat, besteht nicht, denn je nach dem Individuum (oder je nach der Beleuchtung) ist die Einteilung des Farbenkreises und damit der Farbton der Komplementärfarben verschieden.] Aus dem Eintreffen dieser geforderten Beziehung im Experiment kann nur geschlossen werden, daß die Voraussetzungen erfüllt waren. Man kann daher folgern, daß in diesem Falle die verwendeten Pigmente — welche es sind, wird nicht angegeben — nahe Vollfarben gewesen sein müssen, sonst hätten sich nicht nur im grünen Teil Abweichungen ergeben.

Schließlich möchte ich noch einen Punkt erwähnen, der mir, so sehr ich mir Mühe gegeben habe, mich in den Gedankengang Ostwalds einzuleben, unverständlich geblieben ist. Ostwald schreibt so, wie wenn seine Pigmenttheorie die „Bezogenheit" einer Farbe erfassen würde. Nun ist es doch offenbar unmöglich ein vorgelegtes Pigment durch drei Koordinaten so zu definieren, daß dadurch im vorhinein alle jene Veränderungen charakterisiert sind, die sein Aussehen erleidet, wenn die Umgebung des Pigmentes variiert wird. Unter „Bezogenheit" versteht man aber doch die Abhängigkeit des Aussehens von der Art des Untergrundes, die Bewertung des Pigmentes relativ zu demselben. Vielmehr scheint mir das, was Ostwald Bezogenheit nennt, darin zu bestehen, daß auf eine ganz bestimmte Umgebung, nämlich auf die jeweilige „ideale Vollfarbe" gleichen Farbtones relationiert wird. In dieser Art bezogen ist aber schließlich jede Messung; irgendein grundsätzlicher Vorzug gegenüber der üblichen Darstellung, die sich allerdings nur mit einer Bezugsfarbe (dem Weiß) begnügt, scheint mir darin nicht zu liegen. Ebensowenig verstehe ich, warum die Einführung des Begriffes „Schwarz" statt „Dunkelheit" diese Erweiterung der Farbcharakteristik mit sich bringen soll, wie dies der Fall wäre, wenn es sich hier wirklich um die zahlenmäßige Beschreibung bezogener Farben handeln würde. Ich sehe nur, daß die Möglichkeit, verschiedene Farbtöne miteinander auf Helligkeit zu vergleichen, in den Kennzahlen nicht enthalten ist; wenn dies nun auch für die Agnoszierung einer Pigmentfarbe nicht benötigt wird, und wegen der Ausschaltung der Individualität gewisse Vorteile mit sich bringt, so ist der Verzicht darauf doch nur eine Selbstbeschränkung, keine Erweiterung.

Zusammenfassend möchte ich sagen: Die Ostwaldsche, auf der Grundgleichung

$$f + w + s = 1$$

beruhende Pigmenttheorie mag praktisch zu genügend charakteristischen Kernziffern führen; sie ist einfach, anschaulich und in erster Annäherung entsprechend. Als ein Fortschritt in der Erkenntnis kann sie dagegen nicht angesehen werden. Wegen der nur sehr mangelhaft erfüllten Voraussetzung über die Form der Remissionsfunktion, auf der sie basiert, und wegen der Widersprüche mit der Erfahrung, zu denen ihre Grundlagen führen, ist sie keineswegs geeignet, die logisch exakte Beschreibung, die die Helmholtzsche Theorie ermöglicht, zu ersetzen oder gar zu verdrängen. Sie liefert nicht mehr als eine, für viele Zwecke und für die erste Orientierung vielleicht ganz geeignete Faustregel zur Klassifizierung der Pigmente. Als solche mag sie vom Standpunkte des Praktikers aus begrüßenswert erscheinen. Vom wissenschaftlichen Standpunkte aus ist sie es nicht. Denn abgesehen von ihrer Unzulänglichkeit schafft sie unnötigerweise eine tiefe Kluft zwischen Pigmentfarben und farbigen Lichtern und ist dadurch geeignet neuerlich Verwirrung in die von Helmholtz erreichte Ordnung auf dem Gebiete der Farbe zu bringen.

Wien, aus dem II. physikalischen Institut der Universität.

(Eingegangen 22. März 1920.)

Die Polarität einer Aluminiumzelle.

Erste Mitteilung.

Von Franz Streintz.

Bei der Elektrolyse verdünnter Schwefelsäure wird an einer Anode aus Aluminium eine scheinbare galvanische Polarisation hervorgerufen, die innerhalb weiter Grenzen der elektromotorischen Kraft der polarisierenden Kette proportional ist. Da sich die Anode dabei mit einer grauen schwer zu beseitigenden Schicht bedeckt, so wurde angenommen, daß sie ein Dielektrikum darstellt. Die beobachtete hohe Polarisation würde sich demnach aus der galvanischen Polarisation im engeren Sinne und einer darüber gelagerten dielektrischen Polarisation zusammensetzen, da an der Anode ein Kondensator entsteht, dessen Dielektrikum aus der mit Säure getränkten Schicht, dessen Belegungen aus dem Metall und der Säure bestehen[1]).

In neuerer Zeit wurde in der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt von Günther

1) F. Streintz, Wied. Ann. **32**, 119, 1887; **34**, 751, 1888.



Schulze[1]) eine Reihe eingehender und wertvoller Untersuchungen über das Verhalten von Aluminium-Anoden in verschiedenen wässerigen Lösungen ausgeführt. Aus den Ergebnissen konnte gefolgert werden, daß das Dielektrikum nicht aus einer einfachen schlecht leitenden Haut besteht, sondern aus Sauerstoffgas, das sich in verschiedenen Schichten dieser Haut einlagert.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit besteht nicht darin, die Schulzeschen Ergebnisse einer Prüfung zu unterziehen oder sie weiter zu entwickeln, es soll vielmehr nur festgestellt werden, ob an einer Aluminium-Anode ähnliche Erscheinungen auftreten, wie sie an den Grenzflächen zwischen Sulfidkristallen und ihren metallischen Zuleitungen zu beobachten waren[2]). Zwischen Metall und Kristall befindet sich von Haus aus eine gasförmige Schicht eingebettet, die die Ursache des Übergangswiderstandes ist, an Aluminium dagegen wird diese nach Schulze gleichfalls gasförmige Schicht erst durch elektrolytische Vorgänge primärer und sekundärer Natur erzeugt, die bei der Mannigfaltigkeit der möglichen Prozesse beim Umsatz des Metalles mit Sauerstoff, Hydroxyl und Schwefelsäure im Dunkeln liegen.

Im Schließungskreise einer elektromotorischen Kraft liegt also in beiden Fällen ein Gaskondensator von großer und veränderlicher Kapazität. Um zu einem Vergleich zu gelangen, waren die Vorgänge in einer Aluminiumzelle in gleicher Weise zu verfolgen, wie es bei den Untersuchungen über die unipolare Leitung an Kristallen geschehen ist. Es mag gleich vorweggenommen werden, daß die Beziehungen zu Stromstärke und Ladungspotential nicht nur ähnlich liegen, sondern vollkommen gleich sind.

Wird dieselbe Bezeichnung wie bei den Versuchen an Kristallen gewählt, so stellt i_{21} die Stromstärke dar, wenn Aluminium Kathode, i_{12} jene, wenn es Anode ist. Der echte Bruch

$$U = \frac{i_{21} - i_{12}}{i_{21}}$$

soll wieder Strompolarität heißen, während das Produkt aus dem Ladungspotential V und der Strompolarität UV Leistungspolarität genannt werden soll.

Die Zelle bestand aus einem Becherglase von 250 cm³ Fassungsraum und war mit verdünnter Schwefelsäure von 7 Gewichtsprozenten H_2SO_4 gefüllt. Zwei ebene Aluminiumbleche von $5{,}5 \times 4$ cm² Fläche und einer Dicke von 0,9 mm, die miteinander durch einen Metallbügel verbunden waren, befanden sich nahe am Rand des Bechers und schlossen ein in der Mitte der Zelle hängendes Platinblech von gleicher Oberfläche ein. Die Bleche tauchten vollständig in den Elektrolyt ein und befanden sich in Abständen von 2 cm voneinander. Ein Deckel aus einer Korkplatte schloß das Becherglas ab. Er war mit Löchern zur Aufnahme der Zuleitungsdrähte versehen. Den Strom lieferte eine Akkumulatorenbatterie von Bornhäuser. Die Stromstärken und -spannungen wurden mit Weston-Voltmetern gemessen.

Die Ergebnisse.

1. Das Gesetz der Strompolarität (Zusammenhang zwischen i_{21} und i_{12}). Die Messungen wurden bei einer Stromstärke $i_{21} = 0{,}05$ Weber begonnen und in zehn gleichen Stufen von 0,01 bis 0,15 Weber fortgesetzt. In der Richtung i_{21} stellte sich die Voltmeternadel sofort ruhig ein; in der Richtung i_{12} bedurfte es dazu etwa zehn Minuten. Bei Vertauschen der Stromrichtung war zunächst, wie an Kristallen, bei denen nur eine Grenzschicht Übergangswiderstand besaß, $i_{12} = i_{21}$. Dann trat ein langsames, bald beschleunigtes und schließlich verzögertes Sinken von i_{12} ein. Stoßweise Änderungen waren nicht wahrzunehmen, woraus geschlossen werden darf, daß innerhalb der gewählten Spannungen Durchbrüche durch die Grenzschicht nicht entstanden sind. Mit zunehmender Stromstärke fand eine Vergrößerung der Strompolarität statt in gleicher Weise wie an Kristallen, so daß auch hier dieselbe Beziehung zwischen den Stromstärken:

$$i_{12} = -\frac{a}{2} + \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + b i_{21}}$$

gilt. Polarisiert wurde der Reihe nach mit 14, 28, 42 und 56 Volt.

Die Versuche wurden an drei aufeinanderfolgenden Tagen ausgeführt. Sobald eine Beobachtungsreihe abgeschlossen war, wurden die Elektroden aus der Lösung herausgehoben, mit Wasser abgespült und an der Luft getrocknet. Kurze Zeit vor jeder folgenden Beobachtungsreihe wurden die Elektroden wieder in die Säure versenkt. Die Aluminiumbleche hatten sich mit der grauen Schicht bedeckt, auch waren einige dunklere Streifen, die vom oberen Rande des Metalles mit einer leichten Krümmung nach dem unteren verliefen, aufgetreten. Diese Streifen nahmen nach jeder Versuchsreihe etwas an Breite zu, die Platten, die anfänglich Oberflächenfarben zeigten, verfärbten sich allmählich in ein tieferes Grau.

1) G. Schulze, Ann. d. Phys. (4) **21**, 929, 1906; **22**, 543, 1907; **31**, 1053, 1910; Zeitschr. f. Elektrochemie **20**, 592, 1914.

2) F. Streintz und A. Wesely, diese Zeitschr. **21**, 42 und 316, 1920; F. Streintz, ebenda **21**, 367, 1920.

V	i_{21}	i_{12} beob.	a	b	i_{12} ber.	U
14	0,0490—0,1500	0,0443—0,1011	0,1232	0,1515	0,0443—0,1012	0,096—0,326
28	0,0615—0,1500	0,0567—0,1209	0,3900	0,4120	0 0567—0,1209	0,078—0,194
42	0,0500—0,1500	0,0495—0,1360	0,8519	0,8956	0,0497—0,1360	0,0100—0,093
56	0,0500—0,1500	0,0498—0,1390	1,1190	1,1680	0,0499—0,1392	0,004—0,073

Unter den vielen Zahlen sind nur drei vorhanden, bei denen die Abweichungen der beobachteten Werte von i_{12} von jenen der nach der Gleichung berechneten knapp ein halbes Prozent betrugen. Alle übrigen lagen darunter. Das Gesetz der Strompolarität tritt somit geradezu plastisch hervor. Aus diesem Grunde kann auf eine Wiedergabe sämtlicher Zahlen verzichtet werden; es wird genügen, nur jene Werte anzuführen, die bei den geringsten und größten Stromstärken ermittelt wurden.

In der obigen Tabelle sind in der ersten Reihe die gewählten Spannungen V in Volt, in der zweiten und dritten die beiden Grenzwerte für die Stromstärken in Weber angegeben. Die Koeffizienten a und b enthält die vierte und fünfte, die berechneten Werte von i_{12} die sechste und die entsprechenden Strompolaritäten U die siebente Reihe.

Bei einer Spannung $V = 10$ Volt traten große Unregelmäßigkeiten auf. Das gesetzmäßige Verhalten konnte bei den Schwankungen, die insbesondere i_{12} zeigte, nicht nachgewiesen werden.

2. Das Gesetz der Leistungspolarität: $UV =$ konst. Bildet man die Produkte der in der Tabelle angegebenen Werte von U und V für $i_{21} = 0{,}15$ Weber, so erhält man der Reihe nach 4,56, 5,43, 3,91 und 4,09. Die für Blei- und Silberglanz gefundene Beziehung scheint also nicht zu gelten. Allein die Versuchsbedingungen waren möglichst ungünstig, da zwischen den herausgegriffenen Werten eine Zeit von einem Tage und darüber gelegen, außerdem die Zelle stundenlang bei anderen Stromstärken in Verwendung gestanden und nach jeder Versuchsreihe entleert worden war. Man hat bei Prüfung auf die Leistungspolarität der Zelle in gleicher Weise vorzugehen, wie an Kristallen, nämlich in ununterbrochener Reihe bei konstant erhaltenem i_{21} und steigendem Potential die dazu gehörigen Werte von i_{12} zu messen. Auf diesem Wege konnte das Gesetz bestätigt werden. Nur ist der ansteigende Ast von UV auf ein weitaus größeres Potentialintervall ausgedehnt, als an Kristallen; dementsprechend erreichte die Leistungspolarität erst bei viel höheren Spannungen einen konstanten Wert.

In Fig. 1 sind zwei Kurven ersichtlich. Die eine (gestrichelte) bezieht sich auf Silberglanz und gibt die in der zweiten Mitteilung über die unipolare Leitung an Kristallen erhaltene Kurve (Fig. 2) wieder[1]). Der Maßstab für V als Abszissen, $\overline{UV}$ als Ordinaten ist in der nachstehenden Fig. 1 in Klammern gesetzt. Die zweite Kurve bezieht sich auf die Aluminiumzelle. Die Werte für V und UV sind nicht eingeklammert; durch Kreise sind die beobachteten Werte erkenntlich gemacht. Die konstante Stromstärke i_{21} betrug 0,01 Weber. Von ungefähr 120 Volt aufwärts wird $UV =$ konst.

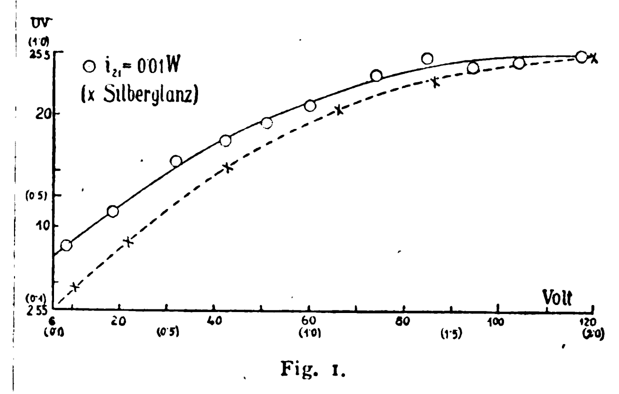


Fig. 1.

Der Anstieg ging recht regelmäßig vor sich. Er ist in dem reduzierten Maßstabe weniger steil als an Silberglanz, doch ist die Ähnlichkeit beider Kurven unverkennbar. Fig. 2 gibt Messungen an, die bei größeren Stromstärken $i_{21} = 0{,}05$ Weber (die beobachteten Werte sind schwarze Kreise) und $i_{21} = 0{,}1245$ Weber (weiße Kreise) ausgeführt wurden. Die in Klammern gesetzten Ziffern beziehen sich auf $i_{21} = 0{,}05$ Weber.

Zwischen i_{21} und der Spannung, bei der UV

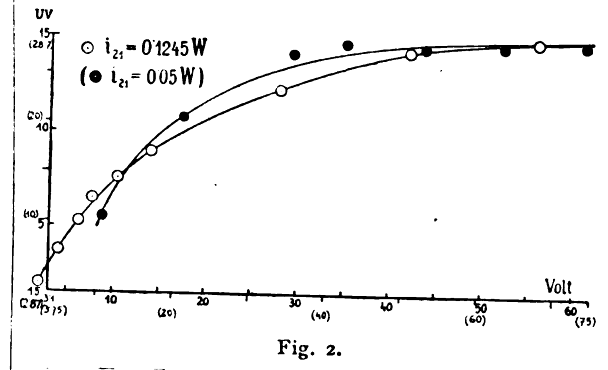


Fig. 2.

1) F. Streintz und A. Wesely, diese Zeitschr. **21**, 320, 1920.

konstant wird, scheint die Beziehung zu bestehen, daß sie mit wachsender Stromstärke geringer wird. Denn es wurde gefunden:

i_{21}	V
0,01 Weber	120 Volt
0,05 „	75 „
0,1245 „	60 „

Genaueres über diese Beziehung zu ermitteln, dürfte kaum möglich werden. Wie aus den Kreisen, die die beobachteten Werte angeben, ersichtlich wird, wird der Anstieg der Kurven, bevor sie den geradlinigen Weg einschlagen, gering. Kleine Störungen, die im System der Zelle eintreten, können sich in dieser Periode empfindlich zur Geltung bringen; die Bestimmung der Spannung, bei der gerade der Grenzwert erreicht wird, wird daher unsicher. Dazu kommt, daß in jeder Versuchsreihe die Zelle neue individuelle Eigenschaften aufweist. Die Kapazität des Kondensators unterliegt auch hier fortwährenden Wandlungen, so daß Vergleiche zwischen den aufeinanderfolgenden Reihen nicht genügend verläßlich angestellt werden können.

Dagegen ist die Aussicht günstiger, über die Bedeutung der Koeffizienten a und b, die beide von der Dimension einer Stromstärke sind, Aufschluß zu erhalten. Die Koeffizienten nehmen, wie aus der Tabelle hervorgeht, mit dem Ladungspotential zu. Wahrscheinlich ist, daß auch die Kapazität der Anode in ihnen enthalten ist. Mit einer Methode, die zu reduzierten Werten führt, wie es bei der Untersuchung an Silberglanz bereits mit Erfolg geschehen ist, werden sich Beziehungen von a und b zum Ladungspotential und zur Kapazität feststellen lassen.

Graz, 2. Physikalisches Institut der Technischen Hochschule, 28. Juni 1920.

(Eingegangen 5. Juli 1920.)

Über die elektrischen Figuren.

II. Mitteilung[1]).

Von Karl Przibram.

1. Nach der in der ersten Mitteilung dargelegten Auffassung über die Entstehung der elektrischen Figuren sind die von der Anode ausgehenden Entladungsbahnen, wenn einmal gebildet, besser leitend[2]) als die von der Kathode ausgehenden, da bei ersteren, die durch den Stoß der ins Feld hinauswandernden positiven Ionen erzeugt werden, sicher auch Ionisation durch die neugebildeten negativen Ionen, die besseren Ionisatoren, erfolgt, während bei letzteren zunächst nur die negativen Ionen ionisierend wirken. Infolgedessen zeigen die auf einzelne Linien beschränkt bleibenden positiven Bahnen, die das Feld stärker vorschieben, ein rascheres und weiter reichendes Wachstum, als die negativen, sie entstehen aber etwas später als letztere, da eine merkliche Ionisierung durch positive Ionen erst später, d. h. bei höherer Spannung einsetzt als eine solche durch negative Ionen. Beide Folgerungen: größere Ausbreitungsgeschwindigkeit und späterer Beginn der positiven Figuren hat der Verf.[1]) ohne Heranziehung der Ionentheorie aus dem Verhalten zweipoliger Figuren bei verschiedenen Elektrodendistanzen und Drucken gezogen; hier finden sie ihre ionentheoretische Begründung. Der Verf. hat wiederholt darauf hingewiesen, daß sich aus diesen Annahmen die wichtigsten polaren Unterschiede der Figuren erklären lassen und schließlich in einem Aufsatze „Form und Geschwindigkeit, ein Beitrag zur allgemeinen Morphologie"[2]) zu zeigen versucht, daß die Tatsache, daß die rascher wachsende positive Figur strahlig-verästelt, die langsamere negative weniger zerteilt und abgerundet ist, nur ein Spezialfall eines recht allgemeinen morphologischen Prinzipes ist, dem unter anderem auch die Spritz- und Abreißfiguren der Flüssigkeiten, die Skelettbildung der Kristalle und auch eine Reihe biologischer Tatsachen unterworfen sind.

Die erste Folgerung: größere Ausbreitungsgeschwindigkeit der positiven Figur hat durch P. O. Pedersen[3]) ihre Bestätigung erfahren. Es bleibt noch der Vorsprung der negativen Entladung vor der positiven nachzuweisen. Auch dies gelingt mittels der von Pedersen entwickelten Methoden[4]).

Pedersen hat zur Kontrolle seiner Messungen der Geschwindigkeiten der elektrischen Figuren folgenden Versuch zur Ermittlung des Verhältnisses der Geschwindigkeiten der positiven und negativen Figur angegeben: als Elektroden werden zwei längliche Metallstücke (A und K, Fig. 1) derart auf die photographische

1) Vgl. diese Zeitschr. **19**, 299—303, 1918.
2) Einen Beweis hierfür siehe Wiener Ber. **128**, 1203—1221, 1919.

1) Wiener Ber. **108**, 1161—1171, 1899.
2) Naturwissenschaften **8**, 103—107, 1920.
3) Danske Vidensk. Selsk. I, 11, 1919. Die Geschwindigkeit der positiven Gleitbüschel ist schon früher von M. Toepler nach ganz anderer Methode bestimmt und von derselben Größenordnung (10^7 cm/sec) gefunden worden, siehe Toepler, Ann. d. Phys. (4) **21**, 193—222, 1906.
4) Die folgenden Darlegungen sind ein Auszug einer der Wiener Akademie der Wissenschaften vorgelegten Arbeit, siehe Wiener Anzeiger vom 22. April 1920.

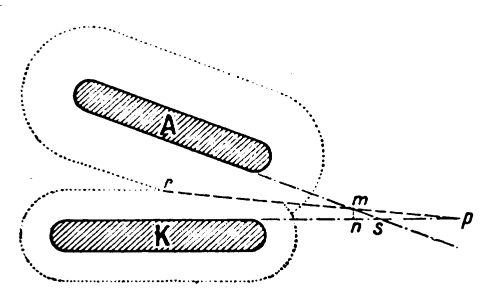


Fig. 1.

Platte gelegt, daß ihre einander zugekehrten geradlinigen Kanten einen spitzen Winkel einschließen und ihr kleinster Abstand zwar so groß ist, daß es zu keiner Funkenentladung kommt, aber noch so klein, daß die beiden Figuren sich zwischen den Elektroden nicht ungestört ausbilden können. Die gut kenntlichen Vereinigungsstellen der positiven und negativen Leuchtfäden liegen dann auf einer Geraden. Pedersen schließt, daß, da man keinen Grund habe, an dem gleichzeitigen Beginn der Entladung an beiden Elektroden zu zweifeln, die Längen der positiven Leuchtfäden zu denen der negativen sich verhalten müssen wie die Ausbreitungsgeschwindigkeiten, und erhält befriedigende Übereinstimmung mit seinen Absolutmessungen.

Wäre diese Auffassung Pedersens richtig, so müßte jenes Verhältnis der beiden Leuchtfädenlängen für jeden Punkt der Vereinigungslinie den gleichen Wert haben, mit anderen Worten: die Verlängerung dieser Vereinigungslinie rmp müßte durch den Schnittpunkt S der Verlängerungen der Elektrodenkanten gehen. Nun zeigt aber die Ausmessung der von Pedersen reproduzierten Figur sowie zahlreicher ähnlicher vom Verfasser aufgenommener Figuren, daß dem nicht so ist: die Verlängerung der Vereinigungslinie schneidet die Verlängerung der Kante der Anode A in m deutlich vor deren Schnitt mit der Kathodenkantenverlängerung, und der Abstand mn des Schnittpunktes der verlängerten Vereinigungslinie mit der verlängerten Anodenkante von der verlängerten Kathodenkante ist offenbar nichts anderes als der Weg, den die negative Entladung zurücklegt, ehe die positive beginnt[1]). Dividiert man diesen Abstand durch die von Pedersen gemessene Geschwindigkeit der negativen Figur, so erhält man den Vorsprung der negativen Figur vor der positiven. Die folgenden Zahlen wurden auf Platten von ca. 1,4 mm Dicke mit einer Primärfunkenlänge von 5 mm bei Atmosphärendruck und mit verschiedenen Winkeln zwischen den Elektroden erhalten:

Winkel in Graden	Abstand in cm	Vorsprung in 10^{-8} sec.
18°	0,22	2,6
20	0,12	1,42
9	0,18	2,12
11	0,22	2,6
15	0,20	2,4
9	0,12	1,42

Mittel: $2{,}1 \cdot 10^{-8}$ sec.

Der Vorsprung scheint von der Spannung ziemlich unabhängig zu sein, dagegen mit wachsender Plattendicke zuzunehmen.

2. In der ersten Mitteilung war eine kleine Tabelle der Figurengrößen in verschiedenen Gasen wiedergegeben, aus der hervorzugehen schien, daß die einheitlichen Gase — Luft aber nicht — sich bezüglich des Verhältnisses der

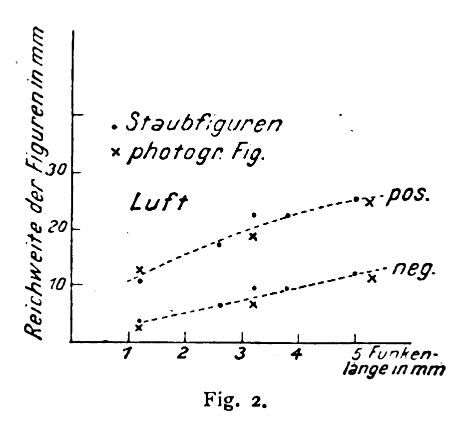


Fig. 2.

Radien der positiven zu denen der negativen Figuren im allgemeinen nach ihrer Elektronenaffinität ordnen. Pedersen hat nun (allerdings als vorläufig bezeichnete) Messungen der Figurengrößen mitgeteilt, die eine andere Reihenfolge ergeben würden, nämlich für abnehmendes Verhältnis $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$: Sauerstoff, Wasserstoff, Luft und Stickstoff, Kohlendioxyd.

Da nun die photographischen Aufnahmen

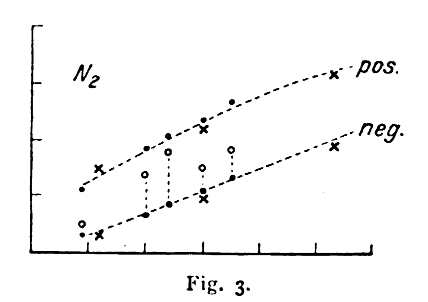


Fig. 3.

1) Fig. 1 gibt nur eine schematische Veranschaulichung; eine genaue den Messungsergebnissen entsprechende Zeichnung wird in der Akademiearbeit mitgeteilt.

namentlich in Sauerstoff, aber auch in Wasserstoff und Kohlendioxyd recht undeutlich, die Messungen daher unsicher sind, hat der Verfasser zur Methode der Staubfiguren (auf schwarzem Siegellack) zurückgegriffen, die einen Zweifel über die Grenze einer Figur selten aufkommen läßt, und bei 740 mm *Hg*-Druck die Zahlen der folgenden Tabelle erhalten, die Mittelwerte aus mehreren Aufnahmen, bei denen stets vier Durchmesser gemessen wurden, darstellen. Die benützte Kapazität betrug etwa 30000 cm beiderseits, die Länge der Zuleitung, von der nach Pedersen die Figurengröße auch abhängt, 130 cm beiderseits.

In Stickstoff und Luft, wo die photographische Methode deutliche Bilder liefert, wurden auch einige photographische Figuren aufgenommen. Die früheren Messungen des Verfassers in diesen Gasen fügen sich bei Umrechnung auf große Kapazität hinreichend in die neuen ein. Die Übereinstimmung für Luft mit den von M. Toepler erhaltenen Zahlen ist eine befriedigende. Es ergibt sich in Übereinstimmung mit den früheren Angaben des

Gas	Plattendicke	Primär-Funkenlänge im mm	Spannung[1]) Kilovolt	Staubfiguren			Photographische[3]) Figuren		
				Reichweite[2]) der + Fig. mm	Reichweite[2]) der — Fig. mm	Quotient $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$	Reichweite[2]) der + Fig. mm	Reichweite[2]) der — Fig. mm	Quotient $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$
Luft	2 mm	1,2	3,5	10,5	3,9	2,69	12,5	2,0	6,25
		2,6	8	17,0	6,1	2,79	—	—	—
		3,2	10,5	22,4	9,7	2,31	18,6	6,4	2,90
		3,8	12,5	22,3	9,3	2,31	—	—	—
		5	17,5	25,3	12,4	2,04	25,6[4])	13,3[4])	1,92
		5	—	—	—	—	23[5])	13[5])	1,77
		5,3	18,5	—	—	—	24,9	11,5	2,16
	6 mm	2,6	8	15,2	5,0	3,04			
		3,0	10	16,7	6,3	2,65			
		4,0	13	17,9	7,0	2,56			
Stickstoff[6])	2 mm	0,9	2,8	11,2	3,0	3,73			
		1,2	3,5	—	—	—	15,0	3,0	5,0
		2,0	6	18,5	6,4	2,89			
		2,4	7,5	20,5	8,4	2,44			
		3,0	10	23,5	10,9	2,15	22,1	9,8	2,25
		3,5	11,5	27,0	13,8	1,96			
		5	17,5	—	—	—	23[5])	13[5])	1,77
		5,3	18,5	—	—	—	32,1	19,0	1,69
	6 mm	3,0	10	22,1	9,8	2,25			
Wasserstoff[6])	2 mm	1	3,0	14,7	8,7	1,69			
		2	6	24,3	17,1	1,42			
		3	10	38,4	20,7	1,85			
		3,8	12,5	42,2	24,4	1,73			
		5	17,5	—	—	—	28[5])	13,5[5])	2,07
Sauerstoff[6])	2 mm	1,2	3,5	6,1	3,3	1,85			
		2,2	7	11,0	5,4	2,04			
		3,6	12	13,1	8,4	1,56			
		5	17,5	17,7	10,8	1,64	20[5])	8,5[5])	2,35
Kohlendioxyd[6])	2 mm	0,9	2,8	4,2	4,0	1,05			
		1,1	3,2	4,8	5,0	0,96			
		1,8	5,5	8,3	7,0	1,19			
		2,0	6	7,3	8,1	0,90			
		3,0	10	8,5	10,6	0,80			
		3,3	11	9,7	11,9	0,81			
		4,7	16	12,6	16,1	0,78			
		5	17,5	—	—	—	11[5])	10[5])	1,10
Chlor[7])	6 mm	2,6	8	6,2	4,8	1,29			
		4,0	13	7,7	6,6	1,16			
		5,7	20	10,1	7,1	1,42			

1) Die der Primärfunkenstrecke entsprechende wirksame Spannung wurde wieder durch ein an Stelle des Aufnahmeapparates eingeschaltetes Funkenmikrometer bestimmt. Bei der jetzigen Anordnung stimmen die Angaben dieses Mikrometers für die längeren Funken mit der Primärfunkenstrecke überein, für die kleineren Werte sind sie aber stets niedriger.

2) Die Reichweiten in Millimetern, erhalten durch Messung der Durchmesser der Figuren, Subtraktion des Elektrodenradius von 1 mm und Division durch 2.

3) Plattendicke zirka 1,4 mm.

4) Mittelwerte von M. Toepler (Ann. d. Phys. **53**, 217—234, 1917), für Dicken von 1 bis 1,65 mm.

5) Werte von P. O. Pedersen, l. c.

6) Käufliche Bombengase.

7) Aus Braunstein und Salzsäure.

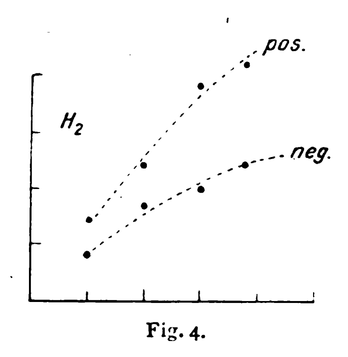


Fig. 4.

Verfassers, daß in Stickstoff beide Figuren größer sind als in Luft, daß das Verhältnis $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$ in ersterem aber kleiner ist als in letzterer, während dieses Verhältnis in Sauerstoff wesentlich kleiner als in Stickstoff bei gleicher Spannung ist. Unsicher ist die Stellung des Wasserstoffs; während er für größere Spannungen ein größeres Verhältnis $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$ ergibt als Sauerstoff, was seiner geringeren Elektronenaffinität entspräche, gibt er für kleinere Spannungen kleinere Werte. Bemerkenswert ist, daß in Stickstoff sich auch jenseits der recht scharfen Grenze der nega-

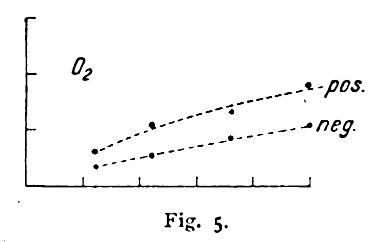


Fig. 5.

tiven Staubfigur, die, wie die Zahlen und die Kurven zeigen, recht gut mit der Grenze der photographischen Figur, also auch der leuchtenden Entladung übereinstimmt, stets ein leichterer roter Staubanflug findet, dessen Grenze in Fig. 3 mit einem ◯ bezeichnet ist und der fast die ganze sogenannte „staubfreie Zone" ausfüllt, ein Zeichen, daß hier die Ladung weiter fortgeschritten ist, als die leuchtende Entladung reicht. Man vergleiche hiermit das stark negative Verhalten des Stickstoffes bei der oszillierenden Spitzenentladung (Himstedteffekt)[1]).

Chlor gibt wieder kleine Werte des Verhältnisses $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$, während es für CO_2 sogar kleiner als eins wird, wie bereits Reitlinger[2])

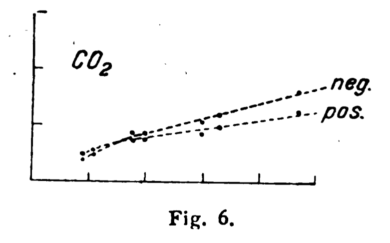


Fig. 6.

gefunden hatte. Nimmt man noch die allerdings unter etwas anderen Bedingungen gewonnenen Resultate des Verfassers für Helium und Argon hinzu, so scheint sich im großen und ganzen doch ein Zusammenhang zwischen dem Verhältnis der Figurengrößen und der Elektronenaffinität zu ergeben.

Deutlicher tritt aber die Beziehung der polaren Unterschiede zur Elektronenaffinität in der Form der Figuren zutage, wie in der ersten Mitteilung gezeigt worden ist: Die starke Verästelung der positiven Figur in Stickstoff, die großen, wenig zerteilten negativen Figuren 1. Art in diesem Gase bei Spannungen, bei denen in Luft schon längst negative Gleitbüschel hervorschießen, die Ähnlichkeit der beiden

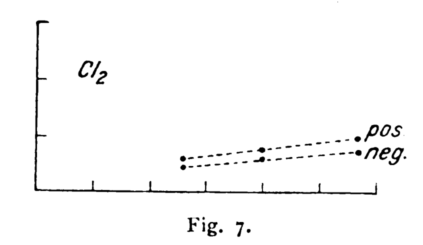


Fig. 7.

Figuren 2. Art in Sauerstoff und die noch größere in Chlor[1]). Die Arbeit Pedersens

1) Man vergleiche auch die Tatsache, daß das Verhältnis der Figurengrößen $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$ in Luft größer ist als in N_2 und O_2 mit dem Verhalten der Luft beim Himstedteffekt, der in ihr stärker positiv ist als in O_2 und N_2.

2) Wien. Ber. **43**, 531—544, 1861. In einer vorläufigen Notiz (Wien. Ber. **43**, 25—26, 1861) gibt Reitlinger an, daß sich die Staubfiguren in bezug auf die polaren Unterschiede in Luft, H_2, O_2 und CO_2 so verhalten wie die Büschel in diesen Gasen nach Faraday. Dies würde etwa die obige Reihenfolge der Abnahme von $\overset{+}{R}/\overset{-}{R}$ geben. Eine ausführlichere Mitteilung Reitlingers über seine Messungen konnte der Verf. in der Literatur nicht finden.

Der von Reitlinger angegebene Zusammenhang zwischen Figurengröße und Schlagweite in verschiedenen Gasen bestätigt sich insofern, als Helium, Argon und Wasserstoff die größten, Chlor die kleinsten Werte liefert und die anderen Gase eine mittlere Stellung einnehmen. Für diese mittleren Glieder scheint aber eine einfache Beziehung zur Schlagweite — man vgl. die Heydweillersche Zusammenstellung in den Tabellen von Landolt-Börnstein — nicht ohne weiteres behauptet werden zu können.

1) Die in einer Anmerkung der ersten Mitteilung angegebene Verschwommenheit der Begrenzung der positiven Figur in O_2 scheint nur auf der starken Abnahme des photographischen Eindruckes nach außenzu zu beruhen; die positive Staubfigur endet auch in O_2 scharf, doch sind die Äste stumpfer und weniger verzweigt als in Luft. In Cl_2 sind beide Staubfiguren einheitliche runde Flecken, während die photographischen Aufnahmen deutlich in beiden Figuren Zerfaserung zeigen; bei der Bestäubungsmethode gehen eben manche Details verloren.

enthält nun neue Belege hierfür: Die Endverästelung der positiven Figuren in Stickstoff wird durch Sauerstoffzusatz zurückgedrängt, ein Argon-Luftgemisch zeigt ähnliche positive Endverästelungen wie Stickstoff, die vom Verfasser gefundene stärkere Zerfaserung der negativen Figur in CO_2 äußert sich bei Pedersen, allerdings viel weniger auffallend, in der etwas größeren Breite der dunklen Linien und deren Krümmung, auch die negativen Figuren in Sauerstoff zeigen Unregelmäßigkeiten und noch größere Breite der dunklen Linien.

Der Verfasser möchte auf Grund neuerer Versuche hier noch anführen, daß die positiven Äste bei Aufnahmen in Luft auf angefeuchteten photographischen Platten, bei denen also die Entladung in einer mit Wasserdampf gesättigten Schicht verläuft, merkwürdig glattrandig und wenig verzweigt sind, worin man ein Analogon zur Zurückdrängung der Endverästelung in N_2 durch O_2 erblicken kann, doch spielt hier sicher auch die erhöhte Oberflächenleitfähigkeit mit.

Es mag auffallen, daß die Elektronenaffinität bei den Figuren eine Rolle spielen soll, obwohl nach den Untersuchungen Townsends im Gebiete des Ionenstoßes die Elektronen anscheinend auch in stark elektronegativen Gasen frei bleiben. Hierzu ist jedoch zu bemerken, daß erstens die hier in Betracht kommenden Untersuchungen über Ionenstoß durchweg bei Drucken von wenigen Millimetern Hg und darunter angestellt worden sind, der Schluß auf Atmosphärendruck also eine beträchtliche Extrapolation bedeutet, und überdies, wie Lenard neuerdings in seiner Abhandlung „Quantitatives über Kathodenstrahlen" dargelegt hat, diesen Versuchen manche Unklarkeit anhaftet, und daß zweitens für die Ausbreitung der Figuren nicht nur der Ionenstoß, sondern, wie der Verfasser wiederholt auseinandergesetzt hat, auch die Art der nicht leuchtenden Ionenabwanderung am Rande des Entladungsgebietes maßgebend ist, bei der die Geschwindigkeit der Molisierung doch wohl sicher von der Elektronenaffinität des Gases abhängen wird[1]).

1) Sucht man nach anderen Eigenschaften des Mediums, von denen die polaren Unterschiede der Figuren bzw. der sie erzeugenden Entladung abhängen, so findet man noch am ehesten die elektrische Festigkeit; im allgemeinen nehmen die polaren Unterschiede zu mit abnehmender Festigkeit, wobei nicht gesagt ist, ob die Abhängigkeit eine unmittelbare oder wieder durch die Elektronenaffinität, mit der im allgemeinen die elektrische Festigkeit wächst, vermittelte ist. Daß kein ganz eindeutiger Zusammenhang zwischen polaren Unterschieden und elektrischer Festigkeit besteht, geht aus dem Ähnlicherwerden der Figuren bei abnehmendem Luftdruck (abnehmender Festigkeit) hervor. Möglicherweise besteht für die polaren Unterschiede ein Optimum der elektrischen Festigkeit, das so zu deuten wäre: bei großer Festigkeit beginnend macht sich eine Verminderung derselben erst bei der negativen Figur bemerkbar, die bei schwer erfolgender Entladung zunächst auch aus relativ wenig Zweigen besteht und sich erst allmählich der Scheibenform nähert — die polaren Unterschiede wachsen. Ist die negative Figur zu einer homogenen Kreisscheibe geworden, so ändert sie sich bei weiterer Erleichterung der Entladung nicht wesentlich, während jetzt, wie bei tiefen Drucken zu beobachten ist, sich auch die positive Figur der Scheibenform nähert, die polaren Unterschiede können wieder abnehmen. Es wäre nicht ausgeschlossen, daß etwas Derartiges bei ganz reinen Edelgasen, insbesondere in Neon, zu beobachten wäre.

Zusammenfassung.

1. Es wird mittels einer von P. O. Pedersen angegebenen Versuchsanordnung nachgewiesen, daß bei der Erzeugung der elektrischen Figuren die negative Entladung vor der positiven einen Vorsprung hat.

2. Es wird die Größe der Lichtenbergschen Staubfiguren in Luft, N_2, H_2, O_2, CO_2 und Cl_2 bestimmt.

Wien, 21. Mai 1920.

(Eingegangen 15. Juni 1920.)

Der Liouvillesche Satz und die Relativitätstheorie.

Von Erich Kretschmann.

Die Definition der Entropie S eines physikalischen Systems durch die Wahrscheinlichkeit W seines Zustandes

$$S = k \ln W$$

gründet sich auf die Gültigkeit des Liouvilleschen Satzes[1]). Es ist daher eine wichtige Frage, ob dieser Satz auch noch in der Mechanik der Relativitätstheorie gilt, wo an Stelle der momentan wirkenden Kräfte nur Kräfte auftreten können, die sich mit Lichtgeschwindigkeit durch den Raum verbreiten.

Die Frage ist meines Wissens noch nicht untersucht, obwohl bereits im Jahre 1911 F. Jüttner[2]) aus der obenstehenden Beziehung die Thermodynamik eines idealen Gases in einer der Relativitätstheorie entsprechenden Form entwickelt hat.

Die folgende kurze Rechnung zeigt, daß für eine große Klasse von Kraftgesetzen der Relativitätstheorie eindeutige Abweichungen vom Liouvilleschen Satze bestehen.

Die von einem im Weltpunkte x_0, y_0, z_0, t_0 befindlichen Massenpunkte einem zweiten

1) Vgl. z. B. den Bericht von P. u. T. Ehrenfest in. Enz. d. math. Wiss. IV, 32, S. 27 ff.

2) F. Jüttner, Ann. d. Phys. **34**, 856, 1911.



Massenpunkte im Weltpunkte x, y, z, t, mitgeteilte Ruhbeschleunigung sei vektoriell gegeben durch

$$\frac{\partial \mathfrak{B}}{\partial \tau} = \mathfrak{R} \cdot \varphi\,[(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})] + \frac{\mathfrak{B}}{c^2} \cdot (\mathfrak{R}\mathfrak{B}) \cdot \varphi\,[(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})]. \quad (1)$$

Hier ist $\mathfrak{B}$ der Bewegungsvektor des zweiten Punktes mit den Komponenten

$$\mathfrak{x} = \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - q^2}} \quad \mathfrak{y} = \frac{\dot{y}}{\sqrt{1 - q^2}}$$

$$\mathfrak{z} = \frac{\dot{z}}{\sqrt{1 - q^2}} \quad \mathfrak{u} = \frac{i \cdot c}{\sqrt{1 - q^2}} \quad (2)$$

($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$ = Geschwindigkeitskomponenten $q^2 = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)/c^2$), τ: die Eigenzeit, $\mathfrak{R}$: der Radiusvektor mit den Komponenten

$$\mathfrak{R}_x = (x - x_0),\ \mathfrak{R}_y = (y - y_0),\ \mathfrak{R}_z = (z - z_0)$$
$$\mathfrak{R}_l = ic\,(t - t_0)$$

($\mathfrak{R}, \mathfrak{B}$): das skalare Produkt

$$\mathfrak{R}_x \cdot \mathfrak{x} + \mathfrak{R}_y \cdot \mathfrak{y} + \mathfrak{R}_z \cdot \mathfrak{z} + \mathfrak{R}_l \cdot \mathfrak{u}$$

und φ eine beliebige Funktion ihres Arguments ($\mathfrak{R}, \mathfrak{B}$).

Man findet leicht:

$$(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) = \frac{-c \cdot r + (\mathfrak{r}, \mathfrak{v})}{\sqrt{1 - q^2}}, \quad (3)$$

wenn $\mathfrak{r}$ den gewöhnlichen von x_0, y_0, z_0 nach x, y, z gezogenen Radiusvektor vom Betrage r und ($\mathfrak{r}, \mathfrak{v}$) das skalare Produkt von $\mathfrak{r}$ und der Geschwindigkeit, $\mathfrak{v}$, der beschleunigten Masse bezeichnet.

Wenn $\mathfrak{v}$ klein gegen c ist, was angenommen werde, so ist nahezu $(\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) = -c \cdot r$ und die Funktion φ, die auch noch von den Ruhmassen abhängen darf, bestimmt die Abhängigkeit der wirkenden Kraft von der Entfernung. Das zweite — verhältnismäßig kleine — Glied der rechten Seite von (1) ist hinzugefügt, damit der ganze Vektor ebenso wie links $\partial \mathfrak{B}/\partial \tau$ orthogonal zum Bewegungsvektor $\mathfrak{B}$ wird, was sich durch skalare Multiplikation mit $\mathfrak{B}$ leicht nachweisen läßt ($\mathfrak{B}^2 = -c^2$).

Als Zustandsveränderliche wählen wir mit Jüttner

$$x,\ y,\ z,\quad \mathfrak{x},\ \mathfrak{y},\ \mathfrak{z} \quad (4)$$

und unterscheiden die einzelnen, n, Massenpunkte, die das betrachtete System, z B. ein ideales Gas, bilden mögen, durch angehängte Indizes.

Dann wäre der Liouvillesche Satz erfüllt, wenn das von einer Systemschar im $6n$ dimensionalen Phasenraum erfüllte Gebiet

$$\int \Pi_1^n{}_h\, dx_h\, dy_h\, dz_h\quad d\mathfrak{x}_h\, d\mathfrak{y}_h\, d\mathfrak{z}_h$$

stets konstant bliebe oder die zugehörige verallgemeinerte Divergenz

$$\sum_1^n{}_k \left(\frac{\partial \dot{x}_h}{\partial x_h} + \frac{\partial \dot{y}_h}{\partial y_h} + \frac{\partial \dot{z}_h}{\partial z_h} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{x}}_h}{\partial \mathfrak{x}_h} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{y}}_h}{\partial \mathfrak{y}_h} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{z}}_h}{\partial \mathfrak{z}_h} \right) \quad (5)$$

identisch verschwände.

Nun lassen sich allerdings nach Planck[1]), worauf Jüttner[2]) hinweist, aus den Bewegungsgleichungen

$$\frac{d(m\mathfrak{x})}{dt} = X \text{ usw.}$$

eines freien Massenpunktes die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen

$$\frac{\partial H}{\partial (m\mathfrak{x})} = \dot{x},$$

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{d}{dt}(m \cdot \mathfrak{x}) \text{ usw. mit } H = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{q^2}{c^2}}} + U$$

ableiten, aus denen dann (5) — bei konstanten Ruhmassen m — sofort folgt; aber das gilt, wie leicht nachzurechnen, nur, wenn sich die Kraftkomponenten X, Y, Z aus einem von der Geschwindigkeit ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) unabhängigen Potential U ableiten lassen: $X = -\frac{\partial U}{\partial x}$ usw. Diese Annahme ist jedoch in der Relativitätstheorie unzulässig. Denn X, Y, Z hängen schon wegen der endlichen Ausbreitungsgeschwindigkeit der Kraft notwendigerweise von der Geschwindigkeit ($\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$) ab und sind auch nicht Komponenten eines Vierervektors, wie sie es bei der Ableitung aus einem Skalar U sein müßte.

Trotzdem könnte an sich der Liouvillesche Satz gelten. Um diese Frage für das angenommene Kraftgesetz (1) zu untersuchen, bilden wir nach (1) das dem beschleunigten Massenpunkt entsprechende Glied der Summe (5). Zunächst ist

$$\frac{d\mathfrak{B}}{dt} = \left\{ \mathfrak{R} + \frac{\mathfrak{B}}{c^2} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) \right\} \cdot \frac{\varphi[(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})]}{\sqrt{1 + (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)/c^2}}$$

da

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - q^2}} = \sqrt{1 + (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)/c^2} \quad (6)$$

nach (2) ist. Die Zerlegung in Komponenten gibt:

$$\dot{\mathfrak{x}} = \varphi\,[(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})] \cdot \left\{ (x - x_0) + \frac{\mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{B})}{c^2} \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + (\mathfrak{x}^2 + \mathfrak{y}^2 + \mathfrak{z}^2)/c^2}} \text{ usw.}$$

Folglich, wenn φ' die Ableitung der Funktion φ nach ihrem Argument bezeichnet:

1) M. Planck, Verh. d. D. Phys. Ges. **8**, 136—141, 1906.

2) F. Jüttner, Ann. d. Phys. **34**, 856, 1911.

$$\frac{\partial \dot{\mathfrak{x}}}{\partial \mathfrak{x}} = \varphi' \cdot \left\{ (x - x_0)^2 + (x - x_0) \cdot \frac{\mathfrak{x}}{c^2} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) \right\} \cdot$$

$$\cdot \sqrt{1 - q^2} + \varphi \cdot \left\{ \left[\frac{(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})}{c^2} + \frac{(x - x_0) \cdot \mathfrak{x}}{c^2} \right] \sqrt{1 - q^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{\mathfrak{x}}{c^2} \left[(x - x_0) + \frac{\mathfrak{x} \cdot (\mathfrak{R} \mathfrak{B})}{c^2} \right] (1 - q^2)^{3/2} \right\}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathfrak{x}}}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{y}}}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{z}}}{\partial \mathfrak{z}} = \varphi' \cdot$$

$$\left\{ r^2 \sqrt{1 - q^2} + \frac{\mathfrak{r}, \mathfrak{v}}{c^2} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) + \varphi \cdot \left\{ \frac{3 (\mathfrak{R}, \mathfrak{B})}{c^2} \sqrt{1 - q^2} \right. \right.$$

$$\left. + \frac{(\mathfrak{r}, \mathfrak{v})}{c^2} - \frac{(\mathfrak{r}, \mathfrak{v})}{c^2} (1 - q^2) - \frac{\mathfrak{v}^2}{c^4} \cdot (\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) \cdot \sqrt{1 - q^2} \right\}$$

$$\frac{\partial \dot{\mathfrak{x}}}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{y}}}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{z}}}{\partial \mathfrak{z}} = \varphi' \cdot \frac{r^2 (1 - q^2) - r (\mathfrak{r}, q) + (\mathfrak{r}, q)^2}{\sqrt{1 - 9^2}} +$$

$$+ \frac{\varphi}{(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})} \cdot \frac{3 r^2 - r (\mathfrak{r}, q)(6 - q^2) - r^2 \cdot q^2 + 3 (\mathfrak{r}, q)^2}{\sqrt{1 - q^2}}. \tag{7}$$

Die andern drei Glieder, $\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}$, verschwinden, da nach (2) $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ Funktionen von $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ allein sind. Mit Vernachlässigung von q gegen 1 oder $\mathfrak{v}$ gegen c wird daher nach (7)

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{x}}}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{y}}}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{z}}}{\partial \mathfrak{z}} = \varphi' \cdot r^2 +$$

$$+ \frac{3 \varphi}{(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})} \cdot r^2 = r^2 \left\{ \varphi' + \frac{3 \varphi}{(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})} \right\}. \tag{8}$$

Daß der links stehende Ausdruck nicht identisch verschwinden würde, wie aus (7) ersichtlich, war wohl von vornherein zu erwarten. Überraschend ist aber die einfache Art, in der er nach (8) in erster Annäherung von der Funktion φ abhängt. Er verschwindet nur, wenn

$$\varphi' = - \frac{3 \varphi}{(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})}$$

ist, d. h. wenn

$$\varphi = \frac{\text{Konst.}}{(\mathfrak{R}, \mathfrak{B})^3}$$

ist.

Da annähernd nach (1)

$$\text{1a)} \quad \frac{d \mathfrak{v}}{dt} = \mathfrak{r} \cdot \varphi$$

und nach (3)

$$\text{3a)} \quad (\mathfrak{R}, \mathfrak{B}) = - c \cdot r$$

ist, so bedeutet das eine dem Entfernungsquadrat umgekehrt proportionale Kraft, die ebensogut anziehend wie abstoßend sein kann. Allgemein ist nach (1a), da $\mathfrak{r}$ nach dem beschleunigten Punkte (x, y, z) hin gerichtet ist, die Kraft eine anziehende, wenn φ negativ ist und eine abstoßende, wenn φ positiv ist. Außerdem kommt es nach (8) nur darauf an, wie schnell φ mit der Entfernung zu- oder abnimmt. Setzen wir daher der Einfachheit halber

$$\varphi = \frac{a}{r^{n+1}}, \tag{9}$$

so daß die Kraft nach (1a) wie die $n$te Potenz von $1/r$ abnimmt oder — für $n < 0$ — zunimmt, so ist nach (8) und (3a) annähernd:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{x}}}{\partial \mathfrak{x}} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{y}}}{\partial \mathfrak{y}} + \frac{\partial \dot{\mathfrak{z}}}{\partial \mathfrak{z}} = \frac{a}{c \cdot r^n} \cdot (n - 2).$$

Nehmen wir das gleiche Kraftgesetz für alle in Wechselwirkung begriffenen Massenpunkte unseres Systems als gültig an, so hat die Summe (5) notwendig dasselbe Vorzeichen wie der Ausdruck (10). Je nachdem dieser Ausdruck daher positiv oder negativ ist, nimmt das von den Bildpunkten einer Systemschar im Phasenraum eingenommene Zustandsgebiet zu oder ab. Das erste — Zunahme — tritt nach (10) notwendig ein bei abstoßenden Kräften $a > 0$, die für alle r schneller als $1/r^2$ mit der Entfernung abnehmen $n > 2$, und bei anziehenden Kräften $a > 0$, die durchweg langsamer als $1/r^2$ abnehmen, $n < 2$, oder mit r zugleich zunehmen. Abnahme des Zustandsgebiets findet genau unter den entgegengesetzten Bedingungen statt.

Alle diese Abweichungen vom Liouvilleschen Satze sind ihrem Vorzeichen nach von den Werten der Zustandsvariablen unabhängig. Es ist daher wohl aussichtslos, diesen Satz in auch nur einem der genannten Fälle durch Einführung anderer Veränderlicher an Stelle der x, y, z, $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ erfüllen zu wollen[1]).

Damit ist aber auch der auf den Liouvilleschen Satz gegründeten allgemeinen Entropiedefinition

$$S = k \cdot \ln W$$

der Boden entzogen.

Vielleicht gelingt es, die „Wahrscheinlichkeit" eines Zustands in einer vom Liouvilleschen Satz unabhängigen Weise zu definieren. Indessen scheint mir der eigentliche Grund für die Ungültigkeit des Liouvilleschen Satzes in der Relativitätstheorie gerade darin zu liegen, daß bei Kraftwirkungen, die sich mit endlicher Geschwindigkeit ausbreiten, im Gegensatz zur alten Mechanik im allgemeinen schon jeder einzelne der Elementarvorgänge — Zusammenstoß zweier Massenpunkte —, welche die Zustandsänderung des ganzen Systems bewirken,

1) Die Unmöglichkeit wäre streng bewiesen, wenn sich zeigen ließe, daß ein Zustandsgebiet in einen echten Teil seiner selbst überginge oder aus einem solchen entstände.



an sich irreversibel ist, so daß die mit der Zustandsänderung verbundene Entropievermehrung höchstens zum Teil eine Wahrscheinlichkeit darstellt, mindestens zum Teil aber eine Notwendigkeit. Dem entspricht es, daß zugleich mit dem Liouvilleschen Satze auch der bekannte Zermelosche Wiederkehreinwand gegen Boltzmanns mechanische Deutung der Irreversibilität fällt.

Dieser Einwand wird in der Relativitätstheorie allerdings schon aus einem anderen Grunde hinfällig, der hier zum Schlusse erwähnt werden muß. Streng genommen nämlich ist die Kraftwirkung zwischen irgend zwei Massenpunkten bei endlicher Fortpflanzungsgeschwindigkeit durch ihre augenblickliche Lage, Geschwindigkeit usw. nicht vollständig bestimmt, sondern hängt von ihrer vergangenen Bewegung ab. Es wird daher unmöglich, eine endliche Zahl von Zustandsveränderlichen für ein System so zu wählen, daß durch ihre augenblicklichen Werte auch alle zukünftigen bestimmt sind.

Wie unter diesen Umständen die Entropie eines Systems in der Mechanik der Relativitätstheorie zu deuten ist, muß vorläufig dahingestellt bleiben.

Nachtrag. Nachträglich bemerke ich, daß in (7) und der vorhergehenden Gleichung rechts die Glieder fehlen, die durch Differentiation von $\mathfrak{u} = \sqrt{-c^2 - \mathfrak{x}^2 - \mathfrak{y}^2 - \mathfrak{z}^2}$ nach $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$ und $\mathfrak{z}$ entstehen. Es sind dies die Glieder:

$$-\varphi \cdot \frac{r}{c} \cdot q^2 - \varphi' \cdot r^2 \left\{ \frac{(rq)}{r} \sqrt{1 - q^2} + \frac{q^2 (\mathfrak{R}\mathfrak{V})}{rc} \right\},$$

die aber, wie leicht zu sehen, wegen $q \ll c$ das Endergebnis (8) nicht ändern.

Königsberg i. Pr., Februar 1920.

(Eingegangen 20. Mai 1920).

Der starre Körper.

Von Hugo Dingler.

I.

Es ist eine merkwürdige Erscheinung, daß dieser wichtigste Grundbegriff der experimentellen und theoretischen Physik und der exakten Naturforschung überhaupt, eine vergleichsweise so spärliche Behandlung bisher gefunden hat[1]). Sie erklärt sich wohl dadurch, daß das, was dem schnell darüber Hingehenden als eine kaum behandelnswerte Selbstverständlichkeit erscheint, sich dem Tieferblickenden als ein Problem von sehr großer Komplikation enthüllt.

Wie sehr wir noch in der „naiven“ Periode der Wissenschaft stecken, ergibt sich aus der Tatsache, daß das Problem des starren Körpers eigentlich nur in folgender, bisher unerledigten Frage besteht: Wie wird der starre Körper tatsächlich hergestellt, welches ist die dabei wirklich befolgte Definition? Schon ein erstes Nachdenken zeigt, daß es recht schwierig ist, sich über die Frage Rechenschaft zu geben. Die allgemein darüber verbreitete Meinung ist die, daß der starre Körper rein experimentell gefunden und herausgearbeitet werde. Diese Meinung scheint nie kritisch wirklich nachgeprüft worden zu sein und kommt der heute herrschenden empiristisch gerichteten Grundanschauung über das Wesen der Physik entgegen, sie ist, andererseits wohl auch mit eine Hauptstütze dieser Grundanschauung.

Im Gegensatz hierzu habe ich 1911 auf Grund meiner Untersuchungen[1]) die Ansicht vertreten, daß der starre Körper durch die Gesetze der euklidischen Geometrie definiert und herstellbar sei, indem man Körper sucht, die möglichst genau diesen Gesetzen entsprechen (Exhaustionstheorie). Es soll nun hier die Herstellung des starren Körpers, wie sie wirklich geübt wird, einmal einer genauen kritischen Überlegung unterworfen werden, um von hier aus einen Fingerzeig zur Entscheidung zwischen den beiden einander entgegengesetzten Ansichten zu erhalten.

Die experimentalistische (empiristische) Ansicht kann in zwei Formen auftreten: a) Man kann sagen: ich nehme irgendeinen bestimmten Körper, der mir geeignet erscheint, als starr an, und definiere diesen als den (absoluten) starren Körper. Die Unzuträglichkeiten und Unmöglichkeiten dieser kaum mehr vertretenen (auch nicht rein empiristischen) Anschauung liegen so auf der Hand, daß wir sie nicht weiter behandeln; b) Man kann andererseits des Glaubens leben, daß man den starren Körper sozusagen freihändig experimentell aus der Wirklichkeit herausarbeiten könne, indem wir uns einfach der Natur als Führerin überlassen. Dies setzt voraus, daß der starre Körper irgendwie rein in der Natur schon eindeutig festgelegt sei, daß ihm eine sozusagen immanente Existenz zukomme, die nur empirisch festgestellt zu werden brauche.

1) Fast nur C. Runge (Enzykl. d. Math. V, 1) hat den empir. st. K. behandelt.

1) Die Grundlagen der angewandten Geometrie. Eine Untersuchung über den Zusammenhang zwischen Theorie und Erfahrung in den exakten Wissenschaften. Leipzig 1911.



Diese (*gänzlich metaphysische*) Ansicht ist die heute unter den exakten Naturforschern meist verbreitete. Sie wird im folgenden einfach als *die empiristische Anschauung* bezeichnet.

Ihr gegenüber tritt die Exhaustionstheorie, die gar nichts Metaphysisches mehr an sich hat. Nach ihr hat der starre Körper keine immanente, metaphysische Existenz, sondern ist einfach das erste Produkt unseres Ordnungswillens, der uns treibt, in die unabsehbare Mannigfaltigkeit der Erscheinungen und Vorgänge auf einfachste Weise Ordnung zu bringen. Es werden dabei der Natur gar keine Vorschriften gemacht, sondern lediglich ihre Erscheinungen nach einem einfachsten logischen Schema auseinandergelegt, und der starre Körper ist sozusagen der experimentell herausgearbeitete „Nullpunkt" dieses Schemas, indem er sich genau nach den Gesetzen der einfachsten, euklidischen Geometrie verhält. Alles, was sich dann nicht nach diesen verhält, sind dann Wirkungen die den starren Körper verändern.

Die herrschende empiristische Ansicht beruht lediglich auf einem „Gefühl", denn es hat sich bisher noch niemand die Mühe gemacht, die Sache bis ans Ende durchzudenken. Daher wären auch diejenigen, welche nicht der empiristischen Anschauung huldigen (wie viele Philosophen), trotzdem bisher kaum in der Lage, ernsthaften Vorhaltungen eines Physikers über die Art der Herstellung des starren Körpers völlig widerlegende Argumente entgegenzusetzen. Da, wenn der starre Körper auf irgendeine Weise gegeben ist, auch die „*Geometrie unseres Raumes*" gegeben ist, so übertragen sich die obigen sowie die folgenden Bemerkungen auch auf dieses Problem.

Dies nämlich ist sicher: Ist eine rein experimentelle Herstellung des starren Körpers unmöglich, so kann auch in der wirklichen Herstellung desselben in der technischen Industrie *eine solche nicht vorliegen. Eine kritische Durchdenkung dieses technischen Vorgangs müßte in diesem Falle dies erkennen lassen.* Zeigt sich dann, daß der Vorgang nicht rein experimentell ist, so ist *damit* natürlich noch nicht die absolute Unmöglichkeit einer solchen Herstellung nachgewiesen, aber der allgemein verbreiteten Ansicht, daß er so hergestellt *werde*, ist der Boden entzogen, und dies hat bedeutende Konsequenzen.

II.

Zwei Umstände erschweren das Problem und haben wohl die Lösung verhindert: a) daß etwa vier verschiedene Prinzipien bei der Herausarbeitung des starren Körpers nach und nach zusammenwirken, b) daß der ganze Prozeß niemals in den Händen eines einzelnen Menschen liegt.

Wir unterscheiden zunächst einmal zwischen dem starren Körper des Alltags, *dem groben starren Körper*, und dem starren Körper der Wissenschaft, dem *feinen starren Körper*. Für den groben starren Körper[1]) haben wir vorerst zwei Arten von Definitionen oder Kennzeichen:

1. *Der Körper, der nur räumliche (perspektivische) Veränderungen seiner Gestalt und Größe zeigt.* Um dies jedoch an einem Körper zu entscheiden, bedarf es der *Kenntnis*, was perspektivische Veränderungen sind, was nicht (dies aber schließt die Kenntnis von der „Natur unseres Raumes" ein, die natürlich noch nicht bewußt zu sein braucht). Sicherlich aber ist also der so gefundene starre Körper nicht rein experimentell gefunden, er ist wesentlich schon durch Exhaustion bestimmt. Es ist klar, daß bei dieser perspektivischen Auswahl des starren Körpers gerade auch Eigenschaften, die über die „Euklidität" des Raumes entscheiden, zur Anwendung kommen. So, wenn sich ein starrer Körper in gleicher Lage längs Geraden von mir entfernt (Übereinstimmung von Parallelen und Äquidistanten, ein Kriterium, auf das *Hugo v. Seeliger* besonders hingewiesen hat). Natürlich kann die perspektivische Definition allein die Herstellung des wissenschaftlich exakten, feinen starren Körpers nicht leisten.

2. *Der harte Körper.* Die Erfahrung, daß ein Körper „*hart*", d. h. gegen äußere mechanische Angriffe (Druck usw.) sehr widerstandsfähig ist, möchte gelegentlich zur Meinung verführen, damit auch ein Kriterium für räumliche Unveränderlichkeit überhaupt, d. h. für den starren Körper zu haben. Tatsächlich sind viele harte Körper auch räumlich sehr starr. Doch kann die Härte allein nie Sicherheit gegen Kräfte geben, welche den Körper als Ganzes verändern (ausdehnen, zusammenziehen). So kann die Härte niemals als Definition des starren Körpers dienen, höchstens als heuristisches Prinzip für einen möglichst schwer veränderlichen Körper.

---

1) Da die Glieder unseres Körpers i. Allg. zufällig als grobe st. K. gelten können und unbewußt als Muster dienen, so erklärt sich hieraus die scheinbare Selbstverständlichkeit des *groben* st. K. Ganz anders liegen aber die Verhältnisse jenseits der Grenze dieser groben Schätzungen.



Damit aber gelangen wir von den zwei vorstehenden „Definitions“-Arten des starren Körpers, die nur den groben starren Körper liefern konnten, zu einer weiteren, welche bereits zum feinen starren Körper hinüberleitet.

3. Der unveränderliche Körper. Hat man einmal eine grobe Definition des starren Körpers, so kann man gewisse Wirkungen erkennen, welche die Größe und Gestalt eines Körpers ändern (z. B. Wärme, Druck usw.). Aus der so erlangten experimentellen Kenntnis dieser Wirkungen ist man dann in der Lage, sie in gewissem Maße konstant zu halten und so ihren Einfluß auf den starren Körper auszuschließen. Es wäre hiermit natürlich eine wirkliche Definition des feinen starren Körpers gegeben, wenn es gelänge, alle Veränderungen desselben auf diese Weise zu beherrschen. Aber, da viele dieser Wirkungen überhaupt durch die Änderungen des starren Körpers erst definiert und bemerkt werden, so wäre es eine Zirkeldefinition; denn um die Änderungen festzustellen, müßte ich den feinen starren Körper schon anderweitig kennen oder definiert haben. Abgesehen davon sind wir aber niemals in der Lage, alle verändernden Wirkungen zu kennen. Es sind stets noch neue innere Wirkungen möglich, die unbekannte Änderungen hervorrufen.

4. Die vierte Definition des starren Körpers ist die (schon erwähnte) durch die Gesetze der euklidischen Geometrie. Von ihr wird im nächsten Abschnitt u. a. mehr gehandelt werden.

III.

Wir wenden uns nach diesen Vorbereitungen zur Frage der eigentlichen Herstellung des wissenschaftlichen starren Körpers.

Ob ein Körper starr ist, wird für gewöhnlich mittels „Apparaten“ gemessen (schon der einfache Maßstab ist ein solcher). Es wird dabei sozusagen die Starrheit des einen starren Körpers an der des anderen gemessen. Die Starrheit (auch „Genauigkeit“ oder „Richtigkeit“) der Apparate selbst würde wieder durch andere Apparate gemessen. Diese Rekursion kann aber nicht ins Unendliche fortgesetzt werden, es muß daher starre Körper geben, welche nicht durch Vergleich mit anderen als solche erkannt werden, welche aber, da alle übrigen an ihnen gemessen werden, die genauesten momentan herstellbaren sind. Wir bezeichnen diesen Zustand als die Hierarchie der starren Körper, und diese starren Körper höchster Art als „autogene starre Körper“.

Unser Interesse konzentriert sich also notwendig auf diese autogenen starren Körper. Die vorstehende Überlegung von der Hierarchie der starren Körper zeigt, daß es immer gerade die letzten und feinsten beherrschbaren Wirkungen in der Wissenschaft sind, welche den feinsten, den autogenen starren Körper charakterisieren und von den übrigen unterscheiden. An diesen letzten und feinsten Unterschieden und Wirkungen also muß es konstatierbar sein, wo eigentlich das auswählende Prinzip zu suchen ist, das den starren Körper letzten Endes bestimmt.

Wo haben wir die Herstellung der letzten und feinsten autogenen starren Körper zu suchen? Offenbar in den Fabriken der Präzisionsmeßinstrumente letzter Feinheit, also in den Fabriken der feinmechanischen und optischen Präzisionsindustrie.

Ein Umstand jedoch, auf den hier gleich hingewiesen sei, wäre geeignet, den klaren Einblick in das Wesen dieses Herstellungsvorgangs scheinbar etwas zu erschweren. Angenommen, wir fänden bereits auf Grund eines groben Kriteriums zufällig einen Körper, der innerhalb unserer letzten Meßgenauigkeit und vielleicht darüber hinaus dem wirklichen, alsbald zu definierenden starren Körper völlig gleich käme. Kurzsichtige könnten hierdurch zur Ansicht kommen, daß der starre Körper hier tatsächlich experimentell gefunden sei (ebenso wie die zugehörige Geometrie). Kurzem Nachdenken zeigt sich jedoch, daß dieser Schein nur solange dauern kann, als wir mit unserer Genauigkeit nicht an diejenige Grenze gelangt sind, mit der jener Körper den wirklichen starren Körper repräsentiert, was unfehlbar früher oder später kommen muß. Darnach aber müßten wir wieder vor einer vollkommenen Ratlosigkeit stehen, wollten wir diesen starren Körper als den wirklichen gelten lassen. —

Stellen wir uns also jetzt einmal einen solchen äußersten feinsten Fall vor. Nehmen wir an, in einer Präzisionswerkzeugfabrik solle ein feinster Meßapparat, der selbst wieder zur Prüfung anderer starrer Körper und Apparate dienen soll, gebaut werden. Man greift zu dem bisher erfahrungsgemäß besten (d. h. starrsten) Material und bringt es in eine Umgebung von größtmöglichster Konstanz. Wie dieser bisherig beste starre Körper zustande kam, dies lassen wir vorläufig offen,

wir wollen ja eben untersuchen, wie aus starrem Material ein starreres zustande kommt.

Es werde der Apparat mit aller Sorgfalt gemacht und zusammengesetzt, und soll nun geprüft werden. Mit anderen Apparaten soll er im allgemeinen nicht verglichen werden, da er ja selbst die letzte Stufe der Exaktheit des starren Körpers darstellen soll. Da bleibt für Prüfungszwecke nur das eigene Verhalten des Apparats selbst. Diese Prüfungsmethoden sind aber bei einem messenden Apparat ausnahmslos geometrische, bzw. mit solchen verknüpft. Der Konstrukteur unseres Apparats wird also die geometrischen Prüfungen des Apparats vornehmen. Wir nehmen nun an, daß dabei eine Hemmung oder Abweichung eintrete, die mit den Gesetzen der euklidischen Geometrie in Widerspruch stehe. Solche Abweichungen kommen am häufigsten wohl bei Prüfungen nach einiger Dauer vor. Denn wir beherrschen naturgemäß die schnell wirkenden Vorgänge besser als die langsam wirkenden, deren immer wieder auftreten können (Senkungen, Durchbiegungen, innere Umsetzungen und Veränderungen).

Unser ganzes Problem spitzt sich nunmehr zu auf die Frage: Was wird der Konstrukteur unter diesen Umständen tun?

Er kann zweierlei tun.

1. Er kann sagen: Die Herstellung des Apparats ist mit aller Vorsicht (bis jetzt bekannten!) erfolgt; ich habe daher hier den experimentellen Nachweis eines nichteuklidischen Raumes. Er wird dann die Größe der Abweichung messen und den Apparat nach der nichteuklidischen Geometrie, die er gefunden, umbauen.

2. Er kann sagen: Die Abweichung vom euklidischen starren Körper muß von noch unbekannten Ursachen oder einer unbekannten Verbindung bekannter Ursachen herrühren, denn einen gewöhnlichen Fehler oder Irrtum haben wir ausgeschlossen. Er wird die neue Veränderung, die durch Abweichung seines starren Körpers vom euklidischen definiert ist, als solche experimentell solange studieren, bis es ihm gelingt, auch sie stets von seinem Apparate fernzuhalten (was keineswegs sofort der Fall zu sein braucht und beliebig viele Jahre event. dauern kann).

Es hängt nun die Beantwortung unserer Kernfrage davon ab, welche der beiden Alternativen der Konstrukteur einschlagen wird. Es wäre von hohem Interesse durch eine Umfrage bei den renommiertesten Fabriken feinmechanischer und optischer Präzisionsapparate festzustellen, was für Meinungen da herrschen. Es wird natürlich die Antwort in einer allgemeinen Entscheidung zum Standpunkte 2 bestehen, doch werden wohl da und dort Kautelen hinzugefügt werden. Auch wir haben dem Gesagten noch Verschiedenes hinzuzufügen. Ich glaube, daß die meisten Konstrukteure sich glatt zu dem Standpunkt 2 bekennen werden. Der eine oder andere jedoch, der mit den modernen theoretischen Bestrebungen näher in Berührung gekommen ist, wird es für notwendig finden, zu sagen: ich suche allerdings die Abweichungen von der euklidischen Geometrie zu entfernen, aber nur, solange es möglich ist natürlich. Er meint also, wenn es einmal nicht möglich sein sollte, würde er sich dem Standpunkt 1 anschließen. Im innersten Herzen aber hofft er bestimmt, daß diese Eventualität niemals eintreten werde, und er ist nicht kritisch genug, sich zu sagen, daß selbst dann, wenn sie einmal eintritt, er noch lange nicht zu Standpunkt 1 übergehen würde, sondern bis an sein Lebensende versuchen würde, die Abweichung experimentell zu erforschen, um sie dann doch noch wegzubringen und die euklidische Geometrie durchzuführen, denn er weiß, daß er bei seiner Firma nicht viel Anklang mit seiner Entdeckung finden würde.

Bei den Versuchen nun, die besprochene Abweichung des autogenen starren Körpers experimentell zu studieren, kommt ein weiterer wichtiger Punkt in Frage, über den ebenfalls die Konstrukteure gefragt werden müßten [1]). Sämtliche Konstrukteure werden nämlich bei ihren diesbezüglichen Versuchen die geometrischen Eigenschaften ihrer Apparate ohne weiteres euklidisch in ihre Rechnungen einführen. Nun kann man ja vom experimentalistischen Standpunkt aus ohne weiteres rechtfertigen (soweit das von diesem Standpunkt aus überhaupt geht), bei den gewöhnlichen Experimenten mit nicht autogenen starren Körpern die geometrischen Eigenschaften als euklidische in die Rechnung einzuführen. Der Empirist sagt dann etwa: Durch den autogenen starren Körper, der der euklidischen Geometrie experimentell gehorche, sei diese mit überragender Genauigkeit experimentell bewiesen, so daß man bei nicht autogenen starren Körpern diese ohne Fehler einführen dürfe. Diese Überlegung versagt nun aber, und dies ist von grundlegender Wichtigkeit, bei den feinsten und letzten, neuen Abweichungen des starren Körpers, denen des autogenen starren

1) Für frdl. Mitteilungen wäre ich sehr dankbar.

Körpers. Denn bei dem autogenen starren Körper kann man sich nicht auf die experimentelle Bewiesenheit der euklidischen Geometrie an einem Vergleichskörper berufen, und für den autogenen starren Körper soll sie ja eben erst festgestellt werden. Trotz dieser Sachlage werden sämtliche Konstrukteure dennoch die euklidische Geometrie ihren experimentellen Studien der Abweichung zugrunde legen. Sie sind nämlich einfach gezwungen, etwas Derartiges zu tun, denn wenn sie es offen lassen, welcher Geometrie ihr starrer Körper gehorchen soll, so sind sie eben niemals in der Lage, die Wirkung der Abweichung von der Wirkung des Raumes zu trennen. An dieser Stelle versagt also die experimentalistische Anschauung vollkommen und nur die Verstecktheit dieser Stelle[1]), die ihrer Wichtigkeit gleichkommt, hat bisher diese Einsicht wohl verhindert. Wir sehen, auch bei den Experimenten des Konstrukteurs, die zur Entfernung der Abweichung dienen, bedient er sich der euklidischen Geometrie, führt sie dabei direkt ein und gewährleistet dadurch ihre dauernde Geltung. Er muß an dieser Stelle vor jedem Experiment sich entschließen, welche Geometrie er weiter einführen will, und nimmt da natürlich die euklidische.

Dieses Vorgehen aber ist nichts anderes als „Exhaustion". Dabei ist es natürlich ganz gleichgültig, ob der gefragte Konstrukteur es zugeben will oder nicht, daß auf diesem Wege gerade der euklidische starre Körper durch Exhaustion hergestellt wird. Denn wenn ich alle Abweichungen von den euklidischen Gesetzen systematisch entferne, so erhalte ich eben den euklidischen starren Körper. Ob sich der Konstrukteur oder die Firma dessen bewußt ist, kann keinen Unterschied machen.

Was nun den Zusatz „solange es möglich ist" anlangt, so ist hier zu sagen, daß seit die Gesetze der euklidischen Geometrie bestehen, also seit 2200 Jahren, es bisher immer möglich gewesen ist, die auftretenden Abweichungen zu entfernen. Daß niemals ein Zwang vorliegen wird, eine Abweichung als unentfernbar anzusehen, geht außer aus Obigem daraus hervor, daß es dem Konstrukteur für unbeschränkte Zeit freisteht, zu sagen: die Entfernung der Abweichung sei noch nicht gelungen. Überlegt man sich ferner, daß, wie schon angedeutet, die geometrischen Beziehungen immer „als erste" in die Erklärung eines Experiments eingehen müssen (denn jeder „Apparat" bedient sich in direkter oder indirekter Form zum Messen des starren Körpers, und gegenüber den Eigenschaften des Apparats als Bekannten werden die neuen Erscheinungen gemessen), so erkennt man, daß der starre Körper immer zuerst ist, und erst ihm gegenüber die übrigen Erscheinungen festgestellt (und also in ihrer Abgrenzung definiert) werden.

Daraus folgt, daß man bei der Herstellung des autogenen starren Körpers also „noch frei" ist, da ja alle übrigen Erscheinungen erst von ihm aus abgegrenzt, definiert werden, von ihm als Hintergrund sich abheben (er ist sozusagen der willkürlich wählbare, also einfachst zu wählende Nullpunkt der Erscheinungen, denn es wird die Konstanz einer neuen Erscheinung durch diejenigen Bedingungen definiert, welche unter den betreffenden Umständen den starren Körper euklidisch konstant halten). Dies ist der Grund, warum es seit 2200 Jahren gelungen ist, alle Abweichungen von der euklidischen Geometrie zu entfernen, und warum dies für alle Zeiten weiter gelingen wird[1]).

Nun kann aber ein bereits kurz angeführter Umstand die Durchsichtigkeit des Prozesses weiter erschweren. Ist nämlich zufällig ein so starrer Körper vorhanden, daß er mit aller momentan möglichen Genauigkeit und vielleicht sogar darüber hinaus den Gesetzen der euklidischen Geometrie gehorcht, so können wir mit diesem starren Körper Apparate herstellen, welche zunächst keine Abweichung von den Gesetzen der euklidischen Geometrie zeigen werden. In einiger Hinsicht ist nämlich unsere Lage tatsächlich eine ähnliche. Dann würde eine Stellungnahme im Sinne der obigen beiden Standpunkte auf längere Zeit kaum nötig sein und die Durchsetzung des euklidischen starren Körpers würde meist nur in dem immer wachen potentiellen Willen liegen, bei gegebener Differenz stets sogleich alles zugunsten der euklidischen Geometrie zu tun. An der Sache selbst kann dieser Umstand nichts ändern.

Um einige Konsequenzen aus dem Dargelegten zu ziehen, sei zunächst auf folgendes Gleichnis hingewiesen. In einem Staate übt

1) Sie ist sozusagen gerade die äußerste Spitze an dem Kristall des st. K., wo dieser weiterwächst.

1) Mit der Exhaustion nicht Vertraute mögen sich nicht durch die Meinung abschrecken lassen, daß nun „alles" willkürlich festsetzbar sei. Es ist wie beim Thermometer sozusagen nur der Nullpunkt (und der Maßstab, doch von diesem ist hier nicht die Rede), die willkürlich (d. h. auf einfachste Art) festgesetzt werden können. Sonst bleibt alles beim Alten.

offenbar derjenige die wahre Herrschaft aus, dessen Wille sich stets durchzusetzen vermag, wenn es zu einem Konflikt kommt. Dabei braucht er in keiner Weise öffentlich hervorzutreten, ja, er kann, weil alles in seinem Sinne läuft, sich in längeren Zeiträumen jeden Eingriffs enthalten. Dennoch ist er derjenige, der das Geschehen letztlich allein nach seinem Willen formt. Wer formt nun wirklich den autogenen starren Körper, wer schreibt ihm seine Gesetze vor? Es sind die leitenden technischen Männer, die ich kurz Konstrukteure genannt habe, in den Fabriken für Präzisionsinstrumente. Sehr häufig wohl funktioniert alles von selbst. Aber in jedem Zweifelsfalle geben sie ihre Willensentscheidung, und zwar stets nach der Seite der euklidischen Geometrie. Diese Männer also bewirken die Einführung des euklidischen starren Körpers. Und wenn alle rechnenden Physiker eine nichteuklidische Geometrie errechnen sollten, solange sie diese Männer nicht dazu veranlassen können, von ihrem oben geschilderten Verfahren abzuweichen, solange bleibt das alles nur Theorie und in der Praxis wird mit jeder überhaupt erreichbaren Genauigkeit für alle Zeiten der euklidische starre Körper gelten.

Es folgt: Der autogene starre Körper wird nicht rein experimentell hergestellt, denn sonst müßte mit voller Objektivität nach allen möglichen Richtungen vorgegangen, dürfte nicht dauernd ein intensivster Druck in einer bestimmten Richtung (euklidische Geometrie) ausgeübt werden. Dieses, durch einen einseitig und bestimmt gerichteten Willen gekennzeichnete Vorgehen, das nicht nach einer objektiven Feststellung, sondern nach einem bestimmten vorgesetzten Ideal strebt, ist eben das, was ich Exhaustion genannt habe. Und ein solches ist unbestreitbar in objektiver Form in den genannten Fabriken vorhanden.

Wir haben zwei Dinge gesehen: 1. Daß durch die Konstrukteure des starren Körpers die Erfüllung der Gesetze der euklidischen Geometrie durch ihn mit allen Mitteln durchzusetzen gesucht wird. 2. Daß durch die Eigenschaft des starren Körpers als sozusagen erster und oberster Begriff der exakten Wissenschaften, wo alles Weitere erst als Differenz zu ihm festgestellt wird, tatsächlich die Freiheit gegeben ist, ihn unabhängig von allen anderen Erscheinungen nach einem bestimmten Gesetz festzusetzen. Diese beiden Dinge in ihrem Zusammenwirken verursachen, daß tatsächlich der euklidisch starre Körper durch Exhaustion in den Fabriken für Präzisionsinstrumente dauernd herausgearbeitet wird. Denn wenn auch manche Konstrukteure trotz ihres dauernden, festen Willens die euklidische Geometrie durchzuführen, eine entfernte theoretische Möglichkeit, daß darin ein Hindernis eintrete, aus mangelnder Einsicht für vorhanden glauben möchten, so bewirkt der zweite obige Umstand, daß ein solches Hindernis niemals Tatsache werden kann.

Wir sehen: Die unter den Physikern, Mathematikern usw. fast allgemein verbreitete Meinung von der rein experimentellen Natur des starren Körpers hat sich als effektiv unrichtig erwiesen. In den Fabriken wird der starre Körper nicht rein empirisch, sondern durch Exhaustion der euklidischen Geometrie hergestellt. Daß er rein experimentell überhaupt nicht herstellbar ist, dies wird manchem Leser schon aus Obigem genügend klar sein[1]), hier kam es mir in erster Linie auf die genannte Tatsache an. Auf dem sicheren Glauben an die experimentelle Natur des starren Körpers beruht aber letzten Endes die ganze empiristische Anschauungsweise unserer Zeit, mit allen auf diesem Glauben errichteten Theorien. Sicher dürfte aus vorstehenden Darlegungen hervorgegangen sein, wie überaus schlecht oder überhaupt nicht begründet und begründbar ein Dogma ist, auf dem heute weite Teile unserer wissenschaftlichen Weltanschauung und neuerdings sogar ausgedehnte Theorien basieren. Auch dürfte es von Interesse sein, von welch großer theoretischer Bedeutung für die wissenschaftliche Methodenlehre und auch für die aktuelle Physik, insbesondere wo sie in ihren Theorien auf den starren Körper oder die Geometrie unseres Raumes Bezug nimmt, die kritische Durchforschung der Vorgänge in den Fabriken für Präzisionsinstrumente sind. Sicherlich bedurfte die empiristische Anschauungsweise, bevor man ausgedehnte Theorien auf sie basieren kann, einer viel tieferen und festeren Begründung, als ihr bisher zuteil wurde. Das Obige läßt allerdings einen Versuch dazu als aussichtslos erscheinen[2]).

1) Im übrigen verweise ich auf meine „Grundlagen d. ang. Geometrie" sowie besonders auf meine letzte Schrift: „Die Grundlagen der Physik", Leipzig u. Berlin 1919. Ich habe selbst in früheren Schriften die Meinung ausgesprochen, daß es eine Art rein empirischer Herausarbeitung des st. Körpers gebe. Vollständiges Durchdenken zeigt jedoch die Unrichtigkeit dieser Auffassung.

2) Es folgt also, daß, solange die obigen Umstände bestehen — und wie wir sahen, müssen sie aus innerer Notwendigkeit immer bestehen — niemals von einer nichteuklidischen Geometrie in der Physik die Rede sein kann.

München (Universität).

(Eingegangen 10. Mai 1920.)

Kolorimetrische Untersuchungen. VI.

Von Otto Meißner.

1. Vergleichsmessungen bei Tages- und Gaslicht.

Bei einer kürzlich vorgenommenen kolorimetrischen Messung von Blätterfarben, die teils bei Tages-, teils bei Gaslicht ausgeführt war, schienen sich mir gewisse systematische Unterschiede zu ergeben. Ich fand nämlich als Differenzen im Sinne: Tageslicht minus Gaslicht ($T—G$) für

	c	w	s[1]
Eberesche	— 0,2	— 4,0	+ 2,0
Eiche	+ 1,0	— 1,5	+ 12,0
Buche	— 1,0	— 4,0	— 4,0
Mittel:	— 0,1 ± 0,6	— 3,2 ± 1,8	+ 3,3 ± 4,7

Die Anzahl der Messungen ist nicht groß, und sie beziehen sich nicht auf identische Objekte (vielmehr waren es beide Male andere Blätter, wiewohl derselben Zweige und ziemlich sicher praktisch auch derselben Färbung). Immerhin scheinen sie bereits folgendes anzudeuten:

1. Der Weißgehalt wird bei Tage zu gering, der Schwarzgehalt zu hoch geschätzt.
2. Im Mittel, d. h. bei der Reinheit r, hebt sich beides auf.

Nun hatte ich früher bereits an 2 Papierstückchen „b“ und „c“[2]) Messungen bei Tages- und Gaslicht angestellt. A. a. O. ist nur das Mittel aus allen Messungen mitgeteilt; ich habe jedoch im Original jedesmal die Art der Beleuchtung[3]) notiert, so daß ich noch eine nachträgliche Trennung vornehmen konnte.

Wie man sieht, zeigen die Differenzen eine

Tabelle I.

$T—G$	„b“	„c“	
Filter 1	+ 1,5 ± 3,4	+ 0,4 ± 4,0	+ 2,6 (s)
„ 2	+ 6,9 ± 2,1	+ 4,8 ± 4,2	
„ 3	+ 0,9 ± 3,7	+ 1,4 ± 4,9	
Filter 4	— 4,5 ± 1,8	+ 0,2 ± 1,4	— 2,5 (w)
„ 4b	— 6,6 ± 0,8	— 2,0 ± 1,9	
„ 5	— 2,5 ± 1,8	+ 0,4 ± 5,3	
Filter 6	— 4,1 ± 3,5	+ 2,8 ± 2,9	

ausgesprochene Abhängigkeit von der Filterfarbe; der Schwarzgehalt (Filter 1—3) wird bei Tage zu hoch, der Weißgehalt (Filter 4—5) zu klein gemessen.

Die Ursachen hierfür dürften Spiegelungserscheinungen sein. Diese treten bei Tage, insbesondere bei der einseitigen Beleuchtung, bei der sie, den Zimmerverhältnissen entsprechend, erfolgen mußten, in höherem Maße auf als bei der künstlichen, fast von oben her kommenden Beleuchtung. Das bei Tage weggespiegelte Licht, das nicht in das Auge des Beobachters gelangt, läßt den Weißgehalt zu klein erscheinen: auch für den Schwarzgehalt ist die Betrachtung gültig, da dieser ja als Komplement des Weißgehalts (im Durchlaßfilter) zu 100 ermittelt wird.

2. Die Änderung der Laubfärbung im Verlaufe des Sommers.

Im Laufe des Sommers 1919 habe ich zu 6 Terminen (14. und 29. Mai, 11. und 30. Juni, 14. Juli und 28. August) eine große Anzahl (ca. 1000) Messungen der Farbe von Blättern, insbesondere der häufigeren gemacht. Eine gedrängte Zusammenfassung für die wichtigsten Pflanzenarten enthält Tabelle II.

Tabelle II.

Epoche	1—6. Buche, Eiche, Linde, Ahorn, Rüster, Pappel				7—10. Birke, Eberesche, Flieder, Spiräe			
	c	w	s	r	c	w	s	r
1919 V. 14.	94,2	12,8	60,0	27,2	89,3	8,5	77,5	14,0
„ 29.	91,9	7,6	75,7	16,7	89,2	5,3	83,6	11,1
„ VI. 11.	89,8	8,0	80,6	11,4	89,2	7,5	83,4	9,1
„ 30.	88,6	5,8	85,8	8,4	88,6	6,4	84,6	9,0
„ VII. 14.	88,0	6,2	86,9	6,9	88,0	6,0	87,0	7,0
„ VIII. 28.	87,4	5,0	88,6	6,4	87,7	5,5	87,1	7,4
1920 IV. 25.	93,4	05,3	73,8	20,9	89,1	4,8	86,1	9,1

Im Laufe des Sommers nehmen also Farbton, Weißgehalt und Reinheit ab — der Farbton bei den links in der Tabelle II stehenden Bäumen viel stärker als bei den andern! — der Schwarzgehalt zu. Als „Endzustand“ wird man 88.05.87 als Kennzahl eines ausgereiften Laubblatts ansehen können, wie ich bereits mit den

1) Die Bezeichnungen sind dieselben wie in den früheren Aufsätzen dieser Zeitschrift.

2) Diese Zeitschr. **21**, 159ff., 1920.

3) Sogar noch ausführlicher: die Art und Stärke der Bewölkung bei Tage.

Tabelle III.

	Anzahl	$-1000\, k_s$	s[1])	$1000\, k_w$
1. Eiche	40	733 ± 108	77,5 ± 1,3 — (2,08 ± 0,42) (c — 91,8)	219 ± 154
2. Buche	30	954 ± 55	67,2 ± 1,1 — (6,72 ± 0,40) (c — 90,0)	608 ± 145
3. Linde	51	741 ± 94	72,5 ± 1,3 — (4,13 ± 0,48) (c — 91,9)	784 ± 87
4. Rüster	33	780 ± 109	71,0 ± 0,9 — (4,62 ± 0,78) (c — 92,1)	504 ± 150
5. Eberesche	30	906 ± 78	71,7 ± 1,2 — (4,40 ± 0,39) (c — 90,6)	761 ± 118
6. Erle	23	754 ± 134	80,2 ± 1,0 — (2,28 ± 0,39) (c — 90,3)	121 ± 207
7. Flieder	32	857 ± 102	81,5 ± 0,9 — (2,84 ± 0,37) (c — 90,4)	170 ± 176
8. Vitis sp.	31	788 ± 110	71,7 ± 1,4 — (3,91 ± 0,56) (c — 92,4)	— 288 ± 174
9. Ampelopsis	21	735 ± 148	84,7 ± 1,0 — (2,62 ± 0,51) (c — 90,6)	— 211 ± 214
10. Brennessel	28	623 ± 157	86,3 ± 1,9 — (1,35 ± 0,32) (c — 90,8)	— 214 ± 184

1) Für $c = 88$ (Endfärbung) wird nach den Formeln im Durchschnitt $s = 88$ Proz. — Das quadratische Glied wird (positiv aber) überall sehr klein.

selbstverfertigten Hauchblattfiltern im Herbst 1918 gefunden hatte[1]).

Stellt man den Gang als quadratische Funktion der Zeit (t_0 = Ende Juni; Zeiteinheit für $t = {}^1/_2$ Monat) dar, so erhält man die nachstehenden Formeln:

1—6:

$$\begin{aligned} c &= 90{,}0 - 1{,}00\,(t - t_0) + 0{,}086\,(t - t_0)^2 \\ &\quad \pm 0{,}2 \pm 0{,}25 \qquad\quad \pm 0{,}072 \\ w &= 7{,}6 - 0{,}67\,(t - t_0) + 0{,}068\,(t - t_0)^2 \\ &\quad \pm 0{,}7 \pm 0{,}35 \qquad\quad \pm 0{,}104 \\ s &= 79{,}6 + 3{,}99\,(t - t_0) - 0{,}45\,(t - t_0)^2 \\ &\quad \pm 1{,}8 \pm 0{,}81 \qquad\quad \pm 0{,}27 \\ r &= 12{,}8 - 2{,}98\,(t - t_0) + 0{,}31\,(t - t_0)^2 \\ &\quad \pm 0{,}9 \pm 0{,}42 \qquad\quad \pm 0{,}12 \end{aligned}$$

7—10:

$$\begin{aligned} c &= 88{,}7 - 0{,}15\,(t - t_0) - 0{,}002\,(t - t_0)^2 \\ &\quad \pm 0{,}1 \pm 0{,}05 \qquad\quad \pm 0{,}015 \\ w &= 6{,}5 - 0{,}29\,(t - t_0) \\ &\quad \pm 0{,}6 \pm 0{,}25 \\ s &= 83{,}9 + 1{,}28\,(t - t_0) - 0{,}119\,(t - t_0)^2 \\ &\quad \pm 0{,}8 \pm 0{,}37 \qquad\quad \pm 0{,}107 \\ r &= 9{,}6 - 1{,}30\,(t - t_0) + 0{,}113\,(t - t_0)^2 \\ &\quad \pm 0{,}9 \pm 0{,}40 \qquad\quad \pm 0{,}119 \end{aligned}$$

t_0 = Ende Juni; Einheit von $t = {}^1/_2$ Monat; theoretisch $w + s + r = 100$.

Daß das quadratische Glied jedesmal das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie das lineare, ist kein Zufall, sondern liegt in der Natur der Kurven, die einen hyperbelastähnlichen (oder exponentiellen der Form $e^{-k(t-t_0)}$) Charakter haben.

In diesem Jahre (1920) ist infolge des warmen März und April die Vegetation schon erheblich weiter fortgeschritten als 1919. Dies zeigt deutlich die letzte Zeile der Tabelle II. Der Farbton entspricht bei Buche, Eiche usw. etwa der 1919 am 20. Mai, 1920 ist also dem vorangegangenen Frühjahr um ca. 25 Tage = $3^1/_2$ Wochen voraus. (Bei Nr. 7—10 ist die Änderung im Laufe des Sommers zu gering.) Abweichend verhält sich nur der Weißgehalt, der 1920 sich kleiner ergab als er 1919 (im Mittel) überhaupt beobachtet wurde. Das dürfte zunächst daran liegen, daß 1919 die Farbenbestimmung meist bei Gaslicht vorgenommen wurde. Rechnet man demgemäß „zur Reduktion" der Werte von 1920 etwa $2^1/_2$ Proz. zum Weißgehalt hinzu, $2^1/_2$ Proz. vom Schwarzgehalt ab, so bekommt man für die Epoche 1920 IV. 25. jetzt auch bei w und s (und ebenso bei den Nr. 7—10 der Tabelle!) Werte, die solchen etwa vom 20. Mai 1919 entsprechen. Man sieht also, wie genau auf die Gleichartigkeit der angestellten Beobachtungen zu achten ist, da sonst Vergleiche leicht zu falschen Schlüssen führen können. (Ebenso ist stets das genau passende Filter anzuwenden; gerade hier, bei $c \sim 90$, hätte die Benutzung der roten Filter 2 und 3 statt der blauen 4 und 4b für den Weißgehalt erheblich zu große Werte gegeben[1]).

1) Diese Zeitschr. **20**, 83—85, 1919.

3. Zusammenhang zwischen Farbton und Schwarzgehalt der Blätter.

Auch den Zusammenhang zwischen c und s (sowie w) habe ich untersucht. Die Blätter werden zugleich „grüner" und „dunkler", d. h. c nimmt ab, s zu. In Tabelle III ist k_s der Korrelationsfaktor, s ist als lineare Funktion von c angegeben. k_s ist stets sehr nahe an 1; ferner kann man sagen, daß bei Änderung von c um 1 Einheit nach grün hin s um etwa $3^1/_2$ Proz. wächst. Viel kleiner ist k_w, das positiv sein sollte[2]), sich aber z. T. als negativ, oft als < als sein mittlerer Fehler, ergab. Das liegt wohl an der Unsicherheit der Beobachtung der an sich nur kleinen Werte des Weißgehalts (vgl. auch die oben in Nr. 2 gemachte Bemerkung über die Vergleichbarkeit der Beobachtungen.

1) Diese Zeitschr. **21**, 161, 1920.

2) Bei den Baumarten ist es überall relativ groß, der Zusammenhang also als sicher anzusehen.

Potsdam, 29. April 1920.

(Eingegangen 10. Mai 1920.)

Über die Möglichkeit der optischen Abbildung von Molekulargittern [1]).

Von M. Wolfke.

Wir wollen hier die Möglichkeit einer optischen Abbildung von molekularen Gebilden näher untersuchen.

Eine direkte Abbildung einer molekularen Struktur mit irgendeiner Strahlenart ist undenkbar, und zwar aus folgendem Grunde: Die zur Abbildung notwendige Wellenlänge müßte so klein sein, daß ihr gegenüber eine Anhäufung von Molekülen, z. B. ein Kristallgitter, nicht als ein Kontinuum erscheinen, sondern jedes Molekül für sich ein Beugungsbild erzeugen würde. Nur dann kann das Beugungsbild, das sogenannte primäre oder Zwischen-Bild, entstehen. Ist aber die Wellenlänge genügend klein, so wird die Entstehung eines Abbildes, d. h. des sekundären Interferenzbildes ausgeschlossen sein, da dann auch die Linsen und die Spiegel nicht mehr als Kontinua dieser Wellenlänge gegenüber erscheinen und eine Brechung oder Reflexion in gewöhnlichem Sinne nicht zustande kommen kann.

Es ist aber denkbar, den Abbildungsvorgang, den man theoretisch stets in zwei Stadien trennt, auch praktisch zu trennen und die Erzeugung des primären Bildes z. B. den Röntgenstrahlen zu überlassen und das sekundäre Bild mit sichtbarem Licht zu erzeugen, indem man in einem optischen Abbildungssystem das primäre Bild durch das mittels Röntgenstrahlen photographisch aufgenommene Beugungsbild ersetzt. Allerdings kann dieses Verfahren nicht in allen beliebigen Fällen ein ähnliches Abbild liefern, da die Photographie des Beugungbildes nur seine Intensitätsverteilung, d. h. die Amplituden wiedergibt, nicht aber die Phasenverteilung, die bei der Entstehung des Abbildes im allgemeinen ebenfalls eine maßgebende Rolle spielt.

Die nähere Untersuchung dieser Frage führte mich zu einem neuen Satz der Abbildungstheorie, der die Realisierung einer optischen Abbildung von Molekulargittern prinzipiell ermöglicht. Dieser Satz lautet:

> Bei monochromatischer, paralleler, senkrechter Beleuchtung ist das Beugungsbild eines Beugungsbildes eines symmetrischen Objektes ohne Phasenstruktur identisch mit dem Abbild dieses Objektes.

Um diesen Satz zu beweisen, knüpfen wir an die allgemeinen Gleichungen der Abbildungstheorie an [2]).

Bei einer punktförmigen Lichtquelle ist die Intensitätsverteilung im Beugungsbild (Zwischenbild) durch folgenden Ausdruck gegeben [3]):

$$I_1 = \text{const.}\left\{\iint\limits_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X,Y)\cdot\sqrt{\cos(\varepsilon-u_0)}\cdot\cos 2\pi\left[\psi(X,Y)-\frac{pX+qY}{l\lambda'}-\frac{n}{n'}\cdot\frac{\xi X+\eta Y}{\lambda'}\right]\right\}^2 + \text{const.}\left\{\iint\limits_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X,Y)\cdot\sqrt{\cos(\varepsilon-u_0)}\cdot\sin 2\pi\left[\psi(X,Y)-\frac{pX+qY}{l\lambda'}-\frac{n}{n'}\cdot\frac{\xi X+\eta Y}{\lambda'}\right]\right\}^2, \tag{1}$$

wo die Integration über das ganze Objekt zu erstrecken ist. In diesem Ausdruck bedeuten: X, Y die Koordinaten in der Objektebene, ξ, η die angulären Koordinaten des Beugungsbildes, p, q die Koordinaten der Lichtquelle, l den Abstand der Lichtquelle von der Objektebene, λ' die Wellenlänge, die zur Erzeugung des Beugungsbildes benutzt wurde, n, n' die beiden Brechungsindices des Objekt- und des Bildraumes, $\varphi(X,Y)$ den Durchlässigkeitskoeffizienten, $\psi(X,Y)$ die Phasenverzögerung im Objekt und $\sqrt{\cos(\varepsilon-u_0)}$ den Schwächungsfaktor nach dem Lambertschen Gesetz.

Für paralleles Licht senkrecht zur Objektebene ist $l=\infty$ und $p=q=0$. Findet die Abbildung in der Luft bei kleinen Öffnungswinkeln statt, so ist:

$$n = n' = 1 \text{ und } \sqrt{\cos(\varepsilon - u_0)} = 1.$$

Außerdem kann man bei Objekten ohne ausgeprägte Phasenstruktur $\psi(X,Y) = \text{const.} = 1$ setzen und der Ausdruck (1) geht in den folgenden über:

$$\left.\begin{aligned} I_1 = \text{const.}&\left\{\iint\limits_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X,Y)\cdot\cos\frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'}\right\}^2 + \\ + \text{const.}&\left\{\iint\limits_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X,Y)\cdot\sin\frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'}\right\}^2. \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

1) Vorgetragen in der Sitzung der Schweiz. Phys. Ges. in Zürich, am 24. April 1920.

2) M. Wolfke, Ann. d. Phys. (4), 39, 569, 1912, Habilitationsschr. Zürich 1914.

3) l. c., Formel (IIIa), S. 588.

Ist das Objekt symmetrisch in bezug auf die X- und Y-Achsen, dann ist der Durchlässigkeitskoeffizient $\varphi(X, Y)$ eine symmetrische Funktion und das zweite Integral des obigen Ausdruckes (2) verschwindet:

$$\iint_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X, Y)\cdot\sin\frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'}=0. \quad (3)$$

Der Ausdruck (2) reduziert sich alsdann zu:

$$I_1=\text{const.}\left\{\iint_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X, Y)\cos\frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'}\right\}^2. \quad (4)$$

Dieser Ausdruck (4) gibt uns die Intensitätsverteilung im Beugungsbild unseres Objektes und gleichzeitig die Schwärzungsverteilung in der photographischen Aufnahme des Beugungsbildes.

Wir wollen jetzt das Beugungsbild des photographisch aufgenommenen Beugungsbildes (4) berechnen, indem wir es in die vordere Brennebene des Objektives eines optischen Systems setzen. Der Durchlässigkeitskoeffizient dieser photographischen Aufnahme wird durch die Wurzel $\sqrt{I_1}$ aus der Intensität I_1 (4) gegeben. Dementsprechend wird die Lichtbewegung S_2 im Beugungsbild des Beugungsbildes (4) bei monochromatischer, paralleler, senkrechter Beleuchtung durch folgenden Ausdruck gegeben[1]):

$$S_2=\text{const.}\iint_{\text{Beugungsbild}} d\xi\,d\eta\iint_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X, Y)\cdot\cos\frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'}\cdot\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\Psi(\xi,\eta)-\frac{x\xi+y\eta}{\lambda}\right], \quad (5)$$

wo das erste Integral über das ganze Beugungsbild (4) zu erstrecken ist. Hier bedeuten: t die Zeit, T die Schwingungsperiode des neuen Lichtes, $\Psi(\xi,\eta)$ die eventuelle Phasenverzögerung in der photographischen Platte, x, y die Koordinaten des neuen Beugungsbildes und λ die neue Wellenlänge. Wir nehmen an, daß die photographische Platte keine Phasenstruktur besitzt, so daß $\Psi(\xi,\eta)=\text{const.}=1$ gesetzt sein darf. Da das Integral (3) gleich Null ist, so wird auch das folgende Integral verschwinden:

$$\iint_{\text{Beugungsbild}} d\xi\,d\eta\iint_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X,Y)\sin\frac{2\pi(\xi X+\eta Y)}{\lambda'}\cdot\cos 2\pi\left[\frac{t}{T}-\Psi(\xi,\eta)-\frac{x\xi+y\eta}{\lambda}\right]. \quad (6)$$

Subtrahieren wir dieses Integral (6) vom Ausdruck (5), so erhalten wir schließlich nach einfacher Umformung:

$$S_2=\text{const.}\iint_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X, Y)\iint_{\text{Beugungsbild}} d\xi\,d\eta\cdot\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{\xi(x-X\lambda/\lambda')}{\lambda}-\frac{\eta(y-Y\lambda/\lambda')}{\lambda}\right]. \quad (7)$$

Vergleicht man diesen Ausdruck (7) für das Beugungsbild unseres Beugungsbildes (4) mit dem Ausdruck für die Lichtbewegung im Abbild eines nicht selbstleuchtenden Objektes bei monochromatischer, paralleler, senkrechter Beleuchtung[2]):

$$S_n=\text{const.}\iint_{\text{Objekt}} dX\,dY\,\varphi(X, Y)\iint_{\text{Apertur}} d\xi\,d\eta\cdot\sin 2\pi\left[\frac{t}{T}-\frac{\xi(x-X)}{\lambda}-\frac{\eta(y-Y)}{\lambda}\right]. \quad (8)$$

so ersieht man ohne weiteres, daß er mit demselben formell identisch ist.

Damit ist der neue Satz bewiesen.

Der oben bewiesene Satz wurde an verschiedenen optischen Gitterstrukturen mit parallelem Licht der gelben Quecksilberlinie geprüft, wobei er sich in allen Fällen als bestätigt erwiesen hat. Bei diesen Versuchen muß, um scharfe Bilder zu erhalten, eine möglichst starke Lichtquelle mit sehr kleinem punktförmigen Kollimatorspalt benutzt werden.

Beim Vergleich der Ausdrücke (7) und (8) sieht man, daß die Koordinaten des Objektes im Verhältnis λ/λ' vergrößert sind, so daß bei dieser Abbildungsmethode allein durch den Übergang von der einen Wellenlänge λ' zu der anderen λ eine Vergrößerung des Abbildes im Verhältnis der angewandten Wellenlängen erzielt wird. So z. B. wenn man zur Erzeugung des primären Beugungsbildes Röntgenstrahlen benutzt und dann das Abbild mit sichtbarem Licht entstehen läßt, erscheint das Abbild bereits ca. 10000 mal vergrößert. Bei Benutzung eines passenden optischen Systems kann man leicht eine totale 1000000- bis 10000000fache Vergrößerung erreichen. Diese Vergrößerung würde vollständig genügen, um die Molekularstruktur sichtbar zu machen. Um auf diesem Wege optische Bilder von Kristallgittern zu er-

1) l. c. Formel (10), S. 591.
2) l. c. zweite Formel für S_n auf S. 593.

halten, müßte man allerdings Röntgenaufnahmen herstellen, bei denen nur die an einer einzigen Kristallfläche reflektierten Strahlen zur Interferenz gelangen. Eine Andeutung derartiger Beugungsbilder erhielt Hupka[1]) bei seinen Versuchen über die Reflexion der Röntgenstrahlen.

Die hier beschriebene Abbildungsmethode erlaubt also die bis jetzt theoretisch vorhandene Grenze der optischen Abbildung zu erweitern und gibt eine prinzipielle Möglichkeit, die molekulare Kristallstruktur optisch sichtbar zu machen.

1) E. Hupka, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 369, 1913.

Zürich, April 1920.

(Eingegangen 21. Mai 1920.)

Über eine physiologische Erklärung der Referenzflächen der Gestirne.

Von Aloys Müller.

Der physiologischen Erklärungen der Referenzflächen der Gestirne hat es schon manche gegeben. Keine von ihnen ist besonders für solche, die der Physiologie und Psychologie ferner stehen, auf den ersten Blick so bestechend wie die, die Herr Jaeckel in dieser Zeitschrift[1]) aufstellt, weil sie in überraschend einfacher Weise aus den optischen Konstanten des Auges die numerischen Werte der Referenzflächen zu ergeben scheint, die man in neuerer Zeit bestimmt haben will. Ich möchte aber zeigen, daß sie Bedenken ausgesetzt ist, die, wie ich glaube, nicht zu überwinden sind.

Vorab sei bemerkt, daß die Formel für $\varDelta a$ noch allgemeiner gefaßt werden kann. Man sieht leicht ein, daß sie, je nachdem B vom Beobachter aus vor oder hinter A liegt, lautet:

$$\varDelta a = \frac{a^2}{\beta p \pm a}.$$

An erster Stelle scheinen mir nun die physiologischen Grundlagen der Theorie teils nicht klar herausgearbeitet, teils irrtümlich gedeutet zu sein. Der benutzte Wert von 35″ hat mit der Trennung zweier Punkte nichts zu tun, sondern ist die vielfach angenommene, durchschnittliche Winkelgröße, die ein „Punkt" bei mittleren Helligkeitsunterschieden von Objekt und Grund und bei nicht zu starker absoluter Helligkeit wenigstens haben muß, um überhaupt sichtbar zu sein. Ein Gegenstand mit dieser Winkelgröße erzeugt auf der Netzhaut den „physiologischen Punkt", der der eben wahrnehmbare Teil eines wegen der Unvollkommenheit des dioptrischen Augenapparates stets vorhandenen Zerstreuungskreises ist. Die „Punkte" A und B müssen beide wenigstens diesen Gesichtswinkel besitzen, damit sie überhaupt gesehen werden können. Wir geben nun A und B einen beliebigen Gesichtswinkel $> 35''$ und nehmen an, B liege in der Anfangsstellung unmittelbar hinter A auf der Visierlinie. Läßt man jetzt B sich von A entfernen, während auf A monokular akkommodiert wird, so wächst der Zerstreuungskreis von B und damit auch sein wahrnehmbarer Teil. Aber B wird, wie die Beobachtungen lehren, dadurch noch nicht undeutlich. Eine merkliche Undeutlichkeit von B entsteht erst, wenn der wahrnehmbare Teil seines Zerstreuungskreises einen gewissen Grenzwert überschreitet. In dem Augenblick, wo dieser Grenzwert erreicht wird, ist die Entfernung $AB = \varDelta a$. Die abbildenden Strahlenkegel des „Punktes" B schneiden, sobald sich B von A entfernt, auf der Objektebene eine Fläche aus, deren Winkelgröße mehr als 35″ beträgt und sich unschwer berechnen läßt. Machen wir nun die Hypothese, daß der wahrnehmbare Teil des Zerstreuungskreises von B jenen Grenzwert dann erreicht, wenn der abbildende Strahlenkegel des auf der Visierlinie liegenden geometrischen Punktes des „Punktes" B auf der Objektebene eine Fläche ausschneidet, die unter dem Gesichtswinkel von 35″ erscheint, dann läßt sich die zu Anfang mitgeteilte Gleichung der Theorie ableiten.

Wenn man auf diese Weise an Stelle der geometrischen Verhältnisse die wirklichen physiologischen setzt, dann wird die hypothetische Grundlage der Ableitung deutlich. Eine unmittelbare Begründung der Hypothese wird sich schwerlich finden lassen. Nimmt man statt 35″ etwas kleinere Werte, dann gibt die Formel die von Hess und v. Rohr[1]) nach einer anderen Formel berechneten Werte überraschend genau.

Indem wir aber diese Werte mit der Formel verknüpfen, stehen wir schon vor der Frage der Deutung der Formel. Nach Herrn J. gibt sie die Tiefenschärfe bei monokularem Sehen an. Das ist ein Irrtum. $\varDelta a$ ist auch in seiner Ableitung offensichtlich die Strecke, innerhalb der bei monokularer Betrachtung alle Punkte scharf gesehen werden, wenn auf den Endpunkt von a akkommodiert wird. $\varDelta a$ ist also das, was man in der Physiologie als Akkommodationslinie oder Bildtiefe kennt. Daß die Formel sich nicht auf die Tiefenschärfe bei monokularem Sehen bezieht, läßt sich auch an den Beobachtungen nachprüfen. Sie

1) Diese Zeitschr. **21**, 262, 1920.

1) Graefe-Saemisch, Handb. d. ges. Augenheilkunde[3], II. Teil, Kap. XII, S. 115, 1910.

müßte in diesem Falle die Beobachtungen Wundts wiedergeben können[1]). Wundt ließ einen senkrechten Faden in einem Kasten von bestimmten Anfangsstellungen aus der monokular beobachtenden Versuchsperson näher oder ferner kommen. Die Versuchsperson mußte den Augenblick angeben, wo sie dabei den Faden näher oder ferner sah. Die Strecke, die der Faden zurücklegt, bis er gegenüber seiner Ausgangsstellung näher oder ferner erschien, ist unsere Strecke Δa, falls die Deutung der Formel richtig ist. Wundt nennt sie die Unterscheidungsgrenze. Ich habe die Wundtschen Versuche nach der Formel für die beiden extremen Pupillenwerte $p = 2$ mm und $p = 8$ mm und für $\beta = 5{,}9 \cdot 10^3$ berechnet und stelle die beobachteten und berechneten Werte in der folgenden Tabelle zusammen.

Entfernung des Fadens in cm	Unterscheidungsgrenze in cm					
	beobachtet		berechnet für $p = 8$ mm		berechnet für $p = 2$ mm	
	bei Annäherung	bei Entfernung	bei Annäherung	bei Entfernung	bei Annäherung	bei Entfernung
250	12	12	12,5	13,9	43,7	67,2
220	10	12	9,8	10,8	34,6	50,4
200	8	12	8,1	8,8	28,9	40,8
180	8	12	6,6	7,1	23,8	32,4
100	8	11	2,1	2,2	7,8	9,3
80	5	7	1,3	1,3	5,1	5,8
50	4,5	6,5	0,5	0,5	1,9	2,2
40	4,5	4,5	0,34	0,34	1,3	1,4

Es mangelt ersichtlich fast jede Übereinstimmung. Man erkennt auch, daß innerhalb der möglichen Pupillenwerte kein Wert der Konstanten β eine Übereinstimmung herstellen kann.

An zweiter Stelle mache ich darauf aufmerksam, daß die Theorie, ohne es ausdrücklich zu bemerken, zur Ableitung der Referenzflächen der Gestirne mehrere Voraussetzungen einführt, die nicht zu ihrem Grundgedanken gehören, die unbewiesen sind und teilweise mit der Erfahrung in Widerspruch stehen. Aus der Formel folgen die Werte von a für den Grenzfall $\Delta a = \infty$. Um nun diese Werte als Radienvektoren der Referenzflächen ansprechen zu können, muß die Theorie die folgenden vier Voraussetzungen hinzufügen: 1. daß alle Punkte auf Δa in einer Ebene gesehen werden, 2. daß diese Ebene in der Entfernung des Grenzwertes von a gesehen wird, 3. daß das, was monokular festgestellt ist, auch binokular bestehen bleibt, 4. daß von Gegenständen im Sehraum der Satz gilt: Je weiter, desto größer; je näher, desto kleiner.

1) Nagel, Handb. d. Physiologie des Menschen 3, 377, 1905.

Die erste Voraussetzung würde nur dann aus dem Grundgedanken folgen, wenn die Akkommodation für das monokulare Sehen der einzige Faktor wäre, von dem die Sehferne innerhalb der Grenzwerte von a abhinge. Aber weit wesentlichere Faktoren, die die Sehferne bestimmen, sind Sehgröße, Helligkeit, Farbe, Zugehörigkeit zu einem bestimmten Wahrnehmungskomplex u. a., die unter sich wieder zusammenhängen; auch Astigmatismus und wahrscheinlich der Konvergenzimpuls gehören hierher. Aber auch abgesehen davon kann die Akkommodation das nicht leisten, was die Theorie von ihr verlangt, weil sie praktisch für das Tiefensehen über 5 bis 6 m hinaus gar keine Bedeutung mehr hat. Träfe die erste Voraussetzung zu, weil die Sehferne für das monokulare Sehen ausschließlich von der Akkommodation bestimmt wäre, dann würde die zweite aus ihr folgen. Weil aber die erste nicht gilt, gilt auch die zweite nicht. Es ist übrigens gleichgültig, ob diese beiden Voraussetzungen allgemein bestehen oder ob sie nur auf Gegenstände wie die Gestirne angewandt werden sollen, über deren wirkliche Entfernung wir aus der direkten Sinneswahrnehmung nicht unterrichtet sind; im letzteren Falle sind von den genannten Faktoren Konvergenzimpuls und Astigmatismus zu streichen.

Selbst wenn nun aber auch diese beiden ersten Voraussetzungen für das monokulare Sehen richtig wären, würden sie für das in der Wirklichkeit vorhandene binokulare nicht mehr zutreffen. Denn dann bestimmen noch andere, weit einflußreichere Bedingungen die Sehferne mit, die die engen Grenzen zersprengen, in die das monokulare Sehen den Sehraum bannen will. Tatsächlich sehen die meisten Menschen die Gestirne auch nicht in der Entfernung, in der wir Gegenstände sehen, die im Mittel 25—30 m von uns abliegen. Wo diese Empfindung einmal vorkommt, ist sie, wie ich gezeigt habe[1]), nicht als primäre Empfindung zu deuten. Hätte nun schließlich die Theorie sogar nachgewiesen, daß wir die Gestirne in der Entfernung der Grenzwerte von a sehen, dann müßte sie, um die Änderung der Sehgröße mit der Höhe wenigstens teilweise erklären zu können, noch die Richtigkeit der vierten Voraussetzung dartun. Daß das eine sehr schwierige Angelegenheit ist, habe ich in dem eben genannten Buche ebenfalls nachgewiesen[2]).

Drittens steht die Theorie in Widerspruch mit psychologischen Grundlagen und Befunden

1) A. Müller, Die Referenzflächen des Himmels und der Gestirne, 1918, S. 132.
2) a. a. O. S. 129ff.



bei unserem Problem. Sie versteht unter der Referenzfläche insofern etwas Psychisches, als sie sie durch die Sehfernen bestimmt sein läßt; die Referenzfläche gibt die Entfernungen an, in denen wir die Gestirne wirklich sehen. Aber die Referenzfläche ist lediglich die geometrische Deutung der Beziehungen zwischen Sehgröße und Höhe, also ausschließlich ein Mittel zur Beschreibung von Tatsachen. Deshalb können die Maße einer Referenzfläche nicht absolut angegeben werden, sondern lassen sich mit jeder beliebigen positiven reellen Zahl multiplizieren. Die Sehgröße ist etwas Psychisches. Eben darum läßt sie sich genau so wenig in Zentimetern ausdrücken, wie sich beispielsweise Längen in Dyn ausdrücken lassen, Jede Größe kann nur durch gleichartige Größen gemessen werden. Ich habe alle diese Dinge schon in meinem Buche über die Referenzflächen behandelt; dort ist auch (S. 64) gezeigt, was es mit dem „Tellermond" für eine Bewandtnis hat. Weil aber immer wieder Mißverständnisse dieser verhältnismäßig einfachen Probleme vorkommen, habe ich sie zusammen mit anderen noch einmal ausführlicher in einer Arbeit besprochen, die unter dem Titel „Beiträge zu dem Problem der Referenzflächen des Himmels und der Gestirne" demnächst in dem „Archiv für die gesamte Psychologie" erscheint. Für alle Einzelheiten sei auf diese Arbeit verwiesen [1]).

Die Theorie steht auch ratlos gegenüber manchen Befunden bei den Referenzflächen der Gestirne. Von ihr aus sind z. B. die in dem Buche [2]) festgestellten Unterschiede zwischen der Referenzfläche des Wolkenhimmels und der Referenzfläche der Wolken, zwischen der Referenzfläche des Sternenhimmels und der Referenzfläche der Sterne ganz unverständlich. Auch ist nicht abzusehen, wie die Theorie mit den Referenzflächen des Himmels überhaupt zurecht kommt, die doch ohne Zweifel zu den Referenzflächen der Gestirne in Beziehung stehen. Vor allem aber muß betont werden, daß die Theorie nicht auf die Änderung der Sehgröße der Sterndistanzen paßt. Denn beim Nachthimmel bleibt die Pupillenöffnung beim Sehen in allen Höhen konstant. Sie kann unter Umständen sogar, wenn der Horizont heller ist, beim Sehen in horizontaler Richtung kleiner werden, müßte also dann die umgekehrte Erscheinung — eine Verkleinerung der Sterndistanzen in niederen Höhen — zur Folge haben, als sie in Wirklichkeit vorliegt.

1) Diese Arbeit wird auch eingehend zu den in dieser Zeitschrift veröffentlichten Studien von Witte „Über den Sehraum" Stellung nehmen. Es wird leicht sein, von ihr aus die nicht in allem zutreffende Kritik zu beurteilen, die Geipel an Witte übt (diese Zeitschr. **21**, 169, 1920). Ausführlich werden auch die Arbeiten von Dember und Uibe (Leipziger Berichte, Math.-phys. Kl. **69**, 139, 1917; **69**, 391, 1917; **69**, 485, 1918) besprochen, im besondern die gerade dem Physiker sympathische Theorie einer optisch-atmosphärischen Grenzschicht.

2) a. a. O. S. 96ff.

Viertens müßte, wenn die Theorie recht hätte, bei willkürlich hervorgerufener Pupillenverengerung eine Verkleinerung der Sehschärfe der Gestirne eintreten, die die Irradiation nicht nur aufzuheben, sondern weit stärker als sie in umgekehrten Sinne zu wirken imstande wäre. Man kann sich aber davon überzeugen, daß das dann nicht der Fall ist, wenn das Mittel, das zur Verengerung der Pupillenöffnung verwandt wird, den Wahrnehmungskomplex, von dem das Gestirn einen Teil bildet, im wesentlichen ungeändert läßt. Die von Herrn Meyer beschriebenen [1]) und von Herrn Jaeckel besonders verwerteten, im übrigen längst bekannten Experimente lassen sich also nicht durch die Annahmen deuten, die Herr Jaeckel an den Einfluß der Blende auf die Größe der Zerstreuungskreise knüpft. An ihrer Wirkung sind mehrere Faktoren beteiligt, in erster Linie das Verschwinden des ganzen horizontalen Wahrnehmungskomplexes, dann der unmittelbare psychische Einfluß der engen Blende auf die Sehgröße, die Lichtschwächung infolge der Abblendung, die teils mittelbar durch Verringerung der Irradiation, teils unmittelbar auf die Sehgröße wirkt (und vielleicht noch anderes). Übrigens läßt sich der Einfluß enger Blenden auf die Sehgröße an jedem geeigneten irdischen Objekte feststellen; das Objekt erscheint aber dabei nicht näher, sondern ferner.

1) Diese Zeitschr. **21**, 168, 1920.

Büttgen-Vorst (Kr. Neuß), 7. Juli 1920.

(Eingegangen 16. Juli 1920.)

Über die scheinbare Verkleinerung entfernter Objekte.

Von K. Horovitz.

In einer Zuschrift an die Physikalische Zeitschrift (Heft 6 vom 15. März 1920) beschreibt Professor Stefan Meyer die scheinbare Verkleinerung, die man beobachtet, 1. wenn der Mond oder andere entfernte Objekte durch ein Rohr („das Loch ist dabei so groß, daß der geometrische Strahlengang nicht beeinflußt wird") statt mit freiem Auge oder 2. mit einem Auge allein statt mit beiden Augen betrachtet werden.

Analoge optische Täuschungen, sogenannte

Mikropsie,. beobachtet man beispielsweise nach Atropineinträufelung; Makropsie, eine Vergrößerung, nach Eserineinspritzung. Diese Wahrnehmungen werden durch Änderung der Akkommodation und Konvergenzanstrengung gedeutet, und zwar soll „die besonders hochgradige Anstrengung der Akkommodation die Ursache der Mikropsie sein". (Siehe z. B. Helmholtz, Physiologische Optik, Bd. III, S. 323, Zusatz von Kries u. a., Nagels Handb. der Physiologie, Bd. III, 2. Hälfte, S. 389 u. f.).

Nun ist es eigentümlich, daß die oben erwähnten Versuche, welche scheinbare Verkleinerung ergeben, mit einer Pupillenerweiterung verbunden sind; das Verdecken des einen Auges ruft durch den konsensuellen Pupillenreflex die Vergrößerung der Pupille des freien Auges hervor. Die Verwendung einer Röhre, wie sie Prof. Meyer angibt, bewirkt die Abblendung alles seitlichen Lichtes und auch hier tritt, wie man sich leicht überzeugen kann, eine Vergrößerung der Pupille ein. Es liegt nun nahe anzunehmen, daß das Auge auf diese plötzliche Pupillenerweiterung mit einer Einstellung reagiert, die die Erweiterung wieder aufzuheben strebt und das ist Konvergenz- und Akkommodationsanstrengung, die von Pupillenverengung begleitet ist. (Siehe z. B. Nagels Handb. der Physiologie, Bd. III, 1. Hälfte, S. 67, 2. Hälfte, S. 321.)

Es ist aber jede Anstrengung der Akkommodation mit einer scheinbaren Verkleinerung, jedes Nachlassen mit einer scheinbaren Vergrößerung verknüpft (Helmholtz a. a. O., S. 322 unten; Nagel, S. 390). Dadurch wäre also die Mikropsie in den beiden Fällen, die Prof. Meyer anführt, erklärt. Längere Röhren wirken ähnlich, wie stenopäische Lücken, bei deren Verwendung die Verkleinerung entfernter Gegenstände bekannt ist; durch Versuche mit Glasröhren habe ich mich überzeugt, daß in diesem Fehler die Änderung der Augenpupille keine wesentliche Rolle spielt.

Ich habe auch versucht, die Wirkung der Vergrößerung der Pupillen dadurch zu ermitteln, daß schwarze Gläser vorgehalten und entfernt wurden; dabei geben alle Personen übereinstimmend an, eine deutliche Verkleinerung beim Vorhalten und eine Vergrößerung beim Entfernen der Gläser zu konstatieren. Auch hier scheint wohl ein Akkommodations- und Konvergenzimpuls aufzutreten, der als Verkleinerung empfunden wird. Die Verkleinerung wird auch beobachtet, wenn im hellen Raum die Gläser so weit entfernt vom Auge gehalten werden, daß die Änderung der Pupillen nicht merkbar ist: das deutet auf den Einfluß der Sehschärfe hin.

Über weitere Versuche in dieser Richtung, die mehr physiologisches als physikalisches Interesse haben, wie auch über Experimente zur Erzielung einer Mikropsie unter anderen Bedingungen und ihren Zusammenhang mit der Sehschärfenänderung, die hier ebenfalls von Bedeutung ist, wird an anderer Stelle berichtet werden.

Zusatz bei der Korrektur: In einer unterdessen erschienenen Mitteilung (diese Zeitschr. 1920, S. 262) sucht Herr Jaeckel den Versuch 1 (s. o.) durch Blendenwirkung zu erklären; meine Versuche in dieser Richtung stimmen mit denen Herrn Jaeckels überein, doch reicht diese Erklärung nicht hin, den Versuch 2 zu deuten. Auch zeigten Versuche, die wir bei ausgeschalteter Pupillenwirkung ausführten, daß der Sehschärfenänderung dieselbe Bedeutung zukommt, wie der Pupillenänderung. Seitliche Blendung z. B., die eine Verminderung der Sehschärfe bewirkt, hatte bei Personen mit atropinisierter oder pathologisch lichtstarren Pupillen scheinbare Verkleinerung der betrachteten Gegenstände zur Folge; bei Verbesserung der Sehschärfe (z. B. Verwendung einer stenopäischen Lücke bei Ametropen) trat scheinbare Vergrößerung ein. (Auf den Einfluß der Pupillenweite auf die Sehschärfe soll hier nicht näher eingegangen werden.) — Schließlich sei noch erwähnt: in der Formel für den Einstellabstand a bei der Hintertiefe ∞, die z. B. Herr Jaeckel in der Form $\beta \cdot p = a$ benützt, ist β von der Sehschärfe abhängig und a ändert sich bei festgehaltenem Pupillendurchmesser p mit der Sehschärfe (β).

Wien I, Physikalisches Institut der Universität, 10. Mai 1920.

(Eingegangen 26. Mai 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und Gittern.

Von H. Spohn.

(Fortsetzung.)

In Fig. 4 sind mehrere Beispiele für einen dielektrischen Zylinder (aus Wasser) graphisch dargestellt. (Daß in diesem Beispiele dielektrisches Material gewählt wurde, ist für die bisher festgestellten Ergebnisse belanglos.) Als Ordinaten sind die Werte von $\overline{\mathfrak{E}}^2$ in Prozenten der freien Strahlung, als Abszissen die Werte von r aufgetragen. Die Kurven zu den Zylinderradien $\varrho = 0{,}15 - 0{,}70$ cm gehören dem

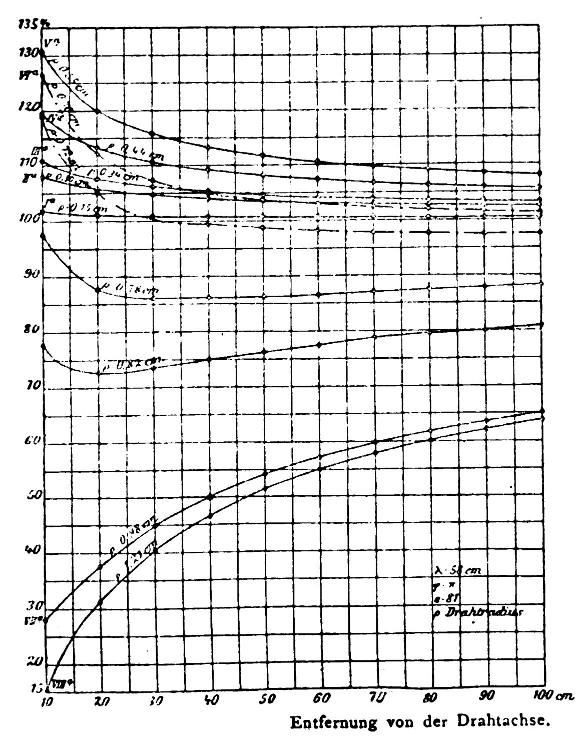


Fig. 4.

Typus I, die zu $0{,}78 - 1{,}21$ cm Radius ϱ dem Typus II, die zu $0{,}72$ cm Radius ϱ dem Typus III an. Der Interferenzpunkt der letzten liegt etwa bei $r = 28$ cm.

Weitere der Messung zugängliche Einzelheiten sind durch Diskussion der Lösung mit allgemeinen Koeffizienten nicht zu erschließen. Die speziellsten Teilergebnisse sind schließlich nur durch numerische Ausrechnung der Koeffizienten zu erhalten. Doch können noch vor dieser die Koeffizienten auf eine durchsichtigere Form gebracht werden, wenn man für die Funktion $I_m(\pi_1)$ und $H_m^{(2)}(\pi_2)$ Näherungswerte einführt, deren Einführung durch die allgemeinen Versuchsverhältnisse durchaus gerechtfertigt wird.

Bei der Mehrzahl der für den vorliegenden Gegenstand verwirklichten Anordnungen ist $\varrho << \lambda$. Dann ist das Argument $\pi_1 = \frac{2\pi\varrho}{\lambda}$ eine sehr kleine Zahl; die Besselschen und Hankelschen Funktionen mit diesem Argumente können daher durch ihre bequemen Grenzfunktionen für kleines Argument ersetzt werden.

Weiterhin aber muß danach unterschieden werden, je nachdem das Material der beugenden Zylinder 1. von praktisch ∞ Leitfähigkeit, oder 2. endlich leitend, oder 3. dielektrisch ist.

Der erste Fall ist formell der einfachste. Denn für ihn ist $k_2 = \infty$ zu setzen, die Formel (6c) nimmt also die schon wesentlich einfachere Form an:

$$\underset{\sigma=\infty}{a_m} = -2i^m \frac{I_m(\pi_1)}{H_m^{(2)}(\pi_1)}. \tag{10}$$

Der zweite Fall bleibt für $\varrho << \lambda$ ebenfalls praktisch einfach, da die Koeffizienten a_m so rasch abnehmen, daß meistens schon a_1 vernachlässigt werden, d. h. die Reihe auf das erste Glied beschränkt bleiben kann.

Der dritte Fall bleibt rechnerisch der verwickeltste. Das entspricht der experimentellen Tatsache, daß der Fall des dielektrischen Zylinders weitaus die vielseitigsten experimentellen Einzelheiten aufweist.

Im ersten Falle ist zunächst noch ein allgemeiner Schluß möglich. Es ist

$$\frac{i\pi}{2} H_m^{(2)}(x) = \frac{i\pi}{2} I_m(x) - K_m(x)\,^{1)},$$

wo $I_m(x)$ und $K_m(x)$ bei reellem Argument reelle Werte behalten. Daher wird in Formel (6d)

$$\alpha_m + i\beta_m = I_m(\pi_1) \frac{K_m(\pi_1) + \frac{i\pi}{2} I_m(\pi_1)}{K_m(\pi_1)^2 + \frac{\pi^2}{4} I_m(\pi_1)^2},$$

und daher

$$\alpha_0^2 + \beta_0^2 + \frac{2}{\pi}\beta_0, \quad \underset{m>0}{\alpha_m^2 + \beta_m^2} = \frac{4}{\pi}\beta_m,$$

also

$$E_3 = -E_1 \cdot \cdot, \tag{11}$$

d. h. die vom Zylinder absorbierte Energie ist dem Betrage nach dem von ihm

1) Vgl. Jahnke u. Emde, Funktionentafel.

reflektierten gleich. Dieses Ergebnis hat hier nur den Wert einer Probe für die Richtigkeit der Rechnung. Denn $E_3 + E_2$ stellt [8] die gesamte durch die Anordnung verzehrte Energie dar. Die Formeln für E_3 und E_2 wurden unter der Voraussetzung abgeleitet, daß keine Hysteresisverluste stattfinden. Also könnte nur solche durch Joulesche Wärme auftreten. Diese ist ja durch die Definition dieses Falles (Leitfähigkeit $\sigma = \infty$) ausgeschlossen, also muß der Gesamtenergieverbrauch $= 0$ sein.

Um einzeln die Beträge E_3 und E_2 ausrechnen zu können, sind nunmehr die Werte für die Koeffizienten auszurechnen. Diese sind unter den Voraussetzungen des Falles

$$\frac{I_0(\pi_1)}{H_0^{(2)}(\pi_1)} = \frac{\pi i}{2} \frac{1}{-\log\frac{\lambda}{\pi\gamma\varrho} + i\pi/2}, \quad (12\text{a})$$

($\gamma = 1{,}7811$ = Mascheronische Konstante)

$$\frac{I_n(\pi_1)}{H_n^{(2)}(\pi_1)} = -\frac{i\pi}{2} \frac{2n\,\pi_1^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}. \quad (12\text{b})$$

Man sieht, daß unter den Voraussetzungen des Falles schon das Glied mit a_1 nur noch weit unter der Beobachtungsgrenze liegende Störungen veranlassen kann, die Beschränkung auf das erste Glied also durchaus berechtigt ist. Und mit dieser Einschränkung ergibt sich:

$$E_3 = -E_2 = \frac{\lambda}{16c} \frac{1}{\log\frac{\lambda}{\pi\varrho\gamma} + \frac{\pi^2}{4}}.$$

Interessant ist an dieser Formel, daß sie ein ständiges Anwachsen der Absorption mit steigender Wellenlänge zum Ausdruck bringt.

Einen weiteren Nutzen wird diese Formel noch im Vergleich mit der entsprechenden für den Fall eines zur Zylinderachse senkrecht polarisierten Wellenzuges bringen.

An dieser Stelle kann die Betrachtung des Zylinders aus absolut leitfähigem Material verlassen werden.

Im zweiten Falle (Zylindermaterial von endlicher Leitfähigkeit) wird das Argument π_2 komplex, und zwar wird, wenn man

$$\frac{\lambda^2}{4\pi^2} k_2^2 = \varepsilon - \frac{2 i \sigma \lambda}{c} = (\nu - i\varkappa)^2$$

setzt, ν der gewöhnliche Brechungsexponent, $\varkappa$ der „Extinktionskoeffizient" genannte Parameter. Im Gebiete der ultraroten Strahlung sind die beiden Zahlen von der nämlichen Größenordnung. Schon bei einigermaßen großer Wellenlänge ($\lambda \sim 10^3\,\varrho$) besteht kein meßbarer praktischer Unterschied mehr zwischen diesem und dem ersten Falle. Allgemein erhält man, wenn

$$(\nu - i\varkappa)\frac{2\pi\varrho}{\lambda} = \pi_2$$

als große Zahl anzusehen ist, die für diesen Fall gültigen Koeffizienten aus den vorigen durch die Beziehung:

$$a_{0,\nu,\varkappa} = a_{0,\infty} \frac{2 i \pi_2 \log - \frac{2i}{\gamma\pi_1} - \pi_1^2}{2 i \pi_2 \log - \frac{2i}{\gamma\pi_1} + 2},$$

$$a_{m,\nu,\varkappa} = a_{m,\infty} = \frac{1}{1 + \frac{2m}{\pi_2}}.$$

Aber auch wenn π_2 noch als kleine Zahl gelten kann, können die Koeffizienten a_m als Vielfache der unter (12a) und (12b) angegebenen Größen angegeben werden. Daraus schließt man sofort, daß auch für diesen Fall schon die a_1 vernachlässigt werden können; und mit der so gerechtfertigten Beschränkung auf das erste Glied der Entwicklung in (6a) erhält man für den zeitlichen Mittelwert $\overline{\mathfrak{E}_\pi^2}$ durch leichte Rechnung [16]:

$$\overline{\mathfrak{E}_\pi^2} = \frac{1}{2}\left\{1 + \frac{\pi^2\varrho^2}{\sqrt{r\lambda}}\sqrt{a}(\nu^2 - \varkappa^2 - 1 - 2\nu\varkappa)\right\}. \quad (14)$$

Der Ausdruck

$$\nu^2 - \varkappa^2 - 1 - 2\nu\varkappa$$

ist nun im ganzen sichtbaren und ultraroten Gebiete für alle Metalle wesentlich negativ. Für das langwellige ultrarote Gebiet und das Gebiet elektromagnetischer Wellen im engeren Sinne ist das besonders leicht einzusehen.

Wir haben also in diesem Gebiete, vorausgesetzt, daß die allgemeinen Einschränkungen über π_1 und π_2 erfüllt sind, stets den Typus II der voraufgegangenen allgemeinen Diskussion, d. h. im Zentralbilde hinter einem metallischen Stabe stets „Schatten".

W. Seitz ist zu dieser speziellen Fragestellung zunächst durch ihre Bedeutung für die Funkentelegraphie geführt worden. Von einer Fortsetzung bzw. einer engeren Einstellung der Diskussion nach dieser Richtung muß hier abgesehen werden.

Der experimentell ausgiebigste Fall ist nun der eines beugenden Zylinders aus dielektrischem Material. Die eben mit Formel (13) für den „metallischen Fall" durchgeführte Diskussion des Energieverbrauchs wird hier beiseite gelassen, weil sie weiterhin für den „dielektrischen Fall" noch in anderer Form durchgeführt wird. Für die dielektrischen Materialkonstanten liegt der Fall so, daß zwar einerseits der komplizierte Aufbau (6a) für die Koeffizienten keiner allgemeinen Vereinfachung fähig

ist, dafür aber die numerische Durchrechnung zwar immer noch umständlich, aber von jeder wünschenswerten Wohldefiniertheit und Empfindlichkeit des die Eigenarten verschiedenen, dielektrischen Materials kennzeichnenden Zahlenmaterials ist.

Die Fig. 4, S. 501, regt die Frage an, wie die Schattenwirkung, einmal für ein bestimmtes ϱ erreicht, mit wachsendem ϱ sich ändert. Die numerische Durchrechnung hat die Fig. 5 und 6 geliefert. Zu ihrem Verständnis ist folgendes vorauszuschicken: Aus der Herleitung der drei Typen folgt, daß das Verhalten der

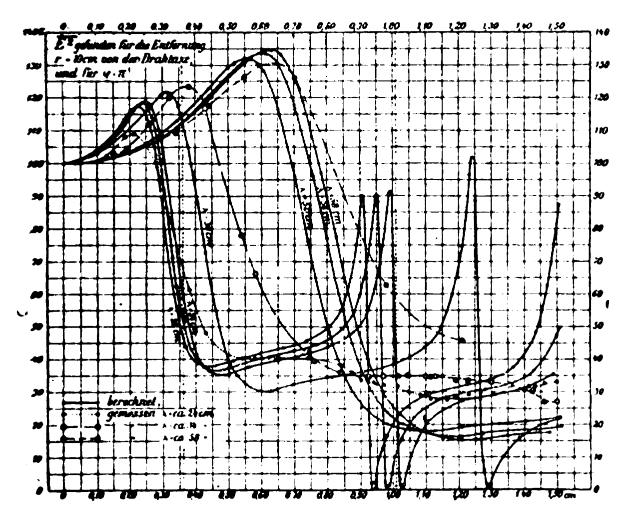


Fig. 5.

Strahlungsintensität in einem einzigen Punkte hinter dem Zylinder zur Kenntnis des Gesamtcharakters der Erscheinung genügt, außer in dem Falle des Auftretens eines Indifferenzpunktes, von dessen Auftreten oder Nichtauftreten man sich schon nach Berechnung der ohnehin nötigen Koeffizienten a_m ohne besondere Mühe überzeugen kann. Wegen dieses allgemeinen Verhaltens ist für Fig. 5 der zeitliche Mittelwert der elektrischen Intensität hinter dem Zylinder in Prozenten der freien Intensität nur für den einzigen Punkt $r = 10$ cm, d. h. 10 cm hinter der Zylinderachse in Richtung des einfallenden Wellenzuges berechnet worden [14]. Diese Intensitätsprozente sind als Ordinaten, die Zylinderradien ϱ als Abszissen aufgetragen. Der Rechnung wurden die Wellenlängen 22, 23, 24, 30, 52, 56, 58 cm zugrunde gelegt.

Alle Kurven haben den nämlichen Charakter, wie es ja nach dem oben formulierten Ähnlichkeitssatze sein muß.

Die drei in Fig. 5 ebenfalls eingezeichneten beobachteten Kurven [14] schließen sich dem ersten Auf- und Abstieg der theoretischen Kurve sehr gut an, um so schlechter ist die Übereinstimmung der zweiten Maxima und Minima; dafür wird später die voll ausreichende Erklärung gegeben.

Die theoretischen Kurven in Fig. 5 veranschaulichen nun die errechnete Energieverteilung erst in einiger Entfernung vom Zylinder, während ja gerade die Energieverteilung an der Zylinderoberfläche als der durch den Zylinder herbeigeführte Zwangszustand, die eigentliche Ursache der hier betrachteten Erscheinungen ist und daher besonderes Interesse beansprucht. Daher ist in Fig. 6 und 7 noch ein Bild der sehr merkwürdigen Energieverteilung an der Zylinderoberfläche gegeben. Der Mittelwert der resul-

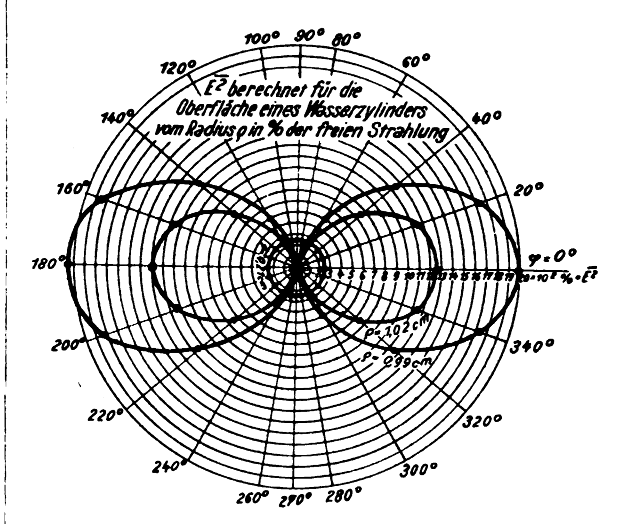


Fig. 6.

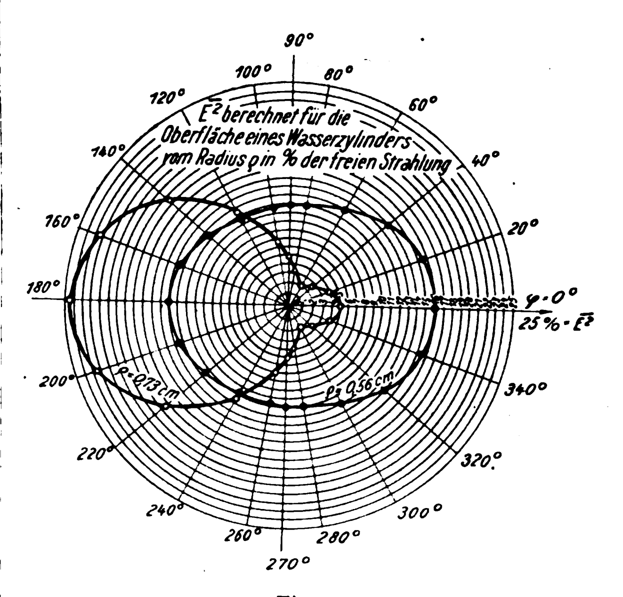


Fig. 7.

tierenden Intensität ist wiederum in Prozenten der „freien“ Intensität eingetragen, und zwar für die Wellenlänge $\lambda = 24$, die D.-K. $= 81$, (Wasser $= 1$), bei den fünf verschiedenen Zylinderradien $\varrho = 0{,}21$ cm, $0{,}56$ cm, $0{,}73$ cm, $1{,}02$ cm (in der Figur vermerkt).

Die Energieverteilung in Prozenten der freien Strahlung kann nun ganz verschiedene Größenordnungen annehmen (in den gezeichneten Beispielen von 0—2000 Proz.). Deshalb mußten hier den Raumverhältnissen zuliebe zwei verschiedene Bilder in verschiedenem Maßstabe gegeben werden. Der von Fig. 6 bei $\varrho = 0{,}21$ cm, $0{,}99$ cm, $1{,}02$ cm ist hundertmal so klein wie der von Fig. 7 ($\varrho = 0{,}73$ cm, $0{,}56$ cm).

Beachtenswert ist besonders auch, wie grundverschieden sich die Oberflächenenergie räumlich nach den verschiedenen Richtungen verteilt, von zentrisch kreisförmiger Form ($\varrho = 0{,}21$ cm) zu völlig exzentrischer quasi-elliptischer ($\varrho = 0{,}73$ cm, $\varrho = 0{,}56$ cm) und schließlich etwa lemniskatischer Form. Besser als jede Schilderung zeigen im übrigen die Kurven die eigenartige Energieverteilung an der Oberfläche.

Wertvoll ist der Vergleich der Fig. 6 und 7 mit 5. Das erste Maximum zeigt sich in Fig. 5 bei $\varrho = 0{,}22$, hier bei $0{,}21$, das erste Minimum bei $0{,}5$, hier bei $0{,}56$ und $0{,}73$ usw. Die auffallenden Maxima und Minima der Intensitätsverteilung hinter dem Zylinder in Abhängigkeit vom Zylinderradius sind also offenkundig verursacht durch die merkwürdige Energieverteilung an der Oberfläche des Zylinders. Und die Eigenart dieser Verteilung wiederum läßt sich nur durch die Befähigung des Zylinders zu elektromagnetischen Eigenschwingungen dartun.

Deren Untersuchung hat von der nämlichen Differentialgleichung und den Raumbedingungen (2a), (2c) auszugehen. In (2d) dagegen ist die rechte Seite $= 0$ zu setzen, da für diese Betrachtung ja eine „erregende“ Welle nicht existiert. Setzt man alsdann ganz entsprechend die Lösung in der Form an

$$\mathfrak{E} = e^{i\nu t} \sum_{m}^{0,\infty} Q_m(r) \cos m\varphi,$$

so folgt schon aus natürlichen Erwägungen, die weiterhin ihre rechnerische Bestätigung finden, daß hierin ν komplex zu setzen ist. Die Ausführung dieses Gedankens liefert schließlich ∞^2 gedämpfte Eigenschwingungen.

(Fortsetzung folgt.)

Tagesereignisse.

Naturforscher-Versammlung in Nauheim

(vgl. auch diese Zeitschrift **21**, 392, 1920; **21**, 447, 1920; **21**, 472, 1920).

Neu angemeldete Vorträge: **43.** G. Hertz (Berlin): Über die Absorptionsgrenzen der L-Serie, **44.** H. Dingler (Augsburg): Kritische Bemerkungen zu den Grundlagen der Relativitätstheorie, **45.** F. P. Liesegang (Düsseldorf): Ein Schaubild zur Darstellung der Raum-Zeit-Verhältnisse in der speziellen Relativitätstheorie, **46.** R. Pohl (Göttingen): Lichtelektrische Leitfähigkeit von Kristallen, **47.** K. Fehrle (Säckingen): a) Die physikalische Bedeutung der Atomreste, b) Eine neue Theorie der Serienspektren, **48.** Reichenbächer (Wilhelmshafen): Die Krümmung der Lichtstrahlen in folgender Gravitation, **49.** H. Dember (Dresden): Über Beeinflussung der Lichtelektrizität im Innern eines Metalls.

Außerdem wird F. Rinne (Leipzig) in der Montagssitzung zusammenfassend über den Feinbau der Kristalle berichten.

Die Technische Hochschule Aachen begeht am 24. Oktober 1920 die Feier ihres **50jährigen Bestehens.**

„Die Gesellschaft von Freunden der Aachener Hochschule“, Geschäftsstelle Düsseldorf, Ludendorffstraße 27, wendet sich aus diesem Anlaß an die alten und jungen Studenten, sowie an alle sonstigen Interessenten mit der Bitte um Beitritt, um dadurch die Bestrebungen der Gesellschaft zu unterstützen.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Ernannt: Der erste Observator der Sternwarte der Universität Leipzig Dr. Friedrich Hagen zum a. o. Professor für praktische Astronomie ebenda, der ord. Professor der Physik an der Universität Greifswald Dr. Johannes Stark in gleicher Eigenschaft an der Universität Würzburg, der Privatdozent für reine und angewandte Mathematik an der Universität Hamburg Dr. Jacob Nielsen zum ord. Professor der Mathematik an der Technischen Hochschule in Breslau, die a. o. Professoren an der Universität Frankfurt/Main Dr. Karl Mannich (Pharm. Chemie), Dr. Ernst Hellinger (Reine und angewandte Mathematik), Dr. Franz Linke (Geophysik und Meteorologie), Dr. Erich Ebler (Anorganische und analytische Chemie zu ord. Professoren ebenda, der Professor der Physik Ernest Fox Nichols an der Yale University zum Direktor eines neu eingerichteten wissenschaftlichen Laboratoriums (Nela Research Laboratory) der National Electric Lamp Association.

Habilitiert: An der Technischen Hochschule München Dr. Ernst v. Angerer für Experimentalphysik, an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. Hans Reichenbach für Physik und Dr.-Ing. Winfried Schumann für Hochspannungstechnik und Elektrotechnik, an der Universität München Dr. Hans Kienle für Astronomie.

Verliehen: Dem Privatdozenten der Chemie an der Universität Tübingen Dr. Percy Brigl der Titel a. o. Professor.

Gestorben: Der frühere Direktor des South Kensington Observatoriums in London Sir Norman Lockyer (der Entdecker des Heliums), der frühere ord. Professor für Experimentalphysik an der Universität Dorpat (zuletzt Honorarprofessor für Physik an der Universität Leipzig) Dr. Artur von Oettingen, der Direktor der Brera-Sternwarte Professor Dr. Giovanni Celoria in Mailand.

Für die Schriftleitung verantwortlich Professor Dr. Peter Debye in Zürich. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 19. | 1. Oktober 1920. Redaktionsschluß für No. 21 am 10. Oktober 1920. | 21. Jahrgang.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über die Erklärung der Röntgenspektren und die Konstitution der Atome[1]).

Von Adolf Smekal.

Unter der Überschrift: „Die Erklärung der Röntgenspektren und die Konstitution der Atome" hat Herr Vegard in dieser Zeitschrift seine mehrfachen Versuche, für die hauptsächlichsten Röntgenlinien modellmäßige, scharfe Frequenzformeln anzugeben, zusammenfassend dargestellt[2]). Seine auf der Annahme der Existenz ebener Bohrscher Elektronenringsysteme fußende Theorie gibt seiner Meinung nach „selbst bis in die Einzelheiten eine sehr genaue Übereinstimmung mit der Erfahrung und es ist kaum mehr möglich, daran zu zweifeln, daß die zugrunde liegende Voraussetzung auch der Wirklichkeit entspricht"[3]). Etwa gleichzeitig mit dem Erscheinen dieser Darstellung hat der Verfasser hingegen die Behauptung aufgestellt, daß die Vorstellung ebener Bohrscher Elektronenringsysteme den Tatsachen der Röntgenlinienspektren widerspricht[4]). Wenn auch die neuere, an die ersten Arbeiten von Born und Landé anschließende Entwicklung auf anderem Wege bereits völlig sichergestellt hat, daß die Atome räumlich bewegte Elektronenanordnungen besitzen müssen, womit für die Unrichtigkeit der Vegardschen Behauptungen überhaupt entschieden ist, so mögen im folgenden doch auch noch jene Punkte aufgezeigt werden, an denen die Behauptungen Vegards im Gebiete der Röntgenspektren selbst ihre Berechtigung verlieren[1]).

Herr Vegard benutzt im Laufe seiner Überlegungen sowohl die Debyeschen Vorstellungen über den Emissionsmechanismus der Röntgenlinien („Rekombination von Sekundärkreisen"), als auch die Kosselschen Vorstellungen („Rekombination von Primärkreisen"), entscheidet sich aber schließlich für die ersteren. Bezüglich der K_α-Linie wird er daher zu der ursprünglichen Formel von Debye geführt. Herr Vegard rechnet zwar überall mit der Relativitätstheorie, berücksichtigt aber nirgends die gegenseitigen Störungen der Elektronenringe, bzw. die Störungen zwischen Sekundärkreis und nächst äußerem Elektronenring, die unter seinen Annahmen als wesentlich erscheinen mußten, während sie z. B. bei Debyes K_α-Darstellung, dem qualitativen Charakter der damaligen Berechnungen entsprechend, mehr „phänomenologisch" (aber doch wenigstens überhaupt) berücksichtigt werden konnten.

Die Rechnungen von Herrn Vegard zeigen bei allen dargestellten Linien sehr erhebliche Abweichungen von den „beobachteten" Frequenzwerten, gemessen an jenem Grade der Übereinstimmung, wie er etwa bei der Krooschen K_α-Formel[2]) bezüglich der Siegbahnschen Präzisionsmessungen[3]) erreicht ist, und wie er

1) Abgesehen von einigen unwesentlichen Abweichungen war vorliegende Notiz schon vor Jahresfrist fertiggestellt, ihre Veröffentlichung wurde aber durch äußere Umstände bis jetzt verzögert.
2) L. Vegard, diese Zeitschr. **20**, 97, 121, 1919.
3) l. c., S. 124.
4) A. Smekal, Wien. Ber. **128** (2a), 639, 1919 (Sitzung vom 10. April 1919).

1) Vgl. auch: A. Smekal, Wien. Ber. **129** (2a), 1920 (II. Mitteilung zu der unter 4 genannten Arbeit); § 4.
2) J. Kroo, diese Zeitschr. **19**, 307, 1918.
3) M. Siegbahn, Ann. d. Phys. **59**, 56, 1919.

hier mit Rücksicht auf die bekannten Feinstrukturen, etwa das Dublett $L_\alpha - L_\alpha$, hätte gefordert werden müssen. Herr Vegard scheint sich mit seinen, vom Standpunkte dieser Genauigkeitsforderungen aus nur sehr groben Annäherungen an den wirklichen Verlauf der Linien begnügt zu haben im Hinblick auf seine konsequente Nichtberücksichtigung der erwähnten Störungen. Ein solches Vorgehen konnte wohl nur dann gerechtfertigt sein, wenn man sich davon überzeugt hatte, daß von einer nachträglichen Berücksichtigung jener Störungen zumindest keine Verschlechterung der Formeln bezüglich der von ihnen gelieferten Übereinstimmung zu gewärtigen war. Nun hätte Herr Vegard aus der von ihm zitierten Sommerfeldschen Arbeit[1]) bereits entnehmen können, daß solche Störungen bei der „Rekombination von Primärkreisen" praktisch gar keine Rolle spielen. Die gleichzeitig mit jener Sommerfeldschen Arbeit erschienene, von ihm nicht erwähnte Untersuchung von F. Reiche und dem Verfasser[2]) über die Störungen unter der Annahme einer „Rekombination von Sekundärkreisen" hätte ihm hingegen gezeigt, daß in letzterem — von ihm bevorzugten — Falle die Störungen so außerordentlich große Beträge annehmen, daß nicht einmal von einer brauchbaren Darstellung der K_α-Linie mehr die Rede sein kann[3]). Mit dieser vor den Vegardschen Arbeiten erschienenen Untersuchung fallen also sämtliche Resultate von selbst, auf die Herr Vegard Gewicht gelegt hat. Bezüglich der nun noch übrigbleibenden, unter der Annahme einer „Rekombination von Primärkreisen" erhaltenen Resultate würde eigentlich Herrn Vegards eigene Kritik daran genügen, die ja zu deren Ablehnung durch ihn selbst geführt hat. Es ist aber nun vielleicht nicht überflüssig zu betonen, daß Herr Vegard gar nicht direkt darauf ausgegangen war, über die Zulässigkeit der Elektronenring-Hypothese zu entscheiden, die er vielmehr als für ganz selbstverständlich richtig angesehen zu haben scheint. Herr Vegard hat nämlich in Wirklichkeit die folgende Aufgabe behandelt: Welche Normalbesetzungen hat man den einzelnen Elektronen„ringen" zu erteilen, damit sie die Linien K_α, K_β, L_α, L_β und M_α möglichst gleichmäßig gut darstellen? Herr Vegard hat sich also gar kein bestimmtes Genauigkeitsmaß für die einzelnen Linien vorschreiben dürfen — weil sonst eine derartige Darstellung überhaupt nicht möglich gewesen wäre. Es ist dies auch der Grund, warum Herr Vegard die Krooschе Formel als „unrichtig" ablehnt, obwohl sie nach Siegbahn die K_α-Beobachtungen unvergleichlich viel besser darstellt, als die groben Annäherungen, die sich unter den anderen Annahmen ergeben.

Die Vegardschen Versuche, aus den Röntgenspektren bestimmte Schlüsse auf die Normalbesetzungen der supponierten „Elektronenringe" und damit über den Atombau im allgemeinen zu ziehen, müssen also wegen der Nichtberücksichtigung des Einflusses der „Störungen" als gescheitert angesehen werden. Wäre Herrn Vegard die erwähnte Arbeit von F. Reiche und dem Verfasser nicht entgangen oder hätte er die Störungen im Falle einer „Rekombination von Sekundärkreisen" selbst berücksichtigt, so hätte diese Annahme von vornherein zugunsten der „Rekombination von Primärkreisen" ausscheiden müssen. Letztere Annahme ergibt für K_α in der Krooschen Formel eine sehr genaue, wenngleich mit geringen systematischen Fehlern behaftete Darstellung; eine Aufklärung jener Abweichungen vermag die Elektronenring-Vorstellung trotz Störungs- und Relativitätskonnexionen allerdings nicht mehr zu liefern. Für L_α ergibt sich auf Grund der „Rekombination von Primärkreisen" bereits keine einzige brauchbare Darstellung mehr, welche die aus der Krooschen Formel errechneten Normalbesetzungen des K- und L-Ringes bestätigen würde. Wie der Verfasser in seinen zitierten Arbeiten gezeigt hat, schließen auch Einzelheiten des Verlaufes von L_α das Zutreffen der Elektronenringvorstellung aus. Entscheidend für die Ablehnung der Ringvorstellung bleibt aber, daß die aus den besten Formeln für K_α und L_α unabhängig voneinander berechneten Normalbesetzungen des K- und L-Ringes nicht zu übereinstimmenden Ergebnissen führen. Dieses Resultat hätte sich somit bei genügend kritischer Behandlung auch aus den Vegardschen Rechnungsergebnissen gewinnen lassen.

Wien, Technische Hochschule, I. Physikalisches Laboratorium, Juli 1920.

(Eingegangen 21. Juli 1920.)

1) A. Sommerfeld, diese Zeitschr. 19, 297, 1918.
2) F. Reiche und A. Smekal, Ann. d. Phys. 57, 124, 1918; Die Naturwissenschaften 6, 304, 1918.
3) Auch im Falle gekreuzter Stellung von K-Sekundärkreis und L-Ring verschlechtert die Berücksichtigung der Störungen die Resultate der „störungslosen" Rechnung.

Die Erzeugung von Röntgenstrahlen durch Kathodenstrahlen in Luft von gewöhnlicher Dichte.

(Auszug aus der Gießener Dissertation.)

Von Walther Wolff.

Nach der Entdeckung der Röntgenstrahlen wies Des Coudres[1]) nach, daß nicht nur innerhalb der evakuierten Röntgenröhre, sondern auch in der Atmosphäre beim Auftreffen von Kathodenstrahlen auf Materie Röntgenstrahlen entstehen. Der Einfluß dieser Röntgenstrahlen macht sich bei Untersuchungen an Kathodenstrahlen bisweilen störend bemerkbar[2]). Ihren Einfluß auf die Messung der Absorption der Kathodenstrahlen in Gasen hat Friedrich Mayer diskutiert[3]).

Im folgenden seien die Ergebnisse einer Untersuchung an Röntgenstrahlen mitgeteilt, die von Kathodenstrahlen, welche aus einer Kathodenröhre mit Lenardschem Fenster austreten, an festen Körpern in der Atmosphäre von gewöhnlicher Dichte erzeugt werden.

Für die Vorversuche benutzte ich eine Anordnung, die der Anordnung von Des Coudres[1]) sehr ähnlich war. Während Des Coudres die Strahlen photographisch nachwies, bediente ich mich der Ionisationsmethode. Der Nachweis der gesuchten Röntgenstrahlen gelang mir in derselben Weise wie Des Coudres. Darüber hinaus stellte ich fest, daß mit meiner Anordnung die Röntgenstrahlen am intensivsten erregt werden an den Stoffen, deren Atomgewicht zwischen Eisen (Atomgewicht $A = 56$) und Kupfer ($A = 70$), die Grenzen mit eingeschlossen, liegt, weniger intensiv an Silber ($A = 108$), Kadmium ($A = 112$) und Zinn ($A = 119$), schwach an Magnesium ($A = 24$) und Aluminium ($A = 27$).

Die folgenden Versuche wurden mit einer Kathodenröhre R (vgl. Fig. 1) ausgeführt, die aus Glas bestand. Sie besaß eine flache Kathode und war unter Zwischenschaltung zweier Glaskugeln von je 13 cm Durchmesser mit einer Gaedeschen Luftpumpe verblasen. Die Glaskugeln sollten das Volumen des Vakuums vergrößern und dadurch den Einfluß der unvermeidlichen Schwankungen des Vakuums verringern. Um den Austritt von Röntgenstrahlen zu verhindern, die im Innern der Röhre an der Glaswand entstehen, verschloß ich die 25 cm lange Röhre (ihr Durchmesser betrug 3,5 cm) mit einem an einer Seite gedeckten, 4 cm langen

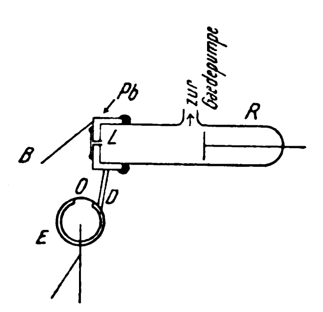


Fig. 1.

Bleizylinder Pb von 0,25 cm Dicke, der mit Reibung auf das Glasrohr paßte und mit Siegellack luftdicht mit der Röhre verkittet war. In die Deckfläche des Bleizylinders war eine polierte und galvanisch vernickelte Messingplatte von 0,1 cm Dicke eingelassen, verlötet und außerdem mit Siegellack verkittet. Das Ganze wurde in der Mitte durchbohrt und auf das Löchelchen L (Durchmesser 0,11 cm) eine 0,0003 cm dicke Aluminiumfolie mittels Piceïn aufgekittet. Da sich die Kittstellen beim Betrieb der Röhre erwärmten und Gase abgaben, wurden sie während der Versuche durch ein elektrisches Gebläse dauernd gekühlt. Die Kathodenstrahlen trafen auf die Antikathode B, die an einem Stativ drehbar so befestigt war, daß sie durch eine Drehung aus dem Bereiche der Kathodenstrahlen und durch eine zweite Drehung wieder in die ursprüngliche Stellung gebracht werden konnte. Die von B ausgehenden Röntgenstrahlen gelangten durch eine mit 0,0023 cm dickem Aluminium verschlossene Öffnung O von 4 cm Durchmeser in die Ionisationskammer eines Schmidt-Kurzschen Elektrometers E[1]). Das Elektrometer E war von 0,2 cm dickem Blei umgeben. Der Schirm D blendete etwaige von der Glaswand der Röhre ausgehende Strahlen ab. Die Röhre wurde in der üblichen Weise von einem Teslatransformator erregt, dessen Primärspule in einem Schwingungkreis lag, der von einer Leydener Flasche von $^1/_{100}$ Mikrofarad und einer 1,2 cm weiten Funkenstrecke eines Induktoriums gebildet wurde. Die maximale Schlagweite des Induktoriums betrug 25 cm; es wurde mit 70 Volt betrieben; als Unterbrecher wurde ein Wehneltunterbrecher benutzt. Elektrometer E und Bleizylinder Pb waren geerdet.

Die Intensität der Strahlen wurde umgekehrt proportional der Zeit gesetzt, die das Elektrometer zu dem Rückgang um eine bestimmte Anzahl Skalenteile braucht. Die gemessene Intensität J' ohne Antikathode wird verursacht durch die natürliche Zerstreuung des

1) Ann. d. Physik u. Chemie 62, 134, 1897.
2) Vgl. P. Lenard, Quantitatives über Kathodenstrahlen aller Geschwindigkeiten, Heidelberg 1918, S. 76.
3) Dissertation, Heidelberg 1917.

1) Vgl. H. W. Schmidt, diese Zeitschr. 6, 561, 1905 und K. Kurz, diese Zeitschr. 7, 375, 1906.

Elektrometers und durch Röntgenstrahlen, die unmittelbar an dem Lenardfenster oder auch an den Molekülen der Luft zerstreut oder erzeugt werden; die gemessene Intensität J'' mit Antikathode enthält außerdem einen Beitrag J, welcher von der an der Antikathode erzeugten Strahlung herrührt. Es ist daher bis auf einen belanglosen Proportionalitätsfaktor die Intensität der an der Antikathode erzeugten Strahlung

$$J = J'' - J'.$$

Vor die Öffnung O des Elektrometers konnten Aluminiumfolien gestellt werden, bei deren Durchquerung die Röntgenstrahlen Absorptionsverluste erlitten. Gibt der untere Index die Dicke der absorbierenden Schicht an, so ist der zur Dicke d

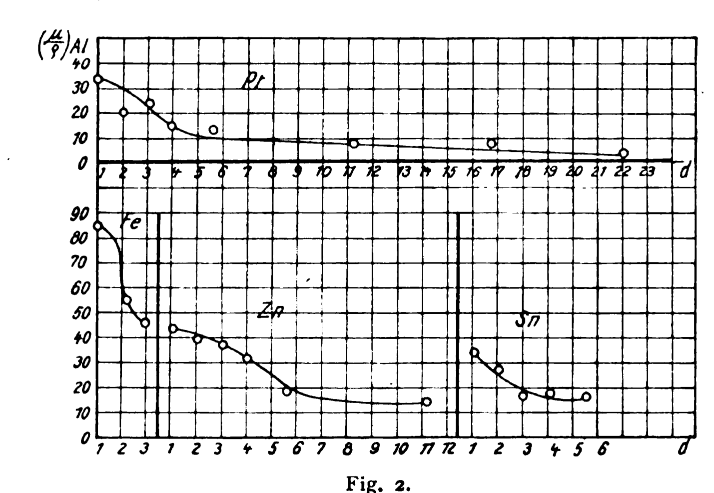


Fig. 2.

gehörige Massenabsorptionskoeffizient, bezogen auf Aluminium von der Dichte $\varrho = 2{,}7$:

$$\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)_{Al} = \frac{1}{\varrho d \lg e} \lg \frac{J_0}{J_d},$$

unter lg den Briggschen Logarithmus und unter e die Basis der natürlichen Logarithmen verstanden.

In der Tabelle I sind die Werte von $\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)_{Al}$ in $\frac{\text{cm}^2}{\text{g}}$ der Strahlen, die an verschiedenen Stoffen als Antikathode erregt wurden, in Abhängigkeit von der Dicke d der absorbierenden Schicht Aluminium zusammengestellt. Bei S und Ca wurde nur ein Wert gewonnen. Bei den übrigen Stoffen begann die Messung mit $d = 0{,}0093$. Die fehlenden letzten Werte von Fe, Zn und Sn waren wegen der geringen Intensität der Strahlen nicht mehr zu ermitteln. Das Ergebnis ist in Fig. 2 graphisch dargestellt. Die Abszissen bedeuten die Schichtdicken d; die

Tabelle I.

d	S	Ca	Fe	Zn	Sn	Pt
0,0023 cm	—	272	—	—	—	—
0,0093 + 0,0023 cm	43	—	—	—	—	—
0,0093 cm	—	—	85	43	33	34
2 · 0,0093 cm	—	—	55	39	26	20
3 · 0,0093 cm	—	—	46	36	17	23
4 · 0,0093 cm	—	—	—	31	17	14
0,052 cm	—	—	—	19	15	12
2 · 0,052 cm	—	—	—	14	—	7
3 · 0,052 cm	—	—	—	—	—	7
4 · 0,052 cm	—	—	—	—	—	4

gewählte Einheit entspricht der Dicke 0,0093 cm Aluminium. Die Ordinaten bedeuten die Absorptionskoeffizienten. Der Verlauf der Kurve für Eisen erscheint willkürlich, doch wird er gestützt durch die ähnliche Gestalt der Kurven für Zink und Platin.

Tabelle II.

	S	Ca	Fe	Zn	Sn	Pt
$\left(\frac{\mu}{\varrho}\right)_{Al}$	um 500	435	88,5	39,4	1,57	27,5
$d_{1/2}$		0,00059	0,0029	0,0065		0,0094

Tabelle II ist ein Auszug aus einer von C. G. Barkla zusammengestellten Tabelle der auf Aluminium bezogenen Massenabsorptionskoeffizienten der Eigenstrahlung verschiedener Substanzen[1]). Der Wert für S ist aus der Tabelle interpoliert. Der Wert für Pt bezieht sich auf die L-Strahlung, die übrigen beziehen sich auf die K-Strahlung. $d_{1/2}$ ist die aus den Absorptionskoeffzienten berechnete Halbwertschicht in Aluminium. Aus Tabelle I und II und aus Fig. 2

1) Phil. Mag. **22**, 407, 1911.

folgt, daß die Eigenstrahlung der Atome von *Fe* bis *Zn* vorhanden ist, bei *Ca* deutet der hohe Wert des Absorptionskoeffizienten der Tabelle I auf das Vorhandensein der Eigenstrahlung hin, an *S* ist sie nicht mehr feststellbar, ebensowenig an *Sn*, dagegen wird an *Pt* die *L*-Strahlung ausgelöst. Aus den Werten der Halbwertschicht und Tabelle I ergibt sich, daß die Eigenstrahlung nach einer Schwächung um etwa den 20. Teil der ursprünglichen Intensität nicht mehr nachweisbar ist. *Pt* liefert die intensivste Bremsstrahlung, die sich noch nach dem Durchgang durch 4 · 0,052 cm Aluminium bemerkbar macht.

Nach R. Whiddington[1]) ist die zur Erzeugung der *K*-Strahlung eines Elementes mit dem Atomgewicht *A* erforderliche Minimalgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen:

$$v_{\min} = A \cdot 10^8 \text{ cm/sek.}$$

Also ist für Kalzium:

$$v_{\min} = 4{,}0 \cdot 10^9 \text{ cm/sek.} \sim 4400 \text{ Volt,}$$

für Zinn:

$$v_{\min} = 11{,}9 \cdot 10^9 \text{ cm/sek.} \sim 39400 \text{ Volt.}$$

Da an Zinn keine Eigenstrahlen mehr nachweisbar sind, so ist diese letzte Minimalgeschwindigkeit die obere Grenze für die Geschwindigkeit der auftreffenden Kathodenstrahlen. Nach P. Lenard[2]) ist die zu dieser Geschwindigkeit gehörige Anfangsgeschwindigkeit der Kathodenstrahlen in der Röhre vor Durchquerung des Lenardschen Fensters nicht wesentlich größer.

Von Graphit ($A = 12$), Paraffin, Magnesium ($A = 24$) und Antimon ($A = 120$) sind nach Tabelle I keine Eigenstrahlen zu erwarten.

Ich untersuchte die von diesen Stoffen ausgehende Bremsstrahlung. Die Ergebnisse sind aus Tabelle III und Fig. 3 ersichtlich.

Tabelle III.

d	*C*	Paraffin	*Mg*	*Sb*
0,0093 cm	20	25	35	28
2 · 0,0093 cm	9	14	22	19
3 · 0,0093 cm	7	8	19	15

Man sieht, daß in allen Fällen eine Bremsstrahlung vorliegt. Die Strahlung von Antimon ist anscheinend etwas härter als die von Magnesium, die von Paraffin und Graphit härter als die von Antimon und Magnesium, die von Graphit ist etwas härter als die von Paraffin.

Es wurde versucht, photographisch mit der Drehkristallmethode die Röntgenstrahlen spektral zu zerlegen. Trotz 15stündiger Belichtung erhielt ich kein Spektrum auf der photographischen Platte. Nur der Durchstoßpunkt war sichtbar. Das negative Resultat erklärt sich aus der geringen Intensität der Röntgenstrahlen, die noch dazu auf eine relativ große Fläche der Antikathode verteilt ist, während bei der Drehkristallmethode gerade ein scharfer Brennfleck

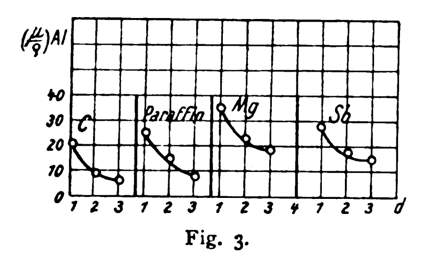


Fig. 3.

vorteilhaft ist. H. Seemann beschreibt[1]) eine Versuchsanordnung, die es gestattet, einen größeren Teil der strahlenden Fläche auszunutzen. Auch mit dieser Anordnung war das Ergebnis negativ. Dies rührt daher, daß die Strahlen den Kristall durchdringen müssen, und daß dabei die weichen Strahlen auch bei dünnen Kristallen beträchtliche Absorptionsverluste erleiden. Ich erhielt zwar linienartige Schwärzungen, doch ließ sich nachweisen, daß diese Schwärzungen von einer direkten durch den Spalt verursachten Abbildung der Antikathode herrührten, ähnlich einer Lochkameraabbildung beim sichtbaren Lichte.

Es ergibt sich also, daß beim Auftreffen der Kathodenstrahlen auf Materie in der freien Atmosphäre Röntgenstrahlen entstehen, die sich mit dem Elektrometer bequem nachweisen lassen.

Bei den Stoffen, deren Atomgewicht zwischen dem von Schwefel und Zinn liegt, erhielt ich Strahlen, die wohl identisch sind mit den Eigenstrahlen der *K*-Reihe, bei Platin mit denen der *L*-Reihe.

Hieraus konnte rückwärts auf die Geschwindigkeit der Kathodenstrahlen geschlossen werden.

Es wird die Bremsstrahlung einiger Stoffe untersucht, an denen keine Eigenstrahlen entstehen. Es machen sich Unterschiede in dem Charakter der Strahlung bemerkbar.

Es gelang mir wegen der geringen Intensität der Strahlen nicht, ein Röntgenspektrum zu photographieren.

Man wird bei Untersuchungen an Kathodenstrahlen den Einfluß der Röntgenstrahlen nicht vernachlässigen dürfen.

Die beschriebene Anordnung gestattet es, Röntgenstrahlen zu erzeugen, die keine Absorption an festen Körpern erfahren haben.

Die Arbeit wurde im Physikalischen Institut

1) Proc. Lond. Roy. Soc. **85**, 203, 1911.
2) A. a. O., Tafel II, S. 268.

1) Diese Zeitschr. **20**, 55, 1919.

der Universität Gießen unter Leitung von Herrn Geh. Rat W. König und Herrn Prof. P. Cermak gemacht.

Beiden Herren bin ich für ihr stets reges Interesse an meiner Arbeit zu großem Dank verpflichtet.

(Eingegangen 22. Juli 1920.)

Über zwei einfache Vorlesungsversuche zur Demonstration des Ionenwindes.

Von Victor F. Hess.

Vor zwei Jahren hat in dieser Zeitschrift H. Greinacher[1]) Versuche beschrieben, welche zur Demonstration des durch die Ionenbewegung hervorgerufenen Druckes bzw. der Strömungserscheinungen in Gasen bei Spitzenentladung und bei Ionisation durch Röntgenstrahlen gut geeignet sind. Die Ursache dieser Erscheinungen ist die Mitreißwirkung der im elektrischen Felde bewegten Ionen auf das umgebende Gas, die besonders dann auffällig wird, wenn, wie es beim Spitzenstrom der Fall ist, die eine Ionenart erheblich größere Wege im Gas unter Einwirkung des Feldes zurückzulegen hat, wie die andere. J. Zeleny[2]), welcher zuerst auf diese Konvektionserscheinungen bei Ionisation durch Röntgenstrahlen aufmerksam gemacht hat, benützte als Indikator der Luftströmungen Strahlen von Salmiaknebel oder solche von Kohlensäure, die nach der Schlierenmethode sichtbar gemacht wurden. Später hat S. Ratner[3]) ähnliche Konvektionserscheinungen bei Ionisation durch die α-Strahlen der radioaktiven Substanzen, der Verfasser[4]) solche bei Ionisation durch β- und γ-Strahlen mittels einer empfindlichen Drehwage nachgewiesen. Die letztgenannte Methode ließ sich auch für genauere quantitative Messungen verwenden, z. B. zur Vergleichung α-strahlender Präparate, direkte Verfolgung der Intensitätsabnahme rasch abklingender radioaktiver Substanzen u. a. Da es sich um eine mittelbare Wirkung bewegter Ionen auf das umgebende Gas handelt, wurde vom Verfasser hierfür die Bezeichnung „Ionenwind" vorgeschlagen. Eine eingehende theoretische und experimentelle Behandlung dieses Ionenwind-Phänomens wurde vom Verfasser vor kurzem beendigt und an anderer Stelle veröffentlicht[1]). Hierbei hat sich insbesondere eine Methode zur Bestimmung der absoluten mittleren Ionenbeweglichkeit und des relativen Anteils der Langevin-Ionen an der Gesamtionisation ergeben.

Da es bei Vorlesungen doch recht umständlich ist, für einen speziellen Versuch eine Röntgenanordnung nach den eingangs zitierten Angaben Greinachers zusammenzustellen, versuchte ich, die Greinachersche Methode, bei der ein Ätherdampf- oder Rauchstrahl als Indikator der Luftbewegung dient, zur Demonstration des Ionenwindes bei Ionisation durch α-Strahlen des Poloniums zu verwenden. Da indes die Intensität der verfügbaren Poloniumpräparate doch erheblich hinter der durch Röntgenstrahlen erzielbaren Ionisation zurückbleibt, erwies sich dieser Versuch als nicht befriedigend.

Ich griff aber zurück auf die Zelenysche Salmiaknebelmethode, welche sich in sehr einfacher Weise auch für Ionisation durch α-Strahlen und Glühelektronen modifizieren läßt:

Ein Holzkästchen von rechteckigem Querschnitt wird als Plattenkondensator eingerichtet (siehe Fig. 1, $^1/_2$ natürl. Größe). Der Deckel ist an drei Stellen durchbohrt und durch die Öffnungen ein dreifach (in der Figur mit 1—3 bezeichnet) verzweigtes Glasrohr mit ca. 2 mm weiten Mündungen durchgesteckt, durch welche ein möglichst langsamer Strom von Salmiaknebel nach abwärts fließt. Ein genügend kontinuierlicher und regulierbarer Strom von Salmiaknebel wird am einfachsten erzielt, wenn man aus einer Stahlflasche komprimierte Luft (mittels Reduzierventils) durch zwei hintereinandergeschaltete Waschflaschen mit Salzsäure und Ammoniak langsam hindurchströmen läßt. Die Vorder- und Rückwand des Kästchens ist entfernt und durch leicht herausnehmbare (etwa in Hohlleisten eingesteckte) Glasplatten ersetzt, so daß man die ganze Anordnung projizieren kann. Die beiden Seitenwände rechts und links sind mit kleinen Öffnungen versehen, durch welche die Elektroden A und B (rechteckige Platten) mit ihrer Führung in je einem Ebonitklötzchen (F) durchgesteckt sind. Es ist auch praktisch, die Führungen D und E unter sanfter Reibung innerhalb der Ebonitklötzchen verschiebbar einzurichten, um die Plattendistanz variieren zu können. Der Boden des Kästchens ist entfernt und an seiner Stelle ein weitmaschiges Drahtnetz eingeführt, um einerseits dem Salmiaknebel möglichst ungehinderten Abfluß zu gestatten, andererseits störende äußere Luftströmungen etwas abzuhalten.

---

1) H. Greinacher, diese Zeitschr. **19**, 188—195, 1918.
2) J. Zeleny, Proc. Cambr. Phil. Soc. **10**, 14, 1898.
3) S. Ratner, Compt. rend. **158**, 565, 1914; Phil. Mag. (6) **32**, 441—461, 1916.
4) V. F. Hess, Wien. Sitzungsber. IIa, **128**, 1029—1079, 1919.

1) V. F. Hess, Wiener Anzeiger 1920, S. 171; Sitzungsber. **129**, Juni 1920.

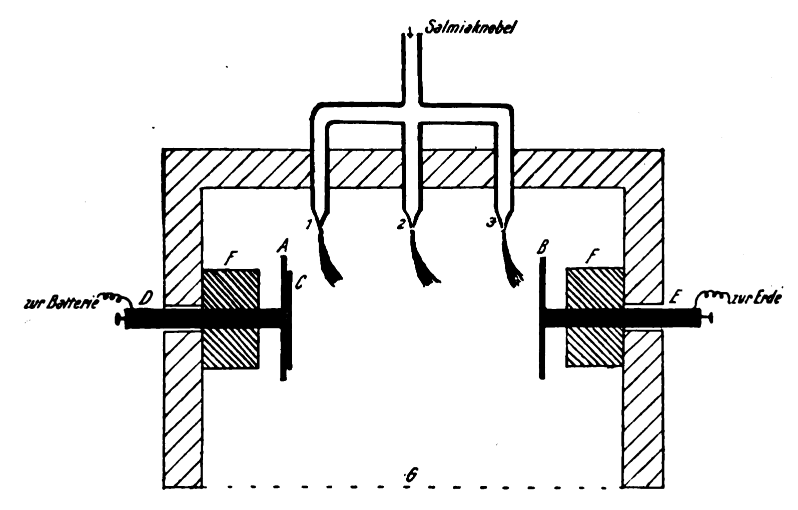


Fig. 1.

Die eine der beiden Elektroden bleibt ständig geerdet, die andere wird mit einem Umschalter verbunden, durch welchen sie entweder mit einer Hochspannungsquelle oder mit Erde verbunden werden kann.

Das Poloniumpräparat wird mit etwas Kitt auf einer der beiden Elektroden befestigt.

Als Spannungsquelle genügt eine kleine Influenzmaschine, die nur in ganz langsamer Umdrehung gehalten zu werden braucht, da ja das Maximum der Ionenwindstärke („Sättigungswind") schon bei Feldstärken von 500 Volt/cm, also einer Gesamtspannung von 2—4000 Volt, je nach Plattendistanz erreicht wird. Um übrigens für die Demonstration ausreichende Windwirkung zu erhalten, kann man bei genügend starken Poloniumpräparaten (mindestens ca. 100 elektrostat. E.) sich mit Spannungen von 500—1000 Volt begnügen, die ja durch kleine Akkumulatorenbatterien und dergl. in vielen Instituten erzielbar sind und in feuchten Hörsälen jedenfalls zuverlässiger sind, als die höheren Spannungen der Influenzmaschine.

Man schaltet nun das Reduzierventil so ein, daß der Salmiaknebel möglichst langsam nach abwärts (in der Projektion verkehrt) fließt. Wird sodann bei Anwesenheit des Poloniumpräparats auf der Platte A die Spannung angelegt, so entsteht sofort der Ionenwind und es bietet sich das in Fig. 1 dargestellte Bild: in der Nähe der das Präparat tragenden Platte ist der Wind am schwächsten, weil dort die entgegengesetzt (zur Präparatplatte hin) fliegenden Ionen die resultierende Windwirkung schwächen. Je weiter man von der Platte A sich entfernt, um so stärker wird die Ablenkung der Salmiakstrahlen (siehe die Stellen 2 und 3 in Fig. 1). Nimmt man das Poloniumpräparat heraus, so hört jede Ablenkung bei Einschalten des Feldes auf. Bringt man es auf die Gegenplatte B, so werden die Salmiakstrahlen nach links abgelenkt, woraus klar hervorgeht, daß der Ionenwind immer die Richtung von Orten höherer Ionisation zu Orten schwächerer Ionisation hat. Umkehrung des Vorzeichens des Feldes ändert an der Erscheinung nichts (in Wirklichkeit ist der von positiven Ionen erzeugte Ionenwind immer etwas größer, entsprechend der kleineren Beweglichkeit dieser Ionen, doch bleibt dieser Unterschied hier unmerklich). Legt man das Poloniumpräparat auf das Netz am Boden des Kästchens (etwa bei G), so bietet sich folgende hübsche Erscheinung dar: da in der Mitte des Feldes dann die stärkste Ionisation herrscht, teilt sich auch die Luftströmung in zwei Hälften, die beide voneinander divergierend zu den Platten hin gerichtet sind. Während also der aus der Öffnung 1 kommende Salmiakstrahl nach links zur Platte A abgelenkt wird, neigt sich der aus 3 kommende Strahl nach rechts zur Platte B. In der Mitte, unterhalb der Öffnung 2 entsteht eine Anstauung des Salmiaknebels, weil dann dort die geringste Windstärke herrscht.

Überdeckt man das Poloniumpräparat mit Folien, verkürzt man also die Reichweite, so nähert man sich immer mehr dem Falle der Oberflächenionisation, der unipolaren Leitung, in welchem die Windwirkung der mit der Platte gleichnamig elektrischen Ionen fast ausschließlich zur Geltung kommt. Gleichzeitig wird aber durch die Abdeckung die Ionisation sehr rasch geschwächt. Es existiert daher bei jeder Plattendistanz eine bestimmte Foliendicke, bei welcher die Windwirkung ihr Optimum erreicht. Praktisch genügt es, das Poloniumpräparat mit 1—2

gewöhnlichen Seidenpapierstückchen (Luftäquivalent 1—2 cm) zu überdecken, wodurch nebenbei auch die Oberfläche des Poloniumpräparats vor Verunreinigungen mit Salmiakteilchen geschützt wird.

Da starke Poloniumpräparate nicht in jedem Institute zur Verfügung stehen, wird es oft zweckmäßiger sein, eine andere Ionisierungsquelle zu benützen. Als einfachster Ausweg bietet sich die Benützung der Elektronenemission glühender Metalle: für den vorliegenden Zweck der Demonstration des Ionenwindes hat dies überdies noch den Vorteil, daß diese Thermionen-Emission eine reine Oberflächenionisation vorstellt, daher die Windwirkung ausschließlich von den mit der Platte gleichnamigen von ihr wegfliegenden Ionen herrührt.

erzielen, wenn man den Glühdraht mit Erdalkalioxyden bestreicht. Da unmittelbar über dem Glühdraht sich ein starker anfsteigender Luftstrom ausbildet, der den aus der Mündung 1 (Fig. 1) tretenden Salmiakstrahl stört, ist es zweckmäßig, entweder die den Glühdraht tragende Elektrode ganz nach links zu schieben oder die 1. Mündung des Dreizackrohres zu verschließen.

Die Demonstration gelingt besonders schön deshalb, weil man durch Ausschalten des Heizstromes bei sonst gleichbleibender Feldstärke die Windwirkung augenblicklich aufheben kann, während bei den Poloniumversuchen der Leerversuch nicht ohne Hantieren am Apparate selbst (z. B. Überdecken des Präparats durch ein Kartonblatt) durchgeführt werden kann. Die Drähte des Heizstromes können durch das Gitter

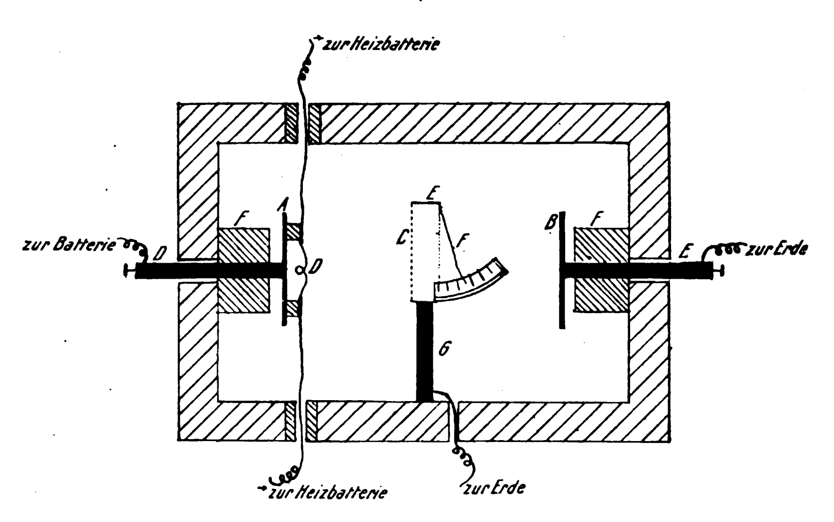


Fig. 2.

Bei der Ausführung des Versuchs wurde ein 2 cm langes Stück Platindraht von 0,04 mm Dicke mit beiden Enden an kurze Stücke gewöhnlichen Kupferdrahtes angelötet und diese mittels kleiner Klemmen auf Ebonitklötzchen montiert, welche auf einer Metallplatte von gleicher Größe, wie die Platten des beschriebenen Kondensators fixiert wurde. Diese Grundplatte mitsamt dem Heizdraht wurde mittels zweier übergreifender, angelöteter Haken an Stelle des Poloniumpräparates auf einer der beiden Platten *A* oder *B* in dem Kästchen eingehängt. Der Platindraht wurde durch einen Akkumulatorenhilfsstrom (8—12 Volt) von regulierbarer Stärke auf helle Rotglut geheizt und dann die gleichen Versuche, wie mit Polonium mit größter Leichtigkeit durchgeführt. Da man durch helleres Glühen die Ionisation sehr steigern kann, gelingt die Demonstration bei noch kleineren Feldstärken, wie oben bei Polonium angewendet wurden. Noch weit stärkere Effekte kann man

am Boden des Kästchens durchgeführt werden. Bei längerer Benützung des beschriebenen Apparats ist eine Verschmutzung aller Bestandteile durch die Ablagerung von Salmiakteilchen unausbleiblich. Um auch diesen Nachteil zu umgehen, versuchte ich eine andere, noch einfachere Methode zur Demonstration des Ionenwindes (vgl. Fig. 2), welche ebenso leicht projizierbar ist.

Es wird ein Kästchen von gleichen Dimensionen benützt, wie in dem eben beschriebenen Versuch, ebenfalls mit verschiebbaren Plattenelektroden, auf welchem die Ionisierungsquelle montiert werden kann (Polonium oder Glühdraht. In der Fig. 2 ist die Anordnung mit Glühdraht eingezeichnet).

Als Indikator für die Windbewegung wird an Stelle der Salmiakstrahlen ein ganz einfaches, möglichst leichtes Aluminiumblättchen (Elektroskopfolie) benützt, das, elektrostatisch geschützt, hinter dem Netze *C* auf einem geerdeten Messing-

ringe E angebracht ist. Das Blättchen spielt über einer Celluloid- oder Glasskala. Netz C und Stütze G sind ebenso wie die Platte B zur Erde abgeleitet. Legt man an die Platte A ein Feld an (bei kräftiger Glühelektronenemission genügen 300 Volt), so sieht man wie das Blättchen durch den Wind deutlich zur Seite geblasen wird. Durch stufenweise Steigerung der Feldstärke und gleichzeitige Beobachtung der Ablenkung des Blättchens kann man leicht demonstrieren, daß die „Sättigungswindstärke" bei Feldstärken von einigen Hundert Volt erreicht wird. Daß nicht etwa eine elektrostatische Ablenkung des Blättchens eintritt, zeigt man, indem man ohne Einschaltung des Heizstromes das Feld anlegt, wobei kein Ausschlag des Blättchens erfolgt. Mit dem Apparate kann man natürlich auch zeigen, daß die Windrichtung von dem Vorzeichen des Feldes unabhängig ist, ferner die Abhängigkeit der Windstärke von der Plattendistanz usw. Statt des Heizdrahtes kann auch ein starkes Poloniumpräparat verwendet werden. Der ungemein einfache Apparat hat den Vorteil, immer gebrauchsfertig zu sein.

Wien, Institut für Radiumforschung, im Juli 1920.

(Eingegangen 27. Juli 1920.)

Beiträge zur geometrischen Verzeichnung von Niveauflächen.

Von Thorkell Thorkelsson.

Veranlaßt durch einen gleichnamigen Aufsatz von Otto Grotrian[1]) möchte ich darauf aufmerksam machen, daß man in Drudes Lehrbuch der Optik, 1. Aufl., S. 24 ein Verfahren zur Konstruktion konjugierter Punkte angegeben findet, welches mit einigen Änderungen zur Verzeichnung von Niveaulinien sehr gut geeignet scheint.

In Fig. 1 sei HCK eine Gerade und $ABCD$ ein Parallelogramm. Man hat dann

$$\frac{BC}{AH} + \frac{AB}{AK} = 1. \qquad (1)$$

Das Potential zweier punktförmiger Agensmengen, e_1 und e_2, in einem beliebigen Punkte P, mit den Entfernungen r_1 und r_2 von e_1 und e_2, läßt sich durch das Potential einer einzigen Agensmenge e ersetzen, deren Abstand vom Punkte P gleich r ist. Dieses wird durch folgende Beziehung ausgedrückt:

$$\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} = \frac{e}{r}. \qquad (2)$$

Ich will nun die Forderung aufstellen, daß in Fig. 1 die Entfernungen den Gleichungen $r_1 = AH$, $r_2 = AK$ und $r = AC$ genügen. Dann erhält man sogleich aus (1) und (2)

$$AB = AC \cdot \frac{e_2}{e}, \text{ und } BC = AC \cdot \frac{e_1}{e}.$$

Also verhalten sich die Seiten des Dreiecks ABC wie die Agensmengen, oder

$$AC : AB : BC = e : e_2 : e_1.$$

Man kann voraussetzen, daß die Mengen e_1 und e_2 bekannt sind, und man verfügt dann über die Menge e, so daß die Konstruktion des Dreiecks ABC möglich wird. $\triangle ABC$ bestimmt die Winkel zwischen den Geraden AH, AC und AK. Durch Drehung der Geraden HC um den Punkt C bekommt man andere Wertepaare von

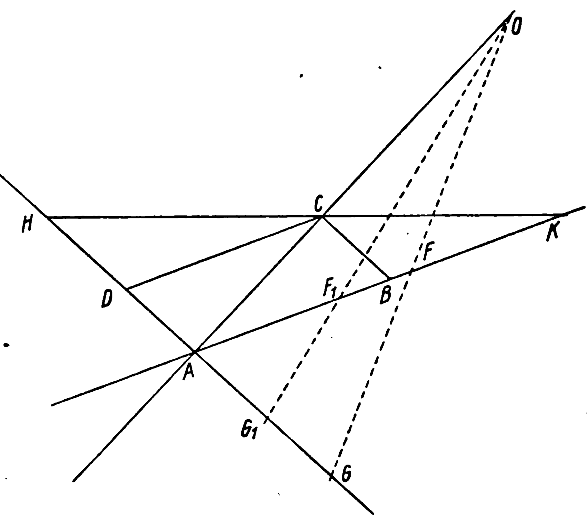


Fig. 1.

r_1 und r_2. Für ein anderes Potential hat man nur einen anderen Punkt in der Geraden AC als Drehpunkt zu wählen.

Aus der analytischen Geometrie ist bekannt, daß die Gleichung (1) ihre Gültigkeit auch für den Fall behält, daß das eine der Linienstücke AH oder AK negativ ist, indem die negativen Linienstücke nach der entgegengesetzten Richtung von A abgesetzt werden. Der Punkt A kann auch für die Gerade AC als Nullpunkt betrachtet werden. Das hier angegebene Verfahren zur Verzeichnung von Niveaulinien kann deshalb auch dann angewendet werden, wenn eine oder mehrere von den Größen e, e_1 oder e_2 negativ sind, indem man das negative Vorzeichen in der Weise berücksichtigt, daß die bez. Abstände r, r_1 oder r_2 als negativ abgesetzt werden.

1) Diese Zeitschr. **21**, 145, 1920.

Ich habe die Methode angewendet, um einige Niveaulinien zweier Elektrizitätsmengen, $+9e$ und $-4e$, zu zeichnen. Als Bezugsmenge wähle ich $8e$. Das Dreieck ABC, Fig. 1, wird dann gezeichnet entsprechend der Forderung

$$AB:BC:AC = 9:4:8.$$

Da die eine Elektrizitätsmenge negativ ist, wird der betreffende Abstand in die negative Richtung von A, etwa nach G hin, abgesetzt.

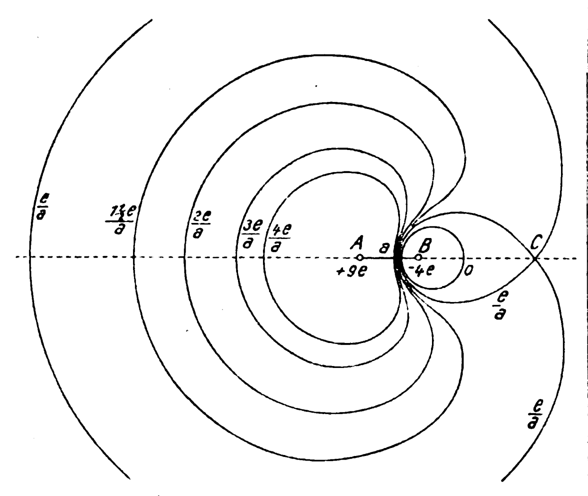


Fig. 2.

Fig. 2 zeigt die nach diesem Verfahren gezeichneten Niveaufächen $\frac{e}{a}$, $\frac{2e}{a}$, $\frac{3e}{a}$ und $\frac{4e}{a}$; die Niveaufläche 0, ein Kreis, ist auch gezeichnet. Die Elektrizitätsmengen $+9e$ und $-4e$ befinden sich beziehentlich in A und B, Fig. 2; der Abstand $AB = a$. Die zusammengehörigen Abstände von den Punkten A und B bei einem bestimmten Potential sind aus Fig. 1 zu entnehmen. Fig. 1 zeigt zwei zusammengehörige Wertepaare von r_2 und r_1, AG, AF und AG_1, AF_1, wenn das Potential $\frac{8e}{AO} = \frac{e}{a}$ ist, während $AO = 8a$.

Selbstverständlich kann diese Methode auch zur Konstruktion konjugierter Punkte bei optischen Systemen sowie zur graphischen Vermittelung von Widerständen verzweigter Stromleitungen benutzt werden.

Vielleicht wird es als ein kleiner Übelstand dieses Verfahrens zur Verzeichnung von Niveaulinien angesehen werden, daß die zur Bestimmung der Niveaulinien benutzten Abstände nicht an Ort und Stelle konstruiert werden, sondern einer anderen Konstruktion entnommen werden. Wie ich aber zeigen werde, läßt dieser Übelstand sich zum Teil aufheben, indem man bei einem bestimmten Potential die Abstände unmittelbar von den Agensmengen aus absetzen kann. Dieser Vorteil wird aber zum Teil dadurch kompensiert, daß man für jedes Potential neue Achsen zu konstruieren hat.

In Fig. 1 ist A gemeinsamer Nullpunkt der beiden Achsen AH und AK; aber durch Parallelverschiebung der einen Achse lassen sich die Nullpunkte trennen. In Fig. 3 sind BD und AF die Achsen und B und A deren Nullpunkte. Eine Gerade schneidet die Achsen in

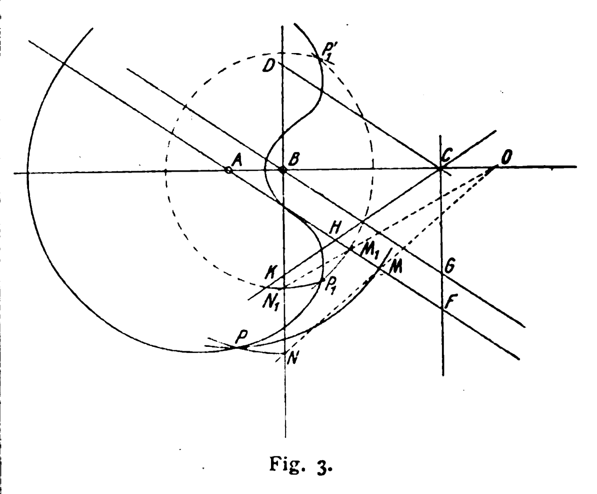


Fig. 3.

K und H, und die Gerade durch die Nullpunkte A und B in C. Wie früher hat man dann

$$\frac{AF}{AH} + \frac{BD}{BK} = 1, \tag{1a}$$

indem $BD = CG$; man beachte, daß in Fig. 3 BK negativ ist.

Ich setze $r_1 = AH$, $r_2 = BK$, $r = BC$ und $AB = a$, wodurch (1a) wird

$$\frac{BG \cdot \frac{r+a}{a}}{r_1} + \frac{BD}{r_2} = \frac{BC}{r}.$$

Ein Vergleich dieser Gleichung mit (2) lehrt, daß

$$BG:BD:BC = e_1 \cdot \frac{r}{r+a} : e_2 : e,$$

wonach das Parallelogramm $BDCG$ seine Gestalt verändert mit der Entfernung r. Dasselbe Achsenpaar kann deshalb nur für eine bestimmte Niveaulinie verwendet werden.

In Fig. 3 befindet sich die Elektrizitätsmenge $-4e$ in B und $+9e$ in A, indem $AB = a$. Um die Niveaulinie $\frac{1^1/_2 e}{a}$ zu zeichnen, wähle ich $6e$ als Bezugsmenge, dann hat man $r = 4a$. Das Parallelogramm $BDCG$ wird dann in der Weise konstruiert, daß

$$BG:BD:BC = \frac{9 \cdot 4}{5} : 4 : 6.$$

Auf der Verlängerung der Linie AB ist der Punkt O so bestimmt, daß $BO = 4a$. Die Schnittpunkte der Geraden durch O mit den Achsen BD und AF bestimmen die zusammengehörigen Entfernungen von den Agensmengen. Kreisbögen mit A und B als Zentrum und den in dieser Weise bestimmten Radien schneiden einander in der Niveaulinie. In Fig. 3 sind AM und BN solche Radien und P der eine Schnittpunkt der Kreisbogen auf der Niveaulinie. Die Punkte P_1 und P_1' sind ebenfalls bestimmt als Schnittpunkte der Kreisbögen $P_1N_1P_1'$ und $P_1M_1P_1'$.

Die durch die in dieser Weise bestimmten Punkte gezeichnete Niveaulinie ist auch in Fig. 2 als Niveaulinie $\frac{1^1/_2 e}{a}$ eingezeichnet.

Die hier angegebenen Methoden können auch zur Verzeichnung von den Niveauflächen dreier Agensmengen verwendet werden. Aber in diesem Falle sind die Niveauflächen meistens nicht Rotationsflächen; es genügt daher nicht, wenn man eine klare Vorstellung über die Form der Flächen gewinnen will, die Durchschnitte derselben zu zeichnen mit einer Ebene, welche durch die Agensmengen hindurchgeht, vielmehr müssen so viel Punkte in jeder Niveaufläche bestimmt werden, daß man mit deren Hilfe die Schnittkurven zwischen der Niveaufläche und anderen gegebenen Flächen, z. B. Ebenen, zu zeichnen vermag. Theoretisch sind diese Konstruktionen leicht ausführbar, aber in der Tat ist die Verzeichnung von solchen Niveauflächen umständlich; ich verzichte deshalb auf eine nähere Beschreibung des Verfahrens.

(Eingegangen 19. Juli 1920.)

Ein Beitrag zur Theorie des Sehraumes.

Von S. Mohorovičić.

1. In einer Reihe von recht interessanten Arbeiten hat Herr Hans Witte[1]) einen Versuch gemacht, unseren Sehraum näher zu untersuchen. Eine Anregung dafür hat er, wie es scheint, durch die ungenügend geklärte scheinbare Vergrößerung des Mondes usw. am Horizont gewonnen. Er geht von einer Voraussetzung aus, daß nämlich[2]) „jedem Dinge, das man sieht, außer seiner gewußten oder geschätzten wahren Größe gewissermaßen wie eine Marke noch eine Verkleinerungsziffer angeheftet ist: So groß sieht das Ding aus" (Laqueurscher Sehraum). Herr Hans Witte entwickelt in seinen geistreichen mathematischen Ausführungen[1]) eine neue Lehre des perspektivischen Sehens und zeigt, daß auch hier der Raumbedingung[2]) (der physikalischen Grundgleichung des Sehraums)

$$\frac{\text{Sehgröße}}{\text{wahre Größe}} = \frac{\text{Sehferne}}{\text{wahre Entfernung}} \qquad (1)$$

Genüge geleistet wird[3]).

Herr Hans Witte macht aber zwei Vernachlässigungen. Die erste Vernachlässigung spiegelt sich in folgender Annahme[4]): „Eine wirkliche gerade Linie erscheint im Sehraum wieder als eine gerade Linie. Umgekehrt: Einer Linie, die im Sehraum als gerade erscheint, entspricht im wahren Raum eine gerade Linie". Die zweite Vernachlässigung besteht darin, daß er die Entfernung des Auges senkrecht über einen Parallelstreifen usw. in die Rechnung nicht einbezieht.

2. Ich will hier einen Beitrag zur Theorie des Sehraumes geben ohne die genannten zwei Vernachlässigungen zu machen. Weil, wenn wir z. B. über einer Bahnstrecke uns befinden, und wenn wir unseren Blick aus der Ferne über die Bahnstrecke gleiten lassen, dann sehen wir dieselbe immer mehr und mehr auseinander laufen, bis sie schließlich eine Zeitlang fast parallel laufen (unser Blick ist dann fast senkrecht hinunter gerichtet), um dann wieder nach anderer Seite zusammenzulaufen. Ein anderes Beispiel wären zwei sehr lange und parallele Cirrusstreifen, welche sich am Himmel gerade über uns befinden; es ist bekannt, daß es uns scheint, als ob die beiden Wolkenstreifen an beiden entgegengesetzten Seiten am Horizont zusammenlaufen. Es ist klar, daß hier die senkrechte Entfernung von dem Auge eine wichtige Rolle spielt, und daß die beiden Wolkenstreifen (Eisenbahnschienen usw.) uns etwas gekrümmt erscheinen. Solche leichte Krümmung gibt auch Herr Hans Witte zu, er sagt aber[5]): „... weil die Krümmung gering ist, soll sie ausdrücklich außer acht bleiben". Dies ist in der Praxis (nicht aber in der Theorie) nur dann statthaft, wenn wir wie Herr Hans Witte nur nach einer Richtung schauen, und zwar erst von einer gewissen Entfernung von dem Auge weiter, wie wir beweisen werden.

1) Hans Witte, Über den Sehraum. I. Mitteil., diese Zeitschr. 19, 142, 1918; II. Mitteil., ebenda 20, 61, 1919; III. Mitteil., ebenda S. 114; IV. Mitteil., ebenda S. 126; V. Mitteil., ebenda S. 368; VI. Mitteil., ebenda S. 389; VII. Mitteil., ebenda S. 439; VIII. Mitteil., ebenda S. 470. Eventuelle weitere Mitteilungen sind mir nicht zugänglich.
2) V. Mitteil. § 7—9.

1) VI—VIII. Mitteil.
2) V. Mitteil. § 2.
3) VIII. Mitteil. §§ 9—11.
4) VI. Mitteil. § 6.
5) VI. Mitteil. § 6.



3. Sei L die wahre Größe eines Gegenstandes und R seine wahre Entfernung von dem Auge A, dann folgt aus der Fig. 1 ($\triangle ABC$) für den Sehwinkel φ die Relation:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{L}{R} \tag{2}$$

(dabei darf man nicht vergessen, daß immer $\sphericalangle ABC = 90^0$ sein soll).

Wir werden jetzt definieren: Die scheinbare Größe l des betrachteten Gegenstandes ist proportional mit der Tangente des Sehwinkels, d. h.

$$l = r \cdot \operatorname{tg} \varphi. \tag{3}$$

Die Konstante r kann zuerst ganz willkürlich sein; sie hat Dimensionen einer Länge und kann als solche gedeutet werden. r ist also die senkrechte Entfernung jener Ebene von

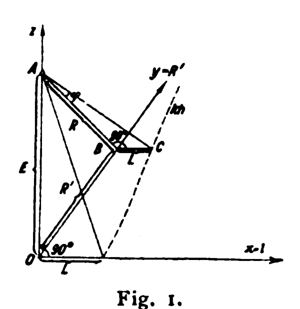


Fig. 1.

dem Auge, auf welche wir den betrachteten Gegenstand projizieren (Referenzfläche); man darf aber r nicht mit der Sehferne des Laqueurschen Sehraumes verwechseln. Somit erhalten wir folgendes Projektionsgesetz

$$l = \frac{rL}{R}, \tag{4}$$

d. h. die scheinbare Größe eines Gegenstandes ist umgekehrt proportional mit seiner senkrechten Entfernung von dem Auge[1]).

4. Das Projektionsgesetz (4) können wir graphisch veranschaulichen. Im rechtwinkeligen Koordinatensystem sei $y = R$ und $l = x$; das Auge befindet sich in dem Ausgangspunkt O. Wir haben unmittelbar

$$xy = rL \tag{5}$$

und dies ist die Gleichung einer gleichseitigen Hyperbel mit den Koordinatenachsen als Asymptoten[2]).

5. Ganz anders verhält sich die Sache, wenn das Auge nicht in der Ebene des Parallelstreifens, sondern über ihm sich befindet (Fig. 1).

1) Während dieser ganzen Betrachtung nehmen wir an, daß nur das rechte Auge sieht, das linke sei geschlossen.

2) Die Hyperbelachse ist $a = \sqrt{2rL}$.

Setzen wir $y = R'$ und $x = l$, dann folgt aus (4) und der Fig. 1 unmittelbar

$$l = \frac{rL}{\sqrt{E^2 + R'^2}}, \tag{6}$$

und daraus

$$x^2y^2 + E^2\left(x^2 - \frac{r^2L^2}{E^2}\right) = 0. \tag{7}$$

Dies ist die Gleichung einer Konchoide. Somit haben wir die scheinbare Verengerung eines geraden Weges, einer geraden Eisenbahnlinie usw., mit der Ferne, erklärt.

6. Wir wollen noch betrachten: Wie ändert sich die wahre Größe eines Gegenstandes (z. B. die wahre Breite eines Streifens), wenn die scheinbare Größe l und dann auch der Sehwinkel φ konstant bleiben sollen? Setzen wir (Fig. 2) in (6) $y = R'$ und $x = L$, dann haben wir sofort:

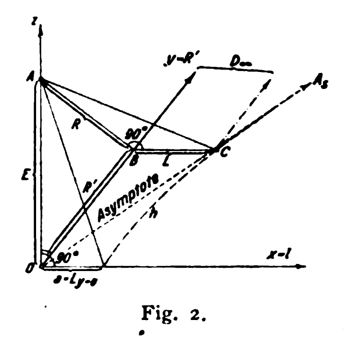


Fig. 2.

$$x^2 - \frac{l^2}{r^2}y^2 = \frac{l^2}{r^2}E^2. \tag{8}$$

Dies ist die Achsengleichung der Hyperbel. Wir sehen sofort, daß, von einer gewissen Entfernung $\overline{OB}$, die wahre Größe L fast linear mit der Entfernung wächst. Somit sind wir in erster Annäherung bei demselben Resultat angelangt, wie auch Herr Hans Witte[1]): Eine „wirkliche" gerade Linie erscheint im Sehraum wieder als eine gerade Linie; und umgekehrt.

7. Jetzt bleibt uns noch übrig, auch die weiteren Folgerungen der Witteschen Theorie (oder des Laqueurschen Sehraumes) als die erste Annäherung der hier entwickelten Theorie abzuleiten. Kehren wir zu dem früheren Beispiele zurück. Wir haben schon gesagt, daß, in erster Annäherung, von einer gewissen Entfernung $\overline{OB}$ wir den Hyperbelast mit seiner Asymptote verwechseln können. Nehmen wir noch beispielsweise $\overline{AB} = r$, d. h. wir werden

1) VI. Mitteil., §§ 6 und 7. Man findet hier auch das Bild, welches mit dem Teile unserer Fig. 2 außerhalb der Strecke $\overline{OB}$ identisch ist.

den Streifen $BD_\infty CA_s$ (Fig. 3) auf die Ebene π, welche senkrecht auf AB und AC ist, projizieren. Der unendlich lange Strahl BD_∞ wird in der Ebene π nur eine endliche Länge $\overline{B\overline{D}_\infty}$ haben, ähnlich die parallelen Strahlen BA_s und CA_s. Fixieren wir das Bild auf der Ebene π,

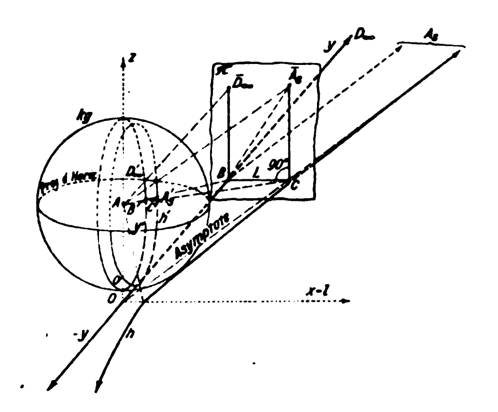


Fig. 3.

und drehen wir die Ebene π um die Achse BC so, daß sie ganz in die Ebene xy zu liegen kommt, so bekommen wir die Fig. 4, welche mit der Witteschen Fig. 4 in seiner VIII. Mitteil. identisch ist. Dem Punkte P auf CA_s entspricht der Punkt $\overline{P}'$ auf $\overline{CA_s}'$. Aus der Fig. 4 haben wir

$$f/l = X/Y. \qquad (1')$$

Wir sehen, daß wir erst in erster Annäherung f als Sehferne und X als wahre Entfernung bezeichnen können. Die Länge $\overline{B\overline{D}_\infty}' = \overline{C\overline{A}s'}$ ist also abhängig von der Entfernung r der

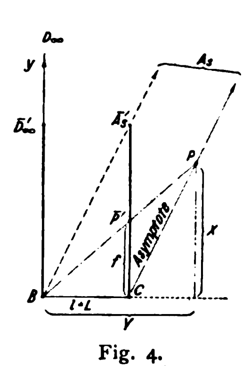


Fig. 4.

Referenzfläche π von dem Auge; ein Resultat, zu welchem uns die Wittesche Theorie erst nach langen Überlegungen führt und bei ihm eine Konstante ist.

Dieselben Betrachtungen können wir mit einem Parallelstreifen anstellen (Fig. 5). Wir bekommen auch hier ein Bild (auf der Ebene π), welches mit der Witteschen Fig. 5 in seiner VIII. Mitteil. im Prinzip identisch ist. Dem Punkte D_∞ entspricht auch hier der Punkt $\overline{D}_\infty'$, dem unendlich langen Strahle CD_∞ die endliche Länge $C\overline{D}_\infty$. Wir sehen, daß erst nach diesen annähernden Betrachtungen uns die Wittesche Theorie klar und durchsichtig erscheint, und, daß der Laqueursche Sehraum nur als eine erste Annäherung betrachtet werden darf.

8. Eine Theorie des Sehraumes kann nie als vollkommen betrachtet werden, wenn sie nicht imstande ist die scheinbare Vergrößerung des Mondes am Horizonte zu erklären. Nehmen wir zuerst, daß unsere Referenzfläche eine Kugeloberfläche kg (Fig. 3 und 5) ist, d. h. r sei für jede Blickrichtung konstant. Da wir in diesem Falle den Mond in jeder Lage (Höhe) gleich groß sehen sollten, so müssen wir annehmen, daß r eine Funktion der Höhe über dem Horizont ist[1]). Die erwähnte Referenzfläche wäre jetzt keine Kugeloberfläche, sondern sie hätte eine ähnliche Form wie ein Rotations-

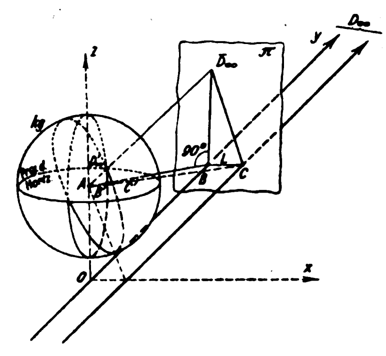


Fig. 5.

ellipsoid, wir werden sie Sphäroid nennen. Warum aber r eine solche Funktion der Höhe über dem Horizont und vielleicht der Lage des Kopfes ist, gehört nicht mehr in die reine Physik; hier hat der Physiologe sein Wort[2]).

9. Zum Schlusse muß ich noch einige Worte über den Tellermond sagen. Die Herren E. Laqueur und Hans Witte gehören zu seinen größten Verfechtern. Und jetzt kommt das Beste; Herr Hans Witte sagt nämlich[3]): „.... Allem Augenschein nach ist die Meinung dabei die, man könne den Mond eigentlich, wenn man die Hände hebt, mit der Scheibe oder dem Teller unmittelbar verdecken..... Diejenigen Leute, welche die Probe zum erstenmal machen,

1) Vielleicht ist r auch eine Funktion der Lage des Kopfes.

2) Vgl. z. B. O. D. Chwolson, Lehrbuch der Physik Bd. 2, S. 695; Braunschweig 1904.

3) III. Mitteil. § 6.

wundern sich, daß die Hände mehr als 40 mal zu weit fassen..." Ich denke, es gibt zwei Möglichkeiten dieses Paradoxon zu lösen. Die erste Möglichkeit wäre: der Tellermond existiere nicht; es ist dies nur eine schlechte Überlieferung aus uralten Zeiten.

Zweite Möglichkeit wäre, daß der Tellermond tatsächlich existiere[1]). In diesem Falle müssen wir das früher erwähnte Paradoxon erklären. Ich denke, es bleibt hier nur eine Erklärung übrig: Der Mond, wenn er z. B. sich am Horizont befindet (oder in seiner Nähe), sieht aus wie eine Scheibe von 40 cm Durchmesser (nach Durchschnittserfahrungen), aber in einer Entfernung von ca. 44 m (Entfernung der Referenzfläche). Jeder Mensch, wenn er eine Scheibe von 40 cm Durchmesser in einer Entfernung von 44 m sieht, kann sofort angeben, wie sie in der Wirklichkeit groß ist. Daraus folgt, daß der Durchschnittsmensch sagen wird: Der Mond sieht so groß aus. Wenn er eine so große Scheibe in der Greifnähe mit dem Monde vergleicht, dann projiziert er unwillkürlich diese Scheibe auf eine Referenzfläche, welche sich in einer Entfernung von ca. 44 m befindet. Die Scheibe sieht dann hausgroß aus, und jeder kann sich durch einen Versuch darüber selbst überzeugen.

Ist diese Erklärung richtig, dann ist das erwähnte Paradoxon erklärt und der Tellermond gerettet.

1) Hans Witte, l. c. § 14 hält ihn als bewiesen. Er sagt: „Gewiß, er lebt nur in der Seele. Und dies ist vielleicht der innere Grund, weshalb ihn die physikalische Wissenschaft bisher verschmäht".

10. Zusammenfassung. Hier wurde eine Theorie des Sehraumes skizziert und gezeigt, daß die Wittesche Theorie des Laqueurschen Sehraumes nur als erste Annäherung betrachtet werden darf. Zum Schlusse wurde die Frage nach der Vergrößerung des Mondes am Horizonte und die des Tellermondes gestreift.

Zagreb (S.H.S.), Februar 1920.

(Eingegangen 19. Juli 1920.)

Berichtigung zu meiner Theorie der Rotverschiebung.

Von A. H. Bucherer.

Die in dieser Zeitschr. **21**, 451, 1920 veröffentlichte Ableitung der Rotverschiebung erweist sich bei nochmaliger Prüfung als nicht haltbar. Es handelt sich um Folgendes: Ich hatte gezeigt, daß eine im Gravitationsfelde der Sonne erzeugte Strahlung weniger Energie besitzt als eine außerhalb erzeugte. Daraus schloß ich, daß diese Energiedifferenz sich durch eine Rotverschiebung geltend machen müsse. Diese Folgerung ist aber deshalb nicht zulässig, weil ein das Gravitationsfeld der Sonne verlassender Lichtstrahl eine Verzögerung und damit eine Verringerung seiner kinetischen Energie erfährt von der Größe der berechneten Energiedifferenz. Letztere darf also nicht auf Rechnung der Rotverschiebung gesetzt werden.

Bonn, den 28. August 1920.

(Eingegangen 28. August 1920.)

ZUSAMMENFASSENDE BEARBEITUNGEN.

Neuere Arbeiten über Beugung an Zylindern und Gittern.

Von H. Spohn.

(Schluß.)

Um ihren Zusammenhang mit dem periodischen Schwanken der Kurven von Fig. 4, S. 501, feststellen zu können, wurden [14] die ersten zwei Eigenschwingungen für die beiden den Kurven zugehörigen Abmessungen ausgerechnet. Ihre Werte sind in Fig. 5 auf der Abszissenachse eingetragen und durch die so erhaltenen Punkte Parallelen zur Ordinatenachse gezogen. Der postulierte Zusammenhang tritt evident zutage.

Man kann also das hier behandelte Beugungsproblem auch als einen Fall erzwungener Schwingungen, oder, was auf dasselbe herauskommt, als ein Resonanzproblem auffassen.

Damit hat sich jenes vorerwähnte unmittelbare Ineinandergreifen der strengen Gittertheorie mit dem Dispersionsprobleme herausgestellt, auf das im nächsten Paragraphen noch näher eingegangen werden soll.

Der Fall paralleler Stellung des Zylinders zum elektrischen Vektor des eben-polarisierten Wellenzuges ist nunmehr für den vorliegenden Zweck vollständig dargestellt.

Zur vollen Erledigung des gestellten Problems gehört naturgemäß noch der Fall senkrechter Stellung des Zylinders zum elektrischen Vektor.

Dazu sind grundsätzlich keine neuen Überlegungen nötig: In Anbetracht der übrigen Symmetrieverhältnisse des vorliegenden Problems tritt lediglich an die Stelle des Vektors $\mathfrak{E}$ nunmehr der Vektor $\mathfrak{H}$; denn jetzt tritt nur eine magnetische Kraftkomponente in der Richtung

der Zylinderachse auf, während der elektrische Vektor in der $(r\varphi)$-Ebene die beiden Komponenten $\mathfrak{E}_r$ und $\mathfrak{E}_\varphi$ erhält. Daher folgt aus den auf Zylinderkoordinaten transformierten Maxwellschen Grundgleichungen, daß die neuen Problemgleichungen bis auf einen Vorzeichenwechsel aus den Gleichungen (1) durch Vertauschung der $\mathfrak{E}$ mit dem $\mathfrak{H}$ hervorgehen. Diese Rollenvertauschung bedingt in den ausgeschriebenen Grenzbedingungen (5c, 6c), daß in diesen die Ableitungen der Funktionen I und H die Rolle miteinander vertauschen; daraus ergibt sich dann weiterhin, daß nunmehr die Koeffizienten der wiederum wie in (2) eintretenden Reihenentwicklung zwar allgemein grundsätzlich denselben Aufbau behalten, jedoch die speziellen Werte anders ausfallen müssen. Diese allgemeine Übersicht genügt bereits für die weiter zu ziehenden Folgerungen. Aus den $\mathfrak{H}$-Komponenten erhält man zufolge der Maxwellschen Gleichungen in dem Falle der hier vorliegenden Symmetrie die $\mathfrak{E}$-Komponenten durch Differentiation nach r oder φ und daraufgesetzte Integration nach der Zeit; daher folgt aus der eben angestellten allgemeinen Übersicht, daß die Form für $\mathfrak{E}_r$ unmittelbar aus der Formel (7) abzulesen ist, wobei man sich lediglich gegenwärtig zu halten hat, daß die speziellen Werte von A_φ und B_φ bei im übrigen grundsätzlich gleichem Aufbau anders ausfallen als dort, d. h. die sich der erregenden Welle überlagernde Störung liefert bei senkrechter Stellung des Zylinders numerisch andere Werte als bei paralleler.

Die weitere Diskussion dieses Ergebnisses zeigt nicht nur, wie oben erwähnt, noch eingehender das Ineinandergreifen der strengen Gittertheorie mit der modernen Dispersionstheorie, sondern schließlich sogar eine in allen Einzelheiten bestehende Übereinstimmung mit dieser (siehe § 2).

Mit der hier vorgeführten Theorie stimmt das Experiment gut überein. Dieser Übereinstimmung widerspricht die in Fig. 5 punktiert eingetragene Beobachtung, indem sich die punktierte Kurve gut nur dem ersten Maximum und Minimum anschließt, nur scheinbar. Die vorliegende Theorie nahm die erregende Welle als ungedämpft an. Die zugehörigen Experimente mußten aber bisher immer noch mit sehr merklich gedämpften Wellen arbeiten.

Die theoretische Berücksichtigung der Dämpfung der erregenden Welle ist von Kobayashi-Iwao [25] durchgeführt worden. Die Überlegung ist durch den Scharfsinn, mit dem in alle Feinheiten des natürlichen Vorganges eingedrungen wurde, sehr interessant. Mit Rücksicht auf den Raum kann an dieser Stelle nicht näher darauf eingegangen werden. Es genüge die Feststellung, daß die Durchrechnung dieses Gedankens die oben bemerkte Abweichung restlos dargestellt hat.

§ 2. Polarisation, spezielle Dispersionstheorie.

Die ersten Gitterversuche, deren rechnerische Darstellung mit den Mitteln der alten Theorie unmöglich war, hatte, wie erwähnt, Heinrich Hertz im Jahre 1888 angestellt. Er fand eine auffallende elektrische Welle verschieden beeinflußt, je nachdem die elektrische Kraft der einfallenden Welle den Stäben parallel oder senkrecht zu ihnen gerichtet war, d. h.: Ein elektrischer Wellenzug wird von einem ihm in den Weg gestellten Gitter „polarisiert". Es ist Brauch geworden, diese Polarisation einer Welle an Gittern durch die „Durchlässigkeit" des Gitters zu kennzeichnen. Darunter soll das Verhältnis der Strahlungsintensität hinter einem, einfallender Strahlung in den Weg gestellten Gitter zur „freien" Intensität, d. h. zur Intensität der Strahlung bei Abwesenheit des Gitters verstanden werden; es wird weiterhin mit D bezeichnet. Statt die Durchlässigkeit eines Gitters einzeln für verschiedene Stellungen der Gitterstäbe zum elektrischen Vektor der einfallenden Welle anzugeben, wird es für viele Fälle anschaulicher, gleich das Verhältnis der Durchlässigkeiten bei „paralleler" und bei „senkrechter" Gitterstellung zu kennen. Dieses soll kurz das „Durchlässigkeitsverhältnis" heißen und fernerhin mit leichtverständlicher Indizesbezeichnung symbolisch

$$\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}}$$

geschrieben werden.

Hertz hatte im Gebiete elektromagnetischer Wellen im engeren Sinne

$$\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} < 1$$

gefunden. Dieser Fall wird Hertz-Effekt genannt.

Du Bois hatte im Gebiete der sichtbaren Strahlung [1, 2]

$$\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} > 1$$

gemessen. Dieser Fall wird Du Bois-Effekt genannt.

Du Bois und Rubens fanden später [3], daß der Du Bois-Effekt sich allmählich in den Hertz-Effekt verwandelt, wenn man zu immer größeren Wellenlängen übergeht.

Der Punkt dieses Überganges, an dem also

$$\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} = 1$$

ist, wird der Inversionspunkt genannt.

Die Verhältnisse blieben bis zur vollständigen Durchführung der neuen Gittertheorie durchaus ungeklärt. Die Auswertung der vorstehend referierten Theorie hat diesen Mangel restlos beseitigt, sie gibt aber natürlich noch weitergehende Auskunft.

Zu dem Zwecke hat man ein Gitter zu betrachten, dessen parallel angeordnete „Drähte" als Zylinder von der im vorigen Paragraphen definierten Art betrachtet werden dürfen. Hierbei sind — abgesehen natürlich von der wiederum einzeln durchzuführenden Unterscheidung nach der Art des Drahtmaterials — zwei Fälle zu unterscheiden:

Beiden Fällen gemeinsam ist die Auffassung der Gitterwirkung als Superposition der Wirkungen der Einzelzylinder. Aber erheblich verschieden fällt die Rechnung aus, je nachdem

a) der einzelne Gitterdraht nicht mehr merkbar von den erzwungenen Schwingungen der Nachbardrähte, d. h. einer schon „gestörten" einfallenden Welle, sondern lediglich von der ursprünglichen erregenden Welle getroffen wird, oder

b) die Erregung des einzelnen Drahtes merklich auch von den Störungen der Nachbardrähte abhängt.

Der Fall a liegt vor, wenn die Drahtabstände „groß" gegen die Wellenlänge sind. Ein rechnerisches Kriterium für diese Bedingung liefert eine noch kurz zu erwähnende Abhandlung von Ignatowsky 1914 [8]. Praktisch ist sie schon bei den für optische Messungen gebräuchlichen Gittern erfüllt.

Ein solches Gitter ist, um den Anschluß an die Theorie des vorigen Paragraphen zu gewinnen, aufzufassen als ein in einer Ebene angeordneter Satz einander paralleler Zylinder der bisherigen Art. Die Beobachtung erfolgt in großer Entfernung von der Gitterebene.

Zwei Hauptfragen sind nun hier vor allem zu beantworten:

1. Wo liegen die Beugungsbilder[1]) eines Gitters?
2. Wie wird die Intensität eines Wellenzuges durch das Gitter beeinflußt?

Die erste Frage ist eine Lebensfrage für die optische Wellenlängenmessung. Hier kann die Feststellung genügen [16], daß auch die strenge Theorie die Lage der Beugungsbilder wie die alte Theorie unabhängig vom Material der beugenden Körper findet. Denn ohne Rechnung erkennt man sofort folgendes: Nach den Voraussetzungen des jetzt vorliegenden Falles erhält man die hier wirksamen elektrischen und magnetischen Kräfte einfach durch Addition der oben erhaltenen entsprechenden Vektoren. Folglich kann hier qualitativ nichts Neues herauskommen. Aus den Vektoren $\mathfrak{E}$ des vorigen Paragraphen erhält man aber durch elementare Differentiation die Lage der Hauptmaxima von $\mathfrak{E}$, — das eben sind die „Beugungsbilder" im engeren Sinne — unabhängig vom Material.

Die zweite Frage kann mit dem einleitend erwähnten, bisher nur experimentell erforschten Probleme der Durchlässigkeit identifiziert werden. Da zur Vereinfachung des Ausdruckes im vorigen Paragraphen die Intensität der einfallenden Welle als Einheit benutzt wurde, ist hier unmittelbar für einen Einzelzylinder

$$D_{\perp} = 2\overline{\mathfrak{E}_{\parallel}^2} = 1 + (A_\varphi^2 + B_\varphi^2)\frac{\lambda}{4r} + \\ + \sqrt{\frac{\lambda}{2r}}(A_\varphi + B_\varphi). \tag{15a}$$

Und die Schlußbetrachtungen des vorigen Paragraphen berechtigen jedenfalls ganz entsprechend für den senkrechten Fall

$$D_{\parallel} = 2\overline{\mathfrak{E}_{\perp}^2} = 1 + (C_\varphi + D_\varphi^2)\frac{\lambda}{4r} + \\ + \sqrt{\frac{\lambda}{2r}}(C_\varphi + D_\varphi), \tag{15b}$$

anzusetzen. Dabei sind, wie erinnerlich, die Koeffizienten A, B, C, D Funktionen von ϱ/λ und von der D.-K. (im allgemeinen Sinne).

Das Verhalten, wenigstens der Größe $D_{\|}$, ist im vorigen Paragraphen für den Einzelzylinder eingehend diskutiert worden. Die Diskussion für $D_{\perp}$ muß nach den Schlußbemerkungen des vorigen Paragraphen streng analog verlaufen. Wiederum ist für den jetzt vorliegenden Fall qualitativ nichts Neues zu erwarten. Allein quantitativ tritt hier bei hinreichender Größe der Zahl der Gitterdrähte eine Modifikation ein, die der hier dem Falle beim Einzelzylinder entsprechenden Frage eine ungleich fühlbarere Bedeutung verschafft:

Bezeichnet nämlich n die Anzahl der Drähte des Gitters, so erhält in den entsprechenden Ausdrücken für $D_{\parallel}$ und $D_{\perp}$ der zweite Summand den Faktor n^2, der dritte den Faktor n. Nun war die Voraussetzung über die zu den Formeln (1a) und (1b) führende Entwicklungsmöglichkeit schon hinreichend erfüllt für

1) An dieser Stelle muß auf den Gebrauch des Wortes Beugung eingegangen werden. Scheinbar wird es meist nur für den Fall verwendet, daß unmittelbar erkennbar aus ihrer ursprünglichen Richtung abgelenkte Lichtstrahlen beobachtet werden. Bei Beachtung des Mechanismus eines Beugungsvorganges ist aber natürlicherweise das „Zentralbild" hinter einem beugenden Körper genau so ein „Beugungsbild" wie ein abgelenktes Bild.

$r > 5\lambda$; also können die genannten Summanden in (15a) und (15b) bei geeigneter Wahl von n so erhebliche Beträge erreichen, daß die hinter dem Gitter resultierende Intensität ganz wesentlich von der Intensität der freien Strahlung abweicht.

Aus denselben Gründen wie früher, ist über die Einzelheiten dieser Abweichungen etwas Bestimmtes erst auszusagen, wenn für das Verhältnis ϱ/λ und die D.-K. (im allgemeinen Sinne), d. h. über das Material der Gitterdrähte, besondere Abmachungen getroffen werden.

An dieser Stelle muß nun zunächst ϱ/λ als kleine Zahl angesetzt werden, da die zur bisherigen Durchführung der Theorie benutzten Reihenentwickelungen andernfalls praktisch versagen und über die Auswertung der Theorie für großes ϱ/λ erst am Schlusse berichtet wird.

Nach dieser Voraussetzung sind nun, wie im vorigen Paragraphen zwei Fälle unterscheidbar:

α) Das Gitter besteht aus dielektrischen Drähten.

β) Das Gitter besteht aus metallischen Drähten.

α) Beschränkt man die Betrachtung auf das „Zentralbild" ($\varphi = \pi$), so wird:

$$D_{\parallel} = 1 + \frac{1}{16}\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^4 (\varepsilon - 1)^2 \frac{\lambda}{r} n^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^2 (\varepsilon - 1)\sqrt{\frac{2\lambda}{r}}\, n, \tag{16a}$$

$$D_{\perp} = 1 + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2\lambda}{r}}\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^2 \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\, n \tag{16b}$$

[praktisch realisierbar bleibt nur der Fall

$$\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^2 (\varepsilon - 1)\sqrt{\frac{\lambda}{r}}\, n$$

klein gegen 1, weil andernfalls für die dieser Rechnung zugänglichen Anordnungen n von der Größenordnung 10^{11} gewählt werden müßte; daher ist in dem Ausdrucke für $D_{\perp}$ von vornherein das hierin quadratische Glied unterdrückt].

Aus (16a) und (16b) folgt:

$$\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^2 \varepsilon \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}\sqrt{\frac{2\lambda}{r}}\, n. \tag{17}$$

Das aus sehr dünnen dielektrischen Drähten bestehende Gitter zeigt also den Du Bois-Effekt.

β) Der praktisch bedeutungsvollste Fall eines Gitters aus metallischen Drähten zeigt folgendes Verhalten: Bezeichnet wieder ν und $\varkappa$ Brechungsquotienten und Extinktionskoeffizienten des Drahtmaterials, so ist in dem Zentralbilde:

$$D_{\parallel} = 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{2\lambda}{r}}\,[\nu^2 - \varkappa^2 - 1 - 2\nu\varkappa]\, n, \tag{18a}$$

$$D_{\perp} = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{2\lambda}{r}}\, \frac{4\nu\varkappa - [(\nu^2 + \varkappa^2)^2 - 1]}{(\nu^2 - \varkappa^2 - 1)^2 + 4\nu^2\varkappa^2}, \tag{18b}$$

$$\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} = 1 + \frac{n}{4}\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{2\lambda}{r}} \cdot F(\nu, \varkappa). \tag{18c}$$

$F(\nu, \varkappa)$ ist für alle Metalle im sichtbaren Gebiete wesentlich negativ. Daher herrscht im sichtbaren Gebiete hinter Gittern, deren Drähte dünn sind im Vergleich zur Wellenlänge, der Hertz-Effekt.

Da die experimentelle Verifizierung dieses Falles, d. h. Herstellung gegen optische Wellenlänge dünner Metalldrähte i. a. auf technisch kaum zu beseitigende Schwierigkeiten stoßen wird[1]), sei Formel (18c) für das Gebiet der ultraroten und der elektrischen Wellen umgeschrieben. In diesem Gebiete ist

$$\nu^2 = \varkappa^2 = \nu\varkappa = \sigma\tau,$$

wo σ die Leitfähigkeit des Metalls, τ die Periode der einfallenden Welle bedeutet. Also wird:

$$F(\nu, \varkappa) = -1 - 2\sigma\tau + 2\frac{4\sigma\tau + 1 - 4\sigma^2\tau^2}{1 + 4\sigma^2\tau^2} = -(2\sigma\tau + 3) + 4\frac{2\sigma\tau + 1}{4\sigma^2\tau^2 + 1},$$

oder, da $\sigma\tau$ groß gegen 1 ist, mit bedeutender Näherung:

$$F(\nu_1\varkappa) = -2\sigma\tau + \frac{2}{\sigma\tau} \sim -2\sigma\tau;$$

daher wird hier;

$$\frac{D_{\parallel}}{D_{\perp}} = 1 - n\sigma\tau\left(\frac{2\pi\varrho}{\lambda}\right)^2 \sqrt{\frac{\lambda}{2r}}.$$

Dieses Ergebnis heißt aber: Ein Gitter aus metallischen Drähten von endlicher Leitfähigkeit läßt bei senkrechter Stellung zum elektrischen Vektor des einfallenden Lichtes ultrarote Strahlung nahezu unverändert hindurch, während es bei paralleler Stellung bei hinreichender Zahl der Drähte eine nahezu vollkommene Schirmwirkung ausübt.

Wenn oben festgestellt wurde, daß auch die neue Theorie die Beugungsbilder unabhängig vom Material der Gitterdrähte findet, so ist dazu noch eine interessante Bemerkung zu machen: Diese Übereinstimmung der Ergebnisse für die Beugungsbilder reicht zunächst eben nur soweit, d. h. bis zur übereinstimmenden Materialunabhängigkeit der Beugungsbilder, wenn man, wie eben das Gitter einfach als einen ebenen Satz parallel angeordneter Drähte

1) Der Fall scheint wenigstens nach der Richtung gegen die optischen Wellenlängen dünner Drähte experimentell nur bei einem noch zu besprechenden Gitterversuche von Braun erreicht zu sein [4].

von ∞ Länge ansieht. Dagegen gilt für die Lagen derjenigen Stellen, an denen Hauptextreme entstehen können, zwar auch die Formel

$$\sin\varphi = m\frac{\lambda}{\gamma} \quad (m = 0, 1, 2 \cdots; \ \gamma \text{ die „Gitterkonstante"}).$$

Ob jedoch diese Stellen Maxima oder Minima werden, oder gar die „normale" Intensität 1 aufweisen, das hängt noch wesentlich von der Entfernung des Beobachtungsortes vom Gitter ab [16].

Dieses Ergebnis bedeutet also eventl. eine wesentliche Abweichung von dem entsprechenden Ergebnisse der alten Theorie. Nun ist aber auch die in der Optik gewöhnlich verwendete Gitteranordnung mit der zur Ableitung der ebengenannten Ergebnisse definierten Anordnung nicht zu identifizieren. Vielmehr hat man einen ebenen Satz parallel angeordneter Drähte nicht als frei im Raume stehend, sondern als in einen breiten Schirm eingelassen anzusehen. Die Dimensionen eines solchen Schirmes, wie sie der üblichen experimentellen Anordnung entsprechen, rechtfertigen es, diesen Schirm als vollkommen reflektierend aufzufassen. Danach ist es zulässig, die Wirkungen dieses Schirmes nach der eingangs erwähnten Theorie von Schwarzschild [18] zu berechnen. Superponiert man diese Wirkungen denen der „Einzelzylinder", so findet man nunmehr volle Übereinstimmung des Ergebnisses für die Beugungsbilder mit der alten Theorie. Die merkwürdigen Umkehrungen in die komplementären Erscheinungen treten hierbei nicht auf [16].

Erwähnenswert ist, wenn im vorliegenden Zusammenhange auch ein näheres Eingehen auf die zusätzliche Rechnung mit Benutzung der Schwarzschildschen Lösung hier nicht am Platze ist, daß auch die Ergebnisse für die Durchlässigkeiten durch die Berücksichtigung der experimentell üblichen Gitteranordnung in einem metallischen Rahmen wesentlich modifiziert werden. Während oben für dielektrische Gitter allgemein und für metallische Gitter im Gebiete langwelliger Strahlung durchaus eindeutig dort der Du Bois-Effekt, hier der Hertz-Effekt errechnet wurde, ist, wenn das Gitter als in einem vollkommen reflektierenden Schirm eingelassen anzusehen ist, für beide Materialarten sowohl der Du Bois-Effekt wie auch der Hertz-Effekt wie endlich auch der Übergang zwischen beiden Effekten (Inversion) möglich; und zwar wird die besondere Art des Effekts nach Festlegung des Materials und der Dimensionen durch die Zahl der Gitterdrähte bestimmt.

Der einleitend unter b) aufgezählte Fall kann kurz als der Fall im Verhältnis zur Wellenlänge kleinen Abstandes der einzelnen beugenden Elemente bezeichnet werden. Rechnerisch ausgiebig behandelt ist dieser Fall nur unter Zugrundelegung einer wesentlich anderen Anordnung als der, wie man sie unter einem Gitter schlechthin versteht: In das Vakuum sind nicht in einer Ebene, sondern räumlich Zylinder von der im vorigen Paragraphen definierten Art parallel einer Vorzugsrichtung in Abständen angeordnet, die klein sind gegen die Wellenlänge der durch die Anordnung sich fortpflanzenden Welle. Diese Anordnung gewährt der theoretischen Durcharbeitung auf der Hand liegende Rechenvorteile bzw. die Verwertung der für die Dispersionstheorie benutzten Methoden, die auch schon vor dieser Problemstellung für ein analoges Problem, die Optik kolloidaler Metallösungen, von Gans und Happel vorteilhaft verwendet worden war [7].

Im alten Sinne des Wortes „Beugung" führt natürlich diese Problemstellung über den ursprünglichen Ausgang hinaus und — wie noch näher diskutiert werden soll — zu eigentlichen „Dispersionsproblemen". Aber in der Tat führt die strenge Behandlung der „Beugung" zu einer grundsätzlichen Verbindung dieser mit der „Dispersion", so daß die Behandlung eines solchen speziellen Dispersionsproblems durchaus in den Rahmen einer Theorie über Beugung an Zylindern hineingehört.

Überdies gestattet die verhältnismäßig bequeme Durchrechnung des vorstehend definierten Falles bisher fehlende Schlüsse zu einem oben schon kurz erwähnten Experimente von Braun [4], das wiederum ein Gitterbeugungsproblem im engeren Sinne darstellt. Braun hatte sich Gitter von submikroskopischer Struktur durch Zerstäubung von Metalldrähten auf Glasplatten hergestellt. Er fand bei diesen feinen Gittern im Gebiete der sichtbaren Strahlung deutliche Polarisationswirkung. Die experimentelle Anordnung legte seiner Zeit den Schluß auf Hertz-Effekt nahe, während frühere Versuche von Du Bois und Rubens scheinbar unterhalb einer noch im Ultrarot gelegenen Wellenlänge unabhängig von der Dicke beugender Drähte nur die Möglichkeit des Du Bois-Effekts festgestellt hatten [3].

Für die Beantwortung dieser kritischen Frage kann das Verhalten einer hinreichend dünnen Schicht des oben definierten Mediums ausreichenden Anhalt gewähren.

Die obige Definition des hier zu diskutierenden Problems hat zur Folge, daß in dem Medium eine außerordentlich große Zahl außer-

ordentlich dicht gelagerter Einzeleffekte auftreten muß, die nunmehr nicht weiter als getrennte Einzeleffekte beobachtet werden können, sondern sich für die Beobachtung zu einer Mittelwertswirkung zusammensetzen, d. h. das oben definierte Medium wirkt der einfallenden Welle gegenüber wie homogene Materie, es kommt ihm, wie ohne weiteres ersichtlich, ein „Brechungsindex" zu. Daß es noch weitere optische Eigentümlichkeiten aufweist, wird die fernere Betrachtung lehren [17].

Die Rechnung, über deren Einzelheiten auf die Spezialliteratur verwiesen werden kann, schlägt den Umweg über die (etwa nach Abraham zu definierende) Polarisation $\mathfrak{P}$ des Mediums ein, die sich, gestützt auf die für den Einzelzylinder gefundenen Ergebnisse leicht angeben läßt, und zwar ergibt sie sich proportional der erregenden Welle. Danach liefert die Elektronentheorie die Definitionsgleichungen:

$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{D} &= \mathfrak{E} + 4\pi\mathfrak{P}_e\\ \mathfrak{B} &= \mathfrak{H} + 4\pi\mathfrak{P}_m\end{aligned}\right\}$$ ($\mathfrak{P}_e$ bzw. $\mathfrak{P}_m$ die elektrische bzw. die magnetische Polarisation)

und hieraus folgt dann nach Ersetzung der $\mathfrak{P}$ durch ihre Werte:

$$\mathfrak{D} = \overline{\varepsilon_{||}}\,\mathfrak{E} = \mathfrak{E}\left(1 + 2\pi\frac{Na_0}{k_1^2}\right)$$

$$\mathfrak{E} = \overline{\mu_{||}}\,\mathfrak{H} = \mathfrak{H}\,\frac{1 - \frac{i\pi Na_1}{k_1^2}}{1 + \frac{i\pi Na_1}{h_1^2}}, \tag{19}$$

wenn N die Anzahl der die Flächeneinheit durchsetzenden Zylinder bedeutet und die Rechnung — mit der Ausdrucksweise des vorgenannten Paragraphen — nur noch die Wirkung der „zweiten Partialwelle" berücksichtigt.

Im Sinne der Maxwellschen Theorie sind also die Faktoren

$$\left.\begin{aligned}\overline{\varepsilon_{||}} &= 1 + \frac{2\pi Na_0}{k_1^2},\\ \overline{\mu_{||}} &= \frac{1 - \frac{i\pi Na_1}{k_1^2}}{1 + \frac{i\pi Na_1}{k_1^2}}\end{aligned}\right\} \tag{20a}$$

die Dielektrizitätskonstante und die Permeabilität unseres Mediums für eine Welle, deren Vektor ‖ der Vorzugsrichtung schwingt. Die entsprechende Rechnung liefert für den ⊥-Fall:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\varepsilon_{\perp}} &= \frac{1 - i\pi Nd_1/k_1^2}{1 + \frac{i\pi Nd_1}{k_1^2}},\\ \overline{\mu_{\perp}} &= 1 + \frac{2\pi Nd_0}{k_1^2}.\end{aligned}\right\} \tag{20b}$$

Dabei sind die Koeffizienten a dieselben wie im vorigen Paragraphen, die Koeffizienten d die entsprechenden für den ⊥-Fall, also Funktionen von ϱ/λ und $\varepsilon_{\text{Zylinder}}$.

Für die Brechungsexponenten und Extinktionskoeffizienten unseres definierten Mediums folgt also [17]:

$$\left.\begin{aligned}\overline{\varepsilon_{||}}\,\overline{\mu_{||}} &= (\nu_{||} - i\varkappa_{||})^2 =\\ &= (1 - 2\pi Na_1 k_1^{-2})\frac{1 - i\pi Na_1k_1^{-2}}{1 + i\pi Na_1k_1^{-2}},\\ \overline{\varepsilon_{\perp}}\,\overline{\mu_{\perp}} &= (\nu_{\perp} - i\varkappa_{\perp})^2 =\\ &= (1 + 2\pi Nd_0k_1^{-2})\frac{1 - i\pi N d_1 k_1^{-2}}{1 + i\pi N d_1 k_1^{-2}}.\end{aligned}\right\} \tag{20c}$$

Die Formeln (7) liefern sofort folgende allgemeinen Schlüsse [17]:

1. Da Dielektrizitätskonstante und Permeabilität, also auch der Brechungsexponent im parallelen und senkrechten Falle verschiedene Werte haben, so ist das Medium doppelbrechend.

2. Da die Eigenschwingungen der Zylinder dadurch definiert sind, daß die reellen Teile der Nenner von a_m und d_m verschwinden, und diese Wurzeln in beiden Fällen an verschiedenen Stellen des Spektrums liegen, so ist das Medium dichroitisch.

3. Brechungsexponent und Extinktionskoeffizient sind (vermöge der a_m und d_m) Funktionen der Wellenlänge. Das Medium ist also dispergierend und selektiv absorbierend.

Man kann das Medium also als einfaches Modell eines einachsigen dichroitischen Kristalls oder, weil ja ein „Raumgitter" hier nicht definiert ist, strenger als Modell eines sogenannten flüssigen Kristalls bzw. einer anisotropen Flüssigkeit auffassen, bei dem nach einem Versuche von van der Lingen[1]) ebenfalls kein Raumgitter vorhanden zu sein scheint. Ein weiterer Grund für diese Parallele liefert das „Vorzeichen" der Doppelbrechung, das jedoch erst beim Einsetzen geeigneter Näherungswerte für die Koeffizienten a_m und d_m berechnet werden kann.

4. Interessant ist die Abweichung der mittleren Permeabilität unseres Mediums von 1 auch für unmagnetisches Zylindermaterial, eine Abweichung auch gegen die gewöhnlichen neueren Dispersionstheorien. Der rechnerische Grund dafür liegt darin, daß die vorstehende Theorie von vornherein die „Annäherung" der Rechnung weiter treibt, als es bei den bisherigen Dispersionstheorien der Fall ist.

Weitere Diskussion verlangt die Ersetzung

1) St. v. d. Lingen, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 913, 1913.



der allgemein komplizierten Koeffizienten a_m und d_m durch geeignete Näherungswerte. Dazu sind dieselben Unterscheidungen zweckmäßig wie oben.

a) Das Zylindermaterial sei dielektrisch, ϱ/λ so klein, daß in a_m und d_m schon die vierten Potenzen von ϱ/λ vernachlässigt werden können. Dann ist wie oben:

$$a_1 = d_0 = 0, \quad a_0 = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) k_1^2 \varrho^2,$$
$$d_1 = i \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1} k_1^2 \varrho^2, \tag{21}$$

[hier sei ε_2 die D.-K. des Zylindermaterials, ε_1 die des Mediums, in das die Zylinder eingebettet sind].

Also folgt aus (7):

$$\overline{\varepsilon_{\parallel}} = \varepsilon_1 + N \pi \varrho^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1), \quad \overline{\mu_{\parallel}} = 1,$$
$$\overline{\varepsilon_{\perp}} = \varepsilon_1 \frac{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 + N \pi \varrho^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1 - N \pi \varrho^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}, \quad \overline{\mu_{\perp}} = 1. \tag{22}$$

Diese Gleichungen liefern die sogenannten „Formeln der Stäbchendoppelbrechung", wie sie von O. Wiener [24] durch elektrostatische Betrachtungen abgeleitet wurden, wenn man den von den Zylinderquerschnitten eingenommenen Bruchteil $N\pi\varrho^2 = \delta_2$, den „freien" Bruchteil $= \delta_1$ setzt:

$$\varepsilon_{\parallel} = \delta_1 \varepsilon_1 + \delta_2 \varepsilon_2,$$
$$\frac{\varepsilon_{\perp} - \varepsilon_1}{\varepsilon_{\perp} + \varepsilon_1} = \delta_2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}. \tag{23}$$

Die durch (23) bestimmte „Stäbchendoppelbrechung", deren Gültigkeitsbereich — wie ja bei allen aus vorentwickelter Theorie gewonnenen Ergebnissen — genau angegeben werden kann, ist stets positiv. Dasselbe Ergebnis haben Dorn und Vorländer experimentell bei allen optisch inaktiven anisotropen Flüssigkeiten gefunden.

Auch als zweidimensionales Analogon zur Mosotti-Clausiusschen Theorie (vgl. z. B. A. H. Lorentz, Theory of electrons) der Dielektrika kann Formel (22) gedeutet werden [17].

Eine weitere interessante Analogie ergibt sich bei der Anwendung unserer Formeln auf die Extinktion von Wellenlängen, die weit ab von jeder Eigenschwingung unseres Mediums liegen [17]. Um eine Extinktion zu erhalten, muß man auch noch die vierten Potenzen von ϱ/λ in den Reihen für a_m und d_m berücksichtigen. Dabei wird nämlich:

$$a_0 = \frac{2\pi^2\varrho^2}{\lambda^2}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) - 2 i \pi \frac{\pi^4 \varrho^4}{\lambda^4}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)^2,$$
$$a_1 = 0,$$
$$d_1 = 4\pi \frac{\pi^4 \varrho^4}{\lambda^4}\left(\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right)^2 + 4 i \frac{\pi^2 \varrho^2}{\lambda^2} \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_2},$$
$$d_0 = 0,$$

womit aus den Formeln (20) folgt:

$$\nu_{\parallel}^2 = \varepsilon_1 + N \pi \varrho^2 (\varepsilon_2 - \varepsilon_1),$$
$$\varkappa_{\parallel} = \frac{\pi^2}{2N\lambda^2}\left(\frac{\nu_{\parallel}^2 - 1}{\nu_{\parallel}}\right)^2,$$
$$\nu_{\perp}^2 = \varepsilon_1 \left(\varepsilon_1 - 2\pi N \varrho^2 \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_2 + \varepsilon_1}\right)^{-1},$$
$$\varkappa_{\perp} = \frac{\pi^2}{4N\lambda^2} \frac{(\nu_{\perp}^2 - 1)^2}{\nu_{\perp}^3}.$$

Nach der Definition des Extinktionskoeffizienten ist also für eine Wellenlänge des hier vorgeschriebenen Gebietes die Strecke d, nach deren Durcheilen im oben definierten Medium die Intensität der Welle auf den e-ten Teil herabgesunken ist:

$$d_{\parallel} = \frac{N\lambda^3 \nu_{\parallel}}{2\pi^3(\nu_{\parallel}^2 - 1)^2}, \quad d_{\perp} = \frac{N\lambda^3 \nu_{\perp}}{\pi^3(\nu_{\perp}^2 - 1)^2}. \tag{24}$$

Rayleigh fand bei seiner Theorie des Himmelblaus

$$d = \frac{3N\lambda^4 \nu}{8\pi^3(\nu^2 - 1)^2}.$$

Die Analogie springt in die Augen. Der für die Dimension des Ausdrucks scheinbar auffallende Unterschied, daß d hier der vierten, dort der dritten Potenz der Wellenlänge proportional ist, hängt damit zusammen, daß bei Rayleigh N die Dimension $[l^{-3}]$ hat, während in der vorgeführten Theorie die Dimension von N $[l^{-2}]$ ist. Für die optische Wirkung bedingt der Unterschied ein tieferes Himmelsblau bei der Beugung an Kugeln (Rayleigh) als bei der an Zylindern.

Von besonderem Interesse ist schließlich die Anwendung unserer Theorie für das „Braunsche Gitter", das ja schließlich mit einen besonderen Anstoß für die Entwicklung unserer Theorie gegeben hat. Die Kompliziertheit der Koeffizienten a_m und d_m bringt es mit sich, daß für diesen Fall nur die numerische Berechnung unter Zugrundelegung speziell definierter Anordnungen ein übersichtliches Bild liefern kann.

Für den „senkrechten Fall" ist das Ergebnis sehr einfach. Bei der gewählten Anordnung ist praktisch $\nu_{\perp} = 1$, $\varkappa_{\perp} = 0$, also das Reflexionsvermögen $R_{\perp} = 0$. Die Strahlung geht bei senkrechter Stellung der Vorzugsrichtung zum elektrischen Vektor nahezu ungeschwächt durch die Anordnung hindurch.

Das Ergebnis für den „parallelen Fall" stellt das folgende der Abhandlung von Cl. Schaefer und H. Stallwitz [17] entnommene Diagramm dar.

Die unterste Kurve stellt das Reflexionsvermögen dar eines Cu-Gitters aus Cu-Drähten von 0,1 cm Radius, eingelagert in das Vakuum

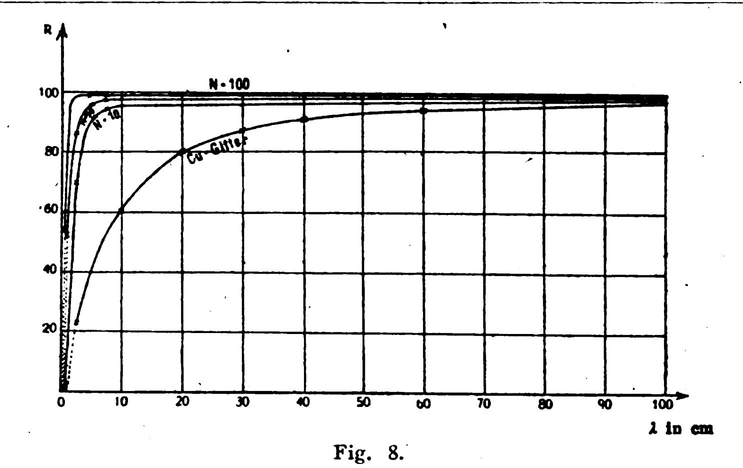


Fig. 8.

in Abständen von 1 cm, die oberen Kurven das Reflexionsvermögen für ein Gitter aus 0,002 cm starken *Ag*-Drähten in einer Anzahl von 10 bzw. 50 bzw. 100 Zylinderdurchstößen pro qcm; und zwar gilt das Bild für den „parallelen Fall".

Man sieht, daß die definierte Anordnung in der Tat den „Hertz-Effekt" ausübt. Bemerkenswert ist, daß, wie die oberen Kurven der Fig. 8 zeigen, die starke Steigerung der „Dichte" des Gitters bei Wellen > 10 cm kaum noch einen Einfluß ausübt.

§ 3. Schlußbemerkungen.

Die bisher zur Auswertung der Theorie benutzten Formeln (7 ff.) sind als Reihen in ϱ/λ praktisch verwertbar nur so lange etwa $\frac{2\pi\varrho}{\lambda} < 2$ ist; für größeres ϱ/λ werden sie durch die alsdann schlechte Konvergenz rechnerisch unbrauchbar.

Für diesen Fall muß von der in § 1 eingeführten Fourierschen Reihe zur entsprechenden Integralformel übergegangen werden. Die Art dieses Überganges findet man in jedem Lehrbuche über Fouriersche Reihen. Hieraus [22] folgt, wenn man die Lösung (vgl. Formel (6a)) schreibt:

$$\mathfrak{E} = \text{pars real}\, e^{int} \{Z_e + Z_r\}$$

in durchaus derselben Weise wie oben bei der Ableitung der Fourierschen Reihe

$$Z_e = e^{-ik\cdot},$$

$$Z_r = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\beta\, e^{i\pi_1\cos\beta} \int_0^{\infty} d\alpha \cdot a_\alpha H_\alpha^{(2)}(p_1)\cos(\alpha\varphi) \cos(\alpha\beta) \tag{25}$$

$$a_\alpha = \frac{n\dot{I}_\alpha(\pi_2) - i I_\alpha(\pi_2)}{\dot{H}_\alpha^{(2)}(\pi_1) I_\alpha(\pi_2) - n H_\alpha^{(2)}(\pi_1)\dot{I}_\alpha(\pi_2)}.$$

α und β sind Integrationsparameter, die hier an die Stelle von m in (6) getreten sind, zunächst also die Reihe aller reellen Zahlen von 1 bis ∞ bedeuten; für die mathematische Ausführung ist es zweckmäßig, die Beschränkung auf das Reelle fallen zu lassen und i. a. α und β als in der ganzen komplexen Ebene definiert anzusehen, d. h. Gleichung (25) als allgemein definierte Funktionalgleichung ohne Rücksicht auf die ursprüngliche physikalische Bedeutung. Dadurch wird hierfür die Benutzung eines eleganten funktionentheoretischen Verfahrens gesichert, das von Debye [5] ausführlich in seinen „Semikonvergenten Entwicklungen der Zylinderfunktionen . . ." dargestellt ist.

Alle übrigen Buchstaben haben die bisherige Bedeutung. [Der formale Unterschied zwischen a_α hier und a_m in Formel (6c) ist durch das Auftreten des nur von der Integration nach β betroffenen Teils im Doppelintegral bedingt.]

Der Vorteil dieser Integraldarstellung besteht nun darin, daß bei den hier vorausgesetzten großen Werten von

$$\frac{\varrho}{\lambda}\left(\frac{\varrho}{\lambda} > 2\right)$$

die Zylinderfunktionen durch von Debye [5] abgeleitete bequeme Grenzfunktionen ersetzt werden dürfen. Danach wird:

$$a_\alpha = -\sqrt{\frac{\pi\varrho\sin\tau}{2}}\, e^{i\left(\varrho f - \frac{\pi}{4}\right)} \left\{1 - \frac{\sin\tau + \cos\beta}{n\sin\tau_1 + \sin\tau}\, \frac{1 + e^{-2i\left(n\varrho f_1 - \frac{\pi}{4}\right)}}{1 - \frac{n\sin\tau_1 - \sin\tau}{n\sin\tau_1 + \sin\tau} e^{-2i\left(n\varrho f_1 - \frac{\pi}{4}\right)}}\right\} \tag{26}$$

Dabei ist der Hilfswinkel τ definiert durch:

$$\cos\tau = \frac{\alpha}{x}\ (x = p_1 \text{ bzw. } p_2);$$

im übrigen muß über das Nähere dieser Defi-

nition auf Debye verwiesen werden; f_1 ist eine Abkürzung, definiert durch

$$f_{(1)} = \sin \tau_{(1)} - \tau_{(1)} \cos \tau_{(1)}.$$

Wird nun der Bruch in den { } nach Potenzen des im ganzen Integrationsgebiete i. a. unterhalb 1 bleibenden Ausdruckes

$$\frac{n \sin \tau_1 - \sin \tau}{n \sin \tau_1 + \sin \tau} e^{-2i\left(n\varrho f_1 - \frac{\pi}{4}\right)}$$

entwickelt, so sind die der abschließenden Rechnung unterzulegenden Integrale von der Form

$$P = \int e^{-\sigma \Theta(\tau)} 4(\tau) d\tau$$

und der Kern des Auswertungsverfahrens besteht nun darin, daß der Wert von P unter den Voraussetzungen des vorliegenden Falles i. a. durch den Wert von $\Theta(\tau)$ an den Stellen τ_0 wesentlich bestimmt ist, an denen die Abteilung von Θ nach τ verschwindet.

Dabei sind rechnerisch zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem x reell oder komplex ist. Der erste Fall (veranlaßt durch das erste Glied in a_α) ist für unsere spezielle Aufgabe bis auf eine noch anzubringende Korrektur von Debye [5] durchgerechnet worden und liefert für den entsprechenden Anteil von Z_r im parallelen Falle

$$Z_1 = -\frac{2\varrho}{\sqrt{\lambda r}} e^{-i\left(kr - \frac{\pi}{4}\right)}. \qquad (27)$$

Die weiteren Glieder von a_α liefern keine merkbaren Beiträge mehr zu Z_r als erste Näherung.

Dagegen ist der Fall, daß

$$\frac{n \sin \tau_1 - \sin \tau}{n \sin \tau_1 + \sin \tau} \cdots$$

nicht < 1 bleibt, zu berücksichtigen. Dieser Ausdruck wird $= 1$ für $\sin \tau_1 = 0$. In diesem Falle ergibt sich der Beitrag Z_2 zum obigen Werte durch ein geeignetes Grenzübergangsverfahren nach Anwendung der Riemann-Debyeschen Methode zu

$$Z_2 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varrho}{r}} \sqrt{1-(\nu - ix)^2}\, e^{-i\left(p_1 - \frac{\pi}{4}\right)}. \qquad (28)$$

Entsprechendes gilt für den senkrechten Fall.

Diese Vorergebnisse werden schließlich wieder wie in den früheren Paragraphen zur Berechnung des zeitlichen Mittelwerts des elektrischen Vektors benutzt und liefern als erste Näherung für den Inversionspunkt im Falle der Du Bois-Rubensschen Anordnung

$$\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2 - 4(1 + x^2 - \nu^2) = 0. \qquad (29)$$

Die endgültige Rechnung liefert zu $\left(\frac{\varrho}{\lambda}\right)^2$ noch einen Faktor vom Werte eines echten Bruches, der eine Funktion von λ ist[1]).

Die Beobachtungen von Du Bois und Rubens werden durch unsere Formel gut wiedergegeben.

Die Formel (1) ist wiederum nur für einen beugenden Zylinder abgeleitet, das erwähnte Experiment jedoch an einem Gitter aus vielen Zylindern gewonnen. Zum einwandfrei strengen Vergleiche von Theorie und Experiment gehörte also an sich wieder der Aufbau der Gitterwirkung aus den Einzelwirkungen der das Gitter bildenden Zylinder. Das ist noch nicht geschehen. Man könnte dazu natürlich ebenso verfahren, wie bei den entsprechenden Problemen des § 2.

Geeigneter noch wäre dafür ein von Ignatowsky 1914 [8] für solche Fragestellungen entwickeltes allgemeines Verfahren, das noch aus einem anderen Grunde hier erwähnt werden muß, obschon seines rein mathematischen Charakters wegen hier wiederum der Hinweis auf die Originalarbeit in der Hauptsache genügen muß; die Betrachtungen des vorigen Paragraphen haben bei strenger Kritik eine Frage offen gelassen. Das „Braunsche Gitter" war kurzerhand mit einer „sehr dünnen Schicht" der oben räumlich definierten Anordnung identifiziert worden, ist jedoch in Wirklichkeit im Sinne dieser Theorie ein ebenes Gitter, die Bündigkeit des obigen Schlusses auf die von Braun gewonnene Beobachtung also jedenfalls nicht erwiesen. Theoretisch ist hier also die Ausfüllung einer Lücke wünschenswert. Und hierzu gibt nun das Ignatowskysche Verfahren die Handhabe.

Es besteht im wesentlichen darin, daß über die Gesamtfläche eines von periodisch angeordneten Drähten gebildeten Gitters integriert und dann — darin besteht der rechnerisch sehr geschickte Kern des Verfahrens — eine zulässige Vertauschung der Reihenfolge dieser Integration und der Integration an der Oberfläche je eines einzelnen Drahtes vorgenommen wird. Die eigenartige Darstellung von Ignatowsky erschwert ein erstes Studium seiner Arbeit. Ihre Durcharbeitung ist aber um so lohnender, als mit ihr die Theorie der Gitterbeugung zu einem theoretisch durchaus lückenlosen Abschlusse gebracht ist.

So braucht nur noch erwähnt zu werden, daß die Ignatowskysche Arbeit auch noch die Lücke in der Definition des Gültigkeitsbereichs der jeweils durchzuführenden Rechnungen schließt. Im vorigen Paragraphen mußte

1) Diese Vervollständigung soll demnächst vom Verfasser veröffentlicht werden.

schließlich für die beiden Fälle a) und b) die Festsetzung hingenommen werden, daß in a) die Drahtabstände groß, in b) klein gegen die Wellenlänge sein müßten. Hierfür wird ein exaktes Kriterium in dem Verschwinden eines von der Theorie gelieferten bestimmten Integrals gegeben.

Nebenher sei bemerkt, daß Ignatowskys Verfahren nicht auf das Draht- bzw. Stabgitter beschränkt bleibt, sondern allgemein streng für jedes irgendwie definierte Gitter angewendet werden kann, sowie die Lösung für ein einzelnes Gitterelement gegeben ist.

Das abschließende Literaturverzeichnis gibt vollständig die im vorstehenden Referate mittelbar oder unmittelbar benutzten Spezialarbeiten an, erhebt aber keinen Anspruch auf absolute Vollständigkeit aller zu diesem Gegenstande erschienenen Arbeiten. Es ist alphabetisch geordnet und innerhalb des Alphabets nach der Zeitfolge, so daß die im Referat genannten Originalarbeiten mühelos darin gefunden werden können.

Literaturverzeichnis.

1) K. Aichi, Proc. of Tokyo, Math. Phys. Soc. (2) **4**, 966, 1908.
2) H. du Bois, Wied. Ann. **46**, 542, 1892; **48**, 546, 1893.
3) H. du Bois u. H. Rubens, Wied. Ann. **49**, 593, 1893; Verh. d. Deutsch. phys. Ges. **77**, 1904; Ann. d. Phys. **35**, 243, 1911.
4) F. Braun, Ann. d. Phys. **16**, 1, 1905; **16**, 238, 1905.
5) P. Debye, diese Zeitschr. **9**, 775, 1908; Ann. d. Phys. **30**, 57, 1909; Math. Ann. **67**, 535, 1909; Sitzungsber. d. Kgl. Bayer. Akad. d. Wiss. 1910.
6) P. Epstein, Ann. d. Phys.
7) R. Gans u. H. Happel, Ann. d. Phys. **29**, 492, 1902
8) W. v. Ignatowsky, Ann. d. Phys. **18**, 495, 1905; **23**, 875, 1907; **25**, 99, 1908; **26**, 1032, 1908; **44**, 369, 1914; Archiv f. Math. u. Phys. **23**, 1914.
9) G. Mie, Ann. d. Phys. **25**, 377, 1908.
10) H. Poincaré, Acta math. **16**, 297, 1892; **20**, 313, 1897.
11) F. Reiche, Ann. d. Phys. **37**, 131, 1912.
12) H. Rubens u. F. Nichols, Wied. Ann. **60**, 418, 1897.
13) Cl. Schaefer, Ann. d. Phys. **23**, 163, 1907; diese Zeitschr. **10**, 261, 1909; Sitzungsber. d. Berl. Akad. d. Wiss. 326, 1909.
14) Cl. Schaefer u. F. Großmann, Ann. d. Phys. **31**, 455, 1910.
15) Cl. Schaefer u. M. Laugwitz, Ann. d. Phys. **21**, 287, 1906; **23**, 599, 1907.
16) Cl. Schaefer u. F. Reiche, Ann. d. Phys. **32**, 577, 1910; **35**, 817, 1911.
17) Cl. Schaefer u. H. Stallwitz, Berl. Ber. 1913, XXXVI; Ann. d. Phys. **50**, 199, 1916.
18) H. Schwarzschild, Math. Ann. **55**, 177, 1902.
19) W. Seitz, Ann. d. Phys. **16**, 764, 1905 (fehlerhaft); **19**, 554, 1906.
20) B. Sieger, Ann. d. Phys. **25**, 377, 1908.
21) A. Sommerfeld, Math. Ann. **47**, 317, 1895.
22) H Spohn, Breslauer Dissertation, 1916.
23) G. H. Thomson, Ann. d. Phys. **22**, 365, 1907 (fehlerhaft).
24) O. Wiener, Ber. d. Kgl. Sächs. Akad. d. Wiss., Math.-phys. Klasse **61**, 113, 1909; **62**, 263, 1910.
25) Kobayashi-Iwao, Ann. d. Phys. **37**, 131, 1912.

(Eingegangen 16. Oktober 1918.)

BESPRECHUNGEN.

E. Alt, Die Wettervorhersage; ihre Geschichte, ihr gegenwärtiger Stand und die Richtung ihrer Fortentwickelung. 8°. 70 S. u. 20 Abbildungen. München, Verlag Natur u. Kultur. 1919. M. 1.50

Schon der Zusatztitel spricht aus, in welcher Weise der Verf. das Problem der Wettervorhersage in seinem Werkchen behandelt. Es ist eine Schilderung des historischen Verlaufes in der Erkenntnis der Vorgänge in unserer Atmosphäre, wie sie schließlich zur Gestaltung irgendeiner Wetterlage zusammenwirken. — Die Mittel und die Wege, diese Zusammenhänge aufzufinden und in der richtigen Auswertung ihrer physikalischen Bedeutung für die speziellen Witterungstypen auszuwerten, führen zur Aufstellung der Vorhersage. Bisher sind es im wesentlichen die Angaben der meteorologischen Instrumente gewesen, wie sie am Grunde unserer Luftmesser erhalten werden können, die Anhaltspunkte für die Prognose gebildet haben, sowohl nach ihrer Ausdehnung über große Gebiete als auch mit zu Rate ziehen örtlich gesammelter Erfahrungen. Der Verf. sieht nun aber einen wesentlichen Fortschritt für die Prognosenstellung in der Ausdehnung dieser Grundlagen auf den atmosphärischen Raum, d. h. er will ganz besonders auch die Daten, welche die Drachenstationen, die Ballonfahrten, Höhenstationen usw. zu liefern vermögen, verwerten. Es dürfte wohl anzunehmen sein, daß allerdings durch solche Erweiterung die Prognosenstellung verschärft werden kann. L. Ambronn.

C. Dorno, Physik der Sonnen- und Himmelsstrahlung. Bd. 63 der Sammlung „Die Wissenschaft“. 126 S. m. 16 Figuren im Text u. auf Tafeln. Braunschweig, Friedr. Vieweg & Sohn. 1919. Geheftet M. 6.—, geb. M. 8.— (ohne Teuerungszuschlag).

Es ist mit Dank zu begrüßen, daß Herr Dorno selbst die Einführung in das von ihm mit so reichem Erfolge bearbeitete Forschungsgebiet übernimmt. Physikalische Vorkenntnisse sind in dem kleinen Buche nicht vorausgesetzt, selbst elementare Dinge werden, soweit es der Gegenstand fordert, beim Leser wieder aufgefrischt. Mathematische Darstellungen kommen nur andeutungsweise vor. Der Grundgedanke der Meßmethoden und Instrumente wird in jedem Falle zugleich mit ihrer Eigenart, ihren Mängeln und den daraus entspringenden Fehlerquellen dargelegt. Bei aller vom Verf. angewandten Sorgfalt, auch dem Neulinge den Weg zu ebnen, erfordert das Buch wegen seiner Vielseitigkeit natürlich ein stetiges Mitarbeiten des Lesers.

Den Anfang macht ein kurzes Kapitel über Beschaffenheit und Zusammensetzung der Atmosphäre. (Hier wäre auf Grund der neuen Untersuchungen von J. Stark über das Stickstoffspektrum des Nordlichtes das hypothetische Geocoronium zu streichen.)

Der Hauptteil des Werkes zerfällt in zwei nahe gleich große Abschnitte. Der erste beschäftigt sich mit der Strahlung der Sonne, der zweite mit der des Himmels. In jenem wird an der Bouguer-Lambertschen Formel die Weglänge eines Sonnenstrahls und der Transmissionskoeffizient erklärt. Hieran schließen sich die bolometrischen Untersuchungen Langleys und seiner Nachfolger am Sonnenspektrum, die Bestimmung der Solarkonstante und die Scheidung der Energieverluste der Sonnenstrahlung in der Atmosphäre, die von der trocknen Luft und dem Wasserdampf getrennt herrühren.

Die zur Messung der Gesamtenergie dienenden Pyrheliometer und die mit ihnen erhaltenen Ergebnisse werden hier besprochen, ebenso die photometrischen Methoden, die zu Helligkeitsbestimmungen dienen, wobei besonders der grundlegenden Arbeiten L. Webers gedacht wird. Mit großem Erfolge hat der Verf. die lichtelektrische Methode der Photometrie sowohl im sichtbaren Spektralbereiche (mittels Alkalimetallzellen), wie im ultravioletten (mittels Kadmiumzellen) angewandt und weiterentwickelt.

In dem Abschnitte „Himmelsstrahlung" nimmt wegen ihrer Bedeutung die Polarisation des Himmelslichtes einen größeren Raum ein. Bei der verhältnismäßig einfachen Beschaffenheit der Instrumente ist hier — entsprechend der von Busch und Jensen ausgegangenen Anregung — die Mitarbeit von Liebhabern möglich und erwünscht.

Auf die Besprechung des Wärmeaustausches durch Strahlung vom Himmel zur Erde und umgekehrt folgt die der Himmelshelligkeit, ein trotz seiner offensichtlichen praktischen Bedeutung arg vernachlässigtes Gebiet. Die Helligkeit des Sonnenlichts wird mit der von dem gesamten Himmel hervorgerufenen verglichen, die Ergebnisse sind, wie schon im vorigen Berichte angedeutet, für die einzelnen Spekralbereiche verschieden und besonders für das Ultraviolett merkwürdig. Hervorragend praktische Bedeutung haben die Ausführungen über die Beleuchtung durch die vereinigte Sonnen- und Himmelsstrahlung, über Ortshelligkeit, Vorderlicht und Unterlicht. Der enorme Unterschied im „Lichtklima" zwischen Hochgebirge und Tiefland ist wohl noch niemals so deutlich vor Augen geführt. Nicht nur der Physiker und Meteorologe, auch der Hygieniker und Biologe wird das Buch mit Nutzen lesen.

H. Geitel.

G. Kowalewski, Einführung in die Infinitesimalrechnung. (Aus Natur und Geisteswelt 197.) 8⁰. 100 S. m. 19 Fig. 3. Aufl. Leipzig, B. G. Teubner. 1919. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Die dritte Auflage dieses kleinen Buches zeigt gegenüber der zweiten eine Reihe von Änderungen, die zum Teil dazu dienen, das Buch auch den Lesern zugänglich zu machen, denen die exakte Schreibweise der reinen Mathematik nicht geläufig ist. In seiner knappen und präzisen Ausdrucksweise ermöglicht dieses Büchlein wie kein zweites dem Leser eine klare Erfassung der Grundprinzipien der Infinitesimalrechnung. Hervorgehoben zu werden verdient die neuartige Behandlung der Differentiation der Exponentialfunktion.

Dr. König.

M. Planck, Das Wesen des Lichts. Vortrag, geh. in der Hauptversammlung der Kaiser-Wilhelm-Gesellschaft am 28. Okt. 1919. 8⁰. 22 S. Berlin, Julius Springer. 1920. M. 1.60.

Planck läßt uns hier einen kurzen Rückblick tun auf den Weg, den die physikalische Forschung in ihrem Suchen nach dem Verständnis des Lichts gegangen ist. In vollendet künstlerischer Darstellung gibt er uns einen Überblick über den Wandel der Lichttheorien von Newton und von Huygens bis in die heutige Zeit mit dem Hinweis auf die wunderbaren neuen Erkenntnisse der letzten zwei Jahrzehnte, aber auch darauf, daß mit diesen neuen Erkenntnissen neue schwierige Fragen aufgetreten sind, die sich zurzeit noch immer auf das Verständnis der Energiequanten beziehen.

S. Valentiner.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Berlin Dr. Franz Weidert für Physik, Dr. Paul Schafheitlin für Mathematik und darstellende Geometrie und Dr. Gerngroß für Chemie und Technologie der Proteine, an der Universität Graz Dr. Alois Zinkl für anorganische Chemie.

Ernannt: Der a. o. Professor an der Universität Jena (während des Krieges in Straßburg) Dr. Hermann Matthes zum ord. Professor der Pharmazie an der Unisität Königsberg, die a. o. Professoren an der Technischen Hochschule München Dr. Max Dieckmann (Physik) und Dr. Kurt Braß (Technische Chemie) zu ord. Professoren an derselben Hochschule, der ord. Professor der Mathematik an der Universität Prag Dr. R. Weitzenböck in gleicher Eigenschaft an der Technischen Hochschule Graz, der Geheime Regierungsrat Professor Dr. Hans Geitel in Wolfenbüttel zum ord. Honorarprofessor der Physik an der Technischen Hochschule in Braunschweig.

Gestorben: Professor Dr. C. A. Laisant in Paris, Professor Dr. H. G. Zeuthen in Kopenhagen.

Gesuche.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 20. 15. Oktober 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 22 am 20. Oktober 1920.

INHALT:

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Dichtebestimmungen an Lösungen, nebst Bestimmung der Dichteunterschiede zwischen Wasser und Wasser mit Luft gesättigt.

Von O. E. Frivold.

Eine große Präzision bei Bestimmung der Dichte von Lösungen hat die Auftriebsmethode geleistet. So hat F. Kohlrausch[1]) mit dieser Methode eine Fehlergrenze von etwa 10^{-7} erreicht, indem er einen Aufhängungsdraht benutzte, der gut benetzbar war (platinierter und nachher ausgeglühter Draht) und in einem günstigen Temperaturintervall arbeitete. Man ist nämlich auf das Temperaturintervall beschränkt, in welchem der Auftrieb des Senkkörpers durch die Temperatur wenig beeinflußt wird. Für Glas als Senkkörper befindet sich dieses Temperaturintervall zwischen 5^0 und 8^0 C.

Vor kurzem haben A. Piccard und E. Cherbuliez[2]) die gleiche Genauigkeit bei Bestimmung der Dichteunterschiede an verdünnten Lösungen nach einer ganz anderen Methode erreicht. Eine Dichtebestimmung nach dieser Methode ist leicht und schnell ausführbar, und fordert eine verhältnismäßig einfache Apparatur. Um die erzielte Genauigkeit zu erreichen, wurde jedoch der ursprüngliche Apparat ziemlich lang gemacht, etwa 8 m. Er war deshalb nicht bequem aufstellbar und forderte eine ziemlich große Flüssigkeitsmenge für eine Dichtebestimmung. Es wurde deshalb ein Apparat gebaut, der die gleiche Genauigkeit aufwies, und eine solche Länge hatte, daß er in einem Laboratorium ohne Schwierigkeit aufstellbar war. Die experimentellen Erfahrungen, die mit diesem Apparat gemacht wurden, sind unten ausführlich angegeben. Der Apparat wurde verwendet, um den Dichteunterschied zwischen luftfreiem Wasser und Wasser bei Zimmertemperatur mit Luft gesättigt, zu bestimmen.

§ 1. Die Methode beruht auf dem Prinzip der kommunizierenden Röhren. Sind die beiden Schenkel zwei kommunizierender Röhren mit verschiedenen Flüssigkeiten von der Dichte d_1 und d_2 gefüllt, so ist das Verhältnis zwischen d_1 und d_2 umgekehrt proportional der entsprechenden Steighöhe. Mißt man die zwei Höhen, so kann man das Verhältnis zwischen den beiden Dichten bestimmen. Statt zwei Höhen direkt zu messen, verfahren Piccard und Cherbuliez folgendermaßen (s. Fig. 1):

Die zwei vertikal gestellten Glasröhren A und B stehen mittels zweier horizontalen Röhren in Verbindung miteinander. Mit Hilfe der zwei Hähne p_1 und p_2 kann man die Verbindungsröhren öffnen und schließen. Die zwei Schenkel stehen oben mittels zweier horizontalen Röhren mit den Gefäßen a_1 und a_2 in Verbindung. Wir nehmen an, daß die rechte Hälfte von a_2 bis p_2 von einer Flüssigkeit von der Dichte d_2, die linke Hälfte von a_1 bis p_2 von einer Flüssigkeit von der Dichte d_1 gefüllt ist.

1) F. Kohlrausch, Dichtebestimmungen an äußerst verdünnten Lösungen. Ann. d. Phys. u. Chemie **56**, 185, 1895.

2) A. Piccard et E. Cherbuliez, Le nombre de magnétons des sels cupriques en solution aqueuse. Archives des Sciences Physiques et Naturales **42**, 324, 1916; E. Cherbuliez, Über den Magnetisierungskoeffizienten von Cuprisalzen in sehr verdünnter Lösung. Diss. Zürich 1917.

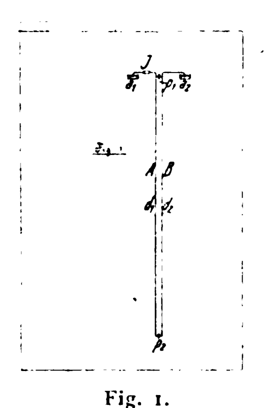


Fig. 1.

Wir setzen voraus, daß Gleichgewicht besteht, wenn p_1 offen und p_2 geschlossen ist. Schließt man dann den Hahn p_1 und öffnet den Hahn p_2, so stellt sich eine neue Gleichgewichtslage ein. Um eine Bewegung der Flüssigkeit zu verhindern, hebt oder senkt man z. B. das Gefäß a_2. Als Indikator für die Strömungslosigkeit der Flüssigkeiten wird das Piccardsche Mikromanometer *J* benutzt, dessen Wirkungsweise später angegeben werden soll.

Bezeichnet l den Höhenunterschied zwischen den zwei horizontalen Traversen und h die Verschiebung des Gefäßes, so hat man:

$$\frac{d_1}{d_2} = \frac{l+h}{l}, \quad \frac{d_1 - d_2}{d_2} = \frac{h}{l}. \qquad (1)$$

Der relative Dichteunterschied der zwei Flüssigkeiten ist also bestimmt, wenn man l und h gemessen hat.

Wir stellen uns die Aufgabe, relative Dichteunterschiede mit einer Genauigkeit von $\pm 10^{-7}$ zu messen, wenn l eine Länge von 2 m hat. Aus (1) ergibt sich dann $h = 2 \cdot 10^{-4}$ mm. So kleine Verschiebungen sind jedoch nicht leicht mit einer Mikrometerschraube zu messen. Entspricht eine ganze Umdrehung der Trommel einer Verschiebung der Schraube um 1 mm und ist die Trommel von ca. 30 mm Durchmesser in 100 Intervallen geteilt, so kann man höchstens Höhenunterschiede mit der Genauigkeit von 10^{-3} mm messen. Um größere Genauigkeit zu erreichen, kann man verschiedene Wege einschlagen.

Statt das Gefäß zu verschieben, kann man auf die Oberfläche einen Druck ausüben, z. B. mittels des magnetischen Feldes eines Solenoids. Ein einfacher Überschlag zeigt jedoch, daß man auf eine Lösung, mit einer Suszeptibilität von der Größenordnung von der des Wassers, kaum stärkere Druckwirkungen als 10^{-2} mm Wassersäule ausüben kann[1]). Da andererseits die Druckmessung auf eine Strommessung reduziert ist, kann man mittels dieser Methode beliebig kleine Druckkräfte messen. Es wurden einige Vorversuche gemacht mit zwei Spulen, welche aufeinander gestellt wurden, und welche das Gefäß a_1 in ihrer Mitte einschlossen (s. auch Fig. 2). Mittels Wasserkühlung wurde es möglich bis 100 Amp. Erregerstrom anzuwenden. Diese Kompensationsmethode hat übrigens den Nachteil, daß sie nicht absolute Druckmessungen mit großer Genauigkeit gestattet. Um solche Messungen ausführen zu können, muß man den Apparat mit Lösungen bekannter Dichte eichen. Die Schwierigkeit, den Druck direkt aus der beobachteten Stromstärke mit großer Genauigkeit zu berechnen, rührt davon her, daß das magnetische Feld in den Spulen nicht leicht genau berechenbar ist. Bei den endgültigen Messungen wurde deshalb nicht diese Kompensationsmethode benützt, sondern die Mikrometerschraube mit einem Zeiger verbunden. Darf man von dem Exzentrizitätsfehler und dem Schraubenfehler absehen, so kann man die Genauigkeit in dieser Weise genügend hoch steigern. Die Größe l kann man leicht mit einer Genauigkeit von 1 mm messen.

1) Mittels Nickellösungen würde man allerdings eine 10 mal so große Wirkung bekommen.

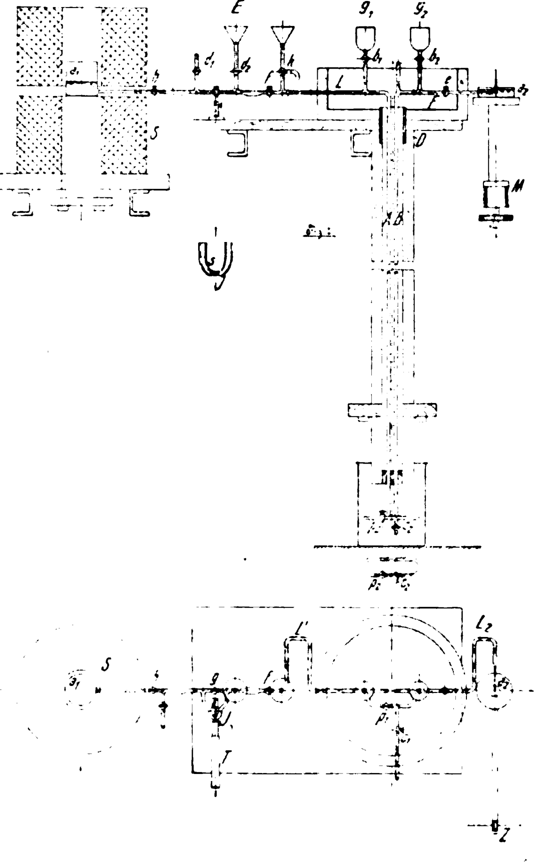


Fig. 2. (Maßstab 1 : 14.)

Ist der Abstand zwischen den Traversen 2 m, so ist diese Größe mit einer Genauigkeit von 0,5 Promille leicht meßbar.

§ 2. Die ganze Apparatur ist in Fig. 2 abgebildet. Die entsprechenden Teile in der schematischen Fig. 1 und in der mehr vollständigen Fig. 2 sind mit denselben Buchstaben versehen.

Wir fingen an mit der Beschreibung und Wirkungsweise des Piccardschen Mikromanometers, welches als Indikator für die Strömungslosigkeit der Flüssigkeit dient und ein wesentlicher Bestandteil des ganzen Apparates ist. Das Mikromanometer besteht aus einem umgebogenen Glasrohr S, das vorn bis zum Lumen plan abgeschliffen ist. Hier wird ein Dickgläschen mit Schellack befestigt. (Das Mikromanometer wurde bei J [Fig. 2] mit Hilfe eines Schlauches in das Röhrensystem eingeführt.) Befindet sich in dem Röhrchen eine Flüssigkeit mit suspendierten Teilchen, so sind diese mittels eines Mikroskopes T und einer passenden Beleuchtungseinrichtung erkennbar. Das Licht von einer elektrischen Lampe mußte erst eine Wasserschicht passieren (um Wärmestrahlen zurückzuhalten), wurde dann mittels einer Linse etwas kondensiert, und schließlich von dem Spiegel E auf die verengte Stelle des Mikromanometers s reflektiert. Die bei der Umbiegung des Glasrohres entstandene Verstärkung wirkt wie eine Linse und konzentriert das Licht auf die suspendierten Teilchen in der Flüssigkeit. Als trübe Flüssigkeit haben sich Stärketeilchen (in einer Schale mit ein wenig Jod eingerieben), in Wasser aufgelöst, gut bewährt. Die trübe Flüssigkeit wurde in den Trichter E eingefüllt und durch Öffnen der Hähne d_2 und d_1 in Zirkulation gebracht. Nachdem die Hähne geschlossen sind, halten sich die Stärketeilchen lange Zeit schwebend. Um die Empfindlichkeit des Mikromanometers möglichst weit zu erhöhen, muß der hydraulische Widerstand des Mikromanometers größer sein als derjenige des übrigen Systems. Man muß daher dafür sorgen, daß das System in andern Teilen möglichst kleinen hydraulischen Widerstand hat, und daß die Öffnung bei s eng und so kurz wie möglich ist.

Das Gefäß a_1 bis zum Hahn h war immer mit destilliertem Wasser gefüllt.

Das Füllen der Röhren A und B mit den betreffenden Flüssigkeiten geschah durch die Trichter g_1 und g_2. Die eine Flüssigkeit wurde bis p_1 und p_2 auf der einen Seite, bis f und k auf der andern Seite eingefüllt. Die rechte Hälfte bis p_1 und p_2 wurde mit der andern Flüssigkeit gefüllt. Damit die trübe Flüssigkeit sich nicht während eines Versuchs mit der Flüssigkeit in dem vertikalen Rohre A vermischte, war ein Labyrinth LL' zwischen A und f eingeschaltet. Auch weil die Verdampfung der Flüssigkeit in a_2 die Konzentration in B beeinflussen konnte, wurde ein Labyrinth L_2 zwischen a_2 und B eingesetzt. Die zwei Flüssigkeiten in A und B haben ihre Grenzflächen bei p_1 und p_2. Um zu verhindern, daß die zwei Flüssigkeiten schnell ineinander diffundieren, bestanden die Strecken rechts und links von p_1 und p_2 aus Kapillaren mit einer lichten Weite von ca. 2 mm auf einer Strecke von etwa 4 cm (zwischen dem Einfüllen der zwei Flüssigkeiten und den endgültigen Messungen sind die Hähne geschlossen). Die übrigen Röhren des Systems mit Ausnahme von den Labyrinthen haben eine lichte Weite von etwa 4 mm.

§ 3. Die Brauchbarkeit des Apparates hängt davon ab, ob es möglich ist, ihn genügend thermisch zu schützen. Es war nicht möglich, das System so vollständig zu isolieren, daß sich nicht einige Zeit nach Einstellung des Gleichgewichts mittels der Mikrometerschraube oder des Magnetfeldes eine Strömung in der Flüssigkeit gezeigt hätte. Ist es aber möglich, mittels thermischer Isolierung die Störungen bis zu einem gewissen Grade zu unterdrücken, so kann man systematische Fehler beseitigen, indem man gekreuzte Messungen ausführt.

Folgende Isolation erwies sich als genügend: Die zwei vertikalen Röhren A und B waren von einem weiteren Glasrohr umschlossen. Ein Messingrohr D wurde mit Siegellack an dem oberen Ende des Glasrohres befestigt. Das Zinkgefäß F wurde dann an dieses Messingrohr angelötet. Sowohl das lange Glasrohr wie das Zinkgefäß wurden mit Filz geschützt, das Glasrohr außerdem mit Baumwolle umwickelt. Auch die übrigen Teile wurden gut mit Baumwolle isoliert. Das lange Glasrohr und das Zinkgefäß wurden mit Wasser gefüllt und das Wasser mit einem Rührer in Zirkulation gesetzt. Die Vorversuche zeigten aber, daß die Zirkulation des Wassers nicht wesentlich die Störungen beseitigte. (Es ist auch leicht einzusehen, daß es nicht so sehr darauf ankommt, daß die Temperatur des ganzen Systems konstant ist, wie darauf, daß die Temperatur in gleichen Höhen gleich ist.) Der Rührer wurde deshalb bei den weiteren Messungen nicht benutzt. Auch war es nicht nötig, das Zinkgefäß mit Wasser zu füllen. Das Zinkgefäß wurde nur mit einem Deckel aus Pappe bedeckt und im übrigen mit Baumwolle geschützt. Es zeigte sich auch als hinreichend, den unteren Teil des Apparates mittels eines Behälters vor dem Luftzuge zu schützen.

Es soll noch auf einen Umstand hinge-



wiesen werden, welcher beim Ausprobieren der Anordnung viele Schwierigkeiten bereitete. Ist das Gleichgewicht mit der Mikrometerschraube hergestellt worden, während der Hahn p_1 oder p_2 geöffnet war, so darf dieses Gleichgewicht keinesfalls gestört werden, wenn man den betreffenden Hahn schließt und dann wieder öffnet. Sonst bekommt man einen Nebeneffekt, dessen Einwirkung auf die Messung nicht übersehbar ist. Der untere Hahn zeigte auch keine solche Wirkung, der obere Hahn dagegen eine ausgeprägte Pumpwirkung. Diese Wirkung rührt höchstwahrscheinlich davon her, daß die Bohrung des Hahns nicht gut zentriert war. Um systematisch den Fehler in dem neu angefertigten Apparat zu beseitigen, wurden von etwa 20 Hähnen die augenscheinlich 6 besten ausgelesen und in einem provisorisch aufgestellten Apparat untersucht. Der provisorische Apparat geht aus Fig. 1 hervor, wenn die zwei langen vertikalen Röhren beseitigt werden. Der Hahn, den man prüfen will, ist natürlich ausschaltbar. Mit diesem Apparat war es leicht, einen Hahn zu finden, der ohne merkbare Pumpwirkung funktionierte. Es sei noch bemerkt, daß der Hahn p_2 mit Hilfe einer Messingstange, die unten in einer Gabel endigte, in der Nähe des Mikroskops gehandhabt wurde. Auch der Hahn p_1 wurde mit Hilfe einer Gabel ähnlich wie der untere gedreht. Eine gute Messung hing auch davon ab, daß speziell die zwei Hähne p_1 und p_2 gut geschmiert waren und mit Gummibändern gut festgehalten wurden.

Ist das System erst mit einer Flüssigkeit gefüllt worden, und will man nachher zwei verschiedene Flüssigkeiten auf der rechten und linken Seite einfüllen, so spült man mit der betreffenden Flüssigkeit drei- bis viermal nach, indem man zwischen jeder Füllung ca. eine Viertelstunde wartet. Dieses Warten ist nötig, da das Anhaften der Flüssigkeit an den Wänden bei einer lichten Weite der Röhre von etwa 4 mm sich stark bemerkbar macht. Füllt man dreimal nach, bevor man die endliche Füllung macht, so braucht man ca. 200 ccm von jeder Flüssigkeit für eine Messung. Nach der letzten Füllung muß man mindestens eine Stunde warten bis man die Messung ausführen kann[1]).

§ 4. Wenn eine Messung ausgeführt werden soll, füllt man die trübe Flüssigkeit ein und öffnet die Hähne h, f und e. Man öffnet nachher vorsichtig den Hahn p_1 und stellt gleichzeitig mit der Mikrometerschraube M ein, bis die Stärketeilchen sich im Mikroskop nicht bewegen. Schließt man nachher den Hahn g, so wird die Empfindlichkeit des Mikromanometers erheblich größer, und man spürt daher im allgemeinen noch eine Bewegung der Stärketeilchen. Eine Feineinstellung der Mikrometerschraube beseitigt auch diese Bewegung.

Die Mikrometerschraube wird jetzt abgelesen. Diese Ablesung sei mit I bezeichnet. Der Hahn p_1 wird jetzt geschlossen und p_2 vorsichtig geöffnet. Gleichzeitig mit dem Öffnen des Hahnes p_2 wird mit Hilfe der Mikrometerschraube aufs neue kompensiert. Diese Ablesung ist in den Tabellen mit II bezeichnet. p_2 wird dann wieder geschlossen und p_1 geöffnet usw. Im Mittel kann man in dieser Weise eine Einstellung und Ablesung etwa im Laufe einer Minute ausführen.

§ 5. Die Eichung des Zeigers Z wurde in folgender Weise ausgeführt: Die Stellung des Zeigers wurde einmal abgelesen, wenn der Index der Mikrometerschraube auf einen Teilstrich der Trommel eingestellt war, und dann nachdem der Index auf einem benachbarten Teilstrich stand. Man liest eigentlich so den Tangens des Winkels ab. Bei genaueren Messungen kann der Tangens leicht auf den Bogen reduziert werden.

Einige Einstellungen ergaben folgendes Resultat:

Tabelle I.

Teilstrich, Trommel	84	86
Ablesung, Skala (cm)	3,38	6,62
	3,40	6,65
	3,40	6,66
	3,38	6,64
Mittel:	3,39	6,64

Im Mittel: 3,25 cm auf der Skala entsprachen $2 \cdot 10^{-3}$ cm auf der Trommel.

Daraus folgt: 1 cm auf der Skala entspricht $6{,}15 \cdot 10^{-4}$ cm Verschiebung der Schraube. Da man 0,2 mm gut abschätzen kann, ergibt ein einfacher Überschlag, daß die Ablesungseinrichtung eine Genauigkeit von etwa $5 \cdot 10^{-8}$ bei Bestimmung des relativen Dichteunterschiedes gestattet.

Um zu untersuchen, mit welcher Genauigkeit eine Messung reproduzierbar ist, wurden einige Versuche ausgeführt, bei welchen sich auf beiden Seiten destilliertes Wasser befand. Nach einer Messung wurde ein paarmal neu eingefüllt, dann eine neue Messung ausgeführt usw.

Tabelle II gibt die vollständige Beobachtungsreihe einer Messung wieder. Wie früher angegeben ist, beziehen sich die Ablesungen I auf den Fall, daß der obere Hahn (p_1) offen, der untere Hahn geschlossen ist, die Ablesungen II auf den umgekehrten Fall.

1) Damit die Flüssigkeiten in a_1 und a_2 die Wände gut benetzen, wurden die beiden Gefäße mit heißer Chromsäure gereinigt. Andernfalls konnten sich leicht kapillare Störungen ergeben.

Tabelle II.

											Mittel
I	5,43	5,60	5,86	5,97	6,20	6,34	6,53	6,71	6,85	7,13	6,262 cm
II	5,73	5,91	6,02	6,20	6,43	6,56	6,53	6,72	7,03		6,348 cm

$h = 0{,}086 \cdot 6{,}15 \cdot 10^{-4}$ cm
$= 5{,}29 \cdot 10^{-5}$ cm

Da $l = 198{,}3$ cm ist, wird

$$\frac{d_1 - d_2}{d_2} = +2{,}67 \cdot 10^{-7}.$$

Zwischen je zwei der folgenden Messungen wurde mindestens zweimal auf beiden Seiten mit destilliertem Wasser gespült. Eine Meßreihe hat folgende Resultate ergeben:

Tabelle III.

$\frac{d_1 - d_2}{d_2}$	
$+2{,}67 \cdot 10^{-7}$	
$+5{,}05$	Mittel: $+4{,}46 \cdot 10^{-7}$
$+2{,}48$	
$+8{,}37$	
$+3{,}72$	

Hieraus geht erstens hervor, daß d_2 immer kleiner als d_1 ist. Es liegt nahe, diesen systematischen Fehler folgendermaßen zu erklären: Bei früheren Versuchen, für welche der Apparat benutzt wurde, kam unvorausgesehen ein Niederschlag von einem Kalziumsalz vor. Trotzdem die Apparatur mehrmals mit Salpetersäure und zuletzt auch mit Chromsäure gereinigt wurde, war es nicht möglich, sowohl positive wie negative Werte für die Größe $d_1 - d_2$ zu bekommen, was zu erwarten wäre, falls keine systematischen Fehler mitspielten. Es ist daher anzunehmen, daß das Mittel $+4{,}46 \cdot 10^{-7}$ wirklich einen Dichteunterschied repräsentiert, der von minimalen Spuren eines Salzes herrührt, das sich allmählich auflöst. Die angegebenen Zahlen geben dann an, daß dieses Mittel mit einem mittleren Fehler von $\pm 1{,}08 \cdot 10^{-7}$ behaftet ist. Die zu erzielende Genauigkeit ist also erreicht. Der systematische Fehler kann übrigens durch gekreuzte Messungen eliminiert werden. Man verfährt einfach so, daß man einmal Messungen mit der einen Flüssigkeit in A und der anderen Flüssigkeit in B ausführt, dann wechselt und zuletzt Messungen ausführt, die der ursprünglichen Anordnung entsprechen.

Es soll noch kurz auf drei Korrekturen hingewiesen werden, die bei diesen Messungen nicht in Betracht kommen, die sich aber bei genaueren Messungen bemerkbar machen. Die eine Korrektur beruht darauf, daß die Temperatur in dem Gefäß a_2 im allgemeinen nicht die gleiche ist wie in den Röhren A, B. Die zwei anderen Korrekturen rühren davon her, daß der Luftdruck sich an der Oberfläche beim Heben oder Senken des Gefäßes a_2 ändert und daß die von dem in das Gefäß eintauchenden Rohr verdrängte Flüssigkeitsmenge beim Heben oder Senken sich verändert[1]).

§ 6. **Bestimmung der Dichteunterschiede zwischen luftfreiem Wasser und Wasser mit Luft bei Zimmertemperatur gesättigt.**

Die einzigen, die diese Größe bestimmt haben, sind soweit mir bekannt nur Marek[2]) und P. Chappuis[3]), und zwar hat Marek den Dichteunterschied bei einer Reihe von Temperaturen bestimmt in dem Intervall 0—20° C, Chappuis hat den Dichteunterschied in einem Gebiet bestimmt, wo diese Größe sehr wenig variiert (zwischen 5 und 8° C). Chappuis hat sowohl die Auftriebsmethode wie die Pyknometermethode benutzt und gibt als Resultat einer Reihe von Messungen folgendes an:

Pyknometermethode $+37 \cdot 10^{-7}$.
Auftriebsmethode $+24$ —
Mittel: $+30 \cdot 10^{-7}$. Zwischen 5 und 7°.

Das Mittel stimmt verhältnismäßig gut mit den Angaben von Marek überein, indem er den Wert $33 \cdot 10^{-7}$ bei 6° angibt. Die zwei Methoden, welche Chappuis benutzte, haben jedoch verhältnismäßig große Unterschiede der zu bestimmenden Größe ergeben, was zeigt, daß diese Untersuchungen große Anforderungen der Präzision erfordern.

Für diese Versuche wurden die zwei Flüssigkeiten folgendermaßen hergestellt: In einen großen Scheidetrichter wurde einmal destilliertes Wasser hineingetan und in einem Wasserbad von etwa 40° C unter vermindertem Druck eine Viertelstunde zum Kochen gebracht. Um zu verhindern, daß sich Luft in dem Wasser auflöste, nachdem der Pfropfen entfernt wurde, wurde augenblicklich nach dem Entfernen des Pfropfens reines Paraffinöl von einem andern Trichter auf die Oberfläche des Wassers gegossen. Das Paraffinöl war vorher mit Säure und Natronlauge gut geschüttelt und nachher 8—10 mal mit destilliertem Wasser ausgewaschen.

Der große Trichter wurde vom Wasserbad entfernt und ungefähr die Hälfte des Inhaltes

---

1) Näheres über diese Fehlerquellen l. c. Cherbuliez.
2) W. J. Marek, Ausdehnung des Wassers. Wied. Ann. **44**, 171, 1891.
3) P. Chappuis, Traveaux du Bureau des Poids et Mesures **14**, 1910.

in einen neuen Trichter hineingetan. In diesem Trichter wurde im Laufe von etwa 2 Stunden Luft hindurchgesaugt. Der Meßapparat wurde dann direkt aus den zwei Trichtern gefüllt. Um weiter zu verhindern, daß sich Luft in dem luftfreien Wasser auflöste, wurde die Oberfläche von g_1 und g_2 mit Parafinöl übergossen. Nur die Resultate der Messungen sind unten tabellarisch angegeben. Jedes Resultat geht von einer Beobachtungsreihe hervor, wie sie in Tabelle II angegeben ist. Für jede neue Messung wurden neue Lösungen hergestellt.

Tabelle IV.

Nr.	Zeit	$\frac{d_1 - d_2}{d_2} \cdot 10^7$	Temp. des H_2O während Sättigung mit Luft	Anmerkung
1	3./3.	+ 50,6	15,6°	Links luftfreies Wasser
				„ Wasser mit Luft gesättigt
2	4./3.	+ 6,95	15,7°	
3	5./3.	+ 38,8	15,5°	„ luftfreies Wasser
				„ Wasser mit Luft gesättigt
4	6./3.	— 6,2	15,6°	

Aus Tabelle IV geht hervor, daß der systematische Fehler sich noch mehr bemerkbar machte als früher (s. Tabelle III). Es läßt sich nach den Angaben in Tabelle IV leicht berechnen, welchen relativen Dichteunterschied man erwarten kann, wenn man auf beiden Seiten mit destilliertem Wasser füllt.

Es ergibt sich:

$$\frac{d_1 - d_2}{d_2} = + 25 \cdot 10^{-7}.$$

Um dies zu kontrollieren, wurden zuletzt zwei Messungen gemacht, indem auf beiden Seiten mit destilliertem Wasser gefüllt wurde. Die Resultate der Messungen waren beide Male genau die gleichen.

$$\frac{d_1 - d_2}{d_2} = + 21,6 \cdot 10^{-7}.$$

Die Messungen zeigen also, daß der systematische Fehler sich in noch höherem Grade als früher (Tabelle III) bemerkbar machte, und daß der von Tabelle IV berechnete Wert $+ 25 \cdot 10^{-7}$ verhältnismäßig gut mit den direkten Messungen stimmte.

Um den systematischen Fehler zu eliminieren, berechnet man den relativen Dichteunterschied zwischen luftfreiem Wasser und Wasser mit Luft gesättigt aus den drei ersten und aus den drei letzten Messungen (Tabelle IV).

Man bekommt für diese Größe resp.: $+ 18,88 \cdot 10^{-7}$ und $+ 19,21 \cdot 10^{-7}$. Mittel: $+ 19,04 \cdot 10^{-7}$ bei 15,6° C. Setzt man $d_2 = 0,999$, so bekommt man:

$$d_1 - d_2 = 19,02 \cdot 10^{-7} \text{ bei } 15,6^0 \text{ C.}$$

Durch Interpolation findet man nach den Messungen von Marek für dieselbe Temperatur den Wert $+ 20 \cdot 10^{-7}$. Die Übereinstimmung zwischen den zwei Meßresultaten ist, wenn man die Schwierigkeit dieser Messungen berücksichtigt, eine recht befriedigende.

Herrn Professor Dr. A. Piccard, der mich mit seinem wertvollen Rat unterstützte, spreche ich meinen besten Dank aus.

Zürich, Physikalisches Institut d. Eidgen. techn. Hochschule, 3. August 1920.

(Eingegangen 19. August 1920.)

Zerstreuung von Röntgenstrahlen.

Von Karl Herrmann.

In einer bekannten Arbeit[1]) hat Hr. Debye die Zerstreuung der Röntgenstrahlen auf die Interferenz von Röntgen-Lichtwellen zurückgeführt, hervorgerufen durch Elektronen, welche innerhalb des Atoms auf einem Kreisring in äquidistanten Abständen angeordnet sind. Von den Atomen wird angenommen, daß sie in der durchstrahlten Materie völlig regellos angeordnet sind. Wegen der sonstigen Annahmen und Voraussetzungen werde aus Gründen der Raumersparnis auf die Debyesche Originalarbeit verwiesen.

Es gelang Hrn. Debye unter Verwendung der gewöhnlichen elektromagnetischen Lichttheorie zu Ergebnissen zu kommen, welche die von mehreren Forschern[2]) beobachtete Unsymmetrie der zerstreuten Strahlung und auch die von Friedrich[3]) und anderen beschriebenen kreisförmig um das Zentrum der Primärstrahlung sich lagernden Interferenzfiguren wenigstens qualitativ deuten konnten. Auch zu quantitativen Folgerungen sind diese Interferenzringe dann später von Debye und Scherrer[4]) zur Ermittelung der Dimensionen des Benzolringes ausgenützt worden. Die sich daran anschließenden Untersuchungen derselben Forscher über Kristallstrukturen von pulverisiertem Material sind ausgiebig bekannt.

Bei seinen Überlegungen nimmt Debye

1) P. Debye, Zerstreuung von Röntgenstrahlen. Ann. d. Phys. **46**, 809, 1915.

2) Literatur vgl. Handb. d. Radioakt., **5**, 309 ff. sowie Pohl, Physik der Röntgenstrahlen, S. 58 ff.

3) Friedrich, diese Zeitschr. **14**, 317, 1913.

4) Debye und Scherrer, Nachr. d. K. Gesellsch. d. Wiss. Göttingen 1916.

nur eine völlig regellose Lagerung der Elektronenringe, kurz der Atome an. Man könnte sich nun die Frage vorlegen, welche Abänderungen der Betrachtungen und der zu erwartenden Effekte sich ergeben, wenn man annimmt, daß die Atome nicht völlig regellos angeordnet sind, sondern so gelagert sind, daß ihre Elektronenebenen alle parallel sind. In Kristallen ist eine solche oder ähnliche Anordnung der chemisch gleichen Atome wahrscheinlich. Aber auch bei amorphen Substanzen, bei denen also die Zentren der Elektronenkreise nicht gesetzmäßig geordnet sind, kann man sich eine solche Ordnung anfänglich völlig regellos orientierter Atome durch äußere Kräfte hervorgebracht denken. Wir wollen uns weiterhin nur mit solchen amorphen Substanzen beschäftigen, und denken bei den genannten Kräften einerseits an magnetische Felder, andererseits an mechanische Einwirkungen.

Das Bohrsche Atommodell, welches auch Debye bei seinen Überlegungen benutzt, und bei welchem die Elektronen sich in Rotation um den Kern befinden, ist als Ampèrescher Molekularstrom anzusprechen, wie dies schon früher getan ist, und muß unter der Einwirkung magnetischer Felder eine Richtwirkung erfahren, so daß die Elektronenebene danach strebt, sich senkrecht zu den Kraftlinien einzustellen. Für unsere Betrachtungen wird es gleichgültig sein, ob man annimmt, daß das Atom sich gleichzeitig mit dem Elektronenring dreht oder diesen als beweglich im Atom annimmt. Wir wollen uns aber denken, daß es möglich wäre, alle Elektronenringe durch die Magnetisierung zu parallelisieren. Die Ebenen werden dann, je nachdem man die Feldrichtung parallel dem Röntgenstrahl oder senkrecht dazu orientiert, entweder senkrecht oder parallel zum Röntgenstrahl liegen.

Auch durch äußere Kräfte kann man sich derartig richtende Wirkungen hervorgebracht denken, etwa durch Hämmern, Walzen, Pressen. Möglich, daß auch schon beim Erstarren amorpher Substanzen Schichtungen erfolgen. Man wird keine allzu große Kühnheit begehen, wenn man annimmt, daß unter der Einwirkung mechanischer Kräfte, die von den Nachbaratomen übertragen werden, die Atome sich nicht allseitig gleich verhalten, sondern gewisse parallele Lagen bevorzugen werden, etwa wie Linsen, die aufeinander geschüttet sind. Wirkungen des äußeren Druckes, wie etwa künstliche Doppelbrechung, sind ja zahlreich bekannt. Auch Friedrich hat in seinen Untersuchungen Veränderungen des beobachteten Effektes bei äußerem Druck gefunden, und wir werden sehen, daß eine Deutung in dem angedeuteten Sinne möglich ist.

Unter der Annahme unpolarisierten, parallel der x-Achse laufenden Röntgenlichtes findet Debye für das Verhältnis der von einem Elektronensystem zerstreuten zur einfallenden Intensität (Debye, Gleichung 7)

$$V = \frac{\varepsilon^4}{\mu^2 c^4} \frac{1 + \cos^2 \vartheta}{2} \frac{1}{R^2} \cdot \qquad (1)$$

$$\sum \sum e^{ik[(\alpha-1)(x_n - x_m) + \beta(y_n - y_m) + \gamma(z_n - z_m)]}.$$

Hierin bedeutet:

ϑ den Winkel zwischen Beobachtungsrichtung und Einfallsrichtung,

α, β, γ die Richtungskosinus der Beobachtungsrichtung, so daß $\alpha = \cos \vartheta$,

R die Entfernung des Aufpunktes vom Zerstreuer,

$k = \frac{\omega}{c}$, wo ω die Frequenz der Röntgenwelle ist,

$x_n\, y_n\, z_n$ die Koordinaten des n-ten, $x_m\, y_m\, z_m$ die des m-ten Elektrons,

ε, μ, c sind die bekannten Konstanten.

Debye errechnet nun weiter die Zerstreuung durch sehr viele Moleküle mit Elektronenringen, indem er für ein Atom den Mittelwert der von diesem zerstreuten Intensität mit Rücksicht auf alle möglichen Orientierungen bildet und dann diesen Mittelwert mit der Zahl N sämtlicher von dem Primärstrahl getroffenen Atome multipliziert. Wir bilden den Mittelwert nicht über alle möglichen Orientierungen des Elektronenringes, sondern zunächst nur für den Fall, daß das Elektronenpolygon in einer zu einer Koordinatenachse senkrechten Ebene jede beliebige Orientierung haben kann, und verfahren dabei analog wie Debye.

Der Exponent der Doppelsumme werde in zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zerlegt, so daß

$$\mathfrak{A} = (\alpha - 1)i + \beta j + \gamma k \qquad (2)$$

$$\mathfrak{B} = (x_n - x_m)i + (y_n - y_m)j + (z_n - z_m)k. \qquad (3)$$

Der Vektor $\mathfrak{A}$ steht mit der Beobachtungsrichtung in gewissen Beziehungen. Wir bezeichnen mit ψ den Winkel, den der Vektor $\mathfrak{A}$ mit der Elektronenebene bildet, mit λ, μ, ν die Winkel, die $\mathfrak{A}$ mit den Koordinatenachsen einschließt. Orientieren wir nun speziell das Elektronenpolygon einmal senkrecht zur x-Achse (Fall 1), ein zweites Mal senkrecht zur y-Achse (Fall 2) und ein drittes Mal senkrecht zur z-Achse (Fall 3), so sind innerhalb der Ebenen, in denen zu bleiben der Elektronenring nach unserer Annahme nun gezwungen ist, noch beliebige Orientierungen möglich, die dadurch charakterisiert sind, daß irgendein mit dem

Elektronenpolygon fest verbundener Vektor, der in der betreffenden Ebene liegt, ein beliebiges Azimut mit einer beliebig gewählten o-Achse einschließen kann. Als solche Nullachse wählen wir die Spur des Vektors $\mathfrak{A}$ und rechnen von da ab das Azimut φ des genannten Vektors, den wir natürlich mit dem Vektor $\mathfrak{B}$ identifizieren. Dann bilden die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, wie bei Debye, den Winkel Θ miteinander, und nach dem Lehrsatz vom rechtwinkligen sphärischen Dreieck, in dem Θ die Hypotenuse ist, folgt:

$$\cos\Theta = \cos\psi \cdot \cos\varphi. \tag{4}$$

Es ist ersichtlich, daß der Winkel ψ in den drei spezialisierten Fällen jeweils das Komplement zu λ, bzw. μ, bzw. ν ist.

Für die Winkel λ, μ, ν ergibt sich aus ihrer Definition:

$$\cos\lambda = \frac{\mathfrak{A}_x}{\mathfrak{A}} = \frac{\alpha - 1}{\sqrt{(\alpha-1)^2+\beta^2+\gamma^2}} = \tag{5}$$

$$= \frac{\alpha - 1}{\sqrt{2(1-\alpha)}} = \sqrt{\frac{1-\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\vartheta}{2}},$$

so daß:

$$\lambda = \frac{\pi - \vartheta}{2}$$

folgt. Ferner

$$\cos\mu = \frac{\beta}{\sqrt{2(1-\alpha)}}, \quad \cos\nu = \frac{\gamma}{\sqrt{2(1-\alpha)}}.$$

Ehe wir jetzt weitere Spezialisierungen bezüglich der Beobachtungsrichtung einführen, bilden wir den Mittelwert über den Exponenten der Gleichung (1), der sich nach dem Vorgang von Debye auch schreiben läßt:

$$V = \frac{\varepsilon^4}{\mu^2 c^4} \cdot \frac{1}{R^2} \cdot \frac{1+\cos^2\vartheta}{2} \sum\sum e^{ik(\mathfrak{A}\mathfrak{B})}. \tag{6}$$

Da der Ausdruck in der eckigen Klammer gleich dem skalaren Produkt der oben definierten Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist, so folgt:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = A \cdot B \cdot \cos\Theta$$
$$= A \cdot B \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi. \tag{7}$$

Der Mittelwert ist nun nicht, wie bei Debye, über alle räumlichen Lagen des Vektors $\mathfrak{B}$ zu errechnen, sondern nur über die Lagen, die durch Drehung des Vektors $\mathfrak{B}$ in der jeweiligen Ebene zwischen den Winkeln $\varphi = 0$ und $\varphi = \pi$ und wieder zurück bestimmt sind. Das kommt auf die Auswertung des bestimmten Integrals heraus:

$$\frac{1}{\pi} \cdot \int_0^\pi e^{ikA\cdot B\cos\psi\cos\varphi}\, d\varphi, \tag{8}$$

dessen Wert gleich der Besselschen Funktion nullter Ordnung ist:

$$J_0(k \cdot A \cdot B \cdot \cos\psi) \tag{9}$$

Auch hierin ist, wie bei Debye:

$$A = 2\sin\frac{\vartheta}{2} \tag{10}$$

$$B = 2a \cdot \sin\left(\frac{n-m}{p}\pi\right), \tag{11}$$

worin a der Umkreisradius des Elektronenpolygons und p die Anzahl der Elektronen bedeuten. Mit diesen Bedeutungen folgt für den Mittelwert:

$$J_0\left(4ka\sin\left(\frac{n-m}{p}\pi\right) \cdot \sin\frac{\vartheta}{2} \cdot \cos\psi\right). \tag{12}$$

„In einer Richtung, welche mit der Einfallsrichtung der primären Strahlen den Winkel ϑ bildet, beobachtet man also im Abstande R vom Körper den Bruchteil":

$$V = \frac{N\varepsilon^4}{\mu^2 c^4} \cdot \frac{1}{R^2} \frac{1+\cos^2\vartheta}{2} \cdot \tag{13}$$
$$\cdot \sum_n \sum_m J_0\left(4ka\sin\left(\frac{n-m}{p}\Pi\right) \cdot \sin\frac{\vartheta}{2}\cos\psi\right).$$

Spezialisierungen für die Beobachtungsrichtung, d. h. ϑ und ψ, werden wir alsbald einführen, zunächst aber verfahren wir wie Debye und setzen:

$$4ka\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\psi = \varrho \tag{14}$$

und bilden uns Hilfsfunktionen Ψ_p, die durch die Gleichungen definiert sind:

$$\Psi_p(\varrho) = \frac{1}{p} \sum_{n=0}^{n=p-1} J_0\left(\varrho \cdot \sin\frac{n\Pi}{p}\right) \tag{15}$$

z. B.

$$\Psi_2(\varrho) = \frac{1}{2}(1 + J_0(\varrho)), \tag{16}$$

$$\Psi_3(\varrho) = \frac{1}{3}\left(1 + 2J_0\left(\frac{\varrho}{2}\sqrt{3}\right)\right), \tag{17}$$

$$\Psi_4(\varrho) = \frac{1}{4}\left\{1 + J_0(\varrho) + 2J\left(\frac{\varrho}{2}\sqrt{2}\right)\right\} \tag{18}$$

und so fort. Diese Funktionen sind in Fig. 1 abgebildet. In die Figur ist ferner noch aufgenommen die Funktion $\Psi_\infty(\varrho)$, d. h. dieselbe Funktion unter der Annahme von Ringen, die mit sehr vielen Elektronen besetzt sind. Zur Erreichung beschreiten wir einen analogen Weg, wie Debye, setzen, da für $p >> 1$ die Größe $\frac{\pi}{p}$ sehr klein wird,

$$\Psi_{p\infty}(\varrho) = \frac{1}{\pi} \sum_0^{p-1} J_0\left(\varrho\sin\frac{n\pi}{p}\right) \cdot \frac{\pi}{p}, \tag{19}$$

betrachten beim Grenzübergang zu $p = \infty$ die Größe $\frac{n\pi}{p}$ als stetige Variable u, ferner $\frac{\pi}{p}$ als Differential du und finden:

$$\Psi_{\infty}(\varrho) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} J_0(\varrho \sin u)\, du. \qquad (20)$$

Der Betrag dieses bestimmten Integrals[1]) ist:

$$\Psi_{\infty}(\varrho) = J_0^2\left(\frac{\varrho}{2}\right). \qquad (21)$$

Mit Hilfe dieser Funktionen Ψ_p läßt sich nun V errechnen, indem man den Wert für φ einsetzt, der sich bei wachsendem ϑ und bei verschiedenem ka ergibt.

Betrachten wir zunächst den Fall 1, in welchem die Elektronenebene senkrecht zur x-Achse steht. Dann herrscht um die x-Achse, d. h. die Einfallsrichtung der Röntgenstrahlen, vollkommene Symmetrie. Es ist:

$$\sphericalangle \psi = \frac{\pi}{2} - \lambda = \frac{\vartheta}{2}$$

und für diesen Fall folgt:

$$V^x = C \cdot \frac{1+\cos^2\vartheta}{2} \cdot p^2 \cdot \Psi_p\left(4ka \sin\frac{\vartheta}{2} \cdot \cos\frac{\vartheta}{2}\right), \qquad (I)$$

wenn wir für $\frac{N}{R^2} \cdot \frac{\varepsilon^4}{\mu^2 c^4}$ die Größe C einführen[2]).

Die Stellen gleicher Intensität sind also symmetrisch um die x-Achse verteilt, jedoch in anderem Betrage wie bei Debye, was durch den Unterschied der Funktion $\Psi_{(\varrho)}$ und der Debyeschen Funktion Φ_p bedingt ist.

Im Falle 2, d. h. Elektronenebene $\perp$ zur y-Achse, wollen wir die Beschränkung einführen, daß wir entweder a) nur in der xy-Ebene oder nur b) in der xz-Ebene beobachten. Im Falle 2a ist:

$$\lambda + \mu = \frac{\pi}{2}$$

oder

$$\mu = \frac{\pi}{2} - \lambda,$$

und da

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \mu$$

ist, so folgt:

$$\psi = \lambda = \frac{\pi - \vartheta}{2}.$$

Es tritt also an Stelle des $\cos\frac{\vartheta}{2}$ der $\sin\frac{\vartheta}{2}$ in die Funktionen Ψ_p ein, so daß:

$$V_a^y = C\,\frac{1+\cos^2\vartheta}{2} \cdot p^2 \cdot \Psi_p\left(4ka \cdot \sin^2\frac{\vartheta}{2}\right). \qquad (IIa)$$

Im Falle 2b ist μ konstant immer gleich $\frac{\pi}{2}$, der Vektor $\mathfrak{A}$ liegt in der Elektronenebene, und es folgt:

$$\psi = 0 \quad \text{d. h.} \quad \cos\psi = 1.$$

Also wird für diesen Fall:

$$V_b^y = C\,\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}\,p^2 \cdot \Psi_p\left(4ka \sin\frac{\vartheta}{2}\right). \qquad (IIb)$$

Die Fälle 3a und 3b brauchen wir nicht zu erörtern, da sie ganz ersichtlich den Fällen 2b bzw. 2a entsprechen.

Es ist also nun die Abhängigkeit von V vom Winkel ϑ zu untersuchen, den wir von 0 bis 180° beiderseitig wachsen lassen wollen. Die Abhängigkeit ist aber außer von dem gemeinsamen Faktor $\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}$ noch von den Funktionen Ψ_p bedingt, und damit von den verschiedenen Argumenten dieser Funktionen. Dabei spielt der Faktor $4ka$ eine erhebliche Rolle, und wir wollen, ehe wir die verschiedenen V mit Hilfe der Funktionen Ψ_p konstruieren, uns über diesen Einfluß, sowie über das allgemeine Verhältnis der V bzw. der Ψ_p zueinander Rechenschaft geben.

Um mit dem letzteren anzufangen, so sieht man aus der Fig. 1, daß schon von Ψ_3 an der

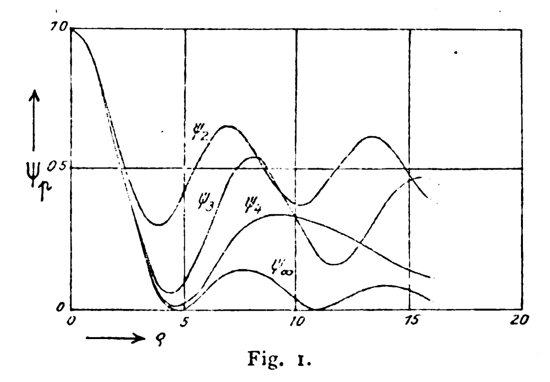


Fig. 1.

Verlauf der Funktionen mit höherem p anfänglich für ein beträchtliches Stück der gleiche ist. Die Funktionen Ψ_4 und Ψ_{∞} sind bis zum Werte 4 des Arguments absolut identisch, und offenbar gilt dasselbe für alle Werte von $p > 4$. Die Werte des Arguments bewegen sich nun zwischen den Größen 0 und $4ka$, da die Sinusfunktionen zwischen 0 und 1 liegen. Während nun — abgesehen von der Intensitätssymmetrie rechts und links vom Primärstrahl — in allen drei V der Faktor $\frac{1+\cos^2\vartheta}{2}$ eine weitere Symmetrie um die beiderseitige Richtung 90° verursacht, wird diese Symmetrie nur bei V^x durch den hinzukommenden Faktor Ψ_p nicht gestört. Denn hier enthält das Argument den

1) Vgl. Enzyklopädie der Math. Wissensch. Bd. II, Teil 1, S. 756 und C. Neumann, Bess. F. S. 70.

2) Über das Hinzukommen des Faktors p^2, der für unsere Zwecke belanglos ist, vgl. Debye l. c.

Faktor $\sin\vartheta$, und somit hat die Funktion Ψ_p rechts und links von der Richtung 90^0 dieselben Werte, der Verlauf von V^x ist also symmetrisch sowohl zur Primärstrahlrichtung, wie in der dazu senkrechten Richtung. Anders bei V_a^y und V_b^y, denn bei diesen enthalten die Funktionen Ψ_p die Argumente $\sin^2\frac{\vartheta}{2}$ und $\sin\frac{\vartheta}{2}$, und deren Werte sind nicht symmetrisch zu $\vartheta = 90^0$. Hieraus geht hervor, daß — mindestens bis zum Werte von $4ka = 4$ — die Funktionen V^x, V_a^y und V_b^y verschieden verlaufen müssen, und, ohne diese Überlegung weiter auszuführen, fügen wir hinzu, daß das Gleiche offenbar auch für Werte von $4ka > 4$ gilt, wenngleich dann, wie aus dem Kurvenverlauf der Fig. 1 zu ersehen ist, sich dem Verlauf von V Schwankungen aufprägen werden, entsprechend denjenigen, welche Debye zur Deutung der Friedrichschen Interferenzen und zur Ausmessung des Benzolringes herangezogen hat.

Wie groß nun die Verschiedenheiten für die verschiedenen V, also die drei in Betracht gezogenen Lagen der parallelen Atomebenen sind, das hängt von der Größe von $4ka$ ab, die wir jetzt einer kurzen Betrachtung unterziehen wollen.

Es folgt aus der Definition von k:

$$ka = \frac{\omega}{c}\cdot a = \frac{2\pi a}{\lambda}, \qquad (22)$$

wenn λ die Wellenlänge der primären Röntgenstrahlung ist. Wir entwerfen, um über die Größe von $4ka$ eine Übersicht zu bekommen, eine kleine Tabelle, indem wir zwei Elektronenkreise zugrunde legen; einen mit dem Radius $1\cdot 10^{-9}$ cm und einen mit dem Radius $1,25\cdot 10^{-9}$ cm[1]), und die K_α-Wellenlängen verschiedener Elemente berücksichtigen.

Element	$\lambda K\alpha$	$4ka$ für $a = 1\cdot 10^{-9}$	$4ka$ für $a = 1,25\cdot 10^{-9}$
Na	$11,95 \cdot 10^{-8}$	0,21	0,26
Cu	$1,543 \cdot 10^{-8}$	1,63	2,03
Mo	$0,710 \cdot 10^{-8}$	3,54	4,42
Ag	$0,562 \cdot 10^{-8}$	4,46	5,53
W	$0,21 \cdot 10^{-8}$	11,80	14,76

Offenbar folgt aus der obigen Beziehung, daß $4ka$ stärker von λ als von a abhängig ist.

Wir diskutieren zunächst den Verlauf der Funktionen V für Werte von $4ka < 4$, und zeichnen in den Figuren 2 und 3 den Verlauf für die Werte $4ka = 1$ und $4ka = 4$, und zwar unter Benutzung von Ψ_∞.

1) Vgl. Debye l. c. S. 823.

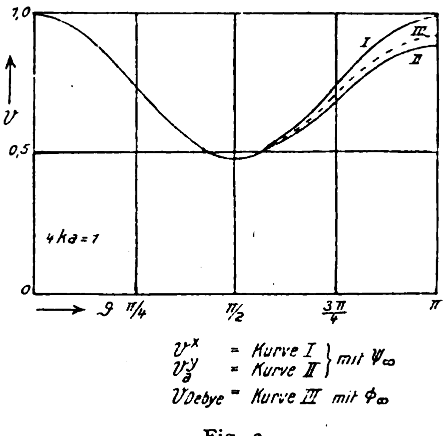


Fig. 2.

Wie Fig. 2 zeigt, schließt sich Kurve V_a^y bis $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ eng an die Kurve V^x an. Die Unsymmetrie der ersteren und die Symmetrie der letzteren sind deutlich sichtbar. Die Kurve für V_b^y ist nicht ganz identisch mit Kurve V_a^y, verläuft jedoch so eng in deren Nähe, daß sie nicht mit eingezeichnet ist.

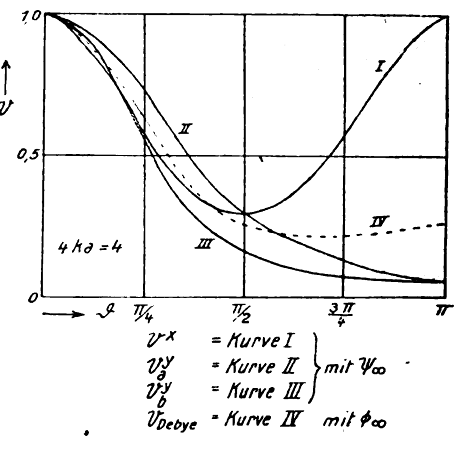


Fig. 3.

Aus Fig. 3 ist ersichtlich, daß für den größeren Wert $4ka = 4$ die Kurven bei weitem mehr auseinander streben, und daß es bei verschiedener Orientierung des Streuers wohl möglich wäre, diese Unterschiede nachzuweisen, besonders für Winkel $> 90^0$, d. h. auf der Einfallsseite der Strahlung.

Der Vergleich beider Figuren zeigt, daß die Größe eines zu erwartenden Effektes von der Wahl des Streuers einerseits, von dem der Elektronenringradius a abhängt, bedingt wird, und andererseits von der Wellenlänge des benutzten Röntgenlichtes, welche für den Faktor k maßgebend ist. Trifft man die Wahl so,

daß das Produkt beider in der Nähe von 0,25 und darunter zu liegen kommt, so kann man kaum erwarten, einen Effekt nachzuweisen.

Als den zu erwartenden Effekt werden wir es bezeichnen, wenn die Zerstreuung eines Körpers, der anfänglich in unmagnetischem Zustande untersucht wurde, bei Erregung eines Magnetfeldes sich ändert. Über die zu erwartende Größe des Effektes gibt uns ein Vergleich unserer Kurven mit den Debyeschen Aufschluß. Dies ist in den Figuren 2 und 3 geschehen, in welchen die gestrichelte Linie den Wert von V nach Debye für völlig regellos verteilte Elektronenringe angibt. Dabei ist die Debyesche Funktion $\Phi_\infty(\varrho)$ benutzt, wegen der Analogie mit $\Psi_\infty(\varrho)$.

Wie man sieht, fällt in Fig. 2 die Debyesche Kurve bis über $\frac{\pi}{2}$ hinaus völlig mit den Kurven für V^x und V_a^y zusammen, und trennt sich nur am Ende bei großen Beobachtungswinkeln spärlich von ihnen. Anders in Fig. 3, wo die Trennung ganz wesentlich ist.

In der Literatur finde ich eine Notiz von Crowther[1]), die sich mit dem Ergebnis der Untersuchung von Streuern in einem magnetischen Felde bis 2500 Gauß beschäftigt. Dieses Ergebnis ist negativ, aber im Schlußsatz läßt Crowther die Möglichkeit offen, daß bei subtilerer Beobachtung sich doch ein Effekt ergebe. Crowther gibt nun nichts an über die Natur des verwendeten Strahlers, auch nichts über die Richtung des Magnetfeldes, und, was im Jahre 1911 erklärlich ist, über die Natur seines Röntgenstrahles. Nehmen wir also an, was nach dem Aufbau Crowthers nicht unwahrscheinlich ist, daß das Magnetfeld senkrecht zu dem Röntgenstrahl gerichtet war, so hätten wir unseren Fall 2 vor uns und, da vermutlich in der Horizontalebene beobachtet wurde, den Fall 2a. In beiden Figuren 2 und 3 schließt sich nun die Debyesche Kurve, die dem nicht erregten Magnetfeld entspricht, am engsten der Kurve V_a^y an, die für das erregte Magnetfeld heranzuziehen ist. Hat Crowther, worüber wir nichts sagen können, Objekt des Streuers und Röntgenröhre so gewählt, daß zufällig $4ka$ ungefähr gleich 1 wird, so kann man keinen nachweisbaren Effekt erwarten. Aber auch wenn die zufällige Wahl die Größe 1 von $4ka$ nicht nach sich zöge, so ist zu bedenken, daß abgesehen von der möglichen, ganz erheblichen Steigerung des Magnetfeldes, die Erfüllung der Voraussetzung der Parallelisierung aller Elektronenringe bei beliebigen Streuern fraglich ist. Es ist sogar die Frage, ob man bei Eisen im Zustande der Sättigung diese Annahme machen kann, worüber wir uns aber nicht weiter auslassen wollen. Ist nun nur ein Bruchteil aller vorhandenen Atome gerichtet, dann muß man den Abstand zwischen den beiden Kurven noch teilen, und der zu erwartende Effekt wird im gleichen Maße schwächer.

Trotzdem kann man der Meinung Crowthers folgen, daß es bei subtilerer Beobachtung möglich ist, einen solchen Effekt zu erhalten. Nach dem heutigen, erheblich reiferen Zustand unserer Kenntnisse gehört aber dazu, daß die Wellenlänge der Röntgenstrahlen genügend klein und möglichst sogar monochromatisch ist, sowie die anderen, aus dem Erörterten hervorgehenden Erfordernisse (betr. Magnetfeld, Beobachtungsrichtung usw.). Alsdann aber wären derartige Beobachtungen, wenn sich ein Effekt ergäbe, an der Hand der hier angedeuteten Überlegungen imstande, Aufschlüsse über den Bau, die Größe und die Elektronenanordnung im Inneren des Atoms zu geben, was Herr Debye in seiner grundlegenden Arbeit schon an den Friedrichschen Interferenzringen andeutet. Vor allem würde dazu die jetzt stark interessierende Frage gehören, ob man weiter mit Elektronenringen oder anderen Anordnungen[1]) zu rechnen hätte. Doch sollen diese Gedanken hier nicht weiter verfolgt werden.

Für große $4ka$, d. h. große Ringradien und kleine Wellenlängen kommen wir in das Gebiet, wo sich über den gleichmäßigen Intensitätsverlauf Erhebungen überlagern. Bei völliger Unordnung der Moleküle müssen sich dann Interferenzringe ergeben, wie sie Friedrich[2]) an Wachs und Paraffin beobachtet hat. Zur Verdeutlichung des Unterschiedes der hier getroffenen Annahmen gegenüber der völliger Unordnung mögen die Figuren 4 und 5 dienen, erstere für einen Ring mit 4 Elektronen ($p = 4$) und $4ka = 20$, letztere — um Anschluß an die Figur 2 von Debye[3]) zu gewinnen — für $p = 2$ und $4ka = 40$. Wir beschränken uns dabei auf die Rückseite der Streustrahlung, d. h. $\vartheta < \frac{\pi}{2}$. Wie man sieht, fallen die Kurven sehr verschieden aus, und das gilt natürlich auch von den zu erwartenden Ringen auf der photographischen Platte. Es ist aber ersichtlich, daß das ursprüngliche Maximum — in Figur 4 bei etwa 55°, in Figur 5 bei etwa 25° — sich bei den verschiedenen parallelen Orientierungen nach

1) Crowther, Proc. of the Cambr. Phil. Soc. **16**, 188, 1911.

1) Vgl. Born, Verh. d. D. phys. Ges. **20**, 230, 1919 sowie die Arbeiten von Landé in der Zeitschr. f. Physik.
2) Friedrich, diese Zeitschr. **14**, 317, 1913.
3) Vgl. Debye, l. c. S. 822.

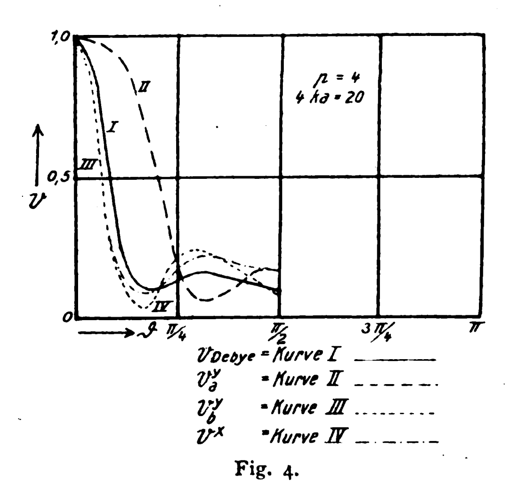


Fig. 4.

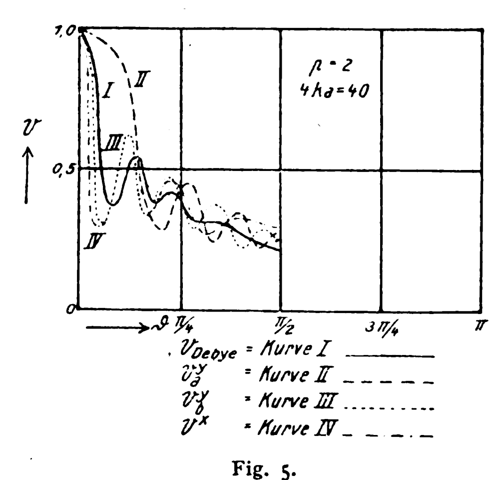


Fig. 5.

rechts und links verschiebt, bei Figur 5 kann man sogar das Wandern der 3 Maxima verfolgen. Der Radius eines solchen Interferenzkreises wird also größer bzw. kleiner werden, wenn man durch irgendein Mittel die Bahnen der Elektronenringe parallel stellen könnte.

Herr Friedrich berichtet nun in seiner Arbeit über die Erscheinung, daß bei einem Wachsstückchen durch Druck eine Veränderung des Interferenzringes hervorgerufen wurde, derart, daß nur zwei Quadranten des Ringes übrigblieben, die beiden anderen, und zwar senkrecht zur Druckrichtung, verschwanden. Es wird gestattet sein, eine Parallelisierung der Moleküle, durch den Druck verursacht, anzunehmen, nur kann man nicht angeben, in welcher Richtung sich dabei die Ebenen der Wasserstoffatome lagern werden, denn — infolge seines großen Radius — Herr Debye in erster Linie die Verursachung der Interferenzringe zuschiebt. Denn über den räumlichen Bau der komplizierten Wachs- und Paraffinatome kann man zurzeit noch nichts sagen.

Nehmen wir deshalb willkürlich an, die Bahnen der die Interferenz verursachenden Elektronen seien durch den Druck senkrecht zur y-Achse gerichtet worden, dann haben wir den Fall 2 vor uns, und es kommen die Kurven V_a^y und V_b^y in Frage. Man sieht dann aus Figur 5, die natürlich nur als Paradigma gelten kann, da über a und λ keine sicheren Voraussetzungen angegeben werden können, folgendes. Das ursprünglich bei 25^0 befindliche Maximum rückt für Beobachtung in der xy-Ebene zu weit größeren Winkeln, etwa 50^0, für Beobachtung in der xz-Ebene ein wenig zu kleineren Winkeln, etwa 22^0. Man kann sich also wohl Fälle — je nach Wahl von a und λ, sowie auch p — denken, bei denen für je zwei Quadranten ein so weites Hinausrücken stattfindet, daß dies einem Verschwinden von der räumlich begrenzten photographischen Platte gleichkommt, während an den anderen Quadranten eine Verkleinerung des Radius kaum zu bemerken ist. So könnte man versuchen, die von Friedrich beobachtete Erscheinung zu erklären. (Für die Verbindung mit der Figur 5 müßte man dann aber, um mit dem Richtungssinn des Verschwindens im Einklang zu bleiben, eine Einstellung der Elektronenebenen senkrecht zur z-Achse annehmen.) — Im Einklang mit diesen Deutungsversuchen steht die Angabe Friedrichs, daß ein großer Einfluß der Zusammensetzung der Primärstrahlung sich geltend mache. Denn eine Veränderung der Wellenlänge zieht, wie schon mehrfach betont, eine Veränderung der Größe k nach sich, wodurch die Funktionen Ψ_p und Φ_p in ganz anderer Weise beansprucht werden, und somit die V-Kurven in jedem Falle erheblich variieren.

Diesen Betrachtungen liegt aber eine Annahme zugrunde, die sicher nicht erfüllt ist, nämlich die, daß sämtliche Elektronenringe sich parallel geordnet haben. Das wird beim Druck noch weniger wahrscheinlich sein, man wird noch weniger von „Sättigung" sprechen können, als etwa bei der Einwirkung eines magnetischen Feldes auf passend gewählte Substanzen. Man wird also stets mit einem Teil völlig regellos orientierter Teilchen, und einem Bruchteil geordneter zu rechnen haben. Ja, man könnte sogar an einen allmählichen Übergang von völliger Unordnung bis zur genauen Orientierung senkrecht zu irgendeiner Richtung denken, und eine irgendwie motivierte Verteilungsfunktion für die bestimmten Winkeln zuzuordnenden Anteile der Gesamtzahl N der durchstrahlten Teilchen einführen. Indessen wollen wir uns in dieser Arbeit auf eine solche Komplizierung der sonst einfachen Vorstellung nicht einlassen.



Auch bezüglich der verwendeten Grundvorstellung des amorphen, aus regellos angeordneten Molekülen bestehenden Körpers ist zum Schluß eine Bemerkung notwendig. Herr Debye hat auf Grund der zusammen mit Herrn Scherrer vorgenommenen Versuche[1]) über Interferenzen an regellos orientierten Teilchen im Röntgenlicht einen Standpunkt bezüglich dieser Grundvorstellung eingenommen, der sich nicht völlig mit dem früheren deckt[2]). Danach wären auch bei sogenannten „amorphen" Körpern, wie Wachs und Paraffin, nicht die hypothetischen Elektronenringe der Atome, sondern Mikrokriställchen die Ursache der beobachteten Ringfiguren. Die Anwendung der vorliegenden Berechnungen auf die Friedrichschen Experimente darf, da offenbar eine ganz andere Grundvorstellung möglich ist, deshalb nur mit Vorsicht geschehen.

Zur Klärung dieser und benachbart liegender Fragen sind experimentelle Untersuchungen in dem hier angedeuteten Sinne notwendig. Mit entsprechenden Vorbereitungen, besonders über etwa doch nachweisbare magnetische Beeinflussung der Beugung, sei es durch feste oder sei es durch flüssige Körper, die Crowther nicht gefunden hatte, bin ich seit geraumer Zeit beschäftigt. Die Ungunst der Verhältnisse für experimentelles Arbeiten, die zur Genüge bekannt ist, gestattet mir jedoch nicht, so rasch vorwärts zu kommen, wie ich es wohl wünschte. Aus diesem Grunde mögen die vorliegenden Berechnungen einstweilen ohne experimentelle Prüfung veröffentlicht werden.

1) Debye u. Scherrer, diese Zeitschr. **17**, 277, 1916; 18. 291, 1917.

2) Vgl. besonders diese Zeitschr. **17**, 279, 1916, Anmerkung 2. Herr Debye hat gelegentlich eines Briefwechsels mit mir diesen Standpunkt noch schärfer betont.

Institut f. Physikalische und Elektrochemie der Technischen Hochschule Charlottenburg, Juni 1920.

(Eingegangen 15. Juli 1920.)

Bemerkung über die Entstehung von Wirbeln in Flüssigkeiten.

Von George Jaffé.

Da nach dem Helmholtzschen Satze in einer reibungslosen Flüssigkeit unter der Wirkung von Kräften, die ein Potential haben, keine Wirbel entstehen können, pflegt man in der Reibung der Flüssigkeiten die Ursache für die Wirbelbildung zu sehen. Demgegenüber scheint es nicht überflüssig, darauf hinzuweisen, daß unter den gleichen Voraussetzungen in einer reibenden Flüssigkeit ebensowenig wie in einer reibungslosen Wirbel entstehen können.

Gehen wir von der Eulerschen Gleichung unter Berücksichtigung der Reibung aus:

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} + (\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{v} = \mathfrak{f} - \frac{1}{\varrho}\nabla p + \frac{k}{\varrho}\nabla^2\mathfrak{v} + \frac{k}{3\varrho}\nabla \operatorname{div}\mathfrak{v} \qquad (1)$$

($\mathfrak{v}$ Geschwindigkeit, $\mathfrak{f}$ äußere Kraft pro Masseneinheit, p Druck, ϱ Dichte, k Reibungskonstante) und setzen die Flüssigkeit als inkompressibel voraus

$$\operatorname{div}\mathfrak{v} = 0, \qquad (2)$$

so erhält man aus (1) durch bekannte Vektorumformungen

$$\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} = \mathfrak{f} - \frac{1}{2}\nabla^2\mathfrak{v} + [\mathfrak{v}\mathfrak{w}] - \frac{1}{\varrho}\nabla p - \frac{k}{\varrho}\operatorname{curl}\mathfrak{w}, \qquad (3)$$

wo

$$\mathfrak{w} = \operatorname{curl}\mathfrak{v} \qquad (4)$$

gesetzt ist.

Nun untersuchen wir nach dem Vorgange von W. Thomson die zeitliche Änderung der Zirkulation längs einer geschlossenen Kurve, indem wir (3) in die Formel

$$\frac{d}{dt}\int_0 \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int_0 d\mathfrak{s}\left\{\frac{\partial \mathfrak{v}}{\partial t} - [\mathfrak{v}\mathfrak{w}]\right\} \qquad (5)$$

eintragen. Es ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\int_0 \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int_0 d\mathfrak{s}\left\{\mathfrak{f} - \frac{k}{\varrho}\operatorname{curl}\mathfrak{w}\right\}. \qquad (6)$$

Wenn die Kräfte $\mathfrak{f}$ ein Potential haben und wenn der Anfangszustand überall wirbelfrei ist ($\mathfrak{w} = 0$), so verschwindet die rechte Seite von (6) längs jeder geschlossenen Kurve, und es kann dann also auch kein Wirbel entstehen[1]).

Andrerseits ist schon von verschiedenen Seiten darauf hingewiesen worden, daß es Fälle gibt, in denen auch ohne Mitwirkung von Reibung Wirbel tatsächlich entstehen. Klein[2])

1) Der Lagrangesche Satz, daß in einer vollkommenen, inkompressiblen Flüssigkeit unter der Wirkung von Kräften, die ein Potential haben, zu jeder Zeit ein Geschwindigkeitspotential existiert, wenn das für irgendeinen Zeitpunkt der Fall ist, gilt nach Stokes nicht für reibende Flüssigkeiten (G. G. Stokes, Math. u. Phys. Papers, Vol. I, S. 106). Die Betrachtung, durch welche Stokes diese Behauptung beweist, macht von tangentiellen Flächenkräften Gebrauch und beschränkt sich also nicht auf Kräfte, die ein Potential haben. Der Beweis im Text zeigt, daß der Lagrangesche Satz auch für reibende, inkompressible Flüssigkeiten gilt, wenn die Voraussetzungen für die ganze Flüssigkeit zutreffen. Dagegen gilt der Satz — im Gegensatz zu nicht-reibenden Flüssigkeiten — nicht mehr für einen beliebigen Teil der Flüssigkeit.

2) F. Klein, Zeitschr. f. Math. u. Physik, **58**, 259, 1910.

hat ein Beispiel dafür gegeben und den scheinbaren Widerspruch mit dem **Helmholtzschen** Satz durch die Bemerkung aufgeklärt, daß in dem betrachteten Fall zwei ursprünglich voneinander getrennte Flüssigkeitspartien zusammenfließen, „während bei der gewöhnlichen Begründung des genannten Satzes angenommen wird, daß Flüssigkeitsteilchen, welche einmal an der Oberfläche der Flüssigkeit liegen, immer auch an der Oberfläche bleiben".

Auch nach **Lagally**[1]) muß man die Existenz von Wirbelschichten in idealen Flüssigkeiten annehmen, wenn eine Strömung ein Hindernis umfließt; denn die Strömung läßt sich als Folge des Geschwindigkeitspotentials einer auf dem Rande des Hindernisses befindlichen Wirbelschicht darstellen. Der Widerspruch mit dem Wirbelsatz wird nach **Lagally** beseitigt, wenn man die gleichzeitige Entstehung zweier Wirbelschichten, die von demselben Punkt ausgehen, annimmt.

Man wird allgemein sagen können: immer, wenn ein solcher Anfangszustand vorausgesetzt wird, daß entweder an den Begrenzungen oder an gewissen Trennungsflächen im Inneren Sprünge der tangentiellen Geschwindigkeitskomponenten auftreten, ist die Möglichkeit gegeben, daß Wirbel in die Flüssigkeit gelangen, und zwar in beiden Fällen durch Reibung (nach dem Gesetz der „Wärmeleitung"[2])), im zweiten Falle auch ohne Mitwirkung von Reibung (durch Aufrollen der Trennungsschichten). Aber in allen diesen Fällen handelt es sich nicht um eine primäre Entstehung von Wirbeln. Jene vorausgesetzten Diskontinuitätsflächen im Inneren oder an der Grenze sind Wirbelschichten äquivalent, und die Frage nach der **Entstehung** der Wirbel ist also nur zurückgeführt auf die Frage nach der Entstehung der betreffenden Anfangszustände.

Will man die ursprüngliche Entstehung von Wirbeln mit den hydrodynamischen Gleichungen in Einklang setzen, so muß man die einschränkende Bedingung über die Natur der äußeren Kräfte fallen lassen. Wir wollen also nunmehr die allgemeinste Annahme machen, nämlich daß die äußeren Kräfte sich zum Teil als negativer Gradient eines skalaren Potentials V, zum Teil als curl eines Vektorpotentials $\mathfrak{B}$ darstellen

$$\mathfrak{f} = -\nabla V + \operatorname{curl} \mathfrak{B}. \tag{7}$$

Kräfte der letzteren Art mögen als „Wirbelkräfte" bezeichnet werden; sie sind natürlich nicht konservativ.

1) M. **Lagally**, Münch. Ber. S. 79, 1915.
2) H. **Lamb**, Lehrbuch der Hydrodynamik, B. G. Teubner, Leipzig 1907, S. 666, 667.

Setzen wir vorläufig die Flüssigkeit als reibungslos voraus und tragen (7) in (6) ein, so ergibt sich

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0 \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int\limits_0 \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{s} \tag{8}$$

oder nach Anwendung des **Stokesschen** Satzes

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{w}\, d\mathfrak{o}) = \operatorname{curl}\operatorname{curl} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{o}\,, \tag{9}$$

wenn $d\mathfrak{o}$ ein beliebiges, gerichtetes Oberflächenelement bedeutet. Danach ist zeitliche Änderung — also insbesondere Entstehung — von Wirbelmoment nur dort möglich, wo curlcurl $\mathfrak{B}$ (d. h. also der curl der Kraft $\mathfrak{f}$) nicht verschwindet.

Ein einfaches Beispiel für die Entstehung von Wirbelbewegung in einer reibungslosen Flüssigkeit durch Wirbelkräfte ist folgendes. Man denke sich ein zylindrisches Gefäß von kreisförmigem Querschnitt, geteilt durch eine um die Zylinderachse drehbare ebene Querwand, die an der Zylinderwand dicht abschließt. Befindet sich in diesem Gefäß Flüssigkeit, die anfangs ruht, und wird die Querwand dann in Umdrehung versetzt, so entsteht eine Wirbelbewegung von überall gleichem Moment, ohne daß Reibung erforderlich wäre.

Bei Berücksichtigung der Reibung erhält man aus (6) und (7) an Stelle von (8)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_0 \mathfrak{v}\, d\mathfrak{s} = \int\limits_0 d\mathfrak{s}\operatorname{curl}(\mathfrak{B} - \mathfrak{R})\,, \tag{10}$$

wenn

$$\mathfrak{R} = \frac{k}{\varrho}\,\mathfrak{w} \tag{11}$$

gesetzt wird. Die Reibungskraft ist also eine Wirbelkraft, deren Vektorpotential dem Wirbel proportional und entgegengesetzt gerichtet ist.

Wesentlich für die Entstehung von Wirbeln ist nach dem Vorhergehenden eine bestimmte Verteilung der äußeren Kräfte. Es ist nicht erforderlich, daß ein resultierendes äußeres Kraftmoment, wie in dem obigen einfachen Beispiel, vorhanden ist; es darf nur nicht das Linienintegral der Kraft längs jeder geschlossenen Kurve in der Flüssigkeit verschwinden. Die Wirbel der Kraft brauchen nicht räumlich stetig verteilt zu sein; es können auch Flächenwirbel der Kraft vorhanden sein. Jede tangentiell wirkende Oberflächenkraft stellt einen Flächenwirbel der Kraft dar. Natürlich muß die Flüssigkeit als reibend und an festen Körpern haftend vorausgesetzt werden, wenn tangentiell wirkende Oberflächenkräfte zur Wirksamkeit gelangen sollen. Auch diskontinuierlich wirkende Kräfte (Stöße) sind an den Sprungstellen Kraft-

wirbeln gleichwertig, und es wäre insbesondere noch darauf hinzuweisen, daß nach der Helmholtzschen Theorie der Strahlbildung auch die inneren Druckkräfte unstetig werden können, nämlich überall dort, wo sonst der Druck negativ werden würde[1]).

In allen diesen Fällen ist die notwendige Bedingung für die Entstehung von Wirbeln erfüllt, dagegen stellt die Zähigkeit der Flüssigkeit weder eine notwendige noch eine hinreichende Bedingung dar.

1) H. v. Helmholtz, Wissenschaftl. Abhandlungen. Bd. I, S. 148.

Leipzig, im Juli 1920.

(Eingegangen 29. Juli 1920.)

Atombau und chemische Eigenschaften.

Von Emil Kohlweiler.

I.

Bei der Aufstellung meiner Theorie der Elemententwicklung, des Atomkernbaus und der Isotopie[1]) ging ich entgegen der herrschenden Ansicht der Physiker von der Vorstellung aus, daß der chemische Charakter eines Elements wesentlich mitbedingt und in erster Linie gegeben ist durch den Atomkern. Ich nehme an, daß die Bausteine des Atomkerns, Heliumkerne, Wasserstoffkerne und Elektronen, derart zusammentreten, daß nach Bildung eines Kernzentrums, bestehend in einem Heliumkern oder zwei Wasserstoffkernen für die maximal geradwertigen Elementtypen, die nicht durch Elektronen des Kerns zu kompensierenden positiven Ladungen der Heliumkerne zu Gruppen à 8 Einheiten zusammentreten, und daß die nun übrigen, nicht gruppierten Ladungen, die von 0 bei den Edelgasen über 8 bei den 3 Kaskadenelementen der Gruppe 0 = VIII des periodischen Systems auf 14 bei den Halogenen anwachsen, den Gruppencharakter des Elements bestimmen, während die kleinere oder größere Zahl von Gruppen à 8 positiven Ladungseinheiten die Erscheinung der analogen Elemente und ein gleiches Mehr oder Weniger von positiven und negativen Quanten isotope Elemente bedingt.

Der Kern wird somit primär für die chemischen Qualitäten, wie auch für alle in der Masse verankerten physikalischen Eigenschaften verantwortlich gemacht, und lediglich in sekundärer Weise wirken bei der chemischen Funktion eines Elements die äußersten Elektronen des Elektronensystems mit[1]). Die Zahl dieser Elektronen entspricht der Zahl der ungruppierten positiven Quanten des Kerns und somit der Maxivalenzzahl des Elements. Die Hauptrolle spielen diese Elektronen bei den Wertigkeitswechseln der Atome, die sie erst ermöglichen, indem z. B. bei dem maximal 7-wertigen *Cl* mit 8 + 7 ungruppierten Kernladungen und 8 + 7 rotierenden Außenelektronen von diesen 2, 4 oder 6 durch 2, 4 oder 6 Kernquanten (1, 2 oder 3 *He*-Kerne der Valenzzone) direkt gebunden werden können, wodurch für die chemische Bindung nur noch 7—2, 7—4 bzw. 7—6 positive Quanten übrig bleiben, und derart 5-, 3- bzw. 1-wertig positives *Cl* entsteht, das sich aber von dem 5-wertigen *P*, dem 3-wertigen *Al* oder dem 1-wertigen *Na* dadurch unterscheidet, daß es nach wie vor seine 8 + 7 Kernquanten in der Valenzzone hat, während *P* deren 8 + 5 besitzt usw. Wie die gegebene Valenztheorie die Verhältnisse der Valenzwechselerscheinungen, des Wechsels des elektrochemischen Verhaltens, der Häufigkeit der Valenzwechsel, des paaren Valenzsprungs, der sog. Molekülverbindungen, der ionogenen Bindung, explosibler Verbindungen und isomerer Stoffe einfach zu übersehen erlaubt, kann unter Einführung der kleinen Änderungen meines Modells meinen früheren Arbeiten[2]) entnommen werden.

Neben den Valenzwechselerscheinungen fordern ein Zusammenwirken von positiven Kernquanten und Außenelektronen bei der chemischen Bindung auch die Verhältnisse der elektrolytischen Dissoziation, da Wertigkeit und Größe der elektrischen Ladung der Ionen einander entsprechen, sowie die Tatsache, daß die durch die Außenelektronen bedingten optischen Spektren nicht wie die Röntgenspektren eine additive Eigenschaft sind, d. h. daß eine chemische Verbindung ein Spektrum aufweist, das nicht einfach durch addierende Kombination der Spektren der enthaltenen Elemente entsteht. All diese Momente, die die Beteiligung der Außenelektronen bei chemischen Funktionen fordern, verdecken zunächst die Mitwirkung des Kernes für die Herausbildung der chemischen Qualitäten sehr weitgehend und können dadurch zu der Täuschung Veranlassung geben, daß lediglich diese Elektronen den Elementcharakter und die chemischen Funktionen eines Atoms bedingen.

Im folgenden will ich nun versuchen, einige Gründe darzulegen, die darauf hinweisen, daß

1) Diese Zeitschr. **21**, 203, 1920 u. **21**, 311, 1920. Zeitschr. f. phys. Chemie **94**, 513, 1920.

1) Zeitschr. f. phys. Chemie **94**, 516, 1920.
2) Zeitschr. f. phys. Chemie **93**, 1, 1918 u. **93**, 113, 1918.



tatsächlich außer den äußersten Elektronen auch der Kern des Atoms eine hervorragende Rolle bzw. die Hauptrolle bezüglich des Chemismus eines Elements spielt. Schon die Tatsache, daß die aufgestellte Valenztheorie zur atomkonstitutionellen Begründung des chemischen Verhaltens in weitem Maße ausreicht, und daß die eingangs erwähnte Theorie, aus der die Valenztheorie ohne weiteres direkt evolviert, durch Versuche von Rutherford, Stern und Volmer, Thomson und Aston[1]) sowie durch meine vorläufigen Versuchsdaten[2]) prinzipiell und zu einem Teil sogar quantitativ bereits bestätigt wurde, spricht für die unter Diskussion stehende Annahme.

II.

Nicht gegen die Kerntheorie spricht die Tatsache, daß die optischen Spektren keine additive Eigenschaft darstellen, und daß sie schwach periodischen Charakter[3]) zeigen, da ja nach meiner Annahme die äußersten Elektronen des Atoms, in ihrer Zahl periodisch schwankend, bei der chemischen Bindung, die von der Kernperipherie aus geregelt wird, mit in Funktion treten. Dasselbe ist über die Variation der magnetischen Eigenschaften eines Elements bei Eintritt desselben in eine chemische Verbindung zu sagen[4]).

Auch die Übereinstimmung der Valenzzahl mit der Anzahl der elektrischen Einheitsladungen bei den Ionen in Lösung[5]) fordert ebensowenig die Identifizierung der atomaren Ursache der chemischen Bindung mit der dieser Ionenladung, sondern lediglich eine parallele und entsprechende Funktion beider, eine sekundäre Abhängigkeit der einen von der anderen, wie sie meine Theorie einführt. Sodann finde ich den Schluß, daß die chemischen Eigenschaften beim Gang durchs periodische System periodisch schwanken, gleich den Atomvolumen, die durch den Durchmesser des äußersten Elektronenrings gegeben sein dürften, und daß infolge dessen auch die chemischen Eigenschaften durch dieselben äußersten Elektronen bedingt sein müssen[6]), sehr wenig überzeugend und bindend, schon deshalb nicht, da der Durchmesser des äußersten Elektronenrings selbst abhängt erstens von der Zahl und Anordnung der inneren Elektronen, die auf Grund der Röntgenspektren mit Periodizität nichts zu tun haben, und zweitens von dem Durchmesser des Kerns, der für Gold z. B. nach Darwin rund 10mal größer ist wie für Wasserstoff, so daß der Durchmesser des äußersten Elektronenrings keine primäre, unabhängige und selbständige Größe darstellt, und daher auch nicht direkt verantwortlich gemacht werden kann für die Raumbeanspruchung des Atoms. Aber selbst abgesehen hiervon, zwingt der Zusammenhang der „Raumbeanspruchung mit den Valenzverhältnissen und dem Bau des periodischen Systems" absolut nicht zu der Annahme „daß die chemischen Wirkungen auf äußerlichen Eigenschaften der Atome beruhen", denn die Logik: gleiche Folgen (Periodizität von Raumbeanspruchung und chemischen Wirkungen), gleiche Ursachen (äußerster Elektronenring für beide), ist bekanntlich nicht richtig.

Des weiteren halte ich den Gedankengang, der von der nicht periodischen Änderung der Hochfrequenzspektren auf den Sitz aller periodischen Eigenschaften im äußersten Elektronenring[1]) schließt, nicht für stichhaltig. Die Röntgenspektren beweisen nur, daß die inneren Elektronen keine periodischen Qualitäten bewirken können, lassen mithin die Frage, ob die periodisch schwankenden chemischen Eigenschaften durchs äußerste Elektronensystem oder durch den Kern bedingt sind, völlig offen.

Daß die auftretenden Wärmetönungen bei chemischen Prozessen und bei den aktiven Erscheinungen, die eine ausgesprochene Kerneigenschaft sind, sich von ganz verschiedener Größenordnung erweisen, ist einleuchtend und spricht nicht gegen die Heranziehung des Kerns zur Erklärung des Chemismus eines Atoms. Denn die beiden Vorgänge sind überhaupt nicht miteinander zu vergleichen, da es sich im Fall der Atomtransformation um eine (geordnete) Zerstörung eines Atomkomplexes, um die völlige Loslösung eines Teils vom Ganzen handelt, während bei der chemischen Bindung der Atomkern als solcher bestehen bleibt, weshalb auch die aktiven Eigenschaften eines Elements durch die Bildung einer Verbindung nicht variiert werden. Die ungruppierten positiven *He*-Kernquanten der Kernperipherie haben lediglich das Bestreben, ihre Zahl zu 8 oder 2 · 8 usw. zu ergänzen, um durch Bildung von 1 bzw. 2 usw. Kerngruppen den Zustand der äußersten Stabilität, wie ihn die Edelgase mit ihrem inerten Verhalten und ihrer fehlenden Valenzzone aufzuweisen haben, zu erreichen, wobei es jedoch zu keiner wirklichen Vereinigung und Bildung einer Kerngruppe kommt, sondern bei der Tendenz, eine solche zu bilden, welchen hieraus resul-

1) Vgl. diese Zeitschr. **21**, 203, 1920 u. **21**, 311, 1920.
2) Zeitschr. f. phys. Chem. **95**, 95, 1920.
3) W. Kossel, Ann. d. Phys. **49**, 229, 1916; A. Sommerfeld, Atombau u. Spektrallinien, 1920.
4) Vgl. K. Fajans, diese Zeitschr. **16**, 482 (IX, 10), 1915.
5) W. Kossel, l. c. S. 235.
6) A. Sommerfeld, l. c. S. 112.

1) A. Sommerfeld, l. c.



tierenden Zustand ich als Bindungsgruppe bezeichnete, verbleibt.

III.

1. Zu den Tatsachen, die nun die Abhängigkeit des Elementcharakters vom Atomkern fordern, gehören in erster Linie die radioaktiven Erscheinungen. Nicht die Aufnahme oder Abgabe von Außenelektronen verändern den chemischen Charakter eines Atoms, sondern die Emission von Kernbestandteilen, weshalb auch das Verschwinden der typischen chemischen Eigenschaften eines Elements beim Eintritt in eine Verbindung ebenfalls durch den Zustand des Kerns bedingt sein dürfte und nicht durch die gleichzeitig erfolgenden Änderungen der Zahl und Anordnung der Außenelektronen, die die Variation zahlreicher physikalischer Qualitäten bedingen, wie ja auch beim aktiven Atomzerfall sekundär Außenelektronen abgegeben oder aufgenommen werden, so daß das neue Element außer seinem typischen chemischen Verhalten, das aus der Kernrevolution hervorging, auch z. B. sein eigenes optisches Spektrum oder magnetisches Verhalten zeigt.

Überhaupt sind all die glänzenden Ergebnisse der Radioforschung unter gänzlicher Ignorierung des äußeren Elektronensystems, das nur sekundäre Veränderungen erleidet (z. B. Neutralisationsvorgang[1]), gewonnen worden. Die geniale Rutherford-Soddysche Theorie der Elementumwandlung, die großartigen Verschiebungssätze von Fajans und Soddy und die durch diese erst ermöglichte Einreihung der Radioelemente ins periodische System, die Theorie über das Wesen der Isotopen, sie alle operieren primär mit dem Kern allein[2]). Die Transformation eines Elements in ein anderes, also die Änderung der chemischen Eigenschaften eines Atoms, sind durch die Änderungen des Kernbaus gegeben und bedingt, sind durch die Emission einer α- oder β-Partikel aus dem Atomkern und nicht durch die nachträglich erfolgende Zurechtschiebung des äußeren Elektronensystems hervorgerufen.

Es sei mir erlaubt, zur Bekräftigung dieses ebenso klaren wie wichtigen Punktes einen der größten Gegner der Kerntheorie zu zitieren. In seinem schon mehrfach erwähnten Werk „Atombau und Spektrallinien" schreibt Herr Geheimrat Sommerfeld[3]): „Sie (die Radioaktivität E. K.) greift durch Umwandlung des Kerns[3]), nach den Regeln der Verschiebungssätze, den Charakter des Elements[4]) an."

1) A. Sommerfeld, l. c. S. 88.
2) Vgl. A. Sommerfeld, l. c.
3) S. 114.
4) Diese und die folgenden Sperrdrucke stammen vom Verfasser.

Noch deutlicher äußert sich Herr Geheimrat Sommerfeld anläßlich der Frage, ob das β-Strahlelektron aus der äußeren Elektronenhülle des Atoms oder aus seinem Kern stammt[1]): „Im ersteren Falle würde der Charakter des Elements und seine Stellung im periodischen System unverändert bleiben. Wir hätten einen Vorgang, den wir als Ionisierung bezeichnen müßten. Das Element würde um eine Einheit positiv aufgeladen werden, aber seine chemischen Eigenschaften beibehalten. Wir wissen aber, daß auch die β-Umwandlungen neue Elemente entstehen lassen. Die β-Emission muß also wie die α-Emission aus dem Kern kommen". Ich denke, deutlicher kann wohl nicht mehr zum Ausdruck gebracht werden, daß die Änderung des chemischen Verhaltens und somit die chemischen Eigenschaften überhaupt nicht von Außenelektronen, sondern vom Kern bedingt sind.

Die sekundäre Aufnahme bzw. Abgabe von äußeren Elektronen bezeichnet Sommerfeld ganz den Tatsachen entsprechend als Neutralisationsprozeß[2]), also lediglich als eine Änderung der elektrischen Ladung und damit zusammenhängender anderer physikalischer Eigenschaften wie optische Spektren, Atommagnetismus u. dgl., während eine stoffliche Veränderung, eine Variation des chemischen Charakters mit diesem Vorgang nicht verbunden ist, was klar gegen den Sitz des Chemismus im äußeren Elektronensystem spricht.

2. Es sei noch auf 2 weitere radiologische Tatsachen hingewiesen, die gegen diese Annahme sind. Es ist eine bekannte Tatsache, daß weder physikalische noch chemische Methoden imstande sind, die Atomtransformationen der Radioelemente irgendwie zu beeinflussen: Die Radioaktivität ist eine Kerneigenschaft. Desgleichen ist es aber auch nicht möglich, die chemischen, stofflichen Qualitäten eines Elements zu verändern, obwohl zahlreiche physikalische Eigenschaften und die Zahl der äußeren Elektronen durch mannigfaltige Operationen variiert werden können: Der Chemismus dürfte daher analogerweise ebenfalls durch den Kern primär bedingt sein, während zahlreiche physikalische Eigenschaften im äußeren Elektronensystem zu lokalisieren sind, dessen mögliche Variation durch die Möglichkeit einer Ionisierung am besten belegt wird. Der chemische Grundcharakter eines Elements sitzt im Kern, ist durch dessen Bau bedingt; äußere Elektronen wirken bei der chemischen Bindung nur mit, und da diese äußeren Elektronen äußeren Ein-

1) S. 87, 88.
2) l. c. S. 88.



flüssen zugänglich sind, ist es evident, daß auch die chemische Bindung und insbesondere die Größe der Wertigkeit von äußeren Bedingungen abhängig sind. Aber nie wird die Natur eines Elements durch eine Änderung äußerer Zustände, durch eine Beeinflussung seines äußeren Elektronensystems in Frage gestellt.

3. Äußerst interessant ist sodann in diesem Zusammenhang der Charakter der Umwandlungsgeschwindigkeit aktiver Stoffe. Diese Geschwindigkeit ist bekanntlich unabhängig von der Konzentration des aktiven Elements und gehorcht dem bekannten logarithmischen Gesetz, dem auch die monomolekularen Reaktionen, z. B. die Inversion des Rohrzuckers, unterworfen sind. Der zeitliche Verlauf zweier verschiedener Vorgänge, der aktiven und der rein chemischen, folgen genau demselben Gesetz. Spricht das nicht deutlich dafür, daß der Sitz beider Vorgänge derselbe, nämlich der Atomkern, und nicht ein verschiedener ist? Die bestehenden Unterschiede betreffs Reaktionswärme und Beeinflussung sind darauf zurückzuführen, daß im einen Fall eine Kernveränderung erfolgt, während bei dem Zerfall einer chemischen Verbindung die Atomkerne in ihrem Innern unverändert bestehen bleiben und nur ihre Wirkung gegeneinander modifiziert wird. Wie aber aus dem typischen Radium z. B. die beiden ebenso typischen Elemente Helium und Niton als Folge eines Kernvorgangs entstehen, so dürfte der Sachverhalt, daß durch Zusammentritt zweier Elemente eine Verbindung mit vollständig neuen und typischen stofflichen Merkmalen entsteht und umgekehrt beim Zerfall eines Moleküls in seine Atome die rein stofflichen Qualitäten des ersteren vollständig durch andere der Zersetzungsprodukte ersetzt werden, darauf hindeuten, daß auch die chemische Reaktion durch den Kern in erster Linie geregelt wird. Jeder aktive Vorgang und jeder chemische Vorgang hat seine charakteristische Geschwindigkeitskonstante, die abhängig ist von der besonderen stofflichen Beschaffenheit der in Betracht kommenden Elemente, während der rein physikalische Prozeß der Neutralisation von Ionen durch Elektrolyse z. B. gemäß dem Faradayschen Gesetz unabhängig von der besonderen chemischen Beschaffenheit (Na^+ oder Cl^-) ist. Außerdem ist die Gewichtsmenge des bei der Elektrolyse entstehenden Stoffes unabhängig von der Konzentration der Lösung im Gegensatz zu radioaktiven und chemischen Prozessen, bei denen die umgesetzte Menge mit der Konzentration wächst und umgekehrt. Wir sehen deutlich, daß der chemische Prozeß sich anders verhält wie der vom äußeren Elektronensystem bedingte physikalische Prozeß, daß er sich aber ebenso abspielt wie der vom Kern abhängige aktive Vorgang, ein Argument, das sehr zugunsten der eingeführten Theorie spricht.

4. Die Zurückführung der chemischen Bindung auf die Wirkung einer Elektrovalenz[1]) ist sodann schon deshalb nicht ausreichend, da vorhandene Elektroaffinität durchaus nicht zur chemischen Bindung führt. Andernfalls müßte das α-Partikelchen oder das He^+-Kanalstrahlteilchen, die beide zweifelsohne Affinität zum Elektron aufweisen und ihre Elektrovalenz durch Aufnahme von Elektronen absättigen, diese Absättigung auch durch Bildung einer entsprechenden Verbindung vornehmen können, was nicht der Fall ist. Das He^{++}-Ion besitzt die physikalische Eigenschaft der Elektrovalenz, d. h. es hat, da ihm 2 Elektronen für den neutralen Zustand fehlen, das Bestreben, die fehlenden Elektronen aufzunehmen, und das He^{++}-Ion vermag daher die physikalische Erscheinung der Ionisierung von Gasen hervorzurufen. Niemals verbindet sich aber das Ion mit den Molekülen, Atomen oder Ionen eines Gases, so wenig wie das neutrale He-Atom, woraus doch deutlich folgt, daß die durch Variation im äußeren Elektronensystem bedingte Affinität zum Elektron nur physikalische aber keine chemischen Erscheinungen bedingt. Ebenso sind C^+-, C^{++}-, H^+-, H^--, O^+-, O^--, O^{++}-, N^+-, N^{--}-, N^{++}-, H_2^+-, J^+-, Br^+-, Hg^+-, Hg^{++}-, Hg^{+++}-Kanalstrahlpartikelchen wohl elektroaffin, aber sie benötigen zur Absättigung stets Elektronen allein oder geben solche vollständig ab, andere Atome und Moleküle ionisierend, sich aber nie mit diesen mit einer nach Art und Größe der elektrischen Ladung entsprechenden Wertigkeit verbindend. Warum aber nicht, wenn die chemische Bindung und Wertigkeit durch das äußere Elektronensystem bedingt werden?

5. He^{++} ist nicht chemisch zweiwertig wie Magnesium, weder wie dessen Atom noch wie dessen Ion; es ist nur elektroaffin wie das Mg-Ion, und wie dieses durch den rein physikalischen Vorgang der Aufnahme von 2 Elektronen aus der Kathode bei der Elektrolyse neutralisiert wird, und zwar unter Beibehaltung seiner chemischen Zweiwertigkeit, reißt auch He^{++} bei Gelegenheit zur Neutralisation 2 Elektronen an sich, ebenfalls unter konstanter Valenz null. Während Mg^{++} aber parallel der Aufnahme von 2 Elektronen in sein äußeres Elektronensystem eine regelrechte chemische Verbindung eingehen kann, $MgCl_2$ z. B. durch Zusammenmischen

1) W. Kossel, Ann. d. Phys. **49**, 230f., 1916.

zweier Lösungen mit Mg^{++}- bzw. Cl^{-}-Ionen, und zwar dieselbe Verbindung, die auch das Mg-Atom mit seinem erheblich anderen äußeren Elektronensystem zu bilden vermag, existiert ein analoges $HeCl_2$ nicht. Mg und Mg^{++} verhalten sich chemisch gleich, physikalisch aber nicht, dasselbe gilt von He und He^{++}, dagegen verhalten sich Mg^{++} und He^{++} physikalisch ähnlich, chemisch aber grundverschieden.

6. Ferner werden Mg oder Hg niemals lediglich durch Abgabe zweier Elektronen, z. B. als Kanalstrahlteilchen, in denselben stabilen Zustand kommen wie bei der Bildung einer Verbindung, MgO oder $HgCl_2$. Dies müßte aber der Fall sein, wenn, wie Kossel annimmt[1]), das Mg-Atom aus Stabilitätsgründen lediglich die Tendenz hätte, 2 Elektronen los zu werden, um den stabilen Zustand der Elektronen des vorhergehenden Edelgases herausbilden zu können. Analog sind H- oder O-Ionen weder in Lösung noch im Kanalstrahl allein und auf die Dauer existenxfähig; alle Ionen gehen vielmehr sehr leicht in die Atome zurück, während die Erzeugung von Ionen aus Atomen im Kanalstrahl oder durch Stoßionisierung mittels der α-Partikel z. B. großen Arbeitsaufwand bedingt, was der Kosselschen Annahme über Stabilitätsverhältnisse widerspricht. Es ist schließlich auch ohne weiteres klar, daß bei einer Kernladung mit 17 überschüssigen positiven Quanten (Cl) ein System mit 17 und nicht mit 18 äußeren Elektronen die größte Stabilität besitzt, was entgegen der Kosselschen Annahme dadurch bestätigt wird, daß Ionen unbeständiger sind wie ihre Atome, und daß Atome niemals, Ionen aber immer Affinität zum Elektron zeigen. Diese rein physikalischen Angelegenheiten haben aber mit den chemischen Verhältnissen nichts zu tun, sie können höchstens, worauf ich bereits früher hingewiesen habe[2]), einander parallel gehen.

7. Es sei besonders noch der Fall Hg hervorgehoben. Quecksilber ist offenbar im $Hg^{++++++++}$ oktaelektroaffin, aber niemals chemisch 8-wertig. Dieses Hg-Ion geht wohl sehr leicht durch Aufnahme von 8 Elektronen in das Hg-Atom über — obwohl sein äußeres Elektronensystem dem „stabilen Zustand" eines Edelgases näher steht als das des Atoms! — aber eine Verbindung HgF_8 oder HgO_4 ist nicht bekannt. Tatsache ist, daß das Hg-Atom 8 äußere Elektronen verlieren kann, Tatsache ist aber auch, daß Hg chemisch niemals 8-wertig fungiert. Folglich darf die 8fache positive Aufladung nicht mit der chemischen Wertigkeit identifiziert und überhaupt die rein elektrische Ladung eines Atoms durch Verlust oder Aufnahme von Elektronen im äußeren Elektronensystem nicht verwechselt werden mit den Ursachen der chemischen Bindung, mit der chemischen Wertigkeit, und es dürfte ohne weiteres klar sein, daß es ganz unzulässig ist, das $Hg^{++++++++}$ im Kanalstrahl als 8-wertig neben und gleich RuO_4 und OsO_4[1]) zu setzen, so unzulässig wie der Vergleich von mit Elektrovalenz ausgestatteten Edelgasionen mit chemischen Verbindungen, wie der α-Partikel He^{++} mit MgO oder $BaCl_2$!

8. Weiter ist darauf hinzuweisen, daß Atom und Ion chemisch gleich reagieren: Na^{+} und Cl^{-} vereinigen sich zu demselben $NaCl$ wie Na und Cl beim Leiten von Chlorgas über erhitztes metallisches Natrium und zu demselben $NaCl$, das bei der Behandlung von Na^{+} einer $NaOH$-Lösung mit Chlorgas nach der Reaktionsgleichung

$$2\,NaOH + Cl_2 = NaCl + NaOCl + H_2O,$$

worin

$$NaOH,\ NaCl \text{ und } NaOCl$$

dissoziiert sind:

$$2\,OH^{-} + Cl_2 = Cl^{-} + OCl^{-} + H_2O,$$

entsteht. Dieses Verhalten, für das noch beliebig viele Beispiele angeführt werden könnten, wäre nicht möglich, wenn die chemischen Qualitäten vom äußeren Elektronensystem bedingt würden, da in diesem Fall verschiedene Besetzung des äußeren Elektronenrings (Na gegen Na^{+}, Cl gegen Cl^{-}) unbedingt verschiedenes chemisches Verhalten zeitigen müßte. Es sind aber lediglich physikalische Merkmale, wie Farbe oder Magnetismus z. B., die Atom und Ion voneinander unterscheiden.

9. Es wird chemisch das zweiwertige Bleiion oder das Pb einer entsprechenden chemischen Verbindung wie $PbCl_2$ nicht etwa identisch mit Quecksilber sein, oder Fe^{++} mit Cr, Fe^{+++} mit V, Hg^{++} mit Au^{+} und beide mit Pt, Fe^{+++} mit Mn^{++}, Mn^{+++} mit Cr^{++}, Cl^{-} mit Ar und beide mit S^{--} usw. identisch sein! Tatsächlich besitzen die Glieder der angeführten Gruppen durchweg dieselbe Zahl von Elektronen im Außensystem, und da die einzelnen Glieder derselben Periode im periodischen System angehören und die Röntgenspektren durch die chemische Bindung nicht beeinflußt werden, muß nicht nur die Anordnung der Innenelektronen gleich, sondern auch die Konfiguration der äußersten Elektronen mindestens sehr nahe übereinstimmend sein, so

1) l. c.
2) Zeitschr. f. phys. Chemie 93, 28 u. 29, 1918.

1) W. Kossel, l. c. S. 252.

daß, wenn man aus der Erscheinung der analogen Elemente noch den Schluß zieht, daß die Anzahl und nicht die Anordnung das bei weitem Ausschlaggebendere ist, auf Grund der Kossel-Sommerfeldschen Anschauung der unüberbrückbare, chemische Unterschied zwischen Halogenion und Edelgas, Mercurion und Auroion usw. einfach unmöglich wäre.

10. Es ist in diesem Zusammenhang von ganz besonderem Interesse, auf den Abschnitt Kossels über Paramagnetismus hinzuweisen[1]). Kossel zeigt daselbst an Hand einer anschaulichen graphischen Darstellung, daß eine physikalische Qualität, der Atommagnetismus, der „in erster Linie eine Funktion der Zahl der im Atomsystem anwesenden Elektronen ist", tatsächlich für Ionen mit gleicher Elektronenzahl gleich ist. So besitzen das Ferri- und das Manganoion oder das Mangani- und das Chromoion, von denen die beiden Systeme des ersten Paares je 23, des zweiten je 22 Elektronen aufweisen, gleiche magnetische Momente. Kein Physiker und kein Chemiker wird aber behaupten können, daß Mn^{+++} und Cr^{++} z. B. dieselben chemischen Eigenschaften besitzen, wie es unter Gültigkeit der Kossel-Sommerfeldschen Annahmen sein müßte. Auch das optische Verhalten, das allerdings weit mehr durch die Anordnung und Bindung der äußeren Elektronen mitbedingt sein dürfte, zeigt bei gleicher Elektronenzahl weitgehende Übereinstimmung, die wieder auf chemischem Gebiet gänzlich fehlt. Sowohl die Lösung des Manganisulfats $Mn_2(SO_4)_3$, des Kaliummanganioxalats $Mn(C_2O_4)_3K_3$, der Cäsium- und Rubidium-Manganalaun mit ebenfalls dreiwertigem Mangan $CsMn(SO_4)_2$ bzw. $RbMn(SO_4)_2$, als auch das Chromoacetat, Chromoformiat und Chromomalonat sind rot gefärbt; Cupro- und Zinkionen mit je 28 Elektronen, Pb^{++++} und Hg^{++} mit je 78 Elektronen, Pb^{++}- und Hg-Dampf mit je 80 Elektronen, Sb^{+++++}, Sn^{++++}, In^{+++}, Cd^{++} und Ag^{+} mit je 46 Elektronen sind alle farblos. Besonders typisch ist, daß die intensiv gefärbten Halogene sämtlich Ionen liefern, die farblos sind, genau wie die folgenden neutralen Edelgasatome, mit denen sie die Zahl der äußeren Elektronen gemein haben. Von einer auch nur angenähert chemischen Ähnlichkeit des J^{-} mit X z. B. kann dagegen keine Rede sein. Der Fall liegt ganz klar: Physikalische Qualitäten, wie magnetisches Moment und Farbe, die durch die äußersten Elektronen bestimmt sind, stimmen für Systeme mit gleicher Elektronenzahl tatsächlich weitgehend überein; für chemische Qualitäten gilt dies auch nicht angenähert, weshalb das chemische Verhalten unserer Grundstoffe nicht durch das Außenelektronensystem geregelt sein kann.

11. Umgekehrt ist ein chemischer Typ unabhängig von der Zahl seiner äußeren Elektronen: Hg ist eben Hg, einerlei ob es elementar als Summe von neutralen Atomen im Dampfzustand auftritt, ob es einwertig oder zweiwertig fungiert, ob es ionisiert oder nicht ionisiert auftritt oder ob es im Kanalstrahl 1, 2 oder 8 Elektronen verloren hat, und allein zahlreiche physikalische Eigenschaften ändern sich mit der Zahl der Außenelektronen. Daher kann ein und dasselbe chemische Element z. B. verschiedene Spektren geben: He, He^{+} und He^{++}, welch letzteres gemäß des völligen Mangels von Elektronen überhaupt keine Optik hat, besitzen verschiedenes optisches Verhalten, ohne verschiedene Elementtypen zu repräsentieren, und analog enthalten die farblosen diamagnetischen Cuprosalze und die blauen Lösungen der paramagnetischen Cuprisalze eben beide das Element Kupfer.

12. Übereinstimmend damit kann ein Ion leicht in sein Atom oder ein anderswertiges Ion desselben Elements übergeführt oder umgekehrt ein Atom ionisiert werden, während die den Elementcharakter angreifende aktive β-Transformation eine Energietönung von ganz anderer Größenordnung zeigt und nicht rückgängig gemacht werden kann: Das Ion ist ein physikalisches Phänomen des äußeren Elektronensystems, aber trotz seiner abgeänderten Zahl von Außenelektronen kein neuer chemischer Typ, der nur als Deszendent eines β-Strahlers durch Kernvariation erscheint.

13. Endlich sei noch auf den optischen Verschiebungssatz von Kossel und Sommerfeld hingewiesen. Nach diesen ist das Funkenspektrum eines Elements identisch mit dem Bogenspektrum des vorhergehenden Elementtyps, was konstitutionell mit größter Wahrscheinlichkeit darauf zurückzuführen sein wird, daß im Funken dem neutralen Atom 1 Elektron mehr abgespalten wird als im Flammenbogen. Verliert also z. B. K im elektrischen Flammenbogen n Elektronen, so verliert das folgende Ca im Funken $n+1$ Elektronen, wodurch K^{n+} und $Ca^{(n+1)+}$ dieselbe Zahl von äußeren Elektronen besitzen und so dasselbe optische Verhalten zeigen müssen. Trotzdem wird man nicht behaupten können, daß Ca im Funken K gäbe oder K im Bogenlicht in Ca übergeht, oder daß in beiden Fällen dasselbe dritte Element entstehe und vorhanden sei. Die gleichen Spektren von K und Ca, unter verschiedenen Bedingungen erzeugt, sind eben die

1) l. c. S. 260.

Spektren von K und Ca, die Spektren der beiden chemisch verschiedenen Elementtypen mit der unveränderlichen, im Wechsel der Bedingungen konstant bleibenden Kerndifferenz 19 bzw. 20. Nicht die Zahl der Außenelektronen, sondern die Kernladung definiert einen chemischen Typus: Nicht ein System mit 18 Außenelektronen ergibt den chemischen Typ Ar; denn 18 äußere Elektronen besitzen auch S^{--}, Cl^{-}, K^{+}, Ca^{++} usw. ohne Edelgas- und speziell Ar-Charakter zu zeigen; der chemische Typ Ar ist vielmehr allein durch die Kerndifferenz 18 definiert, unabhängig von der Zahl der Elektronen im äußeren Elektronengerüst. Kernbau und Kernladung bestimmen den chemischen Typ und sind die fundamentalen Daten des chemischen Elements, auf denen gemäß der van der Broek-Rutherford-Bohrschen Ideen die Atomstrukturchemie sich aufbauen muß.

Stuttgart, Juni 1920.

(Eingegangen 3. August 1920.)

Bemerkung zu den Grundlagen der Relativitätstheorie [1]).

Von K. Wessely.

Einer ruhenden Achse Ox, auf welcher untereinander vollständig übereinstimmende „t"-Uhren verteilt sind, sei eine mit der Geschwindigkeit v bewegte Achse $O'\xi$ überlagert, welche „τ"-Uhren trägt. Ein zur Zeit $t = 0$ von O nach M im Abstande x ausgesandtes Lichtsignal wird zur Zeit

$$t_1 = \frac{O'M}{V - v}$$

in M eintreffen und nach seiner Reflexion zur Zeit

$$t_2 = \frac{O'M}{V - v} + \frac{MO'}{V + v}$$

wieder im Ursprung der ξ-Achse einlangen, wenn V die Lichtgeschwindigkeit bedeutet und $OO' = vt_1$. Soll die Zeigerstellung der „τ"-Uhr in M beim Einlangen des Lichtes den halben Wert zeigen von jenem Wert, welchen die „τ"-Uhr bei der Rückkehr des Lichtes im Ursprung aufweist, so müssen die Zeiger der „τ"-Uhren von Anfang an, d. h. zur Zeit $t = 0$ um einen dem Abstande ξ proportionalen Betrag $\mu \cdot \xi$ gegeneinander verstellt sein.

Setzt man also voraus: $\tau = t + \mu\xi$, so folgt aus der Forderung:

1) Vgl. Wied. Ann. 1905, S. 891.

$$\frac{O'M}{V - v} + \mu \cdot O'M = \frac{1}{2}\left(\frac{O'M}{V - v} + \frac{O'M}{V + v}\right)$$

$$\mu = -\frac{v}{V^2 - v^2}\,{}^{1)}.$$

Vergleicht man die Differenz zweier Zeigerablesungen an einer bestimmten, im Abstande ξ befindlichen, „τ"-Uhr mit der Differenz jener Zeigerstellungen, welche die jeweils überdeckten „t"-Uhren zeigen, so ergibt sich für beide Fälle derselbe Wert der Zeitdauer.

Vergleicht man aber die Differenz zweier Zeigerablesungen an einer bestimmten, im Abstande x, befindlichen „t"-Uhr mit der Differenz jener Zeigerstellungen, welche die jeweils vorüberkommenden, überdeckten, verschiedenen „τ"-Uhren zeigen, so ergeben sich, wegen der anfänglichen Zeigerverstellung der „τ"-Uhren, verschiedene Werte der Zeitdauer.

Substituiert man in der Gleichung

$$\tau = t + \mu \cdot \xi$$

für ξ seinen Wert $x - vt$, so folgt

$$\tau = t \cdot \frac{V^2}{V^2 - v^2} + \mu \cdot x,$$

d. h. die in einem bestimmten Abstand x der ruhenden Achse mit den verschiedenen nacheinander vorüberkommenden „τ"-Uhren bestimmte Zeitdifferenz ist das $\frac{V^2}{V^2 - v^2}$fache der mit einer bestimmten t-Uhr gemessenen Zeitdauer.

Bringt man dieses Verhalten in der Form zum Ausdruck, daß man sagt: Vom ruhenden (x)-System aus betrachtet scheinen die bewegten „τ"-Uhren $\frac{V^2}{V^2 - v^2}$ mal so schnell zu gehen als die ruhenden Uhren, so gilt das nur, so lange die x-Achse als die ruhende und die ξ-Achse als die bewegte betrachtet wird, aber nicht für den Fall, daß man die ξ-Achse als ruhend und die x-Achse als mit der Geschwindigkeit $-v$ bewegt betrachtet.

Eine vollständige Reziprozität zwischen bewegtem und ruhendem Koordinatensystem in bezug auf diese „fiktiven" Zeitangaben wird aber hergestellt, wenn man den „τ"-Uhren nebst ihrer anfänglichen Zeigerverstellung noch einen Gangunterschied gegenüber den „t"-Uhren gibt. Läßt man die τ-Uhren λ mal so schnell gehen als die t-Uhren, so wird eine bestimmte t-Uhr im Abstande x den $\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{V^2 - v^2}{V^2}$fachen Betrag

1) Würden die „τ"-Uhren λ mal so schnell gehen, als die t-Uhren, so zeigt eine einfache Überlegung, daß

$$\mu = -\lambda \frac{v}{V^2 - v^2}$$

wird.

jener Zeitdifferenz zeigen, welche die Ablesung an den verschiedenen nacheinander vorüberkommenden „τ“-Uhren ergibt, und es kann λ so bestimmt werden, daß

$$\lambda = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{V^2 - v^2}{V^2}$$

$$\lambda = \frac{\sqrt{V^2 - v^2}}{V}.$$

Die Gleichung

$$\tau_\xi = \frac{\sqrt{V^2 - v^2}}{V}\left(t - \frac{v}{V^2 - v^2}\xi\right) \qquad (1)$$

oder da $\xi = x - vt$

$$\tau = \frac{V}{\sqrt{V^2 - v^2}}\left(t_x - \frac{v}{V^2} \cdot x\right), \qquad (2)$$

(wobei die Zeitablesungen, die sich auf eine bestimmte Uhr beziehen, durch Indizes ξ und x angedeutet sind), ist identisch mit der von Einstein abgeleiteten Beziehung.

Ein „Prinzip der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit“ kommt hier aber im Gegensatz zur Einsteinschen Entwicklung nicht zur Anwendung. Die Schlußfolgerungen gelten genau so, wenn unter V die Geschwindigkeit irgendeines im ruhenden System gleichförmig bewegten Körpers verstanden wird. — Es ist auch von einer scheinbaren Änderung der Längenmaße infolge der Bewegung hier keine Rede. — Diese letztere Begriffsbestimmung in der Einsteinschen Ableitung rührt eben nicht von der Definition der Gleichzeitigkeit her, sondern ist eine selbstverständliche Folge der stillschweigend gemachten Voraussetzung, daß die Maßzahlen der Geschwindigkeiten V und v beim Übergang von einem Zeitmaß zu einem anderen ungeändert bleiben. Dann müssen natürlich die Maßzahlen der Längen in derselben Weise geändert werden, wie die Maßzahlen der Zeiten.

Das Additionstheorem.

Wenn sich ein Körper längs der bewegten ξ-Achse gleichförmig bewegt, so kann man jenen Weg „a“ als seine Geschwindigkeit bezeichnen, den er zurückgelegt hat, wenn der Zeiger einer mitgeführten „t“-Uhr um die Einheit fortgeschritten ist.

Man kann aber auch jenen Weg „ϱ“ als Geschwindigkeit bezeichnen, der zurückgelegt ist, sobald der Körper an einer auf der ξ-Achse ruhenden τ-Uhr vorbeikommt, deren Zeiger gerade um die Einheit abweicht von jener Zeigerstellung, die beim Beginn der Bewegung vom Ursprung aus, eine dort vorhandene τ-Uhr hatte. Die Größe dieser Strecke oder Geschwindigkeit muß gleich sein $\frac{a}{\lambda + \mu a}$, weil $\varrho \cdot \tau = \varrho(\lambda t + \mu\xi) = \xi$ für $t = 1$ und $\xi = a$ übergeht in $\varrho \cdot (\lambda + \mu a) = a$.

Da eine t-Uhr λ mal so schnell geht (s. Gleichung 2) als die „fiktive τ-Zeit ohne Index“ abzulaufen scheint, wird die Maßzahl von ϱ durch Multiplikation mit $\frac{1}{\lambda}$ auf „t“-Zeit reduziert. Nennt man diesen Wert $\frac{\varrho}{\lambda} = w$, so folgt aus:

$$w = \frac{a}{\lambda^2 + \mu\lambda a},$$

$$a = \frac{w\lambda^2}{1 - \mu\lambda w}.$$

Für die Summe der beiden Geschwindigkeiten v und a ergibt sich hieraus nach einfacher Rechnung:

$$v + a = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}}.$$

Diese Regel ist identisch mit dem Einsteinschen Additionstheorem, obwohl sich dieses nicht auf die Zusammensetzung von v mit w, sondern auf die Zusammensetzung der hier mit v und ϱ bezeichneten Geschwindigkeiten bezieht. Die Gleichung bleibt trotzdem ungeändert, weil es eben rechnerisch dasselbe ist, ob man die Maßzahl der Geschwindigkeit ϱ beim Übergang zur t-Zeit ungeändert läßt und die Maßzahlen der Längen ändert oder umgekehrt.

Dem physikalischen Inhalt nach stimmt das Additionstheorem

$$x = \frac{v + w}{1 + \frac{vw}{V^2}} \cdot t,$$

mit der seit je her geübten Addition

$$x = (v + a) \cdot t$$

vollständig überein.

(Eingegangen 9. August 1920.)

Eine Schaltung zur Eichung von Thermoelementen als Wechselstrommesser.

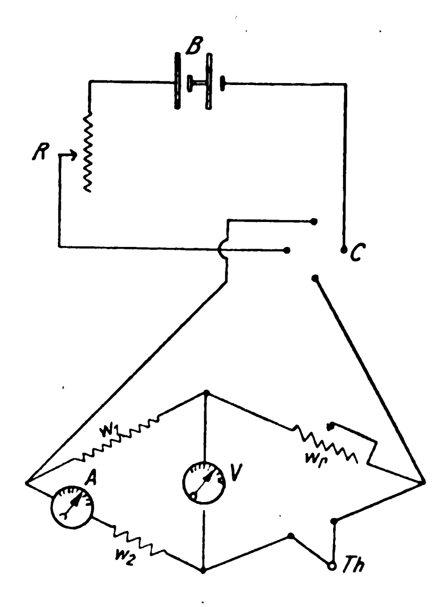
Von Walther Gerlach.

Bei der Widerstandsmessung mit der Wheatstoneschen Brücke verwendet man im Hauptstromkreis einen Stromwender, um in einem der Zweige eventuell vorhandene Thermokräfte zu eliminieren; diese verlegen nämlich den Null-



punkt des Brückengalvanometers entsprechend ihrer Richtung und Größe, so daß der zu messende Widerstand scheinbar größer oder kleiner als sein richtiger Wert gefunden wird. Bei Anwendung des Kommutators gleicht man daher zur Eliminierung dieser Fehlerquelle die Brücke nicht zum Nullpunkt des Galvanoskops ab, sondern so, daß der Ausschlag sich beim Wenden des Stromes nicht ändert. Hierin liegt eine sehr bequeme Methode zur Eichung von Thermoelementen, welche z. B. als Wechselstrommesser dienen sollen, auf die hinzuweisen in dieser kurzen Mitteilung gestattet sei.

Die Schaltung ergibt sich aus der Figur;



es bedeutet: B die Gleichstromquelle, R ein Regulierwiderstand, C der Kommutator, $W_1 W_2$ zwei Widerstände (Größenordnung 1000 Ω), W_r ein Regulierwiderstand, Th das zu eichende Thermoelement. Die Größe von W_r wird so gewählt, daß sie etwa gleich dem Widerstand des Thermoelements Th ist. A ist ein Ampèremeter zur Messung des Belastungsstromes des Thermoelements, V dient gleichzeitig als Brückengalvanoskop und als Voltmeter zur Messung der Spannung des Thermoelements.

Die Eichung des Thermoelements erfolgt also mit Gleichstrom derart, daß mit wachsender Belastung der Brücke dieselbe so abgeglichen wird, daß das Galvanoskop V beim Wenden des Stromes J keine Ausschlagänderung erfährt. Mit wachsendem Strom wird sich dieser Punkt immer mehr von der Nullage des Brückeninstruments (d. i. für $J = 0$) entfernen. Die Verschiebung dieser Punkte konstanten Ausschlags beim Kommutieren gegen die Nullage des Instruments V gibt, als Funktion von J aufgetragen, die Eichkurve des Thermoelements.

Als Vorteil dieser Eichung gegenüber der sonst üblichen Methode, bei der das Thermoelement direkt in einem einfachen Stromkreis liegt, dessen Strom kommutiert wird, sei erwähnt, daß das am Thermoelement liegende Voltmeter Spannungsabfall im Thermoelement und Thermokraft anzeigt, wobei die letztere aber meist nur einen Bruchteil der ersteren Größe beträgt.

Elberfeld, Physik. Laboratorium der Farbenfabriken vorm. Friedr. Bayer & Co., 3. August 1920.

(Eingegangen 13. August 1920.)

Zu Plancks Theorie der verdünnten Lösungen.

Von P. Boedke.

Wie ich an anderer Stelle[1]) gezeigt habe, ergibt die Auswertung der Glieder zweiter Ordnung in den von Planck für verdünnte Lösungen angegebenen Reihenentwicklungen eine qualitativ zutreffende Beschreibung der kritischen Lösungserscheinungen gewisser binärer Gemische und scheint sonach ein Vordringen der Theorie in die Gebiete höherer Konzentrationen zu gestatten. Damit entsteht die Frage, ob diese Glieder zweiter Ordnung auch bereits zu einer allgemeineren quantitativen Formulierung der Erscheinungen in konzentrierten Lösungen ausreichen, was im Interesse der Ökonomie des Rechnungsaufwands natürlich sehr zu wünschen wäre. Leider scheint diese Frage verneint werden zu müssen, wie der Vergleich der nachfolgenden Rechnungen mit den Versuchsergebnissen erkennen läßt.

Vorgelegt sei ein binäres Gemisch. Die Massen der beiden Bestandteile seien m_1 und m_2, ihre Konzentrationen

$$c_1 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}, \quad c_2 = \frac{m_2}{m_1 + m_2},$$

r_1, r_2 seien Konstante, φ_0, φ_1, φ_2 usw. Funktionen allein von der Temperatur T, der Einfluß des Druckes werde vernachlässigt. Die Entwicklung des spezifischen Wertes φ der Planckschen Φ-Funktion nehmen wir in der Form an

$$\left.\begin{aligned}\varphi = -r_1 c_1 \log c_1 - r_2 c_2 \log c_2 + \varphi_0 + \\ + \varphi_1 c_1 + \varphi_2 c_1^2 + \varphi_3 c_1^3 + \varphi_4 c_1^4 + \ldots\ldots\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Dabei ist in der Potenzreihe c_2 auf Grund der Beziehung

1) Ann. d. Phys. 61, 334, 1920.

$$c_1 + c_2 = 1$$

überall durch c_1 ersetzt worden.

Der kritische Lösungspunkt des Gemisches wird durch

$$\frac{d^2\varphi}{dc_1^2} = 0, \quad \frac{d^3\varphi}{dc_1^3} = 0 \quad (T = \text{const}),$$

bestimmt. Durch Einsetzen von (1) ergeben sich daraus die beiden Gleichungen

$$\frac{r_1}{c_1} + \frac{r_2}{c_2} = 1 \cdot 2\varphi_2 + 2 \cdot 3\varphi_3 c_1 + 3 \cdot 4\varphi_4 c_1^2 + \ldots,$$

$$-\frac{r_1}{c_1^2} + \frac{r_2}{c_2^2} = 1 \cdot 2 \cdot 3\varphi_3 + \text{[illegible]} \cdot 3 \cdot 4\varphi_4 c_1 + \ldots . \quad (2)$$

Berücksichtigt man hierin nun allein die Glieder zweiter Ordnung, setzt also φ_3, φ_4 und alle folgenden Entwicklungskoeffizienten gleich Null, so folgen für die kritischen Werte der Konzentrationen die Ausdrücke

$$c_1 = \frac{\sqrt{r_1}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}, \quad c_2 = \frac{\sqrt{r_2}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2}}.$$

Diese Werte sind demnach unter der gemachten Voraussetzung eindeutig bestimmt.

Existieren also in einem Gemisch bei verschiedenen Temperaturen mehrere Punkte kritischer Löslichkeit, so müssen die bezüglichen Konzentrationen für alle diese Punkte sämtlich die gleichen Werte besitzen, es sei denn, daß die betreffenden Zustandsgebiete durch Phasen molekularer Umsetzungen getrennt sind, da für diesen Fall die Abhängigkeit der Potentialfunktion Φ von den Konzentrationen sich ändert. Nach kritischen Zuständen, für die ein einheitlicher Wert von Φ maßgebend ist, wird man natürlich mit mehr Aussicht auf Erfolg in nahe beieinander liegenden als in weit voneinander entfernten Druck- und Temperaturgebieten zu suchen haben. In der Tat liegen einige solcher Beobachtungsreihen in enger begrenzten Gebieten vor, die gestatten, das obige Ergebnis zu prüfen. Bereits von Rothmund wurde nämlich 1898 die Vermutung ausgesprochen, daß die von ihm gefundenen Sättigungskurven binärer flüssiger Gemische mit einem oberen oder einem unteren kritischen Punkt auf den allgemeineren Fall geschlossener Kurven mit zwei kritischen Punkten zurückzuführen seien. Derartige geschlossene Kurven sind inzwischen in mehreren Systemen festgestellt worden[1]. In zwei Fällen wird nun in der Tat die Forderung der Konstanz der kritischen Konzentrationen erfüllt, nämlich in den Systemen

- Nikotin/Wasser (Konzentration in beiden kritischen Punkten nach C. S. Hudson 32,4 bzw. nach D. E. Tsakalotos 34,0),
- 3-Methyl-Pyridin (β-Picolin)/Wasser (Konzentration in beiden kritischen Punkten nach O. Flaschner 26,4).

Diesen beiden Systemen stehen aber wenigstens fünf Fälle mit verschiedenen Werten der Konzentrationen in beiden kritischen Punkten gegenüber. Will man nun nicht die beiden der Theorie günstigen Fälle durch die ad hoc gemachte Annahme molekularer Konstanz als Normalfälle ansprechen, sondern zunächst auch die übrigen der Theorie sich nicht einfügenden Fälle unseren oben angegebenen Ansätzen unterordnen, so bleibt nichts übrig, als darin wenigstens noch die Reihenglieder dritter Ordnung mit zu berücksichtigen. Dann ergibt die Elimination von T aus den Gleichungen (2) für die kritische Konzentration c_1 eine Gleichung höheren Grades, deren verschiedene Auflösungen den beiden kritischen Punkten zugeordnet werden können. Untersuchungen über den Molekularzustand der Gemische und über weitere Systeme mit geschlossenen Sättigungskurven würden durch Entscheidung dieser Frage zur weiteren Entwicklung der Planckschen Theorie nicht unerheblich beitragen können.

(Eingegangen 3. August 1920)

1) Vgl. Landolt-Börnstein, Tabellen, 1912, S. 592.

Über eine neue periodische Beziehung zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente. III. Resonanztheorie der chemischen Verbindungen.

Von Karl Fehrle.

Da nach der Voraussetzung[1] die Impulsmomente der einzelnen Kugelschalen je um das Wirkungsquantum zunehmen, so unterscheiden sich die Impulsmomente der äußersten Kugel je zweier von einem Edelgas gleich weit entfernter Elemente von dem Impulsmomente der äußersten Kugelschale der Molekel des Edelgases um eine konstante Größe, nämlich so viel Wirkungsquanten, als die Ordnungszahl von der des Edelgases entfernt ist. Demnach scheinen sich solche Elemente miteinander zu verbinden, bei denen die Differenzen der Impulsmomente der äußersten Kugelschale gegenüber derjenigen des nächsten Edelgases, oder, wie sich zeigen wird, eines Elementes mit besonders einfachem Schwingungsverhältnis sich ausgleichen. Wenn man die Anzahl der „Atome" auf jeder einzelnen Kugel, die durch (1) gegeben ist[2], addiert und die Summe so behandelt, als ob sämtliche

1) Diese Zeitschr. 21, 163, 1920.
2) Diese Zeitschr. 21, 163, 1920.

„Atome" auf einer einzigen Kugel rotierten, so ergibt sich der Radius der Molekel zu

$$R_n = \sqrt{\frac{\sum_1^n N_n}{4\pi k}}$$

und die dazu gehörige Winkelgeschwindigkeit zu

$$\Omega_n = \frac{1}{\sqrt{R_n^3}} \sqrt{\frac{e^2 \sum_1^n N_n}{m}}. \qquad (7)$$

Die folgende Tabelle enthält bis auf den Faktor $\frac{10^{-16}}{2{,}9}$ die sich aus (7) ergebenden reziproken Werte der Winkelgeschwindigkeit für die Elemente der O.-Z. 2, 10, 18, 26, 36, 44, 54, 61, 69, 76 und 86.

O.-Z.	Element	$2{,}9 \cdot 10^{16} \cdot \frac{1}{\Omega_n}$	O.-Z.	Element	$2{,}9 \cdot 10^{16} \cdot \frac{1}{\Omega_n}$
2	*He*	2,0	54	*X*	5,9
10	*Ne*	3,3	61		6,2
18	*Ar*	4,0	69	*TuI*	6,5
26	*Fe*	4,5	76	*Os*	6,7
36	*Kr*	5,1	86	*Em*	7,1
44	*Ru*	5,5			

Daraus geht hervor, daß die Schwingungszahlen der Edelgase unter der gemachten Annahme sich verhalten wie $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} : \frac{1}{4} : \frac{1}{5} : \frac{1}{6} : \frac{1}{7}$. Damit erklärt sich die Stellung der Edelgase als die solcher Elemente, deren Schwingungszahlen zueinander schon in so einfachem Verhältnis stehen, daß die Resonanz durch Verbindung mit anderen Elementen nicht verbessert werden könnte. Die Verbindung der übrigen Elemente untereinander muß daher unter dem Gesichtspunkt betrachtet werden, daß das mit einem zweiten sich verbindende Element in bezug auf dieses das Schwingungsverhältnis der den beiden Elementen benachbarten Edelgase gewinnt. Wenn also z. B. *Li* mit *F* sich verbindet, so erreichen dadurch die Komponenten das Schwingungsverhältnis 3:2. Wenn ein *m* wertiges Element sich mit *m*-Atomen eines einwertigen verbindet, so muß die Differenz des Impulsmomentes der äußersten Kugelschale im Vergleich mit der des Edelgases (*m*-Wirkungsquanten) durch *m*-Differenzen, gebildet in gleicher Weise für die *m*-Atome des einwertigen Elementes in bezug auf das zu ihm gehörige Edelgas (*m* mal jeweils ein Wirkungsquantum) ausgeglichen werden. Der Hauptunterschied dieser Auffassung gegenüber derjenigen Kossels, welcher in Fortsetzung der Theorie Abeggs[1]) den Vorgang der Verbindung mit der Tendenz zweier Atome, durch Abgabe oder Aufnahme von Elektronen Systeme von derselben Gesamtelektronenzahl wie die Edelgase zu bilden, erklärt hat[1]), besteht darin, daß die Ursache nicht im Bau der Atome, sondern im Schwingungsverhältnis gesehen wird.

Da die Elemente der *C*-Gruppe symmetrisch zu den beiden benachbarten Edelgasen stehen, können sie sowohl mit positiven 4 Wirkungsquanten (Normalvalenz) als auch mit negativen 4 Wirkungsquanten (Kontravalenz) zur Resonanz gelangen. Die Elemente der 5.—7. Gruppe der beiden ersten Horizontalreihen können auf dem nächsten Wege in bezug auf das folgende Edelgas zur Resonanz gelangen (Normalvalenz). Sie könnten aber auch in bezug auf die Schwingungszahl des entfernteren Edelgases zur Resonanz gelangen (Kontravalenz). Für O.-Z. 26 (*Fe*) ergibt sich das Schwingungsverhältnis 9:2 (Tabelle). Die Differenz des Impulsmomentes der äußersten Kugelschale des mittleren Elementes der Trias im Vergleich mit dem von *Ar* und *Kr* ist gleich. Ich nehme an, daß in diesem Falle die einzelnen Kugeln, welche die Molekeln bilden, ihre Einstellung teilen, daß der eine Teil (von $1-x$) auf *Ar*, der andere (von $x-n$) auf *Kr* sich einstellt. Der vorherrschende Anteil verschiebt sich von O.-Z. 26 bis 28 immer mehr zugunsten der Schwingungszahl des *Kr*, bis bei O.-Z. 29 (*Cu*) alle einzelnen die Molekel bildenden Kugelschalen auf *Kr* eingestellt sind. Die oben angegebene Zusammensetzung der Eisenmolekel würde das von Hagenbach beobachtete spiegelbildliche Serienspektrum des Eisens erklären.

Die Spannung, welche dadurch entsteht, daß die Schwingungen der „Atome" nicht in Resonanz stehen mit denen der Molekeln, bewirkt eine Zusammenziehung der Molekel, wenn die Spannung durch Vergrößerung der Rotationsgeschwindigkeit der „Atome", und Ausdehnung, wenn sie durch Verlangsamung aufgehoben würde. Die Dichte kann daher als der Ausdruck der Resonanzfähigkeit sowohl in Hinsicht auf die Entfernung als auch im Hinblick auf die Richtung betrachtet werden. Sie nimmt zu, wenn die Resonanz durch Beschleunigung der Rotation, also auf das vorhergehende Edelgas zu, sie nimmt ab, wenn sie durch Verzögerung, also auf das folgende Edelgas zu, verbessert würde.

Die Tabelle, welche für O.-Z. 61 das Schwingungsverhältnis 25:4, für *TuI* das Verhältnis 13:2 und für *Os* das Verhältnis 27:4 gibt, zeigt, daß es in der letzten Periode einzelne einfache Schwingungsverhältnisse gibt, auf welche sich ihre Elemente einstellen können. Die Ele-

1) Zeitschr. f. anorg. Chem. **39**, 330, 1904.

1) Ann. d. Phys. **49**, 229, 1916.



mente von *Ce* bis Nr. 72 verhalten sich also in bezug auf die Schwingungszahlen von Nr. 61 und von *TuI*, wie die Elemente von *N* bis *Sc* in bezug auf diejenigen von *Ne* und *Ar*. Dies spiegelt sich auch in der Dichte wieder, soweit sie bekannt ist.

Das periodische System ist daher insofern irreführend, als es das Vorwalten der Achterperioden als Prinzip vortäuscht. Nicht die Einteilung in 8 ist maßgebend, sondern die Möglichkeit, einen Resonanzgenossen zu finden. Auftreten in Nebenvalenz bezeichnet keine neue Art von Valenz, sondern besagt nur, daß innerhalb der Reihe ein einfaches Schwingungsverhältnis vorhanden ist, derart, daß die Impulsmomente der äußersten Kugelschalen der Verbindungsgenossen von denjenigen der zu diesem einfachen Schwingungsverhältnis gehörigen Elemente, die als Resonanzstelle bezeichnet werden mögen, gleich weit entfernt sind. Auftreten in Normalvalenz besagt nur: Das Element erreicht seinen Resonanzgenossen auf die kürzere Weise. Dieser Art von Resonanzfähigkeit entspricht immer die Dichte. Je nach der Art der Resonanz — auf das vorhergehende oder auf das folgende Edelgas zu — erfolgt die Zuteilung der Elemente in die *a*- oder *b*-Gruppe der Vertikalreihen.

Daß das als Resonanzstelle bezeichnete Element selbst wieder eine Valenz besitzt in bezug auf ein noch einfacheres Schwingungsverhältnis, nämlich das des benachbarten Edelgases, steht nicht zu meiner Ansicht über die Nebenvalenz in Widerspruch, denn die Impulsmomente der äußersten Kugelschalen der Molekeln der sich in Nebenvalenz betätigenden Elemente unterscheiden sich zwar von denjenigen der Molekeln der Resonanzstellen um dieselbe Zahl von Wirkungsquanten, nicht aber auch von denjenigen der den Resonanzstellen benachbarten Edelgase.

Das Edelgas mit dem Schwingungsverhältnis 1, das zur Vervollständigung der Tabelle gehört, kann nur das Element Elektron selbst sein, bei dem rotierendes „Atom" und Atom im Sinne der Chemie zusammenfallen, das keine Spannung besitzt, weil die Schwingungen von „Atom" und Molekel in Resonanz sind, dem also im buchstäblichen Sinne die O.-Z. 0 zukommt. Damit erklärt sich die singuläre Stellung des Wasserstoffs. Er kann entweder positiv einwertig in bezug auf die Schwingungszahl des 0ten Elements oder negativ einwertig in bezug auf diejenige des *He* auftreten.

Nach dem Vorstehenden dürfte das, was sich in dem hier gebrauchten dynamischen Modell als Verhältnis der Zahl der Schwingungen der „Atome" auf den Molekeln zur Grundschwingung darstellt, zugleich auch dasjenige der „Atom"schwingungen zur Schwingung der Molekeln sein. Die Spannung, als Maß der Entfernung des Verhältnisses von der Resonanz, scheint die Ursache der elektromagnetischen Schwingungen zu sein.

Freiburg i/B., Juni 1920.

(Eingegangen 25. Juni 1920.)

Über eine neue periodische Beziehung zwischen den Atomgewichten der chemischen Elemente. IV. Der Zusammenhang zwischen den Resten und der magnetischen Atomsuszeptibilität.

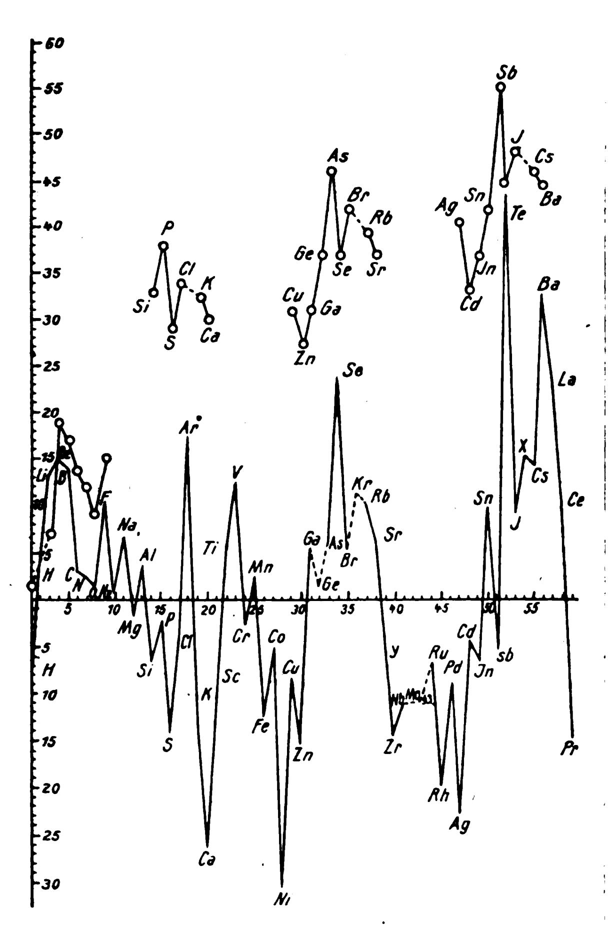
Von Karl Fehrle.

Das periodische Verhalten der diamagnetischen Atomsuszeptibilität wurde von Pascal nachgewiesen[1]). Die von ihm gezeichnete Kurve ist in der folgenden Figur auf der Kurve der Reste aus dem II. Teil meiner Abhandlung[2]) abgetragen. Die Logarithmen der Suszeptibilitäten als Ordinaten. Es ist dies die Ringlinie. Der links stehende Maßstab gilt nur für die Reste. Ein Blick zeigt, daß die Kurven in ihrem Gang zum größten Teil übereinstimmen. Ich verbinde damit folgende Vorstellungen:

Ein positiver Rest bedeutet: Die Zahl der „Atom"durchgänge durch die auf ein „Atom" entfallende Fläche der Kugel während einer „Atom"schwingung und damit die Masse muß derart gesteigert werden, daß die Zahl p darin ganzzahlig enthalten ist[3]). Ein negativer Rest bedeutet: Die Zahl der „Atom"durchgänge ist bis zur Ganzzahligkeit des Verhältnisses vermindert. Andererseits sucht das Magnetfeld die „Atom"bahnen senkrecht zu den Kraftlinien zu stellen und so die Zahl der „Atom"durchgänge in den Durchtrittspunkten der Kraftlinien durch die Molekel zu vermindern. Wo also die Resonanz durch Verminderung der Zahl der „Atom"durchgänge verbessert wird, muß ein paramagnetischer Effekt auftreten, im gegenteiligen Fall ein diamagnetischer.

Soweit also der Diamagnetismus auf die beschriebenen Verhältnisse zurückzuführen ist, muß er sich mit der Größe des positiven Restes ändern. Der Gang der Kurve der Suszeptibilität von *H* bis *F* ist damit ohne weiteres erklärt. Andererseits müssen die paramagnetischen Elemente auf die negativen Perioden der Atom-

1) Compt. rend. **158**, 1895, 1914.
2) Diese Zeitschr. **21**, 383, 1920.
3) Diese Zeitschr. **21**, 165, 1920.



restkurve fallen und dies trifft auch zu. Auch der Gang von *Si* bis *Ca* erklärt sich aus dieser Theorie, insofern als beide Kurven miteinander an- und absteigen. Aber die zugehörigen Reste sind mit Ausnahme von *Ar* negativ. Diese Elemente müßten sich also nach der oben auseinandergesetzten Theorie paramagnetisch verhalten. Dieser Effekt überlagert sich aber nur dem von den im 3. Teil dargelegten Resonanzverhältnissen herrührenden allgemeinen Effekt, so daß die Kurve, bei allmählichem Ansteigen im ganzen, im einzelnen den sägenförmigen Verlauf der Restkurve mitmacht.

Die meisten Fälle, wo Elemente paramagnetisches Verhalten zeigen, sind von solcher Größenordnung, daß sie nur durch die negativen Reste bedingt erscheinen. Sie fallen auch fast ausschließlich mit den Perioden negativer Reste zusammen.

Die Ähnlichkeit der beiden folgenden Erhebungen in beiden Kurven ist außerordentlich auffallend. Dabei fallen aber, *Cu* und *Zn* ausgenommen, alle Suszeptibilitäten mit den Resten des folgenden Elementes zusammen.

Zusammenfassung.

Der Gang der Kurve der diamagnetischen Atomsuszeptibilität ist der Gang der Kurve der Reste zwischen den experimentellen und idealen Atomgewichten. Es wird eine Theorie des diamagnetischen und paramagnetischen Verhaltens der Elemente auf Grund von Resonanzbetrachtungen gegeben.

Freiburg i/B., Juni 1920.

(Eingegangen 25. Juni 1920.)

BESPRECHUNGEN.

M. Schlick, Raum und Zeit in der gegenwärtigen Physik, zur Einführung in das Verständnis der Relativitäts- und Gravitationstheorie. Zweite, stark vermehrte Auflage. 8°. IV u. 86 S. Berlin, Julius Springer. 1919. M. 5.20.

Obgleich die Schrift dem Zweck einer elementaren Einführung dienen will, ist sie wohl in höherem Maße für den Fachmann als für den Laien geeignet. Dem Physiker, der sich über das Grundsätzliche der allgemeinen Relativitätstheorie unterrichten will, bietet die Schrift in anregender Form eine sehr gute Zusammenstellung der wichtigsten Gedanken.

Am klarsten und gründlichsten ist der Gedankengang entwickelt, durch welchen man sozusagen a priori zu dem Relativitätspostulat geführt wird auf Grund der Erwägung, daß bei allen physikalischen Beobachtungen immer nur Koinzidenzen festgestellt werden. Auch die Fragen, welche sich auf die Relativität der Bewegung und auf die Trägheit beziehen, erfahren eine eingehende Behandlung. Nur müßte hier zur vollen Aufklärung des Lesers deutlicher hervorgehoben werden, daß im Sinne der neuen Theorie die Beziehung des Schwerefeldes zu den Gravitationspotentialen so aufzufassen ist, daß das Feld der Potentiale (das „metrische Feld") das eigentlich Reale bildet, während das Gravitationsfeld nur etwas daraus Abgeleitetes ist..

Die spezielle Relativitätstheorie hatte Schlick bei der ersten Auflage als bekannt vorausgesetzt. In der neuen Auflage ist nun ein Kapitel über die spezielle Relativitätstheorie eingefügt. Jedoch ist dieses so kurz gefaßt, daß trotz der Klarheit der darin gegebenen Ausführungen der Zweck der Orientierung hier schwerlich erreicht wird. Die Notwendigkeit der Umstürzung unserer landläufigen Auffassung von Raum und Zeit wird nicht zwingend genug dargetan (z. B. findet die

Widerlegung der Ritzschen Annahme überhaupt keine Erwähnung). Ferner erfährt man nicht genau, was von den gewohnten Vorstellungen noch erhalten bleibt.

Glücklicher als diese erste Einschaltung ist eine fernere Erweiterung, welche in der Einbeziehung der neueren kosmologischen Betrachtungen Einsteins besteht.

Daß von der neuen Weylschen Theorie gar nichts erwähnt wird, braucht man nicht zu beanstanden; wohl aber hätte in der zweiten Auflage die Bemerkung, daß die bisherigen Versuche einer einheitlichen Zusammenfassung von Elektrodynamik und Gravitationstheorie nicht geglückt sind, eine etwas vorsichtigere Wendung erfahren können.

Allgemein macht sich für die populäre Darstellung der Einsteinschen Theorie als wesentliches Hindernis der Umstand geltend, daß das allgemeine Relativitätsprinzip seine eigentliche Bedeutung erst bei der Aufstellung der Feldgleichungen erhält, die Methode aber, wie man die Feldgleichungen gewinnt, in elementarer Form nicht auseinandergesetzt werden kann. Diese Schwierigkeit wird sich wohl kaum ganz beheben lassen. P. Bernays.

C. Dorno, Himmelshelligkeit, Himmelspolarisation und Sonnenintensität in Davos 1911 bis 1918. Veröffentlichungen des Preußischen Meteorologischen Instituts, herausgegeben von G. Hellmann. Nr. 303. Abhandlungen, Band VI. 8°. 290 S. m. 26 Tafeln u. 68 Tabellen. Berlin, Behrend & Co. 1919. M. 54.—

Herr C. Dorno, der schon im Jahre 1911 in der Monographie: Licht und Luft des Hochgebirges (Braunschweig, Vieweg & Sohn), die Ergebnisse von Messungen der Sonnen- und Himmelsstrahlung in Davos niedergelegt hat, die von ihm selbst mittels neuzeitlich eingerichteter Instrumente gesammelt waren, zieht in diesem neuen Werke die Summe seiner fortgesetzten und erweiterten Arbeiten aus den Jahren 1911 bis 1918.

Fernerstehende könnten vielleicht vermuten, daß die Tätigkeit Dornos wesentlich von lokaler Bedeutung wäre und etwa gar den Interessen des weltbekannten Kurortes dienen sollte. Nichts wäre irriger als ein solches Vorurteil. Dorno ist Physiker, und wenn er auch die therapeutischen Wirkungen des Höhenklimas wohl beachtet, so treten doch Erwägungen dieser Art völlig in den Hintergrund gegenüber den großen Fragen der Meteorologie und der meteorologischen Optik, der systematischen Untersuchung des Energiestromes, der uns von der Sonne aus zufließt, und von dessen Größe und etwaiger Schwankung, von dessen Absorption und Umwandlung in der Atmosphäre der Verlauf der meteorologischen und der biologischen Vorgänge auf der Erde abhängt.

Bei Betrachtung des vorliegenden Dornoschen Werkes glaubt man den Tätigkeitsbericht eines wohlausgestatteten staatlichen Observatoriums mit einer Anzahl geschulter Beobachter vor sich zu haben. Es ist erstaunlich, daß ein Privatgelehrter diese Fülle von wertvollen Messungen zusammenbringen — und was das Wesentlichste ist — auch wissenschaftlich verarbeiten konnte.

Es soll hier nur über den kleineren Teil des Werkes berichtet werden, der sich mit der eigentlichen Sonnenstrahlung befaßt (S. 267—290).

Zur Messung der Gesamtintensität der Sonnenstrahlung benutzt Dorno zwei Instrumente. Das eine ist das Ångströmsche Kompensationspyrheliometer. Von zwei gleichartigen geschwärzten Manganinstreifen ist abwechselnd der eine der zu messenden Strahlung ausgesetzt, der andere abgeschirmte wird durch einen Heizstrom auf dieselbe Temperatur mit jenem gebracht. Die Temperaturgleichheit wird mittels eines Thermoelementes festgestellt. Die in dem durchströmten Streifen entwickelte Wärmemenge wird aus dem bekannten Widerstand und der gemessenen Stromstärke bestimmt, sie ist der dem anderen Streifen in gleicher Zeit zugeführten Strahlungswärme gleich. Neben diesem (absoluten) Instrumente bewährte sich sehr gut das bimetallische Aktinometer von W. A. Michelson (mikroskopische Ablesung der Verbiegung eines bimetallischen (Platin-Kupfer) Streifens bei einseitiger Bestrahlung), das durch Vergleichung mit einem absoluten Silverdisk-Pyrheliometer an die Smithsonian-Skala angeschlossen war. Auch das Ångströmsche Kompensationspyrheliometer bedarf noch einer kleinen Korrektion, um mit dem gegenwärtig als das zuverlässigste angesehenen amerikanischen Standardinstrumente, dem Waterflow-Pyrheliometer von Abbot, in Übereinstimmung zu kommen; der Faktor betrug 1,035.

Von den Ergebnissen mögen einige wenige herausgehoben werden. Die Solarkonstante ergibt sich im Mittel zu $1{,}925 \cdot \frac{\text{g Cal.}}{\text{min cm}^2}$, in sehr guter Übereinstimmung mit den amerikanischen Messungen. Der Transmissionskoeffizient der Gesamtstrahlung, aus der Bonguerschen Formel bei verschiedenen Sonnenhöhen berechnet, ist im Mittel 0,842, er nimmt mit wachsendem Wasserdampfgehalte der Luft ab. Die größte Einstrahlung wurde am 5. März 1910 bei 35° Sonnenhöhe mit $1{,}575 \frac{\text{g Cal.}}{\text{min cm}^2}$ beobachtet.

Von besonderem Interesse ist die zeitweise Verminderung der Sonnenstrahlung (um nahe 20 Proz.) nach dem Eintreten einer atmosphärischen Trübung, die auf den Ausbruch des Katmaivulkans auf den Aleuten (am 6—7. Juni 1912) zurückgeführt wird und die sich gleichzeitig in andern Störungen optischer Art (Änderungen der Himmelspolarisation, Ringerscheinungen) äußerte, ähnlich wie seinerzeit die Nachwirkung des Krakatauausbruches.

Neben den absoluten Messungen der Gesamtenergie der Sonnenstrahlung führte Dorno auch Relativmessungen in einzelnen Spektralbereichen mit Hilfe von lichtelektrischen Zellen in Verbindung mit passenden Farbfiltern (Gläsern von Schott und Gen., Jena) aus. So für Grünblau (entsprechend einer mittleren Wellenlänge von 465 $\mu\mu$), für Blau (415 $\mu\mu$), Blauviolett (405—400 $\mu\mu$), Blauultraviolett (379 $\mu\mu$) und Ultraviolett.

Zu den Messungen im sichtbaren Bereiche dienten Zellen mit Kalium-, im Ultraviolett mit Kadmiumbelag. Die Transmissionskoeffizienten in gleicher Reihenfolge sind: (0,826), (0,752), (0,730—0,720), (0,668) und (0,266). Die Durchlässigkeit der Atmosphäre für direkte Sonnenstrahlung nimmt also mit abnehmender Wellenlänge stark ab, zugleich aber erweist sich das vom reinen Himmel zerstreute Licht, wie an anderer Stelle des Werkes mitgeteilt wird, als besonders reich an kurzwelligen Strahlen, so daß die gesamte Ultraviolettstrahlung des Himmels die der Sonne selbst bei hohem Sonnenstande übertrifft. Das Maximum der ultravioletten Strahlung tritt für Davos im Dezember, das Minimum im Juni ein.

Die Messungen im Ultraviolett legen die Frage nach der Ursache der wechselnden Ausdehnung des Sonnenspektrums nach der Seite der kurzen Wellen

nahe. Die Endwellenlängen können zwischen 301 $\mu\mu$ (Frühjahr) bis 290 $\mu\mu$ (Herbst) schwanken. Als Ursache dieser Schwankungen hat man wohl den veränderlichen Ozongehalt der Luft angesehen, indem das Ozon besonders die kurzen Wellen absorbiert.

Dornos direkte Messungen des Ozongehalts der Luft mittels der Jodstärkereaktion widersprechen zwar dieser Erklärung nicht, doch verhehlt der Verf. mit Recht nicht sein Mißtrauen gegen diese nicht eindeutige Methode. Er weist auf die Möglichkeit hin, die wechselnde Absorption des Ultraviolett im Jahreslaufe auf periodische Veränderungen in der Durchlässigkeit der höchsten atmosphärischen Schichten zurückzuführen.

Auf Anregung von Prof. Guthnick (Sternwarte Neu-Babelsberg bei Berlin) hat schließlich Dorno mit Hilfe der photoelektrischen Methode nach kurzperiodischen Schwankungen der Lichtemission der Sonne gesucht. Änderungen innerhalb einiger Stunden, die 1 Proz. überstiegen, sind indessen nicht gefunden worden. Auch Guthnick und Prager haben durch Vergleichung des vom Saturn reflektierten Sonnenlichts mit dem Lichte eines unveränderlichen Fixsternes keine Schwankungen dieser Art feststellen können, deren Existenz auf Grund pyrheliometrischer Ergebnisse Abbots möglich schien. H. Geitel.

Wo. Ostwald, Die Welt der vernachlässigten Dimensionen. Eine Einführung in die moderne Kolloidchemie mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen. gr. 8⁰. XII u. 222 S., mit Abbildungen. 3. Auflage. Dresden, Th. Steinkopff. 1919. Gebunden M. 9.—.

Daß Wo. Ostwalds „Welt der vernachlässigten Dimensionen", deren erste Auflage in dieser Zeitschrift (**16**, 452, 1915) bereits besprochen wurde, innerhalb von 4 Jahren die dritte Auflage erlebte, spricht nicht nur für die Zunahme des allgemeinen Interesses an kolloidchemischen Fragen, sondern ist ohne Zweifel auch ein Beweis dafür, daß die Einführung inhaltlich und formal Anerkennung gefunden hat. Die neue Auflage weist gegenüber der ersten entsprechend den unterdessen gemachten Fortschritten eine Reihe von Änderungen und Ergänzungen auf. Zu den Namen von Barkla und Laue gesellen sich jetzt die der beiden Braggs und der von P. Debye. Die gerade für die Kolloidchemie so wichtigen Untersuchungen Scherrers lagen wohl bei der Neuherausgabe des Buches noch nicht vor. Den Physiker dürfte besonders auch die experimentelle Untersuchung von F. Ehrenhaft interessieren, wonach die photophoretische Geschwindigkeit gerade bei kolloiden Teilchen mittleren Dispersitätsgrades am größten ist. Von neueren Ergebnissen sind ferner hinzugekommen die interessanten Untersuchungen des Verfassers über die Ursachen des Farbenumschlages von Indikatorfarbstoffen, der bisher konstitutionschemisch, nunmehr von Wo. Ostwald in Analogie zum kolloiden Gold aus der Änderung des Dispersitätsgrades erklärt wird. Bei der Besprechung der Ultrafilter vermißt man einen Hinweis auf die jetzt leicht zugänglichen Membranfilter. R. Wintgen.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1920/21.

Universität Basel. Hagenbach: Experimentalphysik II: Optik, Wärme, Elektrizität; Physikalisches Praktikum (mit Veillon und Zickendraht); Physikalisches Kolloquium; Spektroskopie. — **Bernoulli**: Optische Methoden des Chemikers; Quantentheorie und Elektronentheorie der Materie; Physikalisch-chemische Übungen, für Anfänger; Physikalisch-chemisches Vollpraktikum; Chemisches Praktikum; Chemisches Kolloquium (mit Rupe, Fichter und Ruggli). — **Matthies**: Einführung in die theoretische Physik II: Wärmelehre; Relativitätstheorie II: Gravitationstheorie; Mathematisch-physikalisches Seminar: Problem aus der kinetischen Gas- und Elektronentheorie; Kinetische Gastheorie. — **Veillon**: Elementare Übungen in mathematischer Physik. — **Zickendraht**: Wechselstrom; Praktikum. — **Zehnder**: Geschichte der Physik II; Physikalische Weltanschauungen II: Makrokosmos. —

Universität Berlin. Rubens: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik; Kolloquium für Fortgeschrittene; Arbeiten für Geübtere (mit Wehnelt, v. Baeyer und Westphal). — **Planck**: Theorie der Wärme; Mathematisch-physikalische Übungen. — **Wehnelt**: Praktische Übungen für Anfänger II: Elektrizität und Magnetismus; Praktikum für Pharmazeuten; Praktikum zur Erlangung von Handfertigkeit für das physikalische Arbeiten; Mathematische Ergänzungen zum physikalischen Praktikum. — **v. Laue**: Allgemeine Relativitätstheorie und nichteuklidische Geometrie; Proseminar (mit Westphal). — **Hellmann**: Allgemeine Klimatologie; Meteorologisches Kolloquium für Vorgerücktere. — **Liebisch**: Grundzüge der physikalischen Kristallographie; Mineralogisches Praktikum; Anleitung zur Benutzung der mineralogischen Studiensammlung; Anleitung zu Arbeiten. — **Nernst**: Physikalische Chemie; Anorganisch-chemisches Praktikum (mit Marckwald); Physikalisch-chemische Übungen; Physikalisch-chemische Arbeiten; Physiko-chemisches Kolloquium; Neuere Atomistik. — **Einstein**: Verschiedenes aus der theoretischen Physik. — **Haber**: Chemische und physikalische Untersuchungen. — **Hergesell**: Höhenwetterdienst im Zusammenhang mit Wetterprognose und Luftfahrt. — **Schweydar**: Schwerkraft und Erdgestalt. — **Warburg**: Wechselströme und elektromagnetische Wellen. — **Blasius**: Praktische Übungen für Anfänger I: Mechanik, Schall, Wärme und Licht (mit Wehnelt). — **Neesen**: Elektrische Schwingungen, drahtlose Telegraphie. — **v. Baeyer**: Experimentalphysik. — **Byk**: Mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. — **Fock**: Einleitung in die Physik und Chemie; Physikalische Kristallographie. — **Franck**: Kathodenstrahlen; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen für Fortgeschrittene. — **Gehrcke**: Ausgewählte Kapitel aus der Optik. — **Grüneisen**: Neuere Anschauungen über die Konstitution fester Körper. — **Hahn**: Radioaktivität, mit Experimenten; Anorganisch-radioaktive Arbeiten. — **Henning**: Vektorrechnung und ihre Anwendung in der theoretischen Physik. — **Hertz**: Mathematische Ergänzungen zur Experimentalphysik. — **Kiebitz**: Elektrische Schwingungen und ihre Anwendungen. — **Krigar-Menzel**: Theorie der elektrischen und magnetischen Erscheinungen. —

Universität Bern. Forster: Experimentalphysik II: Magnetismus, Elektrizität, Wärme; Theoretische Optik, Repetitorium der Physik; Physikalisches Praktikum; Physikalische Arbeiten für Vorgerückte. — **Gruner**: Einführung in die theoretische Physik; Elektromagnetische Lichttheorie; Molekulare Wärmetheorie; Kinetische Gastheorie; Seminar. — **Luterbacher**: Mechanik. — **Blattner**: Elektrische Gleichstrom- und Wechselstromanlagen; Elektrische Bahnen. — **Koestler**: Elektromagnetische Schwingungen; Einfach statisch unbestimmte Systeme; Anwendung der höheren Mathematik auf die Naturwissenschaften I. —

Universität Bonn. **Konen**: Experimentalphysik I; Laboratorium für Anfänger; Praktikum für Fortgeschrittene; Physikalisches Kolloquium (mit Pflüger, Eversheim und Grebe). — **Grebe**: Ausgewählte Kapitel aus der experimentellen Optik; Repetitorium der Physik (mit Eversheim); Radioaktivität. — **Pflüger**: Theorie der Elektrizität. — **Bucherer**: Neuere Elektrizitätstheorie. — **Eversheim**: Angewandte Elektrizitätslehre; Grundzüge der Elektrotechnik. —

Technische Hochschule Danzig. **Krüger**: Experimentalphysik I; Physikalisches Praktikum; Radioaktivität. — **Kalähne**: Einführung in das physikalische Praktikum; Elektrodynamik; Elektrische Schwingungen; Photographie und photographische Reproduktionsverfahren; Anleitung zu selbständigen wissenschaftlichen Arbeiten. — **Försterling**: Kinetische Theorie der Materie. — **Reinkober**: Die Gesetze der Wärmestrahlung und ihre Anwendung auf die Beleuchtungstechnik; Physikalische Meßtechnik und Meßmethoden; Handfertigkeitspraktikum. —

Technische Hochschule Darmstadt. **Schering**: Allgemeine Physik; Physikalische Übungen (mit Zeißig); Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik (mit Zeißig); Mechanische Wärmetheorie; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten (mit Zeißig). — **Zeißig**: Allgemeine Physik; Physikalische Meß- und Instrumentenkunde; Seismometrie und Anwendungen; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik. — **Baerwald**: Allgemeine Elektronik II: Der Aufbau des Atoms und der Materie. — **Limmer**: Photographische Übungen A für Anfänger und Fortgeschrittene; Photographisches Kolloquium; Grundlagen der Photographie. —

Technische Hochschule Dresden. **Hallwachs**: Experimentalphysik I; Physikalisches Praktikum I, II; Praktikum für größere physikalische Arbeiten; Physikalisches Kolloquium (mit Toepler). — **Toepler**: Theoretische Physik IV: Optik; Dioptrik. — **Dember**: Physikalische Grundlagen der Relativitätstheorie. — **Föppl**: Hydro- und Aerodynamik mit Anwendungen auf die Fluglehre; Seminar, Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Hugershoff**: Photogrammetrie. — **Luther**: Photographie; Praktikum; Selbständige Arbeiten; Physikalisch-chemisches und anorganisch-chemisches Kolloquium (mit Förster, Müller und Lottermoser). — **Erich Müller**: Elektrochemie; Physikalische Chemie; Praktikum für Elektrochemie. —

Universität Erlangen. **Wiedemann**: Experimentalphysik; Physikalisches Praktikum. — **Reiger**: Ausgewählte Kapitel aus der theoretischen Physik; Physikalisches Kolloquium (mit Würschmidt, Hauser und Frank). — **Würschmidt**: Geschichte der Mathematik und Physik; Die physikalischen Eigenschaften der Legierungen. — **Hauser**: Physikalische und medizinische Einführung in die Röntgentherapie (mit Wintz). — **Frank**: Thermodynamik; Physikalisches Seminar. —

Universität Frankfurt a. M. **Wachsmuth**: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik; Elektronik und Radioaktivität; Physikalisches Kolloquium (mit Born), Physikalisches Praktikum; Wissenschaftliche Arbeiten. — **Born**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus; Atomistik; Seminar über Probleme der modernen Physik (mit Stern und Landé). — **Landé**: Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. — **Stern**: Mechanik der Kontinua: Elastizitätstheorie und Hydrodynamik. — **Seddig**: Photographisches Praktikum; Leitung selbständiger Arbeiten. — **Déguisne**: Der elektrische Gleichstrom; Gleichstrom-Messungen; Grundlagen der Röntgentechnik; Die elektrische Beleuchtung; Kolloquium über die neuere Literatur der angewandten Physik (mit Dessauer); Elektrotechnisches Praktikum; Wissenschaftliche Arbeiten. — **Gramberg**: Maschinenkunde. — **Dessauer**: Einführung in die physikalischen Grundlagen der Medizin; Seminar für medizinische Physik, Lektüre und Besprechung neuerer Arbeiten. — **Linke**: Theoretische Meteorologie, Erdbebenkunde; Meteorologisch-geophysikalisches Kolloquium. — **Georgii**: Wetterkunde. —

Bergakademie Freiberg. **Brion**: Elektrotechnik; Elektrotechnisches Praktikum; Experimentalphysik; Physikalisches Praktikum. — **Ludewig**: Radiumkunde; Radioaktives Praktikum; Einführung in das physikalische Praktikum. —

Universität Freiburg i. Br. **Himstedt**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme; Physikalisches Praktikum; Physikalisches Kolloquium; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Cohn**: Theorie des Lichts; Einführung in die Vektorrechnung; Übungen aus der theoretischen Physik: Mechanik und Akustik. — **Königsberger**: Mathematische Physik: Elektrizität und Magnetismus; Astronomie der Atome; Anleitung zu selbständigen Arbeiten; Mathematisch-physikalisches Kolloquium. — **Friedrich**: Elektrizitätsleitung in Gasen; Kathodenstrahlen, Kanalstrahlen, Röntgenstrahlen mit Demonstrationen; Physik der Elektro- und Strahlen-Therapie; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Meyer**: Elektrochemie; Physikalische Chemie für Mediziner; Photographie; Mechanische Wärmetheorie; Physikalisch-chemisches Übungspraktikum; Selbständige physikalisch-chemische Arbeiten. —

Universität Freiburg (Schweiz). **Gockel**: Experimentalphysik I; Physik der Atmosphäre; Physik der Gestirne und kosmogonische Theorien; Physikalisches Praktikum (mit v. Hauer); Übungen in Radioaktivität und Elektronik; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Joye**: Allgemeine Physik I: Eigenschaften der festen, flüssigen und gasförmigen Körper; Mathematische Physik I: Elastizität, Hydrodynamik; Physikalisches Seminar; Praktische physikalische Übungen; Physikalisches Laboratorium; Untersuchungsarbeiten im Laboratorium. — **v. Hauer**: Ergänzungen und Erläuterungen zum physikalischen Praktikum; Photochemie. —

Universität Gießen. **König**: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik; Physikalisches Praktikum (mit Uller und Cermak); Leitung selbständiger physikalischer Arbeiten; Übungen in Demonstrationsversuchen und Behandlung einfacher theoretischer Hausaufgaben (mit Cermak); Physikalisches Kolloquium (mit Fromme). — **Cermak**: Handfertigkeitspraktikum; Elektrische Schwingungen. — **Uller**: Elementare technische Mechanik I. — **Jentzsch**: Fehlertheorie der optischen Instrumente auf Grund des Eikonalbegriffs; Wissenschaftliche Mikroskopie (mit Harrassowitz, Henneberg und Huntemüller). — **Fromme**: Theoretische Optik; Theoretisch-physikalische Übungen. — **Schlesinger**: Über Relativitätstheorie (gemeinverständlich). — **Peppler**: Grundlagen der Witterungskunde und Wettervorhersage. —

Universität Göttingen. **Pohl**: Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik; Interferenz und Beugung des Lichtes, insbesondere mit Rücksicht auf die Leistungsfähigkeit optischer Instrumente; Physikalisches Praktikum; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Wiechert**: Vermessungswesen: Höhere und niedere Geodäsie, Markscheidekunst, Nautik, Aeronautik; Physik des Erdkörpers: Erdbeben, Ebbe und Flut, Polschwankungen; Luftelektrizität; Polarlicht; Seminar: Geonomische Fragen; Geophysikalisches Praktikum. — **Reich**: Elektrotechnik; Fortschritte der Fernmeldetechnik im Kriege; Elektrotechnisches Praktikum; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten; Seminar über Elektrotechnik. — **Prandtl**: Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Hertz**: Grundbegriffe der theoretischen Physik; Relativitätstheorie. — **N. N.**: Mechanik. Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Rausch von Traubenberg**: Kinetische Gastheorie. — **Hoppe**: Geschichte der Mechanik bis Helmholtz. — **Tammann**: Physikalische Chemie: Über Einstoffsysteme; Kolloquium (mit Coehn); Physikalisch-chemisches Praktikum für Anfänger; Physikalisch-chemische Arbeiten. — **Coehn**: Moderne Theorien der Chemie; Neuere Atomistik, Radioaktivität, Elektronentheorie,

Nernstsches Wärmetheorem; Photographisches Praktikum: Photochemische Arbeiten. — **Vogel**: Thermische Analyse; Metallographisches Praktikum. —

Technische Hochschule Graz. **N. N.**: Physik; Elektrotechnik; Elektrotechnische Übungen; Enzyklopädie der Elektrotechnik. — **Streintz**: Physik. — **Geitler**: Schwachstrom-(Fernmelde-)Technik I: Telegraphie. —

Universität Graz. **Benndorf**: Experimentalphysik III: Elektrizität und Magnetismus; Physikalische Übungen I, II; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten; Besprechung physikalischer Fragen (mit Radakovic). — **N. N.**: Experimentalphysik I. — **Streintz**: Elektrisches Leitvermögen metallischer Leiter. — **Rosenberg**: Übungen in der Anstellung physikalischer Schulversuche. — **Radakovic**: Wärmelehre; Seminar für theoretische Physik. — **Wassmuth**: Ausgewählte Partien der statistischen Mechanik. — **Brell**: Vektorenrechnung mit Übungen; Elektrodynamik bewegter Systeme. — **Hillebrand**: Theoretische Astronomie; Sphärische Astronomie. — **Ficker**: Allgemeine Klimatologie; Luftelektrizität; Wettervorhersage; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Weitzenböck**: Mathematische Grundlagen der Relativitätstheorie. — **Kremann**: Physikalische Chemie III; Die physikalisch-chemische Methodik bei wissenschaftlicher Behandlung chemischer Probleme; Physikalisch-chemisches Praktikum für Vorgeschrittene. —

Universität Greifswald. **N. N.**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Optik, Thermodynamik; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen; Besprechung neuer physikalischer Arbeiten (mit Bestelmeyer und Seeliger). — **Bestelmeyer**: Einführung in die angewandte Physik II: Elektrizität; Physikalisches Praktikum; Theoretisch-praktische Übungen in Konstruktion und Handhabung physikalischer Apparate; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen. — **Seeliger**: Theorie der Elektrizität; Differentialgleichungen der Physik; Physikalisches Praktikum; Anleitung zu selbständigen Übungen. —

Universität Halle. **Mie**: Grundlinien der Physik; Experimentalphysik II: Elektrizität und Optik, Mathematische Ergänzungen; Physikalische Übungen; Kleines physikalisches Praktikum; Besprechungen neuerer physikalischer Arbeiten; Anleitung zu selbständigen physikalischen Untersuchungen. — **Schmidt**: Theorie des Magnetismus und der Elektrizität; Elektrische Wechselströme und Schwingungen; Übungen für angewandte Physik; Physikalisches Kolloquium; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Herweg**: Ausgewählte neuere Kapitel aus der Elektrizitäts- und Wärmelehre. — **Wigand**: Elektronen und Ionen; Aerophysikalisches Praktikum: Meteorologie, Aerologie, atmosphärische Elektrizität und Strahlung. — **Martiny**: Technik in der Gegenwart. —

Universität Hamburg. **Koch**: Experimentalphysik II; Physikalisches Praktikum (mit Goos und Müller); Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen (mit Classen). — **Hecke**: Funktionentheorie; Allgemeine Relativitätstheorie. — **Groß**: Kristallographie und Mineralogie; Kristallphysik; Petrographisches Praktikum für Fortgeschrittene; Anleitung zu selbständigen Arbeiten; Besprechung neuerer Arbeiten. — **Wegener**: Wetter und Wetterdienst. — **Möller**: Physik des Elektrons. — **Tams**: Erdmagnetismus. — **Jensen**: Probleme der Luftelektrizität. — **Classen**: Thermodynamik; Praktische Übungen für Fortgeschrittene. — **Voege**: Praktische Übungen auf dem Gebiete der angewandten Physik. —

Technische Hochschule Hannover. **Precht**: Experimentalphysik: Mechanik, Wärme, Schall, Strahlung (mit Quick); Physikalisches Laboratorium (mit Frau van Jindelt und Eckenberg). — **N. N.**: Grundzüge der Physik; Praktische Physik; Photographie. — **Bodenstein**: Physikalische Chemie; Elektrochemische Übungen (mit Braune, Grote und Kangro); Arbeiten im elektrochemischen Institut (mit Braune, Grote und Kangro); Übungen in der Elektroanalyse (mit Braune). —

Universität Heidelberg. **Lenard**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärmelehre; Physikalisches Praktikum (mit Becker und Ramsauer); Physikalisches Seminar; Wissenschaftliche Arbeiten Fortgeschrittener (mit Becker und Ramsauer). — **Becker**: Theoretische Mechanik; Elektrizitätsleitung in Gasen; Besprechung theoretisch-physikalischer Fragen. — **Ramsauer**: Radiologie mit Demonstrationen: Der Aufbau der Materie; Die Grundlagen der Relativitätstheorie. — **Schmidt**: Photographische Kurse. —

Universität Jena. **Wien**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Magnetismus, Optik; Physikalisches Praktikum (mit Pauli und Schrödinger); Leitung physikalischer Spezialaufgaben (mit Auerbach, Straubel, Pauli und Schrödinger); Physikalisches Kolloquium. — **Pauli**: Experimentalphysik IV: Elektrizität, Magnetismus, Optik. — **Auerbach**: Theorie des Lichtes; Mechanik der festen, flüssigen und gasförmigen Körper; Kinetische Theorie der Gase. — **Schrödinger**: Elektronentheorie; Konstitution der Materie. —

Universität Kiel. **Dieterici**: Experimentalphysik I; Mechanik, Akustik, Wärme; Physikalisches Praktikum (mit Madelung); Physikalisches Kolloquium (mit Madelung, Zahn, Martienssen und Schmidt). — **Madelung**: Theoretische Optik; Höhere Vektoranalysis und Einführung in die Relativitätstheorie; Einführung in die Quantentheorie; Übungen in der Anwendung der theoretischen Physik, Kolloquium. — **Zahn**: Theorie der Wechselströme. — **Martienssen**: Einführung in die Elektrotechnik. — **Schmidt**: Ausgewählte Kapitel aus der Optik des gesamten Spektrums. —

Universität Köln. **Rinkel**: Experimentalphysik: Akustik, Elektrizität, Optik; Eisenindustrie; Kleines physikalisches Praktikum; Großes physikalisches Praktikum. —

Universität Königsberg. **Kaufmann**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Licht; Praktisch-physikalische Übungen. — **Volkmann**: Ausgewählte Kapitel der theoretischen und praktischen Physik. — **Hoffmann**: Physik für Landwirte. — **Kretschmann**: Einführung in die Quantenlehre. —

Universität Marburg. **N. N.**: Experimentalphysik: Wärme, Magnetismus und Elektrizität, Elementarmathematische Ergänzungen; Physikalisches Kolloquium; Physikalisches Praktikum (mit Schulze und Take). — **Schulze**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus; Mechanik deformierbarer Körper: Elastizität und Hydrodynamik; Theoretisch-physikalisches Seminar. — **Feußner**: Geschichte der Physik; Dioptrik, besonders Auge und optische Instrumente. — **Take**: Physikalische Technologie I: Wärme- und Wasserkraftmaschinen; Repetitorium der Physik. — **Stuchtey**: Über Radioaktivität; Übungen in Handfertigkeit, im Experimentieren und im Experimentalvortrag. — **Thiel**: Physikalische Chemie II: Thermochemie und Elektrochemie; Einführung in die physikalische Chemie; Theorie der Lösungen; Physikochemisches Praktikum; Anleitung zu selbständigen Untersuchungen. —

Universität München. **Wien**: Experimentalphysik II: Mechanik und Optik; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Sommerfeld**: Mechanik; Theorie der Röntgenstrahlen; Seminar (mit Lenz, Ewald und Herzfeld); Theorie der Spektrallinien auf Grund des Bohrschen Atommodells; Selbständige Arbeiten. — **Graetz**: Experimentalphysik I: Wärme, Elektrizität; Physikalisches Praktikum: a) Übungen in physikalischen Messungen, b) Übungen in physikalischen Demonstrationen; Einleitung in die theoretische Physik I; Anleitung zu selbständigen Arbeiten aus der Physik. — **v. Groth**: Physikalische und chemische Kristallographie; Kristallographisches Prak-

tikum; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Schmauß**: Allgemeine Meteorologie und Klimatologie; Wetter und Klima in ihrer Wirkung auf den Menschen. — **Wagner**: Spektralanalyse der Optik und Röntgenstrahlung; — **Fajans**: Physikalische Chemie II: Thermodynamik, homogene Gleichgewichte, Elektrochemie; Elementare Einführung in die physikalische Chemie und deren Anwendungen; Kolloquium für physikalische und anorganische Chemie (mit Hönigschmid und Prandtl). — **Donle**: Einführung in die elektromagnetische Theorie des Lichtes. — **Gossner**: Wirtschaftlich wichtigere Mineralien, nach Vorkommen und Entstehung; Erforschung der Kristallstruktur, ihre Grundlage und Aufbau einzelner Stoffe im Kristallzustand; Kristallographisches Praktikum. — **Lenz**: Theorie der Wärmestrahlen. — **Ewald**: Thermodynamische Potentiale und ihre Anwendungen. — **Herzfeld**: Elektronentheorie der Metalle; Einführung in die statistische Mechanik II; Chemische Anwendungen der kinetischen Theorie und Quantentheorie. —

Technische Hochschule München. **Zenneck**: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme, Optik; Physikalisches Praktikum; Wissenschaftliche physikalische Arbeiten. — **Fischer**: Grundzüge der Physik I: Mechanik, Akustik, Wärmelehre; Elemente der theoretischen Physik II: Optik, Elektrizität und Magnetismus, Elektronik; Elektrizität und Magnetismus in mathematischer Behandlung; Praktisch-physikalische Übungen; Einführung in die wissenschaftlichen Methoden der Physik. — **Kossel**: Materie und Strahlung: Physikalische Grundlagen der Leuchttechnik; Periodisches System und Atommodelle. — **v. Angerer**: Spektralanalyse. — **Knoblauch**: Anwendungen der Thermodynamik auf physikalisch-chemische Erscheinungen; Technisch-physikalisches Praktikum; Anleitung zur Ausführung wissenschaftlicher Arbeiten. — **Hencky**: Die Gesetze der Wärmeübertragung und ihre Anwendung in der Technik. — **Emden**: Meteorologie und Klimatologie; Fouriersche Reihen, Kugel- und Zylinderfunktionen in ihrer Anwendung auf physikalische Probleme. — **Dieckmann**: Drahtlose Telegraphie und Telephonie; Hochfrequenzmeßtechnik I; Praktikum zur Hochfrequenzmeßtechnik I; Anleitung zu wissenschaftlichen Untersuchungen aus dem Gebiete der angewandten Physik. — **Schröter**: Mechanische Wärmetheorie. —

Universität Münster. **Schmidt**: Experimentalphysik II: Elektrizität, Optik; Physikalisches Praktikum (mit Szivessy); Physikalisches Seminar. — **N. N.**: Einführung in die theoretische Physik; Mathematisch-physikalisches Seminar. — **Szivessy**: Die Relativitätstheorie von Einstein; Prinzipien der Mechanik und die Mechanik raumerfüllender Massen. —

Universität Prag. **N. N.**: Experimentalphysik I; Physikalisches Praktikum; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Frank**: Theorie der Elastizität fester Körper; Theorie des Kreisels; Besprechung der neueren Literatur. — **Fürth**: Elektronentheorie; Einführung in die mathematische Behandlung der Naturwissenschaften. — **Rothmund**: Physikalische Chemie I; Radioaktivität; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten. — **Spitaler**: Allgemeine Meteorologie. —

Technische Hochschule Stuttgart. **Regener**: Experimentalmechanik einschließlich Akustik; Physikalische Messungen; Physik; Physikalisches Praktikum für Anfänger; Anleitung zu wissenschaftlichen Arbeiten; Physikalisches Kolloquium. — **N. N.**: Theoretische Physik. — **Glocker**: Ausgewählte Kapitel aus der neueren Physik; Röntgentechnik. — **N. N.**: Relativitätstheorie. —

Universität Würzburg. **Stark**: Experimentalphysik; Physikalische Übungen; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Harms**: Theoretische Physik: Elektrizitätslehre außer Elektrostatik, Grundzüge der elektromagnetischen Lichttheorie. — **Rau**: Neuere Forschungen über den Bau der Materie. — **Schottky**: Thermodynamik. —

Universität Zürich. **Meyer**: Experimentalphysik: Mechanik, Akustik, Wärme; Ausgewählte Kapitel der Physik; Repetitorium der Physik; Physikalisches Praktikum; Ausführung selbständiger wissenschaftlicher Arbeiten; Physikalisches Kolloquium. — **Greinacher**: Kathoden-, Kanal-, Anoden- und Röntgenstrahlen; Radiologisches Praktikum. — **Ratnowsky**: Theoretische Physik I: Mechanik II: Mechanik deformierbarer Körper. — **Tank**: Drahtlose Telegraphie. — **Meißner**: Übungen im Demonstrieren von Schulexperimenten. — **Epstein**: Mechanik I: Mechanik diskreter Massenpunkte und starrer Körper; Ausgewählte Kapitel der höheren Dynamik. —

Technische Hochschule Zürich. **Debye**: Physik: Mechanik, Akustik, Elektrizität; Molekülbau: Physikalisches Praktikum für Anfänger (mit Piccard und Scherrer); Wissenschaftliche Arbeiten in Physik. — **Baur**: Physikalische Chemie II; Allgemeine Elektrochemie; Physikalisch-chemisches Praktikum; Elektrochemisches Praktikum; Physikalisch-chemisches und elektrochemisches Laboratorium. — **Brentano**: Elektrizitätsdurchgang in Gasen und verwandte Erscheinungen; Meßkunde, insbesondere elektrische Messungen. — **Dällenbach**: Zur Theorie der Ankerwicklungen; Elektrodynamik bewegter Körper. — **Piccard**: Experimentalphysik: Physikalische Präzisionsmessungen; Wissenschaftliche Arbeiten. — **de Quervain**: Ausgewählte Kapitel der Geophysik. — **Scherrer**: Physik I; Kinetische Theorie der Materie; Wissenschaftliche Arbeiten. — **Weyl**: Funktionentheorie; Riemannsche Geometrie; Besprechung von Riemanns Habilitationsvortrag und der anschließenden Literatur; Relativitätstheorie; Mathematisches Seminar (mit Pólya). —

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Wien Dr. Adolf Smekal für Physik.

Ernannt: Der ord. Professor der Mathematik an der Universität Erlangen Dr. Ernst Fischer in gleicher Eigenschaft an der Universität Köln, der ord. Professor der theoretischen Physik an der Universität Breslau Dr. Clemens Schaefer zum ord. Professor der Experimentalphysik an der Universität Marburg, der Privatdozent Dr. G. A. Brender a Brendis zum a.o. Professor für chemische Technologie an der Technischen Hochschule Delft, der frühere ord. Professor an der Universität Moskau Dr. J. Plotnikow zum ord. Professor für physiologische Chemie und Physik an der Technischen Hochschule Agram, der a.o. Professor an der Universität Ohio Dr. J. E. Day zum a.o. Professor der Chemie an der Universität in Wisconsin.

Berufen: Der Privatdozent an der Technischen Hochschule Stuttgart Dr. W. Schumann zum a.o. Professor für technische Physik an der Universität Jena.

Gestorben: Der frühere Professor für angewandte Chemie an der Universität Toronto Dr. William Hodgson Ellis.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 21/22. 1./15. November 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 23/24 am 5. Dezember 1920.

INHALT:

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN VON DER 86. NATURFORSCHERVERSAMMLUNG IN NAUHEIM VOM 19.—25. SEPTEMBER 1920.

W. Hallwachs (Dresden), Lichtelektrizität als Funktion des Gasgehalts.

Über vier mit dem gleichen Ziel, nämlich die Abhängigkeit der Lichtelektrizität der Metalle vom Gasgehalt festzustellen, im Physikalischen Institut Dresden von den Herren Sende, Simon, Suhrmann und mir ausgeführte Arbeiten möchte ich berichten.

Bei der an Metallen beobachteten Lichtelektrizität spielen die Gase, welche sich auflagern, und die, welche aufgenommen sind, eine doppelte Rolle, wie es sich mir seinerzeit, angeregt von einem Versuchsergebnis des Herrn Lenard, durch die Tatsache aufdrängte, daß frisch gereinigte Metalloberflächen nach dem Verbringen in ein kleines, geschlossenes Gefäß eine Lichtelektrizität ergaben, die zuerst etwas ansteigt und erst später, nach Überschreiten eines Maximums, langsam ins Abfallen kommt. Dies führte zur Auffassung, daß zwar einerseits die sich allmählich auflagernde Gasschicht eine Elektronen absorbierende Wirkung ausübt, andrerseits aber das Einlagern von Gasmolekülen zwischen die Metallatome eine die Elektronenabtrennung befördernde. Diese Auffassung wurde nach zwei Richtungen in ihren Konsequenzen mit positivem Ergebnis in unserm Institut verfolgt.

Erstens fand Herr Ullmann, daß entgegen den früheren ziemlich widersprechenden Ergebnissen, wenn man nur schnell genug arbeitete, um die Ermüdung zu vermeiden, die Lichtelektrizitäten an Zink, bei Atmosphärendruck gemessen, in H, Luft und CO^2 sich verhielten wie 1 : 3 : 7, und daß Zufügen von Wasserdampf (80proz. Sättigung bei Zimmertemperatur) sie auf das 2,5 fache brachte. Im Anschluß an die Theorie der Phosphoreszenz von Herrn Lenard entwickelte sich die Vermutung, daß hier die Dielektrizitätskonstante des Gases bestimmend sei, was eine Arbeit von Herrn Paech in unserm Institut, in den Folgerungen als richtig

erwies, indem in Methyläther, Äthylen und namentlich in NH^3 die Lichtelektrizität besonders groß war, in NH^3 fünfmal so groß wie in Luft[1]).

Zweitens gelang es Herrn Wiedmann[1]) ein Verfahren zu gewinnen, um Kalium zu entgasen, indem er es langsam und vorsichtig mehrfacher Destillation unterwarf, bei welcher man schließlich das Gas stufenweise, jedesmal nur in kleineren Mengen, entfernte und die Destillation unterbrechend wegpumpte, so daß der Druck immer sehr klein blieb. Dabei nahm die Lichtelektrizität ab und konnte schließlich auf etwa 1 Proz. ihres Wertes gebracht werden, schon weit früher war der sich gleichsam überlagernde selektive Photoeffekt verschwunden. Wenn andere Beobachter diese Versuche nicht zum selben Ziel gebracht haben, so liegt dies meiner Ansicht nach daran, daß sie die Entgasung nicht erreicht haben. Auch die neusten diesbezüglichen Versuche der Herren Elster und Geitel[2]) bedienen sich leider eines zu primitiven Verfahrens. Über die Vorsichtsmaßregeln dabei soll später, bei Besprechung des Platins, einiges gesagt werden.

Die Fortsetzungen dieser Gasentleerungsversuche fanden mit Pt statt, da sich mit diesem die lichtelektrische Gasentleerungskurve in vielen Punkten während des Verlaufs der Entleerung ohne größeren Zeitverlust aufnehmen ließ und da Versuchen mit Pt voraussichtlich durchschlagendere Überzeugungskraft innewohnen würde, wie solchen mit K oder mit Zn[3]). K zeigt ja lichtelektrisch verwickelte Verhältnisse und besondere experimentelle Schwierigkeiten, da man die ganze Zelle erwärmen muß, sich nicht auf kleine Teile derselben beschränken kann, und bei den Versuchen mit Zn war die Entgasung durch Schaben bewirkt worden, ein Prozeß, bei dem man nicht recht übersah, was eigentlich geschieht. Ich möchte zufügen, daß meiner Erfahrung nach dabei erstens die adhärierende Gashaut mechanisch weggenommen wird, außerdem aber die Erwärmung der Platte wesentlich zur Beseitigung aufgenommenen Gases mitwirkt, wenigstens wird im allgemeinen die Platte lichtelektrisch um so empfindlicher, je wärmer sie sich beim Reinigen anfühlt. Ferner scheint beim Zn das Gas nicht im geschmolzenen Zustand einzutreten und dann beim Erkalten gefangen zu werden, sondern erst in den festen Körper, aber nur wenig weit, einzudringen, so daß die inneren Schichten gasleer bleiben.

Beim Pt sollte, nach der oben geschilderten Auffassung der doppelten Gaswirkung, beim Gasaustreiben die Lichtelektrizität zuerst ansteigen, dann ein Maximum überstreichen und schließlich wieder stark herabgehen. Der Grad, in welchem letzteres geschah, mußte die Frage zu entscheiden gestatten, für welchen Bruchteil der Lichtelektrizität das Vorhandensein von Gas notwendig ist. Ich will vorausnehmen, daß sich für diesen Bruchteil schließlich 99,9 Proz. ergaben.

Das Vorhandensein des Maximums nachzuweisen, gelang zunächst Herrn Kober, über dessen Versuche, nachdem er im Krieg gefallen war, kurz berichtet worden ist[1]). Er fand auch, daß diesseits des Maximums nach Abstellen des Glühens, wo dann wieder Gas aus dem umgebenden Metall hinzudiffundieren mußte, die Lichtelektrizität allmählich abnahm, jenseits des Maximums aber allmählich stieg. Auch Herr Stumpf beobachtete in unserem Institut bei Pd und Wasserstoff Andeutungen des Maximums[2]).

Wenn diese Versuche mit Pt die Frage nach der Notwendigkeit der Gase bei der Lichtelektrizität der Metalle zum Abschluß bringen sollten, war jede Fehlerquelle, welche allenfalls bei den Koberschen Arbeiten, die vielfach noch den Charakter von Vorversuchen trugen, einspielen konnte, eingehend zu prüfen, das Ergebnis gegen sie zu sichern. Diese Arbeit führte zunächst Herr Dr. Sende in seiner Dissertation aus und, als auch er ins Feld mußte, Herr Dr. Simon, der die Arbeit zum Abschluß zu bringen vermochte.

Als Reagens für die Fehlerquellen und als Beweismittel ihrer Beseitigung diente die Anbringung eines Zwillings der zu glühenden Platinfolie in der lichtelektrischen Zelle (einer innen versilberten Kugel von schließlich 20 cm Durchmesser[3])), welche „Prüffolie" in den Versuchen keine Glühungen erfahren sollte. War die Wirksamkeit der Fehlerquellen (Wandladungen durch Thermionen, Leitfähigkeit des Versuchsraumes, zu beträchtliche Wirkung der beim Glühen entwickelten Wärme auf die umgebenden Körper in der Zelle und dadurch veranlaßte Gasentbindung und Gaszuleitung durch Diffusion durch die Zuleitungen) beseitigt, so mußte die Prüffolie während der Versuchsreihen lichtelektrisch ungeändert bleiben.

Mit Hilfe dieser Prüffolie konnte zunächst

1) Die im Vorigen erwähnte Literatur ist angegeben in G. Wiedmann und W. Hallwachs, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 107—120, 1914.

2) J. Elster † und H. Geitel, Diese Zeitschr. 21, 363—387, 1920. Vielleicht ist aber S. 366, Zeile 1—6 kurze Zeit, solange aus dem Draht nicht wieder Gas zudiffundierte, Entgasung da gewesen, als die Lichtelektrizität wegblieb.

3) H. Küster, Diese Zeitschr. 15, 68—75, 1914.

1) W. Hallwachs, Diese Zeitschr. 16, 95, 1915.

2) F. Stumpf, Verh. d. D. Phys. Ges. 16, 989—994, 1914.

3) Die Versuchsanordnung soll in den Ann. d. Phys. näher beschrieben werden.



festgestellt werden, daß Wandladungen und Leitfähigkeit außer Spiel waren, aber aus den umgebenden Körpern durch die erzeugte Wärme sowohl, als auch durch Diffusion von den Elektroden her Gase herangebracht wurden. Beides ließ sich dadurch ganz geringfügig machen, daß immer nur kurze Glühungen unter Einschaltung von Zwischenpausen stattfanden. Dieses Verfahren gestattete auch jeweils nur sehr kleine Gasmengen in die Zelle zu bringen und mit Hilfe des Mc Leod das Fortschreiten der Entgasung quantitativ im einzelnen zu verfolgen, bis dann schließlich weitere Glühungen kein Gas mehr herausbrachten, der Druck im Mc Leod je nach der Geduld, die man verwendete, auf 10^{-5} mm oder weniger verblieb. Einige 10^{-5} mm machten übrigens lichtelektrisch nichts mehr aus. Im Verlaufe der Versuche war auch das Pumpverfahren folgeweise verbessert worden: auf die Gaedesche *Hg*-Pumpe folgte die Molekularpumpe, dann die Diffusionspumpe mit der Molekularpumpe, als Vorpumpe ein geradezu ideales Entleerungsverfahren, welches gestattet, fast ohne jede Wartung 4 Wochen lang die Gasleere auf 10^{-6} mm zu erhalten. Ein Vorvakuum von 60 Liter Inhalt unterstützte vielfach die Schnelligkeit der Wegbringung der durch das Glühen entwickelten Gase. Da nicht bloßes Auspumpen, sondern nur Erhöhung der Temperatur Gasabgabe der Wände und der inneren Apparateile in den Versuchsraum bewirkt, führte das geschilderte Glühverfahren, bei dem die inneren Teile einschließlich der Wände kalt blieben, sehr gut zum Ziel. Dies bildet einen Vorteil gegenüber dem Fall thermionischer Versuche, wo das Glühen während der Versuche immerzu fortgesetzt werden muß, in unserem Falle dagegen sich z. B. auf je 10 sec beschränken kann. — Das letzte, gegen das man sich noch zu schützen hat, ist die Zudiffusion von Gasen von den Elektroden her. Der lichtelektrische Vergleich der Mitte der Folien mit näher an den Einklemmungsstellen gelegenen Stellen, der unter Verbindung eines nur ganz kleinen Lichtfleckes geschehen kann, zeigte, wie in der Mitte die Entgasung weiter fortschritt als an den von ihr entfernten Stellen (s. Fig. 2). Die Anwendung langer Folien und Bestrahlung lediglich der Mitte derselben drückte diese Wirkung der Gasdiffusion genügend herab (Simon).

Das Schlußergebnis aller Versuche möge durch eine der gewonnenen Kurven dargestellt werden, bei welcher als Abszisse die Zahl der Glühungen dient, als Ordinate die Lichtelektrizität in Skalenteilen in der Sekunde. Die Versuchsdauer betrug 13 Stunden.

Von einem meist kleinen Anfangswert aus

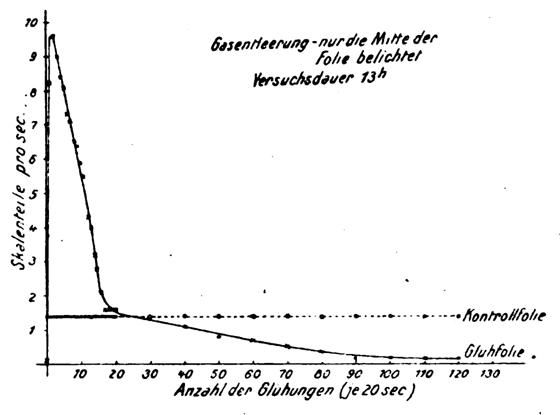


Fig. 1.

steigt die Lichtelektrizität zu einem Maximum um so rascher auf, je näher der Glühstrom an den Durchschmelzstrom heranreicht. Sollen viele Punkte der aufsteigenden Kurve gewonnen werden, so ist der Glühstrom verhältnismäßig schwach zu wählen. Da das Maximum in verschiedenen Versuchen nur wenig verschiedenen Wert besitzt, während der Anfangswert von der Vorgeschichte abhängt und sich in weitem Gebiet willkürlich einstellen läßt, so ist es zweckmäßig, beim Vergleich der verschiedenen Werte diese auf das Maximum zu beziehen und nicht auf den Anfangswert. Nach Erreichung des Maximums geht die Lichtelektrizität mit der weiteren Gasaustreibung herab. Um ganz frei von Stoßionisation zu messen, wird nach dem Austreiben einer Gasportion die lichtelektrische Messung erst dann ausgeführt, wenn wieder bis auf mindestens 5×10^{-4} mm ausgepumpt ist, bzw. noch weiter in den späteren Teilen der Versuchsreihen, wo dann der Druck auch nach den Glühungen nur wenig und immer weniger ansteigt. Die Prüffolie bleibt während des ganzen Versuchs konstant. Bis zu welchem Endwert der Lichtelektrizität man herab kommt, hängt davon ab, wie weit es gelingt an denjenigen Strom heranzukommen, bei welchem Durchschmelzen eintreten würde. $^1/_{10}$ bis $^1/_{20}$ des Maximums läßt sich ohne Unfall, d. h. ohne Durchschmelzen erreichen, ob noch weniger, das hängt vom Glück ab. Es gelang zunächst bis auf $^1/_{60}$ des Maximums herunterzukommen. Um noch weiter zu gelangen, wird der Strom schließlich bis zum Durchschmelzen verstärkt, wonach mit der lichtelektrischen Messung fortgefahren werden kann, wenn nicht gerade unglücklicherweise die Schmelzstelle der Folie im Gebiet des Lichtfleckes liegt. Die Lichtelektrizität ist dann unter die Beobachtungsgrenze gesunken, d. h. bei unserer Anordnung unter ein Tausendstel des Maximums. Daß dieses Verschwinden nicht an einer Störung infolge des Durchschmelzens liegt,

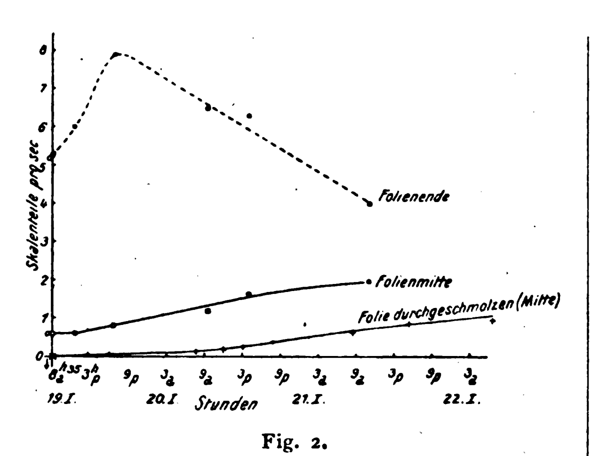


Fig. 2.

ergibt sich daraus, daß sie mit der Zeit wieder langsam hervortritt. Die obige Fig. 2 zeigt den Wiederanstieg in den ersten drei Tagen, für den Fall langsamster Gaszufuhr (Druck dauernd auf unter 10^{-6} mm gehalten), wo Gas nur durch die Diffusion längs der Folie nach der Mitte herankommt, wie sich durch lichtelektrischen Vergleich mit den Enden der Folie ergibt.

Daß die Lichtelektrizität über das Maximum von rückwärts her bei geeigneter Gaszufuhr läuft, wurde in vielen Versuchen festgestellt. Dabei ging man gewöhnlich von dem vor dem Durchschmelzen erzielten Endwert aus. Gas von geeignet gewählten Drucken blieb während geeignet gewählter Zeiten in Berührung mit der vorher entgasten Platte, nach dem Wiederauspumpen bis über die Stoßionisationsgrenze fand die Messung der Lichtelektrizität statt. Es ließen sich dann genügend viel Punkte der Kurve bestimmen, das Maximum von hinten durchlaufen. Daran konnte wieder ein Entgasungsversuch, an diesen wieder ein Gaszufuhrversuch angeschlossen werden und so fort (s. z. B. Fig. 3). Wird möglichst schnell die vorher entgaste Platte in Volldruck gesetzt und die Lichtelektrizität sofort in

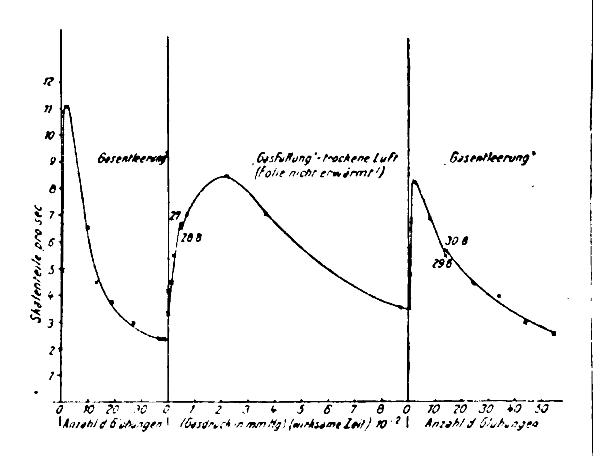


Fig. 3.

Volldruck gemessen, so pflegt sie gerade das Maximum von hinten durchlaufen zu haben und nimmt dann schnell weiter ab. Durch bloßes Pumpen läßt sich die Luft nicht wieder von dem Metall entfernen, sondern beim Auspumpen, nachdem die Platte genügende Zeit im Volldruck gewesen war, liefert sie in bester Gasleere ungefähr wieder dieselbe Lichtelektrizität wie zu Anfang im Volldruck. Erst durch Steigerung der Temperatur, durch Glühen, geht das Gas wieder weg. Das Maximum hat beim Durchlaufen von hinten einen etwas geringeren Wert wie beim Durchlaufen von vorn, was begreiflich ist, weil in letzteren Fall die absorbierende, adhärierende Gasschicht fortgenommen, im ersteren Fall aber schon teilweise gebildet ist, wenn die Messung der Lichtelektrizität stattfindet. Da die Zufuhr von Luft zur vorher entgasten Platte das Durchlaufen der Kurve von hinten über das Maximum weg bewirkt, ergibt sich, daß nicht etwa der *H*, wie es vielfach hypothetisch angenommen worden ist, das Gas ist, welches die Lichtelektrizität erzeugt. Es wirken vielmehr trockene Luft, feuchte Luft oder *H* bei der Zufuhr zur vorher entgasten Platte ganz analog. Nach früheren Versuchen hat *H* eine quantitativ erheblich geringere Wirkung wie Luft.

Die geschilderten Versuche erweisen, wie ich denke, schlagend, daß für die 99,9 Proz. der im Maximum beim *Pt* beobachteten Lichtelektrizität Vorhandensein von Gas im Metall notwendige Bedingung ist. Man kann also von der Lichtelektrizität der Metalle selbst eigentlich nur sprechen, wenn darunter nicht reine, gasfreie Metalle verstanden werden, sondern Gasmetalle, wie wir sie im allgemeinen vor uns haben. Zu einem entsprechenden Ergebnis war vorher Herr Wiedmann mit dem *K* und Herr Küstner mit geschabtem *Zn* gelangt.

Der Einfluß des Gases wurde dann noch in einer gerade beendigten Arbeit des Herrn Suhrmann in anderer Richtung untersucht. Die erste Schicht des Gases, offenbar das, was adhäriert und Elektronen absorbiert, geht sehr leicht weg, so daß sehr vorsichtig geglüht werden muß, wenn mehrere Punkte des aufsteigenden Astes beobachtbar sein sollen. Mit dem Weggehen dieser Schicht muß sich aber die rote Grenze der lichtelektrischen Wirkung verschieben, sie muß weiter nach dem Rot hinrücken, indem nach Wegfall des Belages gerade die langsamen Elektronen, welche sonst absorbiert würden, noch herauskommen können. Geht man dann über das Maximum hinaus zur weiteren Entgasung, so muß die rote Grenze wieder zurückgehen nach dem Ultraviolett hin. Dies ist tatsächlich der Fall, wie mit spektral zerlegtem Licht unter thermoelektrischer Energieauswertung der ein-

zelnen Linien der *Hg*-Lampe und Auswertung der starken Absorption des Lichtes in Quarzlinse und Quarzdeckplatte der Zelle, so daß man die scheinbare spezifische Lichtelektrizität des *Pt* bestimmen konnte, festgestellt wurde. So lag z. B. bei einer noch ungeglühten Platte die rote Grenze bei 260 $\mu\mu$, nach 10 sec Glühen mit Rotglut schoß sie bis über 300 $\mu\mu$ vor, um nach 6 mal 10 sec Glühen auf 285 zurückzugehen. Da die einzelnen Glühungen mit der gewählten Stromstärke nur sehr schwach wirkten, fanden jetzt 400 Glühungen zu 10 sec mit 20 sec Pause dazwischen statt, wonach die Grenze bei 283 lag, um nach 600 Glühungen mit stärkerem Strom, leichte Weißglut, auf 280 und nach 200 weiteren Glühungen mit abermals stärkerem Strom (Hellweißglut), wobei die austretenden Gasmengen schließlich nur noch ganz gering wurden und man auf den fünften Teil des Maximums mit der Empfindlichkeit heruntergekommen war, nach 270 zurückzugehen.

In einem anderen Versuch lag die Grenze zunächst bei 254, rückte nach 10 min langem starken Glühen auf mindestens 300, aber auch 313 und selbst 334 gab noch deutlich feststellbare Wirkung. Eine ganz bestimmte rote Grenze gibt es eben nicht, man kann sie nur quantitativ definieren, d. h. in der Richtung, daß man sagt: Rote Grenze ist die Wellenlänge, bei welcher die spezifische Lichtelektrizität unter $^1/_{1000}$ oder $^1/_{10000}$ der mittleren rückt. Weiteres Ausglühen verrückte die Grenze zunächst nur wenig, 313 ließ sich noch eben als wirksam feststellen; weitere 30 kräftigste Glühungen, durch welche schließlich die Empfindlichkeit auf etwa 6 Proz. der Maximalen zurückging, ließ die Grenze auf 276 als noch eben erkennbar zurückgehen. Man sieht also, daß die aus unserer Auffassung hervorgehende Konsequenz für das Wandern der Grenze erfüllt ist, sowohl in derjenigen Richtung, daß die sehr leicht zu beseitigende adhärierende Gasschicht die Absorption der langsamen Elektronen verschwinden läßt, als auch in der, daß mit fortschreitender Entgasung das wirksame Licht immer ultravioletter werden muß.

Aus den bei diesen Versuchen gewonnenen Werten der spezifischen Lichtelektrizität für die verschiedenen Teile des Spektrums läßt sich ein Urteil gewinnen über die Abhängigkeit der Entgasungswirkung von der Farbe. Sei L_M die spezifische Lichtelektrizität für das Maximum, L_0 nach der Entgasung in den betreffenden Versuchen, so ergibt sich für das Verhältnis L_M/L_0

	$\mu\mu$	217	221	224	239,5	254	265,5
L_M/L_0	I	—	7,9	8,0	13,9	19,8	56
	II	7,4	7,8	8,3	11,4	22,4	61

Während also für die Linie 265 die Lichtelektrizität bei der Entgasung auf 1,7 Proz. gefallen ist, hat sie sich bei 217 nur auf 13,5 Proz. ermäßigt, bleibt aber immer noch so stark, daß man sieht, auch bei dieser kurzen Wellenlänge ist das Gebiet, wo etwa das Gas keinen oder nur geringen Einfluß mehr hätte, wo von einer Lichtelektrizität des Metalls allein die Rede sein könnte, noch lange nicht erreicht und beim langsamen Abfallen der Gaswirkung im Gebiet der kurzen Wellen hier ist zu schließen, daß ein solches Gebiet z. B. auch bei 150 $\mu\mu$ noch nicht erreicht sein würde, wahrscheinlich noch weiter draußen liegt.

Beim Zusammenfassen aller Ergebnisse komme ich zur Ansicht, daß zur Zeit folgende Auffassung des lichtelektrischen Grundprozesses der weiteren Forschung am besten zugrunde gelegt wird. Für ein sehr kurzwelliges Gebiet (180—120 $\mu\mu$) sind die reinen Gase für sich lichtelektrisch wirksam, wie Herr Lenard seinerzeit zeigte; es ist zur Zeit kein Grund vorhanden anzunehmen, daß solches für gasfreie Metalle nicht der Fall sein sollte. Tritt Gas in geeigneter Menge hinzu, so werden durch das Zusammenwirken der von den verschiedenartigen Atomen auf gewisse Elektronen ausgeübten Felder die resultierenden Felder abgeschwächt. Damit gehen die Schwingungszahlen der betreffenden Elektronen herab und letztere kommen dem Grenzzustand näher, wo sie bereits durch halbchemische Wirkungen herausgebracht würden. Längerwelliges Licht, welches bei einigen Substanzen bis weit ins sichtbare Gebiet der Strahlung hinüberreicht, vermag dann, in Unterstützung der genannten Feldwirkung, Elektronen lichtelektrisch abzutrennen.

Es möchte vielleicht die Frage auftauchen: Werden nun eigentlich die Elektronen der Gasmoleküle oder solche der Metallatome abgespalten. Ich denke, daß diese Frage etwas anders und schärfer zu stellen ist, nämlich: In welchem Maße sind die beiden Elektronensorten in jedem einzelnen Fall beteiligt. Es könnte ja, um nur ein Beispiel zu erwähnen, auch so sein, daß bei der Lichtelektrizität des *Pt* im gewöhnlich angewandten Spektralgebiet die Elektronen der Hauptmasse nach aus Gasatomen entstammen, daß aber, wenn man bis zum *K* fortschreitet, auch Elektronen, die den Metallatomen zugehören, in Frage kommen. Bezüglich des selektiven Photoeffekts, welcher sich der lichtelektrischen Wirkung in gewissen Fällen gleichsam überlagert, wäre dann zu untersuchen, ob derselbe vielleicht auf besonders starker Absorption der betreffenden Lichtsorten in den im *K* reichlich gelösten Wasserstoffmolekülen beruht, was wegen der Nachbarschaft von kräftigen Wasserstofflinien im Gebiet des Maximums des selektiven Photoeffektes nicht sehr unwahr-



scheinlich ist, oder es könnte sich auch z. B. chemisch eine zweite Substanz bilden, welche durch ihre Einlagerung analog wie die Gase wirkt, eventuell auch dadurch, daß sie im betreffenden Spektralgebiet besonders stark absorbiert. — Ich möchte noch hinzufügen, daß die Untersuchungen der lichtelektrischen Höchstenergien bisher meist an nicht entgasten Metallen vorgenommen wurden, es möchten diese Untersuchungen durch solche ersetzt werden, bei welchen der adhärierende Gasbelag fortgenommen ist, was sich, wie unsere Versuche gezeigt haben, durch geeignet kurzes Glühen erreichen läßt. Man müßte auf einen bestimmten lichtelektrischen Zustand am besten auf den des Maximums der Wirkung zukommen, wenn die Beziehungen der Erstenergien reiner dargestellt werden sollen.

Nachdem es erreicht ist, Metalle entgasen zu können, läßt sich auch die Verschiedenheit der Lichtelektrizität in verschiedenen Gasen weiter prüfen als es früher der Fall war, wo man solche Entgasung noch nicht hatte. Die ganz hervorragende Lichtelektrizität in NH^3 bleibt nach Versuchen, die ich vor kurzem anstellte, erhalten. Bei Atmosphärendruck ist sie 5—6 mal so groß wie das Maximum luft- oder wasserstoffgesättigter *Pt*-Folien im Vakuum. Im Maximum der Stoßionisation ergaben sich außerordentlich starke lichtelektrische Ströme, etwa die 70fachen wie in Luft. Hinsichtlich der Ad- und Absorption zeigt NH^3 ein anderes Verhalten wie Luft, das aufgenommene Gas läßt sich einfach durch Auspumpen wegbekommen, während bei Luft, wie oben erwähnt, nichts bis jetzt lichtelektrisch Merkbares weggeht, wenn lediglich ausgepumpt wird; dazu ist Erhöhung der Temperatur erforderlich. So kommt es, daß man bei NH^3 nicht etwa mit Gas beladen, dann leeren und lichtelektrisch im Vakuum untersuchen kann; bis letzteres erreicht wird, ist das NH^3 fast ganz weg. Etwa bei verschiedenen Drucken lichtelektrisch zu arbeiten, hat wegen der dann stattfindenden Stoßionisation keinen Zweck. Diese läßt sich nur vermeiden und gleichzeitig die Gasbeladung beibehalten, wenn bei genügendem Druck, mindestens $^1/_2$ Atmosphäre in unserem Falle, besser bei Atmosphärendruck gearbeitet wird. Das Ziel der Untersuchung, nämlich die Wirksamkeit des NH^3 mit der der Luft zu vergleichen, läßt sich auch so erreichen. Bei Luft hat man ja bei Volldruck und im äußersten Vakuum ziemlich genau denselben lichtelektrischen Strom, weil der Gasgehalt sich durch das Auspumpen nicht wesentlich ändert, die Zahl der lichtelektrisch gebildeten Elektronen daher dieselbe bleibt und die Stoßionisation in beiden Fällen, in der äußersten Leere wie bei Volldruck, keinen Einfluß hat. — Kommt ferner eine entgaste Platte plötzlich in Luft von Atmosphärendruck, so faßt man bei schleunigster lichtelektrischer Messung, wie oben erwähnt, die Platte auf dem Rückweg über das Maximum ab, und sie sinkt dann lichtelektrisch weiter rasch ab, weil sich der äußere Elektronen absorbierende Belag, der Ermüdungsbelag, ausbildet. In NH^3 kommt, je nach den Verhältnissen in kürzerer oder längerer Zeit, beim Verbringen der vorher entgasten Platte in Volldruck ein sehr hoher Wert der Lichtelektrizität zustande, etwa der Sechsfache des Maximums in Luft, und dieser Wert nimmt mit der Zeit, soweit die Versuche, die ich angestellt habe, bis jetzt reichen (12^h), nicht ab, sondern etwas zu, was offenbar dem Gegeneinanderwirken der beiden Gaseinflüsse zu verdanken ist. Bis jetzt deuten alle Versuche, die ich am NH^3 angestellt habe, darauf hin, daß die Absorption von Elektronen in der adhärierenden Schicht sehr gering bei NH^3 ist und die Fähigkeit der von den *Pt*-Molekülen beeinflußten NH^3-Moleküle, Elektronen abzugeben, sehr groß.

Eine lichtelektrische Volumwirkung auf das NH^3 findet, wie Herr Paech durch besondere Versuche nachwies, unter den angewandten Versuchsbedingungen nicht statt. Die gerade eben in unser Spektralgebiet etwas herüberreichende photochemische Zersetzung des NH^3 legt aber die Auffassung nahe, daß am Metall anliegendes NH^3 ganz besonders leicht Elektronen abspalten wird, womit die große Lichtelektrizität des NH^3 durch unsere weiter oben erwähnte ganze Anschauung des lichtelektrischen Grundprozesses erklärt wäre. Demgemäß läge es auch nahe zu vermuten, daß die photochemische Zersetzbarkeit des NH^3 für den Fall, daß es an Metalle grenzt, vergrößert würde, was alles weiterer Untersuchung vorbehalten bleibt.

Zum Schluß möge noch bemerkt werden, daß die Möglichkeit den Gasgehalt der Platte einigermaßen zu beherrschen, insbesondere den adhärierenden Belag leicht wegzubringen, ohne das aufgenommene Gas stärker anzugreifen, auch eine experimentelle Grundlage für das weitere Studium der Kontaktpotentiale abgeben möchte, worüber Arbeiten gerade in Gang kommen. Man darf hoffen, daß dies alte noch ungelöste Problem, den Mechanismus der Ausbildung der Kontaktpotentiale kennen zu lernen, nun seiner Lösung näher gebracht werden kann.

(Ausführlicher Bericht soll in den Annalen der Physik erfolgen.)

Diskussion.

Marx: Die prinzipielle Frage ist offenbar, ob die Anwesenheit von Gas in Metall, für das

Zustandekommen des lichtelektrischen Effektes wesentlich ist. Elster und Geitel verneinen in ihrer letzten Arbeit die Frage, während Herr Hallwachs sie bejaht. Die Resultate wären experimentell in Übereinstimmung zu bringen, wenn man annehmen könnte, daß die Versuche von Herrn Hallwachs in einem Vakuum ausgeführt sind, das sich noch verbessern ließe, und daß bei Verbesserung auf „extremes Vakuum" ein neuer Aufstieg der Lichtelekrizität des untersuchten Metalles eintreten würde. Unter „extremem Vakuum" verstehe ich hier solches, das wenigstens so weit geht, daß die Raumladungs-Charakteristik erreicht ist, und während des Glühens einer Elektrode erhalten bleibt. Nur in diesem Fall ist man sicher, daß nicht immer neue Gasschichten oder Oberflächenhäute sich bilden. Es darf nicht sein, daß man, um das Vakuum zu „verbessern", nach dem Ausglühen erst neu wieder pumpen muß. — Dies ist nur bei langer Erhitzung des ganzen Apparates auf 400° und Bestrahlung der Metalle mit Kathodenstrahlen mit Sicherheit zu erreichen. Bei einer Kaliumelektrode geht das natürlich nicht.

Ist nun nicht derartiges extremes Vakuum erreicht, so haben wir zu erwarten, daß bei schlechterm Vakuum ein großer Effekt da ist, daß aber bei Verbesserung des Vakuums der Effekt abnimmt und erst wieder stark ansteigt, nachdem das extreme Vakuum erreicht ist. Wir haben die analogen Verhältnisse bei Glühelektroden. Auch hier nimmt, wie Fredenhagen zeigte, die Elektronenemission (völlig reproduzierbar) ab, bei Verbesserung des Vakuums, und erst später wurde gezeigt, daß bei Erreichung ganz hohen Vakuums der Effekt ein reiner Metalleffekt wird, der unabhängig von Gasabsorption ist. Ich glaube, daß nur bei abgeschmolzener Röhre, etwa mit Wolframelektrode, eine Entscheidung zu erzielen ist. Die glühende Elektrode bzw. die zur Prüfung des Vakuums angebrachte Probeglühelektrode muß im Rohre Raumladungscharakteristik zeigen und wenn der Metalleffekt sich ohne Gas abspielt, muß die glühende Wolfram-Elektrode den gleichen lichtelektrischen Effekt zeigen wie die kalte, wie dies bisher für den lichtelektrischen Effekt angenommen wurde.

G. Wiedmann: Auch uns ist bekannt, daß zur Herstellung des höchsten erreichbaren Vakuums die Glaswände auf etwa 500° erhitzt werden müssen, was bei der Herstellung der *K*-Zellen berücksichtigt wurde. Das dabei erreichte Vakuum war sicher von der Größenordnung 10^{-6} mm *Hg*, denn der *Hg*-Faden des Mc Leod blieb in der Kapillare hängen. Das Vakuum der Raumladekurve war also erreicht; übrigens spielt der Raumladeeffekt bei *K*-Zellen sicher keine Rolle, da der lichtelektrische Strom hier höchstens 10^{-7}—10^{-6} Amp. beträgt.

Hallwachs: Daß man die Entgasung portionenweise macht, ist Vorsichtsmaßregel und Beweismethode. Ist Entgasung erreicht, so wird natürlich bei neuem Glühen nichts weiter herausgeschafft, der Druck steigt nicht, dadurch erfährt man eben, daß die Entgasung gelungen. Voraussetzung: die Stromstärke des Glühstroms wird nicht gesteigert. Die letzten Gasmengen werden erst beim Durchschmelzen erreicht. Das von Herrn Marx charakterisierte Vakuum dürfte für die zum Verschwinden der Lichtelektrizität erforderliche Entgasung nicht genügen. Raumladungen spielen ja im Gebiet der Thermionik eine Rolle, nicht bei unseren lichtelektrischen, so äußerst schwachen Strömen. Übrigens möchte ich die Gelegenheit benutzen, um wiederholt darauf hinzuweisen, daß mindestens 15 Jahre früher wie im Arbeitsgebiet der Thermionik von Herrn v. Schweidler im Gebiet der Lichtelektrizität die Raumladungen und ihre Wirkungen auch theoretisch richtig behandelt worden sind. Die Thermionik hat die experimentelle Schwierigkeit, daß der Natur der Sache nach immerfort geglüht und damit erwärmt werden muß. Da bilden alle Teile im Innern der Zelle reichlich gasliefernde Reservoire. Bei der Lichtelektrizität kommt man weiter, indem man durch nur kurzes jedesmaliges Glühen mit Zwischenpausen Erwärmung vermeidet. Lediglich durch Pumpen geht das Gas von den Wänden und den inneren Apparatteilchen nicht weg, erst Temperaturerhöhung bewirkt solches. Deshalb vermeidet man solche im lichtelektrischen Versuch. Der erwähnte Entgasungsversuch von Elster und Geitel ist ganz primitiv eingerichtet und hat sicher nicht zur genügenden Entgasung geführt. Die sonstigen Ratschläge des Herrn Vorredners sind durch keine Versuche begründet und widersprechen unseren experimentellen, in langjähriger Arbeit gewonnenen Erfahrungen, welche letztere übereinstimmen mit den in der Praxis vorgenommenen Entgasungsversuchen (Dr. Rohn).

Marx: Ich bin wohl nicht ganz richtig verstanden worden. Selbstverständlich tritt bei diesen schwachen lichtelektrischen Strömen kein Raumladungseffekt durch die Belichtung auf. Da aber die Raumladungscharakteristik das einzige Kriterium für extremes Vakuum in der unmittelbaren Umgebung der bestrahlten Elektrode ist, muß man meines Erachtens die Raumladung erst durch eine Glühelektrode im Rohre erzeugen, um sich des extremen Vakuums zu versichern. Das Mac Leod mißt weit weg von der Lichtelektrode und kann sehr hohes Vakuum

anzeigen, obgleich störende Oberflächenhäute im Glasrohr vorhanden sind. — Es ist vielleicht doch noch möglich, daß ein starker nichtelektrischer Metalleffekt existiert, der auch ohne Gasabsorption auftritt.

Wiedmann: Bei unseren Versuchen wurde das höchste erreichbare Vakuum hergestellt, dann war der lichtelektrische Strom nur sehr gering, das selektive Maximum bei 436 $\mu\mu$ verschwunden; durch Zulassen von Argon, Stickstoff und Sauerstoff änderte sich die Empfindlichkeit solcher K-Zelle nicht, wohl aber durch Zufuhr von Wasserstoff, wodurch nicht nur die normale Empfindlichkeit erhöht wurde, sondern auch das selektive Maximum wieder bei 436 $\mu\mu$ stark hervortrat, daraus dürfte wohl der Gaseinfluß zu erkennen sein.

Rukop: Die $V^{3/2}$ Kurve ist zwar ein notwendiges, aber keineswegs hinreichendes Zeichen dafür, daß man es mit einem Metalleffekt im höchsten Vakuum zu tun hat, sie tritt bei so kleinen Leistungen schon bei 10^{-4} mm auf. Eine Gleichheit der Erscheinungen bei Glühemission und lichtelektrischer Emission kann vorläufig nicht angenommen werden, denn die bei gewissen Wolframfäden auftretende hohe Emission, die das Vieltausendfache der normalen Wolframemission beträgt, ist nicht auf einen Gaseffekt an sich zurückzuführen, wie mit großer Wahrscheinlichkeit dargetan worden ist, sondern auf ein Hervortreten von Bestandteilen des Wolframfadens, die eine so hohe eigene spezifische Emission haben. Allerdings kann man diese hohe Emission gerade durch Hinzutritt mancher Gase oder Dämpfe zum Vorschein bringen, so daß der Eindruck höherer Emission bei geringerem Vakuum oder wenigstens gasbeladenem Faden entsteht.

Krüger: Ich möchte in Übereinstimmung mit Herrn Hallwachs betonen, daß eine genauere Kritik der Versuche zu der Überzeugung führt, daß der lichtelektrische Effekt durch eine Gasbeladung der Elektrode bedingt ist, und nur hinzufügen, daß am stärksten wirksam und normalerweise stets vorhanden eine Wasserstoffbeladung ist. Dafür sprechen nicht nur die direkten Untersuchungen mit künstlicher Wasserstoffbeladung und die von Gehrcke und Janitzki gefundene Gleichheit des Aufladepotentials der verschiedensten Metalle bei Bestrahlung mit Licht von gleicher Wellenlänge, sondern vor allem die Einheitlichkeit der Darstellung, die ich für die Abhängigkeit der lichtelektrischen Empfindlichkeit der Metalle von ihrer Stellung in der elektrischen Spannungsreihe auf Grund ihrer elektrochemischen Eigenschaften und für die Erklärung der lichtelektrischen Ermüdung geben konnte. Im Sinne dieser Theorie erteilt aber eine Spur von Feuchtigkeit den Metallen, wenigstens denen mit größerer Lösungstension, eine viel stärkere Wasserstoffbeladung als etwa eine das Metall umgebende Wasserstoffatmosphäre. Will man also die Wasserstoffbeladung beseitigen, so ist vor allem auf die Beseitigung auch der geringsten Spur von Feuchtigkeit zu achten, was wohl nicht immer mit genügender Sorgfalt geschehen ist. Ich halte es für möglich, daß auch das negative Resultat der letzten Versuche von Elster und Geitel hierdurch bedingt ist.

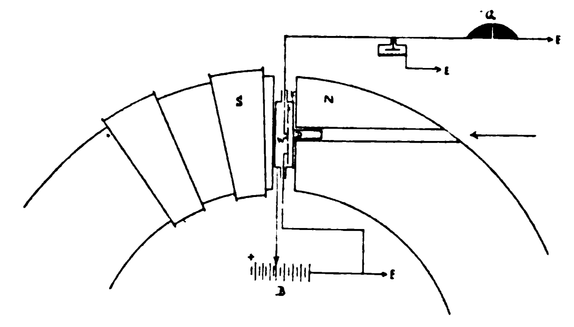
Herr Hallwachs entgegnet, daß es sich bei diesen schwachen Dingen nicht um Raumladungseffekte handeln könne. Beim Auspumpen geht von dem, was an den Wänden sitzt, fast nichts verloren und da wir bei unserem Erhitzen die Wände nicht erwärmen, wegen der Höhe des Gefäßes und der Kürze des Erhitzens, ist eine solche Überlagerung über den Effekt unmöglich.

Was Herr Krüger sagt, ist wohl mit unseren Versuchen in Einklang zu bringen. Das Gas, was wirkt, kann natürlich auch H sein, nämlich in solchen Fällen, wo solches wesentlich vorhanden ist. So z. B. bei K und Pd. Ich sagte ja, daß eventuell der selektive Photoeffekt, welcher sich der lichtelektrischen Wirkung gleichsam überlagert, wohl von dem Gasmetall Wasserstoff in K vielleicht herrühren könnte. Nur tun es andere Gase in anderen Fällen ebenso. Platin z. B., nachdem man es entgast hat und dann lediglich trockene Luft zubringt, führt gar keinen Wasserstoff und läuft auch bei Luftzufuhr von hinten nach vorn über das Maximum. In sonst gleichen Fällen wirkt aber H nur z. B. $1/7$ so stark wie CO_2.

H. Dember (Dresden), Über die Beeinflussung der Lichtelektrizität durch ein Magnetfeld.

Die Versuche, über welche berichtet werden soll, machen einen Zusammenhang wahrscheinlich zwischen den lichtelektrischen Elektronen innerhalb eines Metalls und den Elektronen, welche bei den Erscheinungen des Diamagnetismus eine Rolle spielen.

Es wurde eine lichtelektrische Zelle so ins Magnetfeld gesetzt, daß die Magnetfeldkraftlinien senkrecht zur Oberfläche des bestrahlten Metalls standen. Als lichtelektrisch empfindliches Metall kam Wismut zur Anwendung. Die Meßzelle, die in den Spalt eines Du Boisschen Halbringmagneten gebracht war, bestand zur Vermeidung von Wandladungen und elektrostatischen Störungen vollständig aus Messing.



Bei der Konstruktion war besonders darauf Wert gelegt worden, daß das elektrische Feld, welches die lichtelektrischen Elektronen beschleunigt, nach Möglichkeit homogen und dem Magnetfelde parallel gerichtet war. Die Figur zeigt schematisch die Anordnung.

N und *S* sind die Pole des Elektromagneten. Die Messingzelle, die mit einer rotierenden Gaedepumpe und einer Diffusionspumpe evakuiert werden konnte, lag am positiven Pol der Batterie *B*, welche die beschleunigende Potentialdifferenz lieferte. In der Zelle sitzt die kleine Wismutscheibe *W*, auf die von einer Quarzquecksilberlampe das Licht durch ein Quarzfenster auffällt. Die positive Aufladung der Wismutplatte konnte mit Hilfe des Quadrantenelektrometers *Q* und des Luftwiderstandes *L* gemessen werden. Die kreisrunde Wismutplatte von 6 mm Durchmesser ist von dem Schutzring *K*, dessen äußerer Durchmesser 46 mm ist, umgeben und steht einem Messingdrahtnetz *D* gegenüber. Das Netz liegt in der Ebene der vorderen Zellwand. Der Abstand Platte—Netz beträgt 3 mm. Auf diese Weise ist das elektrische Feld homogen und die Wismutplatte vor elektrostatischen Störungen und Wandladungen geschützt, die bei engen Ausführungen in Glasröhren schwer zu vermeiden sind.

Bei einem elektrischen Felde von 0,67 Volt/cm und einer Temperatur von 23° C ergab sich die folgende Abhängigkeit des lichtelektrischen Stromes. Die bestrahlte Wismutscheibe war hierbei aus Kahlbaumschem Wismut gegossen und vor dem Einsetzen in die Zelle blank geschabt.

Tabelle I.

Stärke des Magnetfeldes	Lichtelektr. Strom in 6,1×10⁻¹⁶ Amp.	Proz. Änderung des lichtel. Stromes
0 Gauß	206	
600 „	175	15 Proz.
1000 „	174	15,5
2000 „	166	19,4
3380 „	162,8	21,0
4050 „	160	22,3
4275 „	158,4	23,2
4550 „	157	23,8
5540 „	153	25,7
6800 „	151	26,7

Der Haupteinfluß liegt bei Feldstärken bis 600 Gauß, doch ist ein stetiges Anwachsen des Einflusses mit wachsender Feldstärke zu beobachten.

Der folgende Versuch zeigt, daß der Einfluß des Magnetfeldes von der Richtung derselben unabhängig ist. Die Feldstärke betrug 6200 Gauß.

Tabelle II.

Lichtelektrischer Strom in 6,1×10⁻¹⁶ Amp.		
Ohne Magnetfeld	Mit Magnetfeld	Δ
209,5	160,5	49,0
		49,0
209,5	160,5 Feldrichtung gewechselt	49,0
211,5	160,5	51,0
		50,0
209,6	161,5	48,1

Die geringe Differenz der Δ bei den verschiedenen Richtungen des Magnetfeldes, im ersten Falle ist das Mittel 49,0, im zweiten 49,7, war oft zu beobachten, doch kann ich noch keinen Grund dafür angeben.

Während der Magnetfeldeinfluß mit wachsender Magnetfeldintensität ständig ansteigt, verkleinert sich die Wirkung unter dem Einfluß eines beschleunigenden elektrischen Feldes[1]).

Die folgende Tabelle III gibt einen solchen Versuch wieder. Die Intensität des Magnetfeldes betrug hierbei in allen Fällen 4900 Gauß.

Tabelle III.

Elektrische Feldstärke × cm	Abnahme des lichtel. Stromes im Magnetfeld
0,22 Volt	38,6 Proz.
0,37 „	29,6 „
1,98 „	24,3 „
4,00 „	24,3 „
6,03 „	17,1 „
13,00 „	5,3 „
25,3 „	3,2 „
50,6 „	2,5 „
263,0 „	2,1 „
518,0 „	2,0 „
710,0 „	1,8 „

Bei der Interpretation der Versuche trifft man sofort auf die Fragen, die auch beim reinen lichtelektrischen Effekt auftreten: Handelt es sich um einen Effekt im äußeren Gasraum oder in der Gasschicht, welche dem Metall anliegt, oder um eine Wirkung innerhalb des Metalls selbst?

1) A. W. Hull (Phys. Rev. **34**, 239, 1912) hat entsprechende Versuche am paramagnetischen Aluminium ausgeführt und erhält die gleiche Wirkung des elektrischen Feldes.

Gegen eine Mitwirkung der Gasreste im Außenraum spricht die Güte des Vakuums, die meist besser als 10^{-5} mm Hg war, außerdem die Erfahrung, daß die Magnetfeldwirkung am stärksten im äußersten Vakuum zu beobachten ist und die bekannte Tatsache, daß bei höherem Gasdruck ein Magnetfeld durch Verminderung der Streuung die entgegengesetzte Wirkung ausübt.

Um die Frage zu entscheiden, ob eine Gashaut an der Oberfläche des Metalls eine Rolle spielt, habe ich den Magneteffekt an einer frisch geschabten Platte mit dem an einer bei Atmosphärendruck ermüdeten Platte verglichen, bei welcher, allen sonstigen Erfahrungen nach, sich mit Sicherheit eine Oberflächenhaut ausgebildet hatte. Die frische Platte ergab eine Magnetfeldwirkung von 12,2 Proz., die ermüdete Platte unter den gleichen Umständen 12,8 Proz. Durch dieses Resultat erscheint eine wesentliche Rolle der äußeren Gashaut ausgeschlossen zu sein.

Nachdem es so wahrscheinlich gemacht worden ist, daß es sich um eine Einwirkung des Magnetfeldes auf die Elektronen innerhalb des Metallkörpers handelt, wurde der Versuch gemacht, mit Hilfe einer Temperaturänderung seine Größe zu beeinflussen. Dazu kam eine zweite lichtelektrische Zelle zur Verwendung, die mit fester Kohlensäure umgeben, 8 Stunden lang vor der Messung abgekühlt worden ist. Tabelle IV zeigt das Resultat.

Tabelle IV.

Lichtel. Strom in $6{,}1 \times 10^{-16}$ Amp.	Intensität des Magnetfeldes	Magnetfeldeinfluß
	$+25^{0}$ C	
328	0 Gauß	21,3 Proz.
258	7460 „	22,2 „
331	0 „	21,7 „
259	7460 „	
	-79^{0} C	
302	0 Gauß	49,4 Proz.
153	7460 „	51,0 „
312	0 „	51,3 „
152	7460 „	51,3 „
312	0 „	

Danach steigt der Einfluß des Magnetfeldes auf mehr als das Doppelte bei einer Verminderung der Temperatur um 104^{0}.

Dieser auffällig große Temperatureinfluß auf die Magnetfeldwirkung entspricht ihrem Einfluß bei anderen am Wismut im Magnetfelde beobachteten Erscheinungen, nämlich dem Einfluß auf den elektrischen Widerstand und der Veränderung der diamagnetischen Suszeptibilität.

Die Beeinflussung der elektrischen Leitfähigkeit beim Wismut im Magnetfelde wird nach Nernst als longitudinaler Halleffekt angesehen und ist besonders bei tiefen Temperaturen sehr beträchtlich. So beträgt z. B. das Verhältnis des Widerstandes in einem Felde von 37500 Gauß bei -115^{0} zum Widerstand ohne Feld 10, bei einer Temperatur von -180^{0} bereits 230. Es ist danach anzunehmen, daß diese Beeinflussung der Bahnen der Leitungselektronen auch die Bahnen der lichtelektrischen Elektronen ändert, zumal diese, aus einer Tiefe von etwa 30 $\mu\mu$[1]) kommend, innerhalb dieser Strecke im Metall den gleichen Einflüssen unterworfen sind wie die Leitungselektronen.

Dazu kommt, daß gerade beim Wismut die diamagnetische Suszeptibilität außerordentlich groß und von der Temperatur abhängig ist. Zur Erklärung der großen Suszeptibilität nimmt man an, daß sie von der Einwirkung des magnetischen Feldes auf die Bewegung der Leitungselektronen herstammt. Diese Beeinflussung der Leitungselektronen und damit auch der lichtelektrischen Elektronen ist beim Wismut deshalb so wahrscheinlich, weil im Wismut die freie Weglänge der Elektronen[2]) besonders groß (10^{-4}), und da diese der Wurzel aus der absoluten Temperatur umgekehrt proportional ist, so erklärt sich auch der beobachtete Temperatureinfluß.

Diskussion.

Lenard fragt an, inwieweit der Einfluß des Magnetfeldes auf die Elektronenbahnen berücksichtigt ist?

Dember bemerkt, daß gegen einen solchen Einfluß auf die äußeren Elektronenbahnen der gefundene Temperatureinfluß spricht, da ja der eigentliche lichtelektrische Effekt von der Temperatur unabhängig beobachtet wird.

Rubens: Hat der Vortragende die Versuche auch mit anderen Metallen als Wismut angestellt? Gibt es dann Effekte von der gleichen Größenordnung? Das würde vielleicht doch für eine direkte Einwirkung des Magnetfeldes auf die Photokathodenstrahlen sprechen.

Dember: Weitere Versuche habe ich mit Antimon und Palladium ausgeführt. Ob es am Eisen geht, kann ich mit Sicherheit nicht sagen. Mit Antimon und Palladium gibt es Effekte von derselben Größenordnung.

1) A. Partzsch u. W. Hallwachs, Ann. d. Phys. **41**, 247, 1913.
2) J. J. Thomson, Rapp. Congr. internat. à Paris **3**, 145, 1900; s. a. P. Drude, Ann. d. Phys. **14**, 936, 1904.

A. Wigand (Halle a. S.), Messungen der Ionisation und Ionenbeweglichkeit bei Luftfahrten[1]).

Bei den gemeinsam mit Herrn H. Koppe im Freiballon und Flugzeug ausgeführten Untersuchungen kam es mir darauf an, neues Beobachtungsmaterial zu beschaffen zum Studium der Änderungen des Ionengehalts und der Ionenbeweglichkeit in der freien Atmosphäre, mit besonderer Berücksichtigung der meteorologischen Beschaffenheit der Luftschichten. Wir haben bei 4 Ballonfahrten bis 4,1 km Höhe solche Messungen ausgeführt, indem wir zur möglichsten Herabsetzung der Versuchsdauer gleichzeitig zwei Ebertsche Ionenzähler und einen Gerdienschen Leitfähigkeitsapparat benutzten. Ferner paßten wir den Ebertschen Ionenzähler den Versuchsbedingungen im Flugzeug an und erprobten diese Methode bei zwei Flügen bis 5,2 km Höhe.

Für den allgemeinen vertikalen Verlauf des Ionengehalts ergab sich in den unteren Schichten mit Dunst und Wolken Konstanz oder Abnahme nach oben, darüber zunächst schnelle Zunahme auf ein Mehrfaches, sodann langsameres Anwachsen des Ionengehalts. Diese vertikale Änderung des Ionengehalts wird erklärt durch den vertikalen Verlauf der Wirkung der normalen atmosphärischen Ionisatoren und durch den Einfluß von Dunst und Wolken auf die Wiedervereinigung der Ionen. In größerer Höhe überwog in der Regel der Gehalt an positiven Ionen (E_+).

Die auf Atmosphärendruck reduzierte Ionenbeweglichkeit nahm mit der Höhe in den unteren Schichten etwa auf das Doppelte zu, um sich darüber nur noch wenig zu ändern. Dies Verhalten wird durch den Einfluß der Feuchtigkeit und des Dunstes gedeutet. In der Regel war für die gleiche Höhe $v_- > v_+$.

Bei Gewitterlage wurde bis 4,1 km Höhe durchweg $E_- > E_+$ und $v_+ > v_-$ gefunden.

Eine Beeinflussung der Ionisation durch die Sonnenstrahlung ist nach Messungen in 3,2 bis 4,1 km Höhe bei Sonnenaufgang bis zwei Stunden danach nicht anzunehmen.

Diskussion.

Hahn: Hat man eine Erklärung für die mit der Höhe zunehmende durchdringende Strahlung?

Wigand: Über den Ursprung der von oben kommenden durchdringenden Strahlung läßt sich jetzt noch nichts Sicheres aussagen. Von der Sonne direkt kommt diese Strahlung bestimmt nicht. Am wahrscheinlichsten liegt ihr Ursprung in den oberen Schichten der Atmosphäre, wo sie vielleicht von einer dort befindlichen Substanz emittiert wird, wie ich schon vor Jahren geäußert habe.

M. Wien: Besteht Aussicht, diese wichtigen Versuche fortzusetzen, und könnte unsere Gesellschaft vielleicht irgend etwas dafür tun?

Wigand: Es fehlt hauptsächlich an Geldmitteln für den weiteren Betrieb der Luftfahrten; ihre Beschaffung wäre höchst erwünscht.

Moench: Bei dem von dem Vortragenden im Bilde gezeigten Flugzeug handelt es sich um ein gewöhnliches Beobachtungsflugzeug, d. h. Maschinenanlage und Tragflächen liegen unmittelbar vor dem Beobachtungsplatz. Lassen sich aus dem Vergleich von Freiballon- und Flugzeugbeobachtungen Angaben machen über die Beobachtungsfehler, welche durch Auspuffgas, Propellerwind, Reibungen an den Tragflächen usw. entstehen, und wie groß sind diese?

Wigand: Die Flugzeugwerte für den Ionengehalt stimmen mit den Ballonwerten gut überein. Systematische Fehler liegen anscheinend nicht vor im Flugzeuge.

1) Auszug. In einem der nächsten Hefte ausführlicher.

Friedrich Dessauer (Frankfurt a. M.), Versuche über Zerstreuung von Röntgenstrahlen. (Gemeinsame Versuche mit Friedr. Vierheller[1])).

Ein technisches, gasfreies Röntgenrohr (Fürstenau-Coolidge-Rohr) wird mit drei verschiedenen Spannungen, 162,5, 181,5 und 200 KV erregt und die entstehende Strahlung mit 0,5, 0,8 und 1,3 Kupfer mm filtriert. Die dann übrigbleibende Strahlung wird mit dem Seemann-Spektrographen untersucht und das Spektrogramm ausphotometriert. Auf diese Weise werden drei Strahlengemische von verhältnismäßig geringer und bekannter spektraler Breite (jedes davon umfaßt nicht ganz eine Oktav) erhalten. Gemessen wird die Verteilung der Röntgenstrahlung in einem großen Gefäß mit Wasser als homogenem Medium. Die einfallenden Strahlenbündel werden variiert und für jede der drei Härten werden vier verschiedene Strahlenkegel in den Wasserraum eingeleitet, welche im Größenverhältnis 1 : 20 : 50 : 200 standen. Im Wasser verteilt sich die Röntgenenergie der einfallenden Bündel nach dem Abstandsgesetz, ferner unter Einfluß der Absorption ($\bar{\mu}$ Koeffizient der reinen Absorption) und der Zerstreuung (s Koeffizient der Zerstreuung). $\bar{\mu}$ und s sind für die einzelnen Strahlenhärten nicht genügend bekannt, so daß durch Rechnung nicht bestimmt werden kann, welcher Teil der Röntgenenergie an einen beliebigen Punkt im durchstrahlten Medium gelangt.

1) Die ausführliche Arbeit erscheint in der Zeitschr. f. Physik.



Die Ausmessung der Intensitäten im Innern des Mediums geschah nach mehreren Methoden: elektrometrisch, durch eine eingeführte Ionenkammer und ferner durch eine besondere photographische Methode. Diese letztere Methode bewährte sich besonders. Sie gestattete durch in das Medium eingebrachte Films die ganze durchstrahlte Zone mit einem Male zu untersuchen. Um die durch eine photographische Methode möglichen Fehler auszuschließen, wurden die Versuche so angestellt, daß im verdunkelten Raum gearbeitet wurde und das Wasserbad einen Entwicklerzusatz in gleichmäßiger Verteilung bekam, so daß alle Meßfilms während ihrer Röntgenbelichtung unter denselben Bedingungen zugleich entwickelt wurden, d. h. bei gleicher Temperatur, gleicher Zeitdauer, gleicher Konzentration und unter Eliminierung aller eventuell durch Schwankungen der Erregung auftretenden Intensitätsfehler. Die einzelnen Filmstreifen lagen an jedem Punkt normal zum Strahlengang und wurden auf Grund einer für jeden Versuch neu angefertigten empirischen Schwärmungsskala photometrisch ausgewertet.

Auf diese Weise wurden für jede der drei definierten Strahlenhärten vier in dem oben genannten Verhältnis stehende Wasservolumina durchgemessen, also insgesamt 12 Meßserien gemacht. Die Ergebnisse zeigen die Abhängigkeit der Verteilung von der Härte, von der Größe des durchstrahlten Volumens, von der Tiefe eines Punktes im durchstrahlten Volumen und von der Seitenlage dieses Punktes. Beispielsweise stellt sich heraus, daß bei der höchsten angewandten Spannung ein Punkt, der in 10 cm Wassertiefe zentral unter dem Fokus der Röhre liegt (bei dem größten Strahlenkegel, dessen Volumen 200 mal größer war als der kleinste Strahlenkegel), $2^1/_2$ mal soviel Energie empfängt als nach seiner Entfernung und nach dem reinen Absorptionskoeffizienten zu ihm gelangen sollte. Das Mehr der dort eingestrahlten Energie kommt durch die Zerstreuung zustande. Die ganze Untersuchung liefert eine Übersicht über die Wirkung der Zerstreuung auf die Intensitätsverteilung von Röntgenstrahlen in einem homogenen Medium.

Auf Grund dieser Ergebnisse konnte der reine Absorptionskoeffizient getrennt bestimmt werden, und zwar durch Messung in großer Tiefe inmitten eines durchstrahlten Volums, also an einer Stelle, wo in bezug auf die Zerstreuung Gleichgewicht herrscht, weil jedes Volumenelement ebensoviel Streuung empfängt, wie es abgibt. Gesondert wurde der Abschwächungskoeffizient bestimmt und daraus der reine Streukoeffizient ermittelt. Es ergibt sich der Streukoeffizient s für Wasser für alle drei mittleren Härten als ungefähr konstant $= 0{,}06\ \mathrm{cm}^{-1}$. Dieser Wert ist beträchtlich kleiner als der bisher von Barkla gefundene $\frac{s}{\varrho_{Al}} = 0{,}2$, von Hull und Rice $\frac{s}{\varrho_{Al}} = 0{,}12$. Dagegen stimmt er mit dem Wert von Ishino $\frac{s}{\varrho_{Al}} = 0{,}04$ für γ-Strahlung von Radium C in Aluminium gemessen und von Dessauer und Back mit harten Röntgenstrahlen (0,046 bei 170 KV für Al) hinreichend überein. Diese Werte haben auch größere Wahrscheinlichkeit als die Werte von Barkla und Hull und Rice, da der gesamte Abschwächungskoeffizient für harte Strahlen bzw. $\lambda = 0{,}16$ Å.-E für Al beispielsweise von Glocker mit 0,18 angegeben wird.

Die quantitative Ausmessung der Intensitätsverteilung für definierte Strahlungsgemische hat für die praktische Anwendung in der Medizin die Bedeutung, daß sie allein die Grundlage bilden kann für die Kenntnis der Strahlenwirkung in für direkte Messung unzugänglichen Tiefen des menschlichen Körpers.

Diskussion.

Debye: Was denkt der Vortragende über den Verlauf der Zerstreuungskoeffizienten als Funktion der Wellenlänge?

Dessauer: Die Frage kann ich nicht beantworten, da ich sie nicht geprüft habe. Die Barklaschen Messungen liegen weit zurück. Ein Gang mit der Wellenlänge ist möglich, ebenso eine Überschätzung von σ in den alten Messungen.

J. Herweg (Halle a. S.), Die elektrischen Dipole in flüssigen Dielektrizis.

Bekanntlich zeigt die Dielektrizitätskonstante mancher flüssiger Dielektrika (Alkohole, Äther usw.) eine starke Temperaturabhängigkeit, und zwar eine Abnahme mit steigender Temperatur. Durch die älteren Theorien der dielektrischen Erscheinungen (Clausius, Mosotti) ließ sich diese Temperaturabhängigkeit nicht erklären.

Erst im Jahre 1912 gelang es Debye zu zeigen, daß diese Abhängigkeit sich notwendig ergibt, wenn man außer den Verschiebungselektronen auch fertige elektrische Dipole in den Molekülen annimmt.

Es lag nun der Gedanke nahe, die Existenz dieser Dipole mit Hilfe eines elektrischen Feldes nachzuweisen. Wenn man

nämlich an einen Kondensator, der das zu untersuchende Dielektrikum enthält, ein starkes elektrisches Feld anlegt, so müssen die Dipole sich einstellen und die Dielektrizitätskonstante muß kleiner werden.

Diese Idee ist zuerst theoretisch und praktisch bearbeitet von Ratnowsky in einer im Jahre 1913 in den Verh. d. Deutsch. phys. Ges. erschienenen Arbeit.

Ratnowsky geht bei seinen theoretischen Überlegungen aus von den Gleichungen, wie sie Debye in seinen Vorlesungen in Zürich gebracht hat.

Debye findet für die dielektrische Polarisation, welche von den fertigen Dipolen herrührt, den Ausdruck

$$P_m = Nm\left(\operatorname{cotgh}\frac{mK}{kT} - \frac{kT}{mK}\right). \qquad (1)$$

Die Gleichung gilt für beliebige Feldstärken K. Es ist

N = die Zahl der Moleküle im Kubikzentimeter,
m = die Größe des Moments eines Dipols,
k = die Boltzmann-Plancksche Konstante $1{,}346 \cdot 10^{-16}$,
T = die absolute Temperatur,
$K = E + \frac{4\pi}{3}P$, wo E das äußere Feld und P die gesamte Polarisation im Dielektrikum bedeutet.

Außer dieser durch die Dipole bewirkten Polarisation tritt noch eine Polarisation auf infolge Verschiebung der elastisch gebundenen Elektronen.

Diese berechnet sich

$$p = \frac{Nne^2K}{f}. \qquad (2)$$

n die Zahl der Verschiebungselektronen im Molekül, e ihre Ladung, f die Kraft, welche für die Einheit der Verschiebung gerechnet, die Elektronen in die Ruhelage zurückzieht. Die Gesamtpolarisation wäre also $P = P_m + p$.

Zur Vereinfachung nimmt Ratnowsky nun an, daß in einem Dielektrikum von großer Temperaturabhängigkeit nur fertige Dipole vorhanden sind, so daß also die gesamte Polarisation durch die Gleichung (1) dargestellt wird.

Wie wir nachher sehen werden, ist diese Annahme nicht statthaft.

Er setzt also

$$P = Nm\left\{\operatorname{cotgh}\frac{m}{kT}\left(E + \frac{4\pi}{3}P\right) - \frac{kT}{m\left(E + \frac{4\pi}{3}P\right)}\right\}.$$

Dieser Ausdruck wird nach Potenzen von E entwickelt und nach dem zweiten Gliede abgebrochen. Dann wird die dielektrische Verschiebung D berechnet nach der Gleichung

$$D = E + 4\pi P$$

und schließlich gefunden

$$\varepsilon = \frac{dD}{dE} = \frac{1 + 2\Theta}{1 - \Theta} - \frac{243}{80\pi^2}\frac{\Theta^3}{(1-\Theta)^3}\frac{E^2}{N^2m^2}$$

wo Θ eine Temperaturfunktion ist.

Der Ausdruck für ε setzt sich zusammen aus zwei Gliedern. Das erste ist gleich dem Wert der Dielektrizitätskonstante für die Feldstärke 0 und ist nur von der Temperatur abhängig. Das zweite stellt die Abnahme des ε mit wachsender Feldstärke dar.

Setzt man

$$\Delta\varepsilon = \frac{243}{80\pi^2}\frac{\Theta^3}{(1-\Theta)^3}\frac{E^2}{N^2m^2},$$

so ist $\Delta\varepsilon$ die Differenz der Dielektrizitätskonstante bei sehr kleinen und großen Feldstärken.

Diese Gleichung unterzieht Ratnowsky einer experimentellen Prüfung.

Zur Messung der Dielektrizitätskonstante benutzt er die Nernstsche Anordnung.

Der Meßkondensator enthielt 3 Zylinder.

Mit Hilfe einer Elektrisiermaschine konnte der mittlere Zylinder B hoch aufgeladen werden und es bestand dann ein starkes Feld zwischen der mittleren und den beiden anderen Zylindern.

Es wurde die Dielektrizitätskonstante ohne und mit Feld gemessen.

Als Dielektrikum diente Amylalkohol, der starke Temperaturabhängigkeit zeigt, also Dipole enthalten muß. Da er zu gut leitete, wurde eine Lösung von 20 Proz. Amylalkohol in Benzol gewählt. Benzol zeigt keine Temperaturabhängigkeit.

Ratnowsky fand

ohne Feld	$\varepsilon = 3{,}089$
mit Feld 31,2 C.G.S.	$\varepsilon = 3{,}036$
Es ist also	$\Delta\varepsilon = 0{,}053$

Diesen Wert setzt Ratnowsky in seine Gleichung ein. Θ ergibt sich aus

$$\varepsilon = \frac{1 + 2\Theta}{1 - \Theta},$$

also

$$\Theta = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 2},$$

N aus dem Molekulargewicht des Amylalkohols, der Planckschen Zahl

$$\frac{6{,}175 \cdot 10^{23}\ \text{Moleküle}}{\text{Grammolekül}},$$

unter Berücksichtigung, daß nur 20 Proz. Amylalkohol vorhanden.

Ratnowsky berechnet

$$m = 1{,}31 \cdot 10^{-19}$$

Diesen Wert findet er der Größenordnung nach übereinstimmend mit dem von Debye aus der Temperaturabhängigkeit berechneten

$$m = 7{,}9 \cdot 10^{-19}.$$

Bei der Berechnung muß Ratnowsky ein Fehler unterlaufen sein, denn man bekommt mit seinen Zahlen den Wert

$$m = 3{,}7 \cdot 10^{-20}.$$

Daß die Übereinstimmung nicht gut ist, sieht man viel besser, wenn man nicht m berechnet, sondern unter Zugrundelegung des Debyeschen Wertes für m $\Delta\varepsilon$.

Es ergibt sich nämlich

$$\Delta\varepsilon = 1{,}1 \cdot 10^{-4},$$

ein Wert, der mit $5{,}3 \cdot 10^{-2}$ nicht in Einklang gebracht werden kann.

Ich habe nun mit einer weit empfindlicheren Methode, die ich nachher gleich beschreiben werde, ebenfalls Messungen mit Amylalkohol angestellt, konnte aber eine derartige Änderung nicht finden.

Dieses brachte mich auf die Vermutung, daß die Voraussetzung Ratnowskys, die Dielektrizitätskonstante derartiger Flüssigkeiten sei nur bestimmt durch die Dipole, falsch sei.

Ich führte daher die Theorie durch unter Berücksichtigung der Verschiebungselektronen, also des Gliedes

$$p = \frac{N n e^2 K}{f}.$$

Die Durchführung ist rechnerisch etwas komplizierter und führt zu einem wesentlich anderen Resultat. Ich gebe hier nur das Resultat an. Die Einzelheiten bringt meine Arbeit in der Z. f. Phys.

Man erhält

$$\varepsilon = \frac{1 + 2\Theta}{1 - \Theta} - \frac{4 N m^4}{15 k^3 T^3} \frac{E^2}{(1 - \Theta)^4}.$$

Auch hier setzt sich der Ausdruck zusammen aus zwei Gliedern, deren erstes nur von der Temperatur abhängig ist, während das zweite die Abnahme mit der Feldstärke darstellt, also

$$\Delta\varepsilon = \frac{4 N m^4}{15 k^3 T^3} \frac{E^2}{(1 - \Theta)^4}.$$

Rechnet man aus dieser Gleichung $\Delta\varepsilon$ für eine 20prozentige Amylakohollösung in Benzol für ein Feld von 31,2 C.G.S. aus, so folgt

$$\Delta\varepsilon = 0{,}44 \cdot 10^{-7},$$

ein Wert, den ich selbst mit meiner äußerst empfindlichen Methode nicht hätte nachweisen können.

Ich suchte nun nach Flüssigkeiten, die eine experimentelle Prüfung zuließen. Schließlich erwies sich als brauchbar der Äthyläther.

Dieser isoliert vorzüglich, auch in ungemischten Zustande, man kann also sehr starke Felder verwenden. Ferner ist nach Debye das Dipolmoment sehr groß, nämlich $m = 11{,}8 \cdot 10^{-19}$. In einem Felde von 95,2 C.G.S., wie ich es bei meinen Versuchen mitunter benutzte, muß sich aus meiner Gleichung eine Verkleinerung der Dielektrizitätskonstante

$$\Delta\varepsilon = 9{,}0 \cdot 10^{-6},$$

also nahe 10^{-5} ergeben.

Ich komme nun zur Beschreibung der Anordnung. Sie ist im wesentlichen dieselbe, wie ich sie vor einiger Zeit in den Verh. d. Deutsch. phys. Ges. beschrieben habe.

Auch hier will ich nur auf das Prinzip eingehen und muß in bezug auf Einzelheiten auf meine ausführlichere Arbeit verweisen.

Das Wesentliche an der Anordnung sind die beiden Schwingungskreise K_1

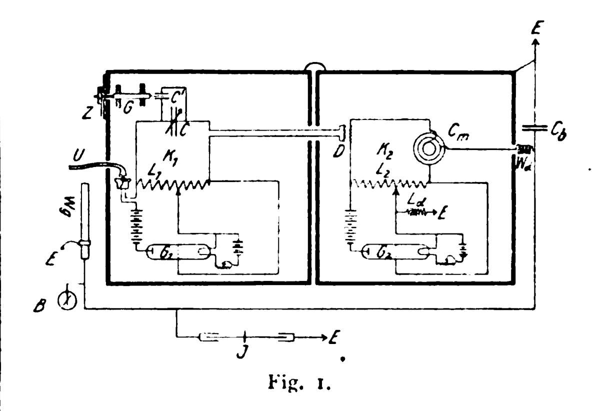


Fig. 1.

und K_2, in denen durch die Glühkathodenröhren G_1 und G_2 ungedämpfte Schwingungen erregt werden. K_1 enthält den variablen Drehkondensator C und einen kleinen Plattenkondensator C'. Dieser bestand aus zwei voneinander isolierten 1 qcm großen Messingplatten im Abstand von 2 mm. Ein Deckgläschen G konnte mittels Mikrometerschraube mehr oder weniger in den Zwischenraum hineingeschoben werden. An einem Zeiger Z wurde die jeweilige Stellung abgelesen. Die Kapazitätsänderung war in dem benutzten Bereich linear.

K_2 enthielt den eigentlichen Meßkondensator C_m. Er bestand aus 3 Zylindern (Fig. 2). Der innere und äußere waren mit K_2 verbunden, der innere konnte mittels Influenzmaschine auf hohe Spannung aufgeladen werden. Diese wurde reguliert durch den variablen

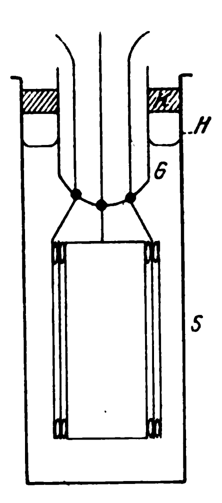


Fig. 2.

Graphitwiderstand W_g und gemessen durch das geeichte Braunsche Elektrometer B. Der Kreis K_2 war durch die Drosselspule L_d geerdet, so daß der innere und äußere Kondensatorzylinder dauernd auf dem Potential Null sich befand.

Von der Schwingungsamplitude kann man nämlich bei meiner Anordnung absehen, da die Anodenspannung zum Betrieb der von mir konstruierten Glühkathodenröhren nur 12 Volt betrug.

Der Blockkondensator C_b und der große Widerstand W_d sorgten dafür, daß der Kreis K_2 gegen kapazitive Änderung durch Berühren von W_g vollständig geschützt war.

Durch die sehr lose Kopplung D wurden die Schwingungen von K_2 auf K_1 übertragen. Durch Überlagerung entstehen Schwebungen, die im Telephon T hörbar werden. Durch den Schlauch U werden diese dem Ohre zugeführt (zur Vermeidung kapazitiver Änderungen).

Ich hatte die beiden Kreise soweit gegeneinander verstimmt, daß ich ungefähr 1000 Schwebungen/sec bekam, was als entsprechender Ton hörbar wurde. Dieser wurde mit einer Stimmgabel verglichen, die den Ton 1000 gab.

Man hatte also Resonanz, wenn im Telephon genau 1000 Schwebungen gehört wurden.

Haben wir in K_1 1001000 Schwingungen, so hört man zwischen Telephon und Stimmgabel keine Schwebung, wenn K_2 1000000 Schwingungen dagegen eine Schwebung, wenn K_2 1000001 Schwingungen ausführt.

Eine Änderung der Schwingungszahl um 10^{-6} entspricht also einer Schwebung/sec.

Da nun Schwingungszahl und Kapazität durch die Thomsonsche Formel verbunden sind, also

$$n = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}},$$

so entspricht, wie ich in meiner früheren Arbeit gezeigt, einer Kapazitätsänderung von 10^{-6} eine halbe Schwebung in der Sekunde.

Eine Änderung der Kapazität bzw. der Dielektrizitätskonstante von 10^{-5} muß also 5 Schwebungen in der Sekunde hervorrufen.

Ich will noch bemerken, daß die Flüssigkeit in das Kondensatorgefäß S bis zur Höhe H eingefüllt wurde, um Veränderung der Oberfläche zu vermeiden. Würden die Zuleitungsdrähte durch die Oberfläche hindurchtreten, so würde infolge Änderung der Oberflächenspannung in der Nähe der Drähte durch Aufladung zweifellos eine Kapazitätsänderung auftreten.

Zunächst untersuchte ich nun, wie reines Benzol, das so gut wie keinen Temperatureffekt zeigt und daher nach Debye keine Dipole enthalten soll, sich im elektrischen Feld verhält.

In Feldern von etwa 100 C.G.S. zeigten sich geringe Kapazitätsvergrößerungen. Dies kam daher, weil der Meßkondensator noch nicht stabil genug war. Durch Einschieben einer genügenden Anzahl von Glasstäbchen wurde dieser Effekt beseitigt. Ein Dipoleffekt (Verkleinerung der Dielektrizitätskonstante) wurde nicht bemerkt.

Nun suchte ich die Versuche von Ratnowsky zu wiederholen. Es treten Polarisationseffekte auf, da die Flüssigkeit (10 bzw. 20 Proz. Amylalkohol in Benzol) in geringem Maße leitete. Diese Effekte gingen natürlich bei Fortnahme des Feldes nicht sofort zurück. Einen Dipoleffekt konnte ich nicht finden.

Dagegen zeigte Äthyläther eine Verkleinerung der Dielektrizitätskonstante, die bei Fortnahme des Feldes sofort zurückging.

Die Versuche wurden in folgender Weise ausgeführt:

Zunächst wurde der fein verstellbare Kondensator C so eingestellt, daß keine Schwebungen vorhanden waren. Dann wurde eine bestimmte Spannung angelegt und am Braunschen Elektrometer abgelesen.

Die entstehenden Schwebungen wurden durch Verschieben von C' kompensiert und die Zeigerstellung abgelesen.

So ist die Tabelle II entstanden.

Spalte 1 zeigt die Spannungen in Volt, Spalte 2 die Teilstriche am Meßkondensator, Spalte 3 die Mittel daraus.

Spalte 4 zeigt die Mittel multipliziert mit 2,9. Die entstandenen Werte verhalten sich recht

Tabelle II.

Spannung in Volt	Teilstriche am Meßkondensat.	Mittel	Mittel mit 2,9 multipliziert
6000	10 13 12 13 14	12,5	36,3
8000	20 25 22 22 20	21,8	63,2
10000	38 35 33 33 41	36	104,4

genau, wie die Quadrate der Spannungen bzw. Feldstärken, wie es die Theorie verlangt.

Daß es sich tatsächlich um eine Kapazitätsverkleinerung handelt, folgt daraus, daß C' verkleinert werden mußte, um die Schwebungen zum Verschwinden zu bringen.

Es bleibt noch festzustellen, daß die Verkleinerung der Dielektrizitätskonstante der Größenordnung nach übereinstimmt mit der theoretisch berechneten.

Dazu muß man den Kondensator C' in Schwebungen eichen.

Es wurde so verfahren:

Kondensator C' auf Null gestellt und durch Variieren von C die etwa vorhandenen Schwebungen zum Verschwinden gebracht.

Nun wurde durch Drehen von Z um 10 Teilstriche C' geändert und die Zahl der auftretenden Schwebungen mit der Stoppuhr gemessen. Tabelle I zeigt das Resultat.

Tabelle I.

Teilstriche	Zahl der Schwebungen
10	2,7
15	4
20	5,3
25	6,7

Wir können nun die Verkleinerung der Dielektrizitätskonstante berechnen. Greifen wir dazu den Wert für 6000 Volt in Tabelle II heraus.

In Teilstrichen beträgt sie 12,5.

Nach Tabelle I entsprechen 12,5 Teilstriche 3,35 Schwebungen/sec.

Nun hatten wir vorhin gesehen, daß bei meiner Anordnung entspricht

$$\begin{aligned} 1/2 \text{ Schwebung/sec} &= 10^{-6}, \\ \text{also } 1 \quad \text{„} \quad &= 2\times 10^{-6} \\ \text{und } 3{,}35 \quad \text{„} \quad &= 6{,}7\times 10^{-6}. \end{aligned}$$

Der Abstand der Zylinder betrug 2,1 mm, die Feldstärke absolut also bei 6000 Volt 95,2 C.G.S.

Für diese Feldstärke hatten wir theoretisch den Wert für die Verkleinerung

$$\Delta\varepsilon = 9\times 10^{-6} \text{ gefunden.}$$

Experimentell $\Delta\varepsilon = 6{,}7\times 10^{-6}$.

Eine Übereinstimmung, die recht befriedigt. Daß der experimentell gefundene Wert kleiner ist, wie der theoretische, erklärt sich daraus, daß der Kondensator C_m nicht die gesamte Kapazität des Kreises K_2 darstellt. Ein Bruchteil entfällt auf die Verbindungsdrähte, die Kapazität der Röhre und der Selbstinduktion. Diese Kapazitäten wären noch zu bestimmen.

Nach diesen Resultaten scheint mir einwandsfrei die Existenz der Dipole bewiesen. Ferner aber geht aus ihnen hervor, daß man die Wirkung der Verschiebungselektronen nicht einfach vernachlässigen darf.

Es wird nun weiter von Interesse sein, eine Untersuchung der Temperaturabhängigkeit des elektrischen Effekts und eine Untersuchung eines Gemisches einer dipolfreien und Dipole enthaltenden Flüssigkeit. Diese zeigen mitunter eine starke Abweichung von der Mischungsregel. Durch Bestimmung von $\Delta\varepsilon$ bei verschiedenen Konzentrationen wäre möglicherweise festzustellen, ob die Abweichungen hervorgerufen werden durch eine Einwirkung des Lösungsmittels auf die Dipole, d. h. auf die Schwerpunktsverlagerung der entgegengesetzten Ladungen oder die Verschiebungselektronen selbst. Diese zeigen mitunter eine starke Abweichung der Mischungsregel.

Diskussion.

Rubens: Darf ich den Herrn Vortragenden fragen, ob er solche Versuche auch für feste Körper angestellt hat? Diese dürften den Effekt nicht zeigen, da die Dipole nicht drehbar sind.

Herweg: Mit festen Körpern habe ich Versuche nicht angestellt.

Debye: Gemische von Alkoholen und Benzol sind untersucht worden von Frl. Lange. Es zeigte sich, daß mit zunehmender Konzentration Änderungen der Dielektrizitätskonstante Hand in Hand gehen, welche als Assoziationen zu Doppel- und Dreifach-Molekülen zu erklären sind, wobei die Dreifach-Moleküle als Dipole ausscheiden infolge der inneren (dreieckbildenden) Anordnung.

C. Ramsauer (Heidelberg), Über den Wirkungsquerschnitt der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen [1]).

Kommt ein Elektron, welches einem einheitlichen Elektronenstrahl angehört, in den Bereich eines Gasmoleküls, so können drei Fälle eintreten:

1) Die ausführliche Darstellung ist Anfang September dieses Jahres den Annalen der Physik eingereicht.



1. Das Elektron wird durch das einmalige Zusammentreffen völlig aus dem Strahl ausgeschieden, indem es dauernd oder vorübergehend festgehalten, d. h. absorbiert wird. Ähnlich wirkt die hiervon experimentell schwer zu trennende Reflexion, die deshalb auch als unechte Absorption bezeichnet wird.
2. Das Elektron wird durch das Molekül merklich beeinflußt, ohne jedoch seine Zugehörigkeit zum Strahl praktisch zu verlieren. Die Einwirkung besteht in einer Ablenkung, die bei häufiger Wiederholung zur Diffusionserscheinung führt, und, bezüglich oder, in einer Geschwindigkeitsverminderung.
3. Das Elektron wird weder in der Richtung noch in der Geschwindigkeit merklich beeinflußt.

In diesem Sinne wollen wir kurz unterscheiden: den absorbierenden Querschnitt I, den ablenkenden Querschnitt II, den frei durchlässigen Querschnitt III.

Ich habe mir nun die Aufgabe gestellt, den gesamten, überhaupt wirksamen Querschnitt, also I + II, der Gasmoleküle für langsame Elektronen von etwa 1 Volt Geschwindigkeit festzustellen und mit dem absorbierenden Querschnitt, also I, zu vergleichen.

Der absorbierende Querschnitt ist aus Absorptionsmessungen bekannt und wurde neuerdings nochmals für Elektronen geringster Geschwindigkeit von Herrn Hans Ferd. Mayer im Heidelberger Radiologischen Institut unter besonders weitgehenden Vorsichtsmaßregeln bestimmt, übrigens ohne jede Mitwirkung von meiner Seite. Die Arbeit befindet sich im Druck bei den Annalen der Physik, Herr Mayer war aber so liebenswürdig, mir schon jetzt seine Resultate zur Verfügung zu stellen. Der so gefundene absorbierende Querschnitt der Gasmoleküle eines cm^3 von 1 mm Quecksilberdruck (das sogenannte spezifische Absorptionsvermögen) a umfaßt nur den Querschnitt I, nicht aber II, da die in ihrer Bahn zum Auffangekäfig abgelenkten Elektronen durch die gleiche Anzahl der aus dem sogenannten Schutzring hinüberdiffundierenden Elektronen ersetzt werden, und da Geschwindigkeitsverluste an der Bewegungsrichtung nichts ändern.

Diesen eigentlichen Absorptionsmessungen gegenüber erhält man den gesamten überhaupt wirksamen Querschnitt, wenn man die Elektronen durch ein entsprechendes Magnetfeld zwangsmäßig auf einer durch Blenden festgelegten Kreisbahn in den Auffangekäfig leitet. Die formalen Beziehungen der Absorptionsgleichung bleiben dieselben, der gefundene Wert a hat jetzt aber die Bedeutung von I + II. Denn jetzt führt jede Ablenkung und auch jede Geschwindigkeitsverminderung zur endgültigen Ausscheidung aus dem Strahlengange. Eine zufällige Rückkehr ist sehr unwahrscheinlich, da hierzu eine bestimmte Richtung und eine bestimmte Geschwindigkeit notwendig sind, soweit nicht diese Bedingungen durch die endliche Größe des Bahnquerschnitts etwas verwischt werden.

Für wirkliche Messungen muß diese Methode selbstverständlich ebenso wie die eigentliche Absorptionsmethode, als Differenzmethode ausgebildet werden, um etwaige Änderungen der Elektronenemission bei Einführung des Gases auszuschalten. Dies geschieht durch Anwendung zweier Kreisbahnen von verschiedenen Längen, die zu je einem Auffangekäfig führen. Es genügt dann, das Verhältnis der Elektronenmengen, die im Anfangszustand (der übrigens kein völliges Vakuum zu sein braucht) zu den beiden Käfigen gelangen, und das Verhältnis der analogen Elektronenmengen nach Einführung eines Gases von bestimmtem Druck festzustellen. Der so gefundene Wert der Querschnittssumme aller Moleküle eines cm^3 vom Druck 1 mm Quecksilber, welcher nach Obigem I + II entspricht, werde mit „a" bezeichnet.

In der folgenden Tabelle sind die so erhaltenen Werte „a" mit den Mayerschen Werten a für annähernd gleiche Elektronengeschwindigkeit (etwa 0,75 bis 1 Volt) zusammengestellt.

Gas	a	„a"
H_2	47,9	43,8
N_2	31,8	31,9
He	19,7	19,1

a und „a" sind also innerhalb der Versuchsfehler der beiden durchaus verschiedenen Methoden gleich, jedenfalls ist „a" nicht merklich größer als a.

Das Elektron wird also entweder absorbiert oder überhaupt nicht beeinflußt, die Ablenkung und damit die Diffusion fehlt völlig, wie Herr Lenard dies bereits aus der bisherigen Gesamtkenntnis des Verhaltens der Gasmoleküle gegenüber langsamen Elektronen geschlossen hatte. Anders ausgedrückt: das Molekül besitzt eine bestimmte Grenze gegenüber langsamen Elektronen. Dies Ergebnis ist namentlich bei einem so offenen Gebilde wie H_2 sehr bemerkenswert, da hier eine allmähliche Abnahme der Wirkung von der völligen Festhaltung bis zur völligen Nichtbeeinflussung wahrscheinlicher wäre. Das Ergebnis steht offenbar im Zusammenhang mit der auch jetzt wieder von Herrn Mayer weitgehend bestätigten Tatsache, daß der ab-

sorbierende Querschnitt eines Gasmoleküls mit abnehmender Elektronengeschwindigkeit schließlich konstant wird. Ob es sich hierbei um eine räumliche Begrenzung der Kraftlinien, wie Herr Lenard sie annimmt, handelt oder ob eine quantenhafte Erscheinung vorliegt, mag dahingestellt bleiben.

Wie außerordentlich verschieden das Verhalten dieser langsamen Elektronen gegenüber schnellen Elektronen ist, zeigt folgender Vergleich. Die Strahlintensität wird bei den hauptsächlich benutzten Gasdrucken auf dem kleineren Wege auf etwa das 0,4fache vermindert. Um die gleiche Verminderung bei Elektronen von 0,35 Lichtgeschwindigkeit hervorzurufen, wäre eine Schicht von 0,0002 cm *Al* erforderlich. Die Diffusion würde aber in diesem Falle so groß sein, daß der Strahl sich bereits nach Durchlaufung von $^1/_{500}$ dieser Strecke (sogenannte Parallelfelddicke) um den merklichen Betrag von 10^0 allseitig verbreitert hätte.

Ich komme jetzt noch zu einem besonderen Resultat, welches das Argon betrifft. Argon zeigt nach den ersten Lenardschen Messungen noch bei etwa 10 Volt ein durchaus normales Verhalten, sein Querschnitt ist etwa der gleiche wie der des N_2-Moleküls. Während nun die anderen Gase, soweit sie bis jetzt untersucht sind, mit abnehmender Strahlengeschwindigkeit sich einem konstanten Wert nähern, nimmt der Querschnitt von Argon außerordentlich ab, wie am besten aus dem Vergleich mit den gaskinetischen Querschnitten hervorgeht. So geben, in Einheiten des gaskinetischen Querschnitts gemessen, die untersuchten Gase folgende Werte: H_2 3,4; N_2 1,4; *He* 2,3; *A* 0,14 für 0,75 Volt und 0,3 für 1,1 Volt. Die weitere Verfolgung der Argonwerte für größere und geringere Elektronengeschwindigkeiten zeigt eine noch weitere Abnahme nach kleineren Geschwindigkeiten und eine Zunahme nach größeren Geschwindigkeiten, soweit die hierfür weniger geeignete Methode Schlüsse zuläßt. Herrn Mayers Versuche bestätigen übrigens durchaus dies Verhalten des Argons für den absorbierenden Querschnitt.

Nach dem Wesen der benutzten Methode erscheint der Schluß berechtigt, daß es sich bei dieser Erscheinung um eine freie Durchlässigkeit des Argonatoms für langsamste Elektronenstrahlen handelt.

Diskussion.

Franck: Ich möchte mir erlauben darauf hinzuweisen, daß Herr Hertz und ich früher (mit einer Anordnung, die an der Tafel erläutert wurde) Resultate über die freien Weglängen der Elektronen in verschiedenen Gasen erhalten haben, die in Übereinstimmung mit den Daten der kinetischen Gastheorie sind. Eine augenblicklich im Gange befindliche Doktorarbeit scheint bisher die gleichen Resultate zu ergeben, bis auf einen kleinen Gang der freien Weglänge mit der Geschwindigkeit, wobei es sich um ca. 10 Voltstrahlen handelt. Diese Übereinstimmung scheint mir nach der Bohrschen Theorie zu erwarten zu sein, da es sich bei Zusammenstößen von Molekülen, ja auch um das Eindringen von Elektronen des einen Moleküls in die Kraftfelder der Elektronen des anderen Moleküls handelt, wobei die umlaufenden Elektronen ähnliche Geschwindigkeiten haben wie bei unsern Versuchen.

Ramsauer: Die verhältnismäßig großen Werte von *a* und „*a*" gegenüber den gaskinetischen Querschnitten erklären sich zum Teil dadurch, daß für die letzteren die sehr kleinen Werte „Q_l corr" der Landoltschen Tabellen (4. Aufl.) zugrunde gelegt sind, so daß die angeführte Differenz vielleicht in Wirklichkeit nicht so groß ist, wie Herr Franck annimmt. Bei Argon liegt insofern kein Widerspruch vor, als die große Durchlässigkeit erst weit unter 10 Volt auftritt. Das theoretische Argument scheint mir insofern nicht zwingend zu sein, als das Elektron bei diesen Versuchen frei, in der kinetischen Gastheorie aber an sein Muttermolekül gebunden ist.

Max Born (Frankfurt a. M.), Eine direkte Messung der freien Weglänge neutraler Atome.

(Nach gemeinsam mit Frl. E. Bormann ausgeführten Versuchen.)

Herr O. Stern hat die mittlere Geschwindigkeit der Teilchen, die aus erhitztem Silber bei höchstem Vakuum austreten, direkt gemessen und dadurch bewiesen, daß es einzelne Silberatome sind[1]). Dieser Befund legt es nahe, solche Molekularstrahlen von Silber zur Sichtbarmachung und Messung der freien Weglänge zu benutzen. Wir haben orientierende Versuche in dieser Richtung angestellt, über die ich hier berichten will.

Ich führe sogleich die Versuchsanordnung vor (Fig. 1). Der eigentliche Apparat befand sich in dem Quarzrohr *Q* von etwa 3 cm Durchmesser, das durch einen Schliff mit den Glasteilen der Apparatur verbunden war. Das Quarzrohr hatte unten eine Verengerung zur Aufnahme einiger Silberkörnchen *S*; diese konnten durch einen kleinen elektrischen Ofen *O* zum Verdampfen gebracht werden. Über dem Silber

1) O. Stern, Zeitschr. f. Phys. 2, 49, 1920.



befand sich ein Gestell aus Messing; dieses war unten durch eine Platte abgeschlossen, die in der Mitte ein Messingröhrchen R von 3 mm innerem Durhmesser trug; durch dieses Rohr wurde ein Strahl des verdampfenden Silbers

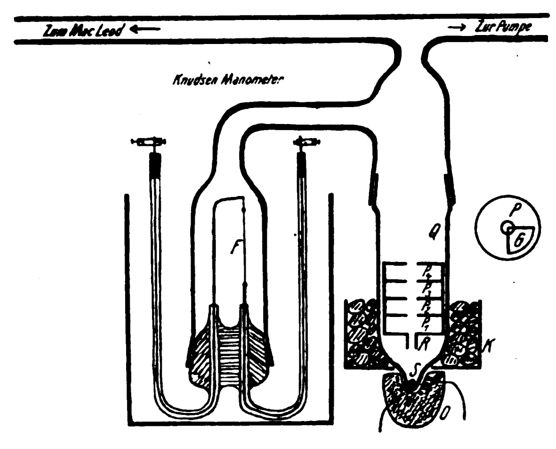


Fig. 1.

ausgeblendet. Darüber waren in je 1 cm Abstand 4 kreisförmige Messingplatten P_1, P_2, P_3, P_4 angebracht; eine solche Platte P ist neben der Hauptfigur in Aufsicht abgebildet. Jede Platte P hatte eine zentrale Durchbohrung von 5 mm Durchmesser und war so eingerichtet, daß ein Quadrant, der aus einer Glasscheibe von 15 mm Durchmesser und $^1/_2$ mm Dicke geschnitten war, in fixierter Lage darauf gelegt werden konnte; die Spitze des Quadranten erreichte so die Mitte des durch das Röhrchen R austretenden Silberstrahls und diente gewissermaßen als Sonde zur Messung der Strahlintensität. Die vier Platten P_1, P_2, P_3, P_4 waren so befestigt, daß der Glasquadrant jeder folgenden um 90° gegen den darunter befindlichen verdreht war.

Bei den angegebenen Dimensionen des Apparates war dann von der Spitze eines jeden der Quadranten die untere Öffnung des Röhrchens R vollständig sichtbar, so daß die Quadranten sich nicht gegenseitig einen Teil der Silberstrahlung abfingen.

Dicht über dem Ofen O befand sich ein Messingkasten K, der mit fester Kohlensäure gefüllt war, um die Temperatur der Röhre und damit die Gasentwicklung möglichst niedrig zu halten. Das Quarzrohr hat das Temperaturgefälle von mehr als 1000° auf $^1/_2$ cm bei täglich wiederholten Versuchen wochenlang ausgehalten.

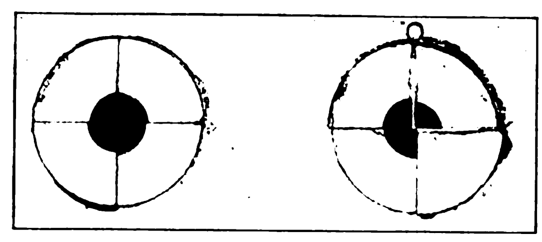
Zum Evakuieren diente ein von der Firma Hanff & Buest geliefertes Aggregat aus einer Vollmerschen Quecksilber-Dampfstrahlpumpe und einer Diffusionspumpe, das mit einem kugelförmigen, in die Glasleitung eingefügten Dewargefäß zur Aufnahme flüssiger Luft versehen war, um die Quecksilberdämpfe zurückzuhalten. Ein Geißlersches Rohr diente zum Beobachten des Vakuums. Die Druckmessung geschah mit einem Mac Leodschen Manometer, das Drucke von einigen 10^{-6} mm Hg noch festzustellen erlaubte. Zwischen dem Manometer und dem Apparat war in die Glasleitung ein zylindrisches Dewargefäß eingeschaltet, das zur Zurückhaltung der Quecksilberdämpfe mit fester Kohlensäure gefüllt wurde. Ferner hatte die Leitung zwischen diesem Dewargefäß und dem Quarzrohr eine Abzweigung, die zu einer Luftschleuse führte; sie bestand aus einer etwa 4 Liter fassenden Kugel, die mit dem Apparat und der Außenluft durch kurze, enge mit je 2 Hähnen verschließbare Röhrchen verbunden war. Hierdurch konnte der Druck in Stufen von etwa $5 \cdot 10^{-4}$ mm Hg verändert werden. Um den Druck während des Versuches konstant halten zu können, war ein Widerstandsmanometer nach Knudsen[1]) dicht oberhalb des Quarzrohrs mit einem weiten Verbindungsrohr angeschlossen. Dieses Manometer bestand aus einem Platindraht von 0,015 mm Durchmesser, dessen Widerstand mit einer Brückenschaltung gemessen wurde. Das Manometerrohr war von einem Blechkasten umgeben, der mit Wasser gefüllt werden konnte, um die äußere Temperatur konstant zu halten. Als Nullinstrument der Brückenschaltung diente ein empfindliches Galvanometer von Hartmann & Braun, das mit Spiegel und Skala abgelesen wurde. Bei den Versuchsdrucken von etwa $5 \cdot 10^{-3}$ mm Hg machte sich eine Druckänderung von 10^{-5} mm Hg durch einen Ausschlag von 1 Skalenteil bemerkbar.

Die Versuche wurden folgendermaßen ausgeführt. Zunächst wurde das evakuierte Quarzrohr längere Zeit stark erhitzt, um die adsorbierten Gase aus dem Silber, den Wänden des Rohres und des Messingapparates auszutreiben. Sodann wurde mit Hilfe der flüssigen Luft und der festen Kohlensäure das höchste erreichbare Vakuum hergestellt; mit dem Mac Leod konnte dann kein Druck mehr festgestellt werden, er war sicher niedriger als 10^{-6} mm Hg. Nun wurde der elektrische Ofen geheizt und der stationäre Zustand hergestellt, bei dem ein Strahl des verdampfenden Silbers aus dem Röhrchen R austrat. Man sah dann bald auf dem untersten Quadranten einen Silberniederschlag entstehen, und wenig später folgten die höheren Quadranten. Sobald auch der oberste Quadrant einen deutlich sichtbaren Silberbelag hatte, wurde der Heizstrom unterbrochen, trockene Luft ein-

1) M. Knudsen, Ann. d. Phys. (4), **34**, 593, 1911.

gelassen, das Quarzrohr abgenommen und die 4 Quadranten aus ihren Fassungen zur weiteren Untersuchung entfernt.

Darauf wurde der Versuch wiederholt, wobei aber der Apparat von der Pumpe durch einen Hahn abgeschaltet und mittels der Luftschleuse ein gewisser Druck darin erzeugt war. Dieser Druck wurde mit Hilfe des Knudsen-Manometers in der Weise konstant gehalten, daß der Beobachter am Galvanometer durch kurzes Öffnen des nach der Pumpe führenden Hahnes den Druck erniedrigte, sobald er am Ausschlag des Galvanometers die Abgabe von Gasen aus den erhitzten Teilen des Apparates bemerkte. Vor und nach dem Heizen des Ofens O wurde der Druck am Mac Leod gemessen; die so erhaltenen Werte stimmten auf etwa 10 Proz. überein. Dieser Fehler rührt daher, daß die Regulierung durch einen gewöhnlichen Hahn bei der Zugkraft der Diffusionspumpen viel zu grob ist, so daß beträchtliche Druckschwankungen auftreten. Durch einen kapillaren Hahn läßt sich dieser Mangel beheben.

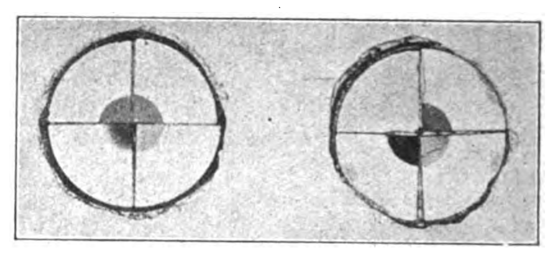


Nr. 7. $p = 0$. Nr. 8. $p = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$.

Fig. 2.

Die Resultate werden durch die Fig. 2 illustriert; diese ist nach einer 1,5 linear vergrößerten Photographie der Silberschichten hergestellt[1]). Das linke Bild (Versuch Nr. 7) zeigt die 4 Quadranten, nebeinandergelegt, die bei höchstem Vakuum ($p = 0$) bestrahlt sind; das rechte Bild (Nr. 8) entspricht einem Drucke $p = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ mm. Man sieht bei $p = 0$ eine relativ geringe Abnahme der Schwärzung mit wachsendem Abstande, die von der geometrischen Schwächung des Strahls herrührt; dagegen erkennt man bei $p = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ eine viel kräftigere Abnahme der Schwärzung mit dem Abstande, die durch die Zusammenstöße mit den Luftmolekeln erzeugt wird[2]). Daß es sich um einen scharf begrenzten Strahl handelt, zeigt der unterste (dunkelste) Quadrant, bei dem die Blendenöffnung weiter ist als der Strahldurchmesser; man sieht die Grenze des Strahls bei $p = 0$ ziemlich scharf abgesetzt, dagegen bei $p = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$ mm einen flachen Übergang, der die zerstreute Strahlung verrät.

Die Fig. 3 zeigt dasselbe mit etwas anderen Schwärzungsstärken[1]); auch hier ist die



Nr. 6. $p = 0$. Nr. 9. $p = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$.

Fig. 3.

Schwächung des Strahls bei niederem Vakuum ($p = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$ mm) deutlich sichtbar.

Quantitative Messungen der Schichtdicken konnten wir bisher nur in unvollkommener Weise ausführen, da uns die geeigneten Apparate nicht zur Verfügung standen. Die Schwierigkeit beruht auf der Kleinheit der Silberflächen; denn es kommt nur die äußerste Spitze der Quadranten, die in die Mitte des Strahls hineinreicht, in Betracht, mit einem Radius von höchstens $^1/_2$ mm Länge. Herr Prof. Brendel, der Leiter der hiesigen Sternwarte, stellte uns ein Hartmannsches Photometer zur Verfügung, das zur Photometrierung von Sternaufnahmen dient; dieses hatte ein genügend kleines Gesichtsfeld, um die Spitzen der Quadranten photometrieren zu können. Wir versuchten, den photographischen Schwärzungskeil des Instruments folgendermaßen zu eichen: Es wurde ein kleiner Apparat gebaut, der es erlaubte, eine Glasscheibe von 15 mm Durchmesser in 6 äquidistanten Winkelstellungen innerhalb des Quarzrohrs dem Silberstrahl beliebige Zeiten zu exponieren; die Drehung der Scheibe wurde durch eine Uhrfeder bewirkt und die Fixierung in den 6 Stellungen durch eine Art Ankerhemmung, die von außen durch einen Elektromagneten betätigt wurde. Die Fig. 4 zeigt die Reproduktionen von 2 solchen Aufnahmen; ein Silberfleck (bei Versuch Nr. 4 der stärkste Fleck links unten, bei Nr. 5 der starke Fleck ganz links) ent-

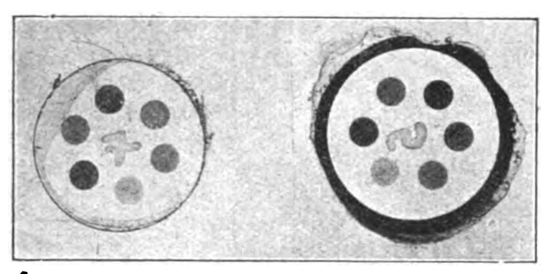
1) Vor der Versammlung wurden die Silberschichten selbst projiziert.

2) In Fig. 2 ist der oberste (schwächste) Quadrant bei Versuch Nr. 7 rechts oben, bei Versuch Nr. 8 rechts unten, abgebildet. In Fig. 3 ist der oberste (schwächste) Quadrant bei beiden Versuchen Nr. 6 und 9 rechts unten. Darauf ist beim Vergleich zu achten.

1) Bei dem Versuch Nr. 9 fehlt die Schwärzung auf dem zweiten Quadranten von unten; beim Aufkleben des Glasscheibchens auf eine größere Glasplatte mit Kanadabalsam ist der Silberbelag versehentlich nach außen gekommen und nachher beim Reinigen abgewischt worden.



steht bei Beginn des Versuches bis zur Erreichung konstanter Temperatur und geht für die Messung verloren, dann folgen (nach links herum) Expositionen von etwa 1, 2, 4, 8 Sek. Dauer, zu-



Nr. 4. Nr. 5.

Fig. 4.

letzt nochmals eine von 2 Sek. Dauer zur Kontrolle, ob der Strahl konstante Stärke behalten hat. Man sieht, daß das der Fall ist. Trotzdem haben die Versuche bisher noch keine brauchbare, glatte Eichkurve für das Photometer ergeben. So zeigen bei Versuch Nr. 4 zwei Expositionen (die beiden rechts), deren Dauern sich wie 1 : 2 verhalten, photometrisch fast genau dieselbe Schwärzung, obwohl die Silberschichten für das Auge sehr verschieden aussehen; die Schichten sind nämlich stark gefärbt, die dünneren rötlich, die dickeren blau. Die Versuche müssen mit besseren optischen Mitteln wiederholt werden.

Mit einer vorläufigen recht rohen Eichkurve haben wir einige relative Schichtdicken bestimmt und in der folgenden Weise rechnerisch verwendet. Ist D_{10} die Schichtdicke des Silbers auf der ersten Platte bei höchstem Vakuum, so ist die Schichtdicke bei der mittleren freien Weglänge λ

$$D_1 = D_{10} e^{-\frac{z_1}{\lambda}},$$

wo z_1 der Abstand der Platte von der Strahlenquelle ist. Ebenso gilt für die zweite Platte

$$D_2 = D_{20} e^{-\frac{z_2}{\lambda}}.$$

Daraus folgt

$$\lambda = \frac{z_2 - z_1}{\log\left(\frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{D_{20}}{D_{10}}\right)}.$$

Nun war bei unserem Apparat für je 2 aufeinander folgende Platten $z_2 - z_1 = 1$ cm; ferner fanden wir für den Ausdruck

$$\frac{D_1}{D_2} \cdot \frac{D_{10}}{D_{20}}$$

bei den beiden in den Figuren 2 und 3 dargestellten Versuchspaaren die Werte 1,8 bzw. 1,5. Daher erhält man

für $p = 5{,}8 \cdot 10^{-3}$: $\lambda = 1{,}7$ cm, $p\lambda = 9{,}9 \cdot 10^{-3}$,
„ $p = 4{,}5 \cdot 10^{-3}$: $\lambda = 2{,}4$ „ $p\lambda = 10{,}8 \cdot 10^{-3}$.

Das Produkt $p\lambda$ ist hinreichend konstant, wie es die Theorie verlangt; der Mittelwert ist $p\lambda = 0{,}01$. Man kann nun λ in Beziehung bringen zu dem Molekularabstand σ, d. h. der Entfernung der Mittelpunkte eines Silberatoms und einer Luftmolekel im Augenblicke der Berührung. Es ist leicht zu zeigen, daß hier der Maxwellsche Ausdruck für die freie Weglänge[1]) in Strenge güliig ist, nämlich die Formel:

$$\frac{1}{\lambda} = \pi N' \sigma^2 \sqrt{1 + \frac{mT'}{m'T}}.$$

Dabei ist N' die Anzahl der Luftmolekeln in der Volumeneinheit, m' ihr Molekulargewicht und T' ihre absolute Temperatur, während m, T die entsprechenden Größen für den Silberdampf bedeuten.

Nun ist $N' = 3{,}56 \cdot 10^{16} p$, wenn der Druck in mm Hg gemessen wird. Setzten wir ferner

für Luft $m' = 30$, $T' = 300$,
„ schmelzendes Silber $m = 108$, $T = 1300$,

so wird

$$\sqrt{1 + \frac{mT'}{m'T}} = 1{,}35$$

und

$$\sigma^2 = \frac{1}{\pi \lambda N' \sqrt{1 + \frac{mT'}{m'T}}} = \frac{0{,}0662 \cdot 10^{-16}}{\lambda p}.$$

Setzen wir den oben gefundenen Wert $p\lambda = 0{,}01$ ein, so erhalten wir $\sigma^2 = 6{,}6 \cdot 10^{-16}$, also

$$\sigma = 2{,}6 \cdot 10^{-8} \text{ cm}.$$

Die Methode führt also zur richtigen Größenordnung. Wir glauben, daß sie sich zu einem exakten Meßverfahren ausgestalten läßt. Hierzu ist in der Hauptsache nur eine genaue Bestimmung der relativen Dicken dünner Silberschichten erforderlich. Wir wollen mit Hilfe der Molekularstrahlen die Abstände σ für verschiedene, strahlende Materie in verschiedenen Gasen zu bestimmen versuchen; ferner scheint es uns möglich, durch Messung der abgelenkten Strahlung Schlüsse auf das Kraftgesetz zu ziehen, das beim Zusammenstoß wirksam ist. Die Elementarprozesse der kinetischen Gastheorie werden so der direkten Beobachtung zugänglich.

Die Mittel zu dieser Arbeit stammen aus einer Stiftung des Herrn Henry Goldman in New York, dem wir an dieser Stelle unsern Dank für seine hochherzige Hilfe aussprechen.

1) Vgl. etwa J. H. Jeans, The Dynamical Theory of Gases (Cambridge 1904), Ch. XI, § 284, S. 233.

Diskussion.

Rubens: Bei der Farbe der dünnen Silberschichten kann es sich wohl nicht um Newtonsche Farben handeln, da die Schichtdicke nur ein sehr kleiner Bruchteil der Wellenlänge ist.

Born: Ich muß es offen lassen, woher die Farben kommen; doch steht so viel fest, daß man mit Hilfe von Durchlässigkeitsmessungen die Dicke der Silberschichten nicht genau bestimmen kann.

Nernst: Hält der Vortragende die Theorie Maxwells und die spätere Brillouins, die aus dem Temperaturkoeffizienten der inneren Reibung der Gase das Kraftgesetz zu berechnen erlaubt, nicht für einwandfrei?

Born: Meiner Meinung nach geben die alten Methoden der kinetischen Gastheorie keine zuverlässigen Resultate. Solche wären erst von einer Ausarbeitung der Hilbertschen Theorie zu erwarten.

Debye: Ich glaube eigentlich, daß die gewünschte Verschärfung der mathematischen Methoden inzwischen durch die Arbeiten von Chapman und Enskog erreicht sein dürfte.

O. Stern (Frankfurt a. M.), Eine direkte Messung der thermischen Molekulargeschwindigkeit.

Die von der Molekulartheorie vorausgesetzte Temperaturbewegung der Moleküle ist durch zahlreiche Folgerungen, die durchweg von der Erfahrung bestätigt wurden, sehr wahrscheinlich gemacht. Die Geschwindigkeit dieser hypothetischen Bewegung wurde aber bisher noch nie direkt gemessen. Dies gelang dem Vortragenden durch folgende Anordnung:

Ein schwach versilberter Platindraht wurde in einem aufs höchste vakuierten Raume elektrisch geglüht, so daß das Silber schmolz und verdampfte und die Silberatome nach allen Seiten geradlinig vom Drahte ausstrahlten. Durch einen parallel zum Drahte angebrachten Spalt wurde ein schmales Bündel Silbermolekülstrahlen ausgeblendet, das auf eine Auffangplatte fiel und dort einen Strich erzeugte. Draht, Spalt und Auffangplatte befanden sich auf einem Rahmen, der um eine durch den Draht gehende Rotationsachse rasch gedreht wurde. Dabei erfolgt eine Verschiebung der Silberlinie entgegen der Rotationsrichtung. Denn ein vom Draht ausgehendes Silbermolekül braucht eine bestimmte Zeit, um bis zur Auffangplatte zu gelangen und während dieser Zeit hat sich die Platte bereits ein Stück weiter bewegt. Man kann auch sagen, in dem rotierenden System des Rahmens wirkt auf die bewegten Moleküle eine Korioliskraft, die sie ablenkt. Aus dem Betrage der Verschiebung, den Dimensionen des Apparates und der Drehgeschwindigkeit ergibt sich durch eine einfache Rechnung die Größe der Geschwindigkeit der Silbermoleküle. Die auf diese Weise gemessene mittlere Geschwindigkeit ergab sich zu etwa 650 m/sec, in Übereinstimmung mit dem theoretisch zu erwartenden Wert. Nähere Einzelheiten über Versuchsanordnung und Resultate siehe Zeitschr. f. Phys. **2**, 49, 1920 und ein demnächst an gleicher Stelle erscheinender Nachtrag.

Diskussion.

Marx: Gestatten Sie mir die Anfrage, ob die Methode so sicher ist, daß, wenn man wirklich Abweichungen vom Maxwellschen Verteilungsgesetz findet, diese eindeutig zu deuten sind. Könnten die gefundenen Abweichungen nicht z. B. auch auf Doppelmoleküle oder dergleichen zurückführbar sein?

Stern: Diese Abweichungen würden ganz anderer Art sein; Doppelmoleküle würden eine entsprechende kleinere Geschwindigkeit haben.

Geitler: Es ist mir augenblicklich nicht ganz klar, ob man in einem solchen Silberdampfstrahl überhaupt die Maxwellsche Verteilung erwarten darf.

Stern: Die Geschwindigkeitsverteilung ist nicht die Maxwellsche, aber sie läßt sich aus der kinetischen Gastheorie berechnen.

Reinhold Fürth (Prag), Die statistischen Methoden der Physik und der Begriff der Wahrscheinlichkeitsnachwirkung.

Das Folgende stellt einen Beitrag zur Klärung der Grundlagen der physikalischen Statistik dar, speziell was den von Smoluchowski eingeführten Begriff der Wahrscheinlichkeitsnachwirkung betrifft. Werfen wir zunächst einen Blick auf den bekannten Gegensatz zwischen der klassischen und der statistischen Auffassung der physikalischen Gesetzmäßigkeiten. Die klassische Auffassung ist doch die: Der Ablauf der Ereignisse ist bestimmt durch gewisse Differentialgleichungen, deren Integration gestattet, aus dem völlig gegebenen Anfangszustande eines sogenannten abgeschlossenen Systems mit Bestimmtheit auf den Zustand nach einer gewissen Zeit t zu schließen. Kenne ich also alle, die Veränderungen in dem System bestimmenden Parameter zur Zeit Null, so kann ich mit völliger Determiniertheit einen beliebigen zukünftigen Zustand voraussagen. Anders die statistische Betrachtungsweise: sie behauptet, daß die wahrnehmbare Gesetzmäßigkeit und relative Einfachheit des physikalischen Geschehens in Wirklichkeit nur eine

scheinbare sei, und ein Produkt aus einer sehr großen Anzahl von Teilvorgängen, die von nichts anderem als dem Zufall regiert werden und, als Kollektiv betrachtet, diese Einfachheit nur dem Umstande verdanken, daß es sich um statistische Massenerscheinungen handelt, von denen erfahrungsgemäß bekannt ist, daß sie von Gesetzen nach Art des Gesetzes der großen Zahlen beherrscht werden.

Da nun diese Auffassung der Dinge mit der Zeit durch ihre offenbare logische Unhaltbarkeit Bedenken erregte, einigte man sich auf den folgenden vermittelnden Standpunkt: Man unterscheidet zunächst zwischen dem sogenannten makroskopischen und dem mikroskopischen Zustand eines Systems. Unter dem mikroskopischen Zustand versteht man den Inbegriff der Zustände jedes einzelnen atomistischen Bausteins des Systems durch die Angabe sämtlicher mikroskopischer Parameter, d. i. sämtlicher Parameter, die die Zustände aller dieser Bestandteile, einzeln genommen, zahlenmäßig festlegen. Im Gegensatze dazu versteht man unter dem makroskopischen Zustand den Inbegriff einer Reihe von Eigenschaften des Systems, die selbst wieder als Summe sehr vieler mikroskopischer Einzeltatsachen aufgefaßt werden und sieht diese Zustände als bestimmt an durch die Angabe der diese Eigenschaften zahlenmäßig festlegenden Makroparameter. Während nun jedem Mikrozustand eindeutig ein Makrozustand zugeordnet werden kann, gehört umgekehrt zu jedem Makrozustand eine große Anzahl von Mikrozuständen, die sich voneinander nur durch die verschiedene Individualität der Mikrobausteine unterscheiden. Im Mikroskopischen sollen nun die klassischen Gesetze der Physik mit der aus ihnen entspringenden Determiniertheit der künftigen Zustände aus den gegenwärtigen unbeschränkt gelten. Sind aber bloß die Makrozustände gegeben, so ist es infolge des oben Gesagten nicht möglich, daraus auf die Zukunft eindeutig zu schließen, sondern es verbleibt eine gewisse Mannigfaltigkeit von Möglichkeiten, die darin ihren Ausdruck findet, daß die Aussagen, die man unter Zuhilfenahme der Wahrscheinlichkeitsrechnung über die Massenerscheinungen der Makrozustände machen kann, keine Gewißheit, sondern nur eben eine bestimmte „Wahrscheinlichkeit" des Eintreffens oder Nichteintreffens besitzen.

Diese auf den ersten Blick ziemlich einleuchtenden Gedanken treffen aber doch wohl noch nicht den Kern des ganzen Widerspruches, der darin liegt: Wieso kommt es, daß ich auf die molekularen Vorgänge selbst die statistischen Methoden anwenden darf, obzwar ich moralisch der Ansicht bin, daß sie in Wirklichkeit gar nicht zufällig sind, sondern durch ganz bestimmte Gesetze eindeutig determiniert.

Ich glaube nun, daß sich die Frage durch eine verhältnismäßig geringfügige Modifikation eines Gedankens erledigen läßt, der vor kurzem v. Mises anläßlich einer Arbeit über die Ergodenhypothese[1]) bekannt gemacht wurde, die wir am besten gleich an Hand eines einfachen und durchsichtigen Beispieles auseinandersetzen möchten, wobei wir ungezwungen auch zum Begriffe der Wahrscheinlichkeitsnachwirkung kommen werden, um den es sich ja hier hauptsächlich handelt.

Wir knüpfen unsere Betrachtungen an das Beispiel des sogenannten Galtonschen Brettes an, das als Modell zu verschiedenen statistisch physikalischen Betrachtungen verwendet zu werden pflegt. Es besteht bekanntlich aus einem gegen die Horizontale geneigt stehenden Brett, in das eine Reihe von glatten Nägeln etwa in folgender Anordnung eingeschlagen ist:

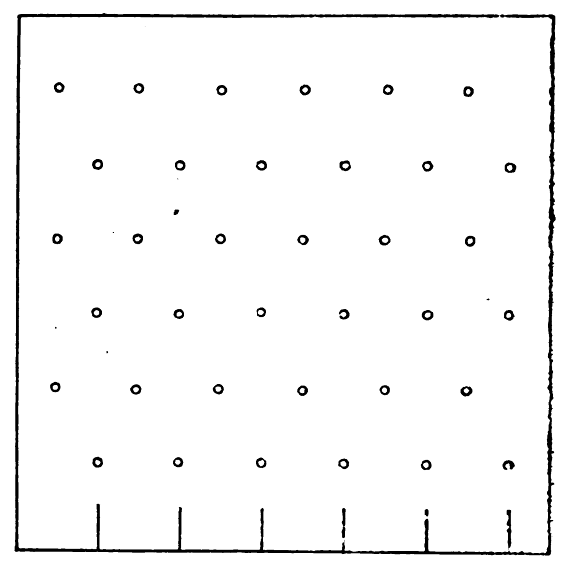


Fig. 1.

Man hat nun eine Anzahl von ebenfalls glatten Kugeln, deren Durchmesser gleich dem Abstand zweier benachbarter Nägel des Brettes ist. Lassen wir nun eine solche Kugel vom oberen Rande des Brettes herabfallen, dann wird sie durch die Zusammenstöße mit den Nägeln gezwungen, während des Herabgleitens eine Zickzackbahn einzuschlagen, über deren Verlauf bei genügend großer Dimensionierung des Brettes so gut wie nichts vorausgesagt werden kann, da offenbar schon ungemein geringfügige Änderungen der Anfangsbedingungen durch die Häu-

1) R. v. Mises, diese Zeitschr. **21**, 225, 1920.

fung der Zusammenstöße zu sehr starken Abweichungen der Bahnen voneinander führen müssen. Läßt man nun von einer und derselben Stelle des oberen Brettrandes eine größere Anzahl von Kugeln nacheinander herabfallen, so sammeln sich schließlich in den Kästchen am unteren Rande Kugeln in ganz bestimmtem Häufigkeitsverhältnis an, das durch die Gaußsche Fehlerkurve gegeben ist. Smoluchowski[1]) hat dieses Modell u. a. dazu benützt, um durch wahrscheinlichkeitstheoretische Überlegungen, die an ihm anstellbar sind, die Formel für die Wahrscheinlichkeit bestimmter Verschiebungen bei Brownscher Molekularbewegung u. dgl. abzuleiten.

Obzwar wir nun hier, wo es sich um rein mechanische Fragen handelt, die mit dem Auge zu überblicken sind, noch weniger an der Anwendungsmöglichkeit der Gleichungen der Mechanik und Determiniertheit des Vorganges zweifeln sollten, fordert doch gerade dieses Beispiel zur Anstellung wahrscheinlichkeitstheoretischer Überlegungen heraus, und es erhebt sich die Frage, wie diese beiden Standpunkte miteinander zu vereinbaren sind. Ich glaube nun, daß sich das nach dem Muster der v. Misesschen Überlegungen so durchführen läßt: Damit sich die Kugel zwischen den Nägeln wirklich durchbewegen kann, muß ein gewisser Spielraum vorhanden sein. Denken wir uns nun eine Kugel zwischen zwei Nägeln der obersten Reihe losgelassen, so wird sie auf einen darunter stehenden Nagel fallen und von hier aus entweder nach rechts oder nach links abgelenkt werden, bis sie wieder auf einen Nagel fällt usw. Ob sie nun aber nach rechts oder links fällt, hängt davon ab, von welcher Stelle ich sie habe fallen lassen. Denken wir uns nun das Experiment für eine sehr große Anzahl von Ausgangslagen ausgeführt und jedesmal die Bahn des Kugelmittelpunktes irgendwie aufgezeichnet, so wird man eine Schar von Bahnen erhalten, die wir vorläufig bloß bis hinter den ersten Nagel verfolgen und die etwa so (schematisch, Fig. 2) aussehen werden.

Obzwar nun praktisch infolge der geringen Wahrscheinlichkeit dieses Ereignisses der Fall nie eintreten wird, muß es doch theoretisch als durchaus möglich erscheinen, daß die Kugel so losgelassen wird, daß sich ihr Schwerpunkt im Momente des Auffallens auf den Nagel senkrecht über ihm befindet und ihre Rotationsgeschwindigkeit gleich Null ist. Was geschieht dann? Nehmen wir an, daß der Zusammenstoß völlig elastisch erfolgt, so wird die Kugel wieder

1) M. v. Smoluchowski, diese Zeitschr. 17, 557, 1916.

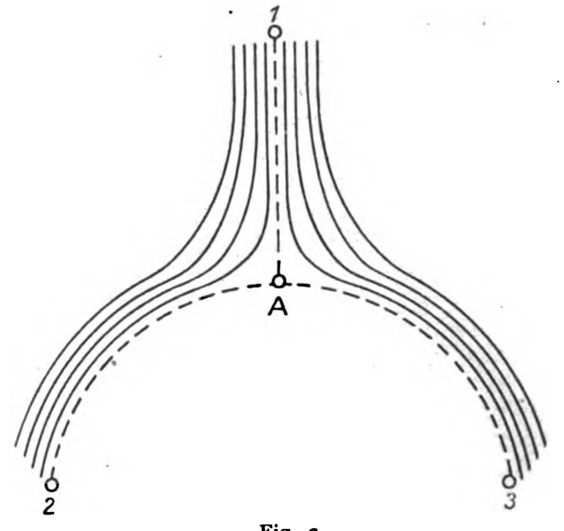


Fig. 2.

zu ihrem Ausgangspunkte zurückkehren, wieder fallen usw. ohne Aufhören. Ist der Stoß unelastisch, dann muß sie nach ihm an derselben Stelle liegen bleiben und verbleibt in dieser Lage für immer im labilen Gleichgewicht. Ist der Stoß nicht völlig elastisch, oder treten auf der Bahn Reibungskräfte auf, dann wird sich ebenfalls dieser Zustand nach einigem gedämpften Auf- und Abpendeln von selbst herstellen. Dies ist die dynamische Seite des Vorganges. Kinematisch hingegen bleiben von hier aus zwei Bewegungsmöglichkeiten in gleicher Weise offen, nämlich von dem Nagel nach rechts oder nach links herabzugleiten, und es wird sich dieser Fall auch dynamisch realisieren, wenn ein, wenn auch noch so kleiner äußerer Anstoß erfolgen sollte. Die beiden so möglichen Bahnen sind in der Fig. 2 ebenfalls (— — — — —) eingezeichnet. In den Raum zwischen ihnen kann offenbar keine mögliche Bahn zu liegen kommen. Hingegen werden sich diese von außen her in dichter Menge an sie als Grenzwerte anschmiegen. Diese Grenzwerte sind aber tatsächlich unerreichbar und gehören also nicht zur Menge hinzu.

v. Mises hat nun die Annahme gemacht, daß diese Bahnen tatsächlich, wenn auch mit verschwindender Wahrscheinlichkeit erreichbar sein sollten, indem er sagt, daß in dem besprochenen Falle die mechanische Differentialgleichung versagt, d. h. keine eindeutige Lösung liefert, sondern statt zu einer unverzweigten Bahn, zu einer Bahn mit einem Verzweigungspunkte in A führt. Das ist nun aber nach dem Obigen nicht richtig; die Gleichungen der Mechanik ergaben nach wie vor eindeutige Resultate, indem sie die Möglichkeit der Bahn 2 als auch der Bahn 3 grundsätzlich ausschließen. Die Bahnen 1—2 und 1—3 sind also als Grenzfälle aufzufassen,

denen sich die realen Bahnen zwar beliebig annähern können, die aber prinzipiell unerreichbar sind; wir wollen sie in der Folge als Idealbahnen bezeichnen. Dieselbe Überlegung kann nun natürlich auch an den anderen Nägelpunkten des Brettes angestellt werden.

Machen wir nun eine große Anzahl der oben beschriebenen Versuche, so wird bei jedem einzelnen Versuch der Endpunkt der Bahn am unteren Rande des Brettes durch die Anfangsbedingungen völlig eindeutig bestimmt sein und kennten wir alle mechanischen Bedingungen des Systems, und die genauen Anfangsbedingungen, so könnten wir, wenigstens prinzipiell, die Endlage auch wirklich vorausberechnen. Dies ist nun zwar praktisch unmöglich, doch kommt es auch darauf hier gar nicht an. Wir wollen ja nicht über den Ausfall des Einzelexperimentes, sondern über den aller Experimente als Kollektiv betrachtet eine Aussage machen, d. h. auf die relative Anzahl von Kugeln in den einzelnen Fächern des untersten Stockwerkes unseres Brettes. Die Frage ist nun die: Können wir eine solche Aussage machen, ohne alle diese Bedingungen zu kennen, und welches sind die dazu nötigen Voraussetzungen? Die Frage ist nun bejahend zu beantworten unter Einführung folgender Voraussetzungen, die wir zunächst provisorisch machen, mit dem Vorbehalt, sie später durch bessere zu ersetzen.

1. Es sei die Funktion bekannt, nach der sich die Anfangslagen der sukzessive abgeworfenen Kugeln um den Punkt 1 verteilen, wir nennen sie die Verteilungsfunktion. Sie wird im allgemeinen eine diskontinuierliche Funktion des Ortes sein, geht aber bei unbegrenzter Vermehrung der Versuche in die sie interpolierende stetige Funktion über. 2. Die Verteilungsfunktion bleibt auf jedem einzelnen Zweige der Bahn dieselbe, insbesondere verteilen sich hinter jedem Verzweigungspunkte die realen Bahnen in der gleichen Weise um die Idealbahnen als dies vor dem Verzweigungspunkte in bezug auf die noch unverzweigte Idealbahn der Fall war.

Ich behaupte nun, daß diese Annahmen genügen, um die Verteilung der Endpunkte der realen Kugelbahnen, um die es sich handelt, vorauszubestimmen. Zu diesem Zwecke braucht man bloß die Verteilung der Endpunkte der Idealbahnen über die untere Kante des Brettes aufzusuchen und die Endpunkte der Realbahnen um diese gemäß der gegebenen Verteilungsfunktion zu gruppieren. Der Gedankengang, welchen ich nun aber benütze, um jene Idealverteilung zu finden, ist gerade genau derselbe, der der gewöhnlich angewendeten wahrscheinlichkeitstheoretischen Betrachtung zugrunde liegt. Denn die hier als „Wahrscheinlichkeit“ eines oder mehrerer Ereignisse eingeführte Größe ist nichts anderes als jene Zahl, die in unserer Ausdrucksweise angibt, wie vielfältig die Verzweigung der Idealbahnen erfolgt, und alle Rechengesetze, die die Wahrscheinlichkeitsrechnung benützt, sind, wie man sich sehr leicht zurecht legen kann, nichts anderes als Rechengesetze, die Verteilung der Idealbahnen betreffend. Damit wird die Wahrscheinlichkeitsrechnung in ihrer Anwendung auf derartige physikalische Aufgaben ihres mystischen Gewandes entkleidet, das aus den Worten „Zufall“, „Wahrscheinlichkeit“ u. dgl. gewebt ist, und erscheint als ein exakter Kalkül betreffend die Idealbahnen, der mit Hypothesen nach Art des Gesetzes der großen Zahlen vorderhand noch gar nichts zu tun hat.

Um also nochmals zu präzisieren, worauf es ankommt: die Wahrscheinlichkeitsrechnung ist derjenige Kalkül, der es mir ermöglicht, von dem idealen Ausgangspunkte ausgehend, eine bestimmte Aussage über die Verteilung der Endpunkte der Idealbahnen zu machen, unter Voraussetzung der Kenntnis der Verzweigungsstellen und ihrer Vielfachheit, die hier die Stelle der „Wahrscheinlichkeiten“ einnehmen. Ist dies getan, dann ist es vermittels der obigen zwei Voraussetzungen ein leichtes, die wirkliche Verteilung unseres Endkollektivs zu bestimmen.

Soweit ist also das Problem erledigt, man kommt in Übereinstimmung mit der gewohnten Anschauung zu ganz determinierten Resultaten. Nun ist aber diese Anleitung zur Lösung unserer Aufgabe praktisch illusorisch, da es tatsächlich gar nicht möglich ist, die benötigte Anfangsverteilungsfunktion genau anzugeben, infolge unserer Unkenntnis der genauen Anfangsbedingungen, unter denen die Kugeln losgelassen werden. Hier muß nun notwendigerweise eine Hypothese die Brücke ausfüllen, und zwar eine solche, die mir sagt, welches ist die Gestalt der Verteilungsfunktion, wenn ich von den Anfangslagen weiter gar nichts weiß, als daß ich mich bemühe, möglichst in der Umgebung des Punktes 1 abzukommen und es außerdem in der Hand habe, beliebig viele Versuche anzustellen. Gewöhnlich pflegt man zu sagen, daß die Gaußsche Fehlerfunktion diese Aufgabe löse, im Grenzfalle unbeschränkt zunehmender Anzahl von Einzelversuchen. Es kommt hier gar nicht auf die Frage der Berechtigung dieser Behauptung an, wichtig ist uns hier nur, daß auf jeden Fall, wenn es ein solches Gesetz gibt, dies sicherlich nur für den Grenzfall unendlich zunehmender Versuchszahl exakt sein und daher bei jeder endlichen Versuchszahl nur eine mehr oder weniger gute

Annäherung darstellen kann. Daher kommt es nun, daß dem nach unserer Anweisung errechneten Endresultat nur annähernde Richtigkeit zukommt, und daß wir bloß werden erwarten dürfen, sozusagen von sehr weit betrachtet unsere Rechnungen bestätigt zu sehen, aber überlagert von gewissen Schwankungen, die erst dem nähertretenden Beobachter sichtbar werden. Somit sind wir hiermit auf den schon früher skizzierten Standpunkt angelangt, daß die scheinbare Nichtdeterminiertheit ihren Grund — physikalisch gesprochen — in unserer mangelhaften Kenntnis des Mikrozustandes hat, der zu dem gegebenen Makrozustand gehört, wobei wir uns aber jetzt klar geworden sind, daß der zur theoretischen Behandlung eingeschlagene Weg der Statistik nichts der physikalischen Anschauung Fremdes und kein ihre Determiniertheit ignorierendes Element hineinbringt und ohne in irgendeinem Falle von einem Versagen der klassischen Ansätze sprechen zu müssen.

Im übrigen kommt es so sehr auf die genaue Kenntnis der Gestalt der Verteilungsfunktion nicht an und es ist leicht, sich klar zu machen, daß in den meisten der zu betrachtenden Fälle die Kenntnis der Funktion sich erübrigt. Läßt man nämlich die Anzahl der Verzweigungspunkte immer mehr und mehr zunehmen, was man in unserem Beispiel des Galtonschen Brettes etwa durch Vergrößerung der ganzen Anordnung nach unten und nach den Seiten erreichen kann, so sieht man, daß die relative Besetzung der Endstrecke mit idealen Endpunkten immer dichter wird, so daß im Grenzfalle unbeschränkter Zunahme der Verzweigungspunkte die Gestalt des realen Endkollektivs von der jeweiligen Verteilungsfunktion gar nicht mehr abhängen wird, wie aus der Theorie der Interpolation bekannt, vorausgesetzt, daß die Verteilungsfunktion eine sogenannte „anständige" Funktion ist. Man hat es nun zwar in der Praxis niemals mit diesem Grenzfall selbst zu tun, kann sich aber hier sicherlich mit einer genügend guten Annäherung zufrieden geben, da man ohnehin infolge der ungenauen Kenntnis des Ausgangszustandes nur ein beschränkt genaues Resultat erwarten kann.

Damit wäre nun die Schwierigkeit der Bedingung (1) für die Lösung unseres Problems aus der Welt geschafft. Viel heikler gestaltet sich die Erledigung von (2). Man kann zunächst überhaupt zweifeln, ob es möglich ist, eine Ausgangsverteilungsfunktion nach (1) so zu bestimmen, daß die Bedingung (2) für jeden Verzweigungspunkt erfüllt ist. Man kann sich sehr leicht Fälle konstruieren, wo das sicher nicht zutrifft. In unserem Beispiel gehören hierher unter anderem alle die Fälle, bei denen die Verteilung um die Idealbahn 1—A nicht symmetrisch ist. Es scheint mir aber keineswegs sicher beweisbar, daß eine solche Funktion immer existieren müsse, welche die Bedingungen (1) und (2) kompatibel macht. Und wenn es auch eine solche geben sollte, so ist damit noch immer nicht gesagt, daß es jene ist, die in dem wirklich ausgeführten Experimente vorliegt. Hier liegt in der Tat der schwache Punkt unserer Beweisführung und es scheint zunächst, als ob damit unsere bisherige Schlußfolgerung hinfällig würde.

So schlimm liegt nun aber die Sache glücklicherweise nicht. Ist nämlich die Bedingung (2) nicht erfüllt, so wird es doch immer möglich sein, eine Angabe darüber zu machen, in welcher Weise in einem jeden Verzweigungspunkt die gegebene Verteilungsfunktion abgeändert wird. Das Gesetz, nach dem diese Änderung vor sich geht, ist jedenfalls von den physikalischen Bedingungen des Systems abhängig, die ja auch die Verzweigungspunkte selbst bestimmen. Es muß also jedenfalls prinzipiell möglich sein, diese Änderungen der Verteilungsfunktion formelmäßig festzulegen, oder mit anderen Worten: wenn die Verteilung der Realbahnen um die idealen auf einem Stück der Bahnkurve bis zu einem Verzweigungspunkt gegeben ist, aus den physikalischen Bedingungen die Verteilung um die Zweige der Idealbahn hinter dem Verzweigungspunkt zu bestimmen. Im Speziellen kann natürlich diese neue Verteilung mit der vorangehenden identisch sein, wir kommen damit zu dem bereits erledigten Fall zurück, der also in der jetzigen Formulierung der Bedingung (2) mit enthalten ist, die wir so aussprechen können: Gegeben sei die Wirkung, die eine jede Verzweigungsstelle auf die Verteilungsfunktion ausübt.

Um die Sache klarer zu machen, kehren wir wieder zu unserem Beispiel des Galtonschen Brettes zurück. Nehmen wir an, daß die Verteilungsfunktion am Anfange der Bahn bei 1 eine symmetrische Gestalt rechts und links von 1 hat, dann müßte nach unserer ersten Formulierung gefordert werden, daß auch an jedem Verzweigungspunkte, d. h. nach Passieren einer Kugel an einem der Nägel, ebenso häufig die Kugel nach rechts wie nach links herabgleitet, oder in der bis jetzt üblichen Bezeichnungsweise ausgedrückt, die Wahrscheinlichkeit des Herabgleitens der Kugel von irgendeinem Nagel ist unabhängig von der Vorgeschichte, d. h. von der bis dahin durchlaufenen Bahn der Kugel. Diese Voraussetzung muß nun aber absolut nicht erfüllt sein, man könnte sich sehr wohl den Fall etwa so denken, daß die Ableitwahrscheinlichkeit davon abhängig ist, ob die

Kugel von rechts oder von links kommend auf den Nagel gefallen war, das letztere scheint sogar noch plausibler. Diese Nachwirkung der Vorgeschichte eines Systems auf die Wahrscheinlichkeit seines Verhaltens wurde von Smoluchowski unter der Bezeichnung „Wahrscheinlichkeitsnachwirkung“ zum ersten Male praktisch bei der theoretischen Behandlung der Dichteschwankungen in einer kolloiden Lösung verwendet[1]).

Es kann nun zwar sehr wohl geschehen, daß auch bei Berücksichtigung einer solchen „Wahrscheinlichkeitsnachwirkung“ das nach genügend langer Zeit sich herstellende Endkollektiv nicht anders ausfällt, als hätte man diese Nachwirkung gar nicht berücksichtigt; das ist aber durchaus nicht notwendig. Macht man beispielsweise am Galtonschen Brett als Modell der Brownschen Bewegung die Rechnung für das mittlere Verschiebungsquadrat mit Berücksichtigung einer Wahrscheinlichkeitsnachwirkung, was man in diesem Falle als sogenannte Persistenz der Bewegungsrichtung bezeichnen kann, so kommt man zu einer, von der Einsteinschen abweichenden Formel, wie ich vor kurzem theoretisch zeigen und auch an einem geeigneten Material experimentell verifizieren konnte[2]). Man hat der Verwendung des Begriffes der Wahrscheinlichkeitsnachwirkung bei statistischen Fragen mit Recht vorgeworfen, daß sie ein der Statistik fremdes Element in Verwendung bringt, indem schon das Wort „Wirkung“ an die Verknüpfung von Ursache und Wirkung, also an Kausalität erinnert und sich damit zu dem Zufallsbegriff der Statistik in Opposition stellt. Anderseits wurde die Notwendigkeit der Einführung des Begriffes gedeutet als ein Fiasko der physikalischen Statistik, indem es eben doch notwendig sei, auch hier den Ursachbegriff durch eine Hintertür wieder einzuführen. Mir scheint nun, daß nach der hier entwickelten Anschauungsweise diesem Einwand die Spitze genommen ist, da es hier grundsätzlich vermieden wird, mit dem „Zufall“ überhaupt zu operieren. Es bleibt daher an dem Begriff „Wahrscheinlichkeitswirkung“ nichts Anstößiges mehr als sein Name, der sich aber wohl durch einen der Sache mehr entsprechenden wird ersetzen lassen. Es dürfte genügen, statt „Wahrscheinlichkeitsnachwirkung“ bloß „Nachwirkung“ zu sagen. Von unserem Standpunkte erscheint also das Rechnen mit der Nachwirkung als eine dem Thema völlig adäquate Verbesserung der älteren Methodik.

Auf welche Weise man nun allerdings in jedem konkreten Falle die Nachwirkung aus den Bedingungen des Systems zu ermitteln hat, dafür läßt sich eine allgemeine Regel nicht aufstellen, und ist auch wohl sicher in vielen Fällen schwierig. Häufig jedoch, wie z. B. in dem vorhin erwähnten Beispiel der Brownschen Bewegung mit Persistenz der Bewegungsrichtung oder auch in dem Smoluchowskischen der Dichteschwankungen wird man mit relativ einfachen Überlegungen auskommen. Mitunter kann es wohl auch vorkommen, daß man auf diesem Wege überhaupt nicht weiterkommt, weil über die physikalischen Bedingungen des Systems zu wenig bekannt ist. Hier kann man jedoch mit Vorteil den umgekehrten Weg gehen, daß man nämlich durch Einführung einer unbekannten Nachwirkungsfunktion zunächst allgemein das Problem der Verteilung des Endkollektivs zu lösen sucht und dann durch Vergleich mit der Erfahrung daraus diese unbekannte Funktion ermittelt. Damit ist dann wieder die Möglichkeit geboten, neue Aufschlüsse über den Mechanismus der Erscheinung zu erhalten. So war es mir z. B. auf diesem Wege möglich, in dem betrachteten Falle der Brownschen Bewegung, angewendet auf die unregelmäßige Bewegung lebender Infusorien durch zunächst unbestimmten Ansatz der Nachwirkung durch Vergleich mit dem Experiment ganz bestimmte Aussagen in bezug auf den Mechanismus des Vorganges zu machen. Ebenso in einem anderen Falle, betreffend Dichteschwankungen von Fußgängern auf einer Stelle einer Straße, konnte ich die Nachwirkung aus den beobachteten Schwankungen experimentell bestimmen[1]), um erst im Nachhinein, veranlaßt durch eine Bemerkung Ornsteins, diese Größe mit anderen, direkt meßbaren in Verbindung zu setzen[2]), was zu sehr guter Übereinstimmung führte.

Es scheint mir also, daß das Operieren mit der Nachwirkung nicht nur ein vorübergehendes und provisorisches Auskunftsmittel der theoretischen Physik ist, sondern daß es sich um einen für die Statistik zumindest ebenso wichtigen Begriff handelt, wie den der „Wahrscheinlichkeit eines eintretenden Ereignisses“.

Um schließlich nochmals zusammenzufassen, was in dem hier Vorgebrachten als neu bezeichnet werden kann: Die sogenannte physikalische Statistik wird von der Verwendung des Zufallsbegriffes befreit und grundsätzlich auf den der Kausalität und Determiniertheit der physikalischen Vorgänge gestellt. Die dennoch beobachtbaren Schwankungen der makroskopischen Parameter werden der Vieldeutigkeit der

1) M. v. Smoluchowski, Wien. Ber. **123** (2a), 2389, 1914; **124** (2a), 354, 1915.
2) R. Fürth, Zeitschr. f. Physik **2**, 244, 1920.

1) R. Fürth, diese Zeitschr. **19**, 421, 1918.
2) R. Fürth, diese Zeitschr. **20**, 21, 1919.



Zuordnung der mikroskopischen zu den makroskopischen Zuständen zugeschrieben. Zur praktischen Behandlung des Problems ist die Kenntnis gewisser Verteilungs- und Nachwirkungsfunktionen notwendig, die sich aus den jeweiligen physikalischen Bedingungen des Systems ergeben.

Diskussion.

Konstantinowsky: Ich möchte den Herrn Vortragenden fragen, wie sich die Resultate, welche Przibram an der Brownschen Bewegung erhalten hat, mit seinen Ausführungen vereinigen?

Fürth: Die Versuche von Przibram zeigen die erwähnte Abweichung von der Einsteinschen Formel nicht, weil bei ihnen eine zu kleine Statistik am Einzelindividuum zugrunde liegt. Macht man viele Beobachtungen am Einzelteilchen, dann ergibt sich, daß der funktionelle Zusammenhang zwischen dem mittleren Verschiebungsquadrat $\overline{x^2}$ und der Zeit t nicht, wie nach der Einsteinschen Formel, durch eine gerade Linie dargestellt wird, sondern durch eine nach oben konkave, die durch den Koordinatenursprung hindurchgeht.

H. Rausch von Traubenberg (Göttingen), Über eine Methode zur direkten Bestimmung der Reichweite von α-Strahlen in festen Körpern[1]).

Um die Reichweite von α Strahlen direkt in festen Körpern zu bestimmen, habe ich eine Methode verwendet, bei der der absorbierende Körper von keilförmiger Gestalt zwischen Strahlungsquelle und Sidotschirm gebracht wird. Die α-Strahlen des *RaC* durchdringen dabei, entsprechend ihrer Reichweite, den Keil nur bis zu einer kritischen Dicke und bringen den unmittelbar auf dem Keil aufliegenden Sidotschirm in einer ganz bestimmten Länge zum Aufleuchten. Die Stelle, bis zu welcher der Keil durchlässig war, wurde markiert und seine Dicke nachträglich mit einem Zeißschen Dickenmesser gemessen. Die β Strahlen wurden mit Hilfe eines kräftigen Magnetfeldes abgelenkt. Zu diesem Zweck passierte die vom radioaktiven Präparat ausgehende Strahlung den Luftschlitz eines Magneten von ca. 5 mm Länge. Zu der kritischen Keildicke K mußte somit eine kleine Luftkorrektion l addiert werden, um die Reichweite $R = K + l$ zu erhalten. In der Tabelle befinden sich die beobachteten Reichweiten in Spalte 7.

1) Ein Teil der Arbeit ist in der Zeitschrift für Physik, **2**, S. 268, 1920 ausführlich publiziert.

Zunächst wurden die Metalle: *Li, Mg, Al, Ca, Fe, Ni, Cu, Ag, Cd, Sn, Pt, Au, Tl, Pb,* von mir untersucht und die erhaltenen Reichweiten (nach dem Vorgang von Bragg) als Funktion von Atomgewicht A_s und Dichte d_s dargestellt. Als Normalsubstanz wurde nicht Luft, sondern Sauerstoff verwendet, unter Benutzung der von Taylor[2]) ermittelten Reichweite in diesem Gase. Die Reichweite R_s in einem beliebigen Element stellt sich dabei dar

$$R_s = \frac{\sqrt{A_s}}{d_s} \frac{d_N}{\sqrt{A_N}} \cdot R_N, \qquad \text{(I)}$$

wobei sich der Index „N" auf Sauerstoff bezieht. Wie man aus der Tabelle durch Vergleich von Spalte 7 und 8 ersieht, zeigen die nach (I) berechneten Werte besonders bei den höheren Atomgewichten systematische Abweichungen von den beobachteten Werten, während H, He und Li gänzlich herausfallen. Die Reichweiten in H und He wurden ebenfalls der Taylorschen Arbeit entnommen. Die Abweichungen bei den höheren Atomgewichten verschwinden, wenn man statt des Atomgewichts die Stellenzahl Z im periodischen System einsetzt und die Reichweiten nach Formel II berechnet.

$$R_s = \frac{\sqrt{Z_s}}{d_s} \cdot \frac{d_N}{\sqrt{Z_n}} R_N. \qquad \text{(II)}$$

Die Abweichungen für H, He und Li bleiben allerdings auch hier bestehen. Ich habe weiter eine Formel aufgestellt, welche von Wasserstoff als Normalsubstanz ausgeht und die Reichweiten bis Blei gut darstellt:

$$R_s = \frac{\sqrt[2]{A_s}}{d_s} \cdot \frac{d_N}{\sqrt{A_N}} \cdot \sqrt[3]{\frac{Z_s}{A_s}} \cdot R_N, \qquad \text{(III)}$$

der Index „N" bezieht sich hier auf Wasserstoff.

Für Wasserstoff ist $\sqrt[3]{\frac{Z}{A}} = 1$; für die Elemente mit höherem Atomgewicht wird dieser Faktor ungefähr $= \sqrt[3]{1/2}$; die Abweichungen der Stellenzahl vom halben Atomgewicht kommen in der Formel offenbar richtig zur Geltung, da Beobachtung und Berechnung von O ab sehr gut übereinstimmen. He und Li, bei denen sich zu klein berechnete Reichweiten ergeben, werden in die Formel III mit einbegriffen, wenn man bei diesen Elementen den Faktor $\sqrt[3]{\frac{Z}{A}}$, ebenso wie beim Wasserstoff $= 1$ setzt.

2) Taylor, Phil. Mag. (6) **26**, 402, 1913.

Element	Z	A	d	K	l	R beob. $= K + l$	R ber. Formel I	R ber. Formel II	R ber. Formel III	Bemerkungen	Beobachter
Wasserstoff	1	1,008	$8{,}49 \cdot 10^{-5}$ 15°, 760	—	—	30,93 cm	24,9 cm	35,2 cm	(30,93 cm)	—	Taylor
Helium	2	4,00	$17{,}0 \cdot 10^{-5}$	—	—	32,5 cm	24,9 cm	24,7 cm	24,5 cm	—	„
Lithium	3	6,94	0,532	116,4 μ 121,2 μ	10,2 μ	129,1 μ	105 μ	96,8 μ	98,0 μ	Kahlbaum Merk	Tr.
Sauerstoff	8	16,00	$1{,}35 \cdot 10^{-3}$	—	—	6,26 cm	(6,26 cm)	(6,26 cm)	6,14 cm	—	Taylor
Magnesium	12	24,32	1,75	53,2	4,6	57,8 μ	59,2 μ	59,1 μ	58,0 μ	pur	Tr.
Aluminium	13	27,1	2,70	37,5	3,1	40,6	40,6 μ	39,8	39,4	„	„
Calcium	20	40,07	1,54	72,0	6,8	78,8	86,9	86,9	85,5	99 Proz.	„
Eisen	26	55,84	7,78	17,2	1,5	18,7	20,3	19,6	19,4	pur	„
Nickel	28	58,68	8,65	17,0	1,4	18,4	18,7	18,3	18,2	„	„
Kupfer	29	63,57	8,90	16,9	1,4	18,3	18,9	18,1	18,0	„	„
Zink	30	65,37	7,16	21,0	1,8	22,8	22,9	22,9	22,8	„	„
Silber	47	107,9	10,5	17,7	1,5	19,2	20,9	19,5	19,6	„	„
Cadmium	48	112,4	8,65	22,3	1,9	24,2	25,8	24,0	24,1	„	„
Zinn	50	118,7	7,24	27,1	2,3	29,4	31,7	29,2	29,4	„	„
Platin	78	195,2	21,4	11,8	1,0	12,8	13,8	12,3	12,6	„	„
Gold	79	197,2	19,3	12,9	1,1	14,0	15,3	13,7	14,0	„	„
Thallium	81	204,0	11,9	21,5	1,8	23,3	25,4	22,6	23,1	Merk	„
Blei	82	207,2	11,4	22,3	1,8	24,1	26,6	23,7	24,3	pur	„

Nach allen drei Formeln erhalten wir somit ein Versagen ihrer Gültigkeit bei den Anfangselementen des periodischen Systems. Es ist von Interesse, festzustellen, von welchem Element (vor Sauerstoff) an die Gültigkeit der Reichweite-Formeln beginnt, da man, wenn einmal die Erscheinungen, die beim Durchgang von α-Strahlen durch Materie auftreten, theoretisch schärfer erfaßt sind, aus den beobachteten Abweichungen vielleicht — Schlüsse auf die Konstitution der Atome bzw. Atomkerne ziehen kann.

Leider war es mir bis jetzt nicht möglich, an reinen Elementen zwischen Li und O entscheidende Resultate zu erhalten. Herr Dr. Oesterheld war so freundlich, mir chemisch reines Beryllium metallicum fusum zur Verfügung zu stellen, aber trotz der gütigen Unterstützung von Herrn Dr. Ehringhaus gelang es nicht, einen brauchbaren Keil aus dem außerordentlich harten und spröden Material zu erhalten. Hingegen gelang die Herstellung eines Keiles aus Ag-Be-Legierung von 14 Gewichtsproz. Be, die ich ebenfalls Herrn Dr. Oesterheld verdanke. Das Be scheidet sich bei dieser Legierung offenbar als hochprozentiger Mischkristall aus der reinen Silberschmelze aus, und zwar in so kompakten Stücken, daß die α-Strahlen bei dem verhältnismäßig dünnen Keil nur den Be-Ag-Mischkristall durchdringen[1]. Nun ist es durchaus möglich aus der resultierenden Reichweite in einer Verbindung oder in einem Mischkristall auf die Reichweite in den zusammensetzenden Komponenten zu schließen (Bragg). Vorversuche an SiO_2, sowie an Ag-Cu und Pt-Ni Mischkristallen ergaben leidlich gute Übereinstimmung zwischen der beobachteten und der nach (IV) berechneten Reichweite.

$$R_s = \frac{p_1\sqrt{Z_1} + p_2\sqrt{Z_2} + \cdots + p_n\sqrt{Z_n}}{d_s} \cdot \frac{d_N}{\sqrt{Z_n}} R_N, \qquad \text{(IV)}$$

hierin bedeuten $p_1 \cdots p_n$ die relativen Atomzahlen, d_s die mittlere Dichte der Verbindung.

Berechnet man für den Be-Ag-Mischkristall unter der Annahme, daß er 92,6 Atomprozent Be enthält, die Reichweite, so ergibt sich diese zu 23,5 μ, die Beobachtung ergab 31,1 μ.

Nimmt man hingegen an, daß Be die gleiche Abweichung wie Li von dem nach Formel II berechneten Wert zeigt, so hätten wir in IV nicht $p_1\sqrt{Z_1}$, sondern $p_1 \times 1{,}34\sqrt{Z_1}$ zu setzen und würden dann für $R_s = 29{,}5\ \mu$ erhalten, einen Wert, der an den beobachteten 31,1 μ befriedigend nahe herankommt. Es wird durch dieses Resultat nahegelegt, daß auch Be ähnliche Abweichungen wie Li zeigt. Es wäre jetzt noch das Verhalten von B, C und N festzustellen.

Zur Untersuchung der durch den Stoß der primären α-Strahlen freigemachten sekundären α-Strahlen scheint mir die Keilmethode geeignet; ich habe bei vielen Metallen jenseits der kritischen Keildicke, also jenseits der Reichweite der primären Strahlung „H" Szintillationen festgestellt und bei Li außer „H"-Strahlen größere lichtschwache, sehr verwaschene Szintillationen beobachtet. Die näheren Entstehungsbedingungen dieser sekundären Szintillationen sollen in einer Fortsetzung meiner Arbeit festgestellt werden, in der Hoffnung, dadurch vielleicht weitere Bei-

1) G. Oesterheld, Zeitschr. f. anorg. und allg. Chemie, 97, 1—40, 1916.

träge zu der von Rutherford entdeckten Atomzerspaltung liefern zu können.

Diskussion.

Kalähne: Wie verhalten sich die unmittelbar auf Sauerstoff folgenden Elemente, speziell Fluor? Beginnt die Unstetigkeit in dem Gesetz der Durchlässigkeit an der Stelle des periodischen Systems, wo außer dem innersten Elektronenring ein zweiter sich ausbildet?

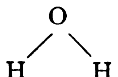
Traubenberg: Ich beabsichtige, noch mehr Elemente zwischen Sauerstoff und Wasserstoff zu untersuchen.

Paneth: Darf ich den Herrn Vortragenden fragen, wie stark sein *RaC*-Präparat war und ob seine Ausbeute an den vermuteten *H*-Strahlen etwa mit der von Rutherford gefundenen übereinstimmt?

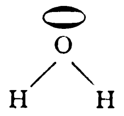
Traubenberg: Das Präparat war wesentlich schwächer wie bei Rutherford, ergab aber durch wesentlich geringeren Abstand zwischen Strahlungsquelle und absorbierendem Schirm eine relativ größere Ausbeute an *H*-Strahlen.

D. Vorländer (Halle a. S.), Ableitung der molekularen Gestalt aus dem kristallinisch-flüssigen Zustand.

Durch Vergleich der kristallinisch-flüssigen Eigenschaften zahlreicher Arylidenamine wurde gemeinsam mit F. H. Weber (Diss. Halle 1914) nachgewiesen, daß Sauerstoff und Schwefel im zweiwertigen Zustande ebenso wie Kohlenstoff und dreiwertiger Stickstoff die Valenzen winkelförmig gerichtet haben. Für Wasser und Schwefelwasserstoff ergibt sich daraus die winkelförmige Gestalt, z. B.



Schätzungsweise kann man ableiten, daß der Winkel am Sauerstoff und am Schwefel annähernd ebenso groß oder spitzer ist, als am Kohlenstofftetraeder (109^0), während er beim Stickstoff etwas stumpfer zu sein scheint. Sucht man nach Gründen für diesen Winkel, so könnte man sagen: die Bahnen der Wasserstoffatome werden gestört und abgelenkt durch ein Wesen — man mag es Valenz, Elektron oder Quante nennen —, das neben den Wasserstoffatomen am Sauerstoff bzw. Schwefel (oder Stickstoff im Ammoniak) sitzt und einen gewissen Raum für seine Bewegungen beansprucht:



es macht sich bei chemischen Reaktionen bemerkbar, wenn Sauerstoff und Schwefel mehr als zweiwertig (Stickstoff mehr als dreiwertig) auftreten.

Diskussion.

Rubens: Ich möchte hierauf erwidern, daß wir, Herr Hettner und ich, nicht von einem gleichseitigen, sondern von einem gleichschenkeligen Dreieck gesprochen und die Dreiecksform deshalb für notwendig gehalten haben, um das elektrische Moment des Moleküls zu erklären.

Lehmann: Aus meinen Untersuchungen folgt, daß die flüssigen Kristalle zwar im allgemeinen sehr stark von der Raumgitterstruktur abweichende Struktur haben, daß sich aber stetige Übergänge zu dieser feststellen lassen, so daß sich nicht erkennen läßt, wo die Grenze ist; zumal auch fast alle wirklich beobachteten festen Kristalle Abweichungen zeigen (z. B. Sphärokristalle), somit nicht als „Kristalle" bezeichnet werden könnten, wenn man ungestörte Raumgitterstruktur als Charakteristikum solcher betrachtet. Versuche mit Röntgenstrahlen können nur Erfolg haben, wenn sie an „erzwungen homogenen" Schichten ausgeführt sind, die annähernd Raumgitterstruktur haben. Meine Untersuchungen über die Form der Moleküle beziehen sich nicht auf die chemischen Moleküle, sondern auf die davon verschiedenen Kristallmoleküle.

Rinne: Man muß unterscheiden zwischen den „Festkristallen", die keinen dreidimensional periodischen Feinbau besitzen (den „flüssigen Kristallen" Lehmanns) und weichen Kristallen, wie z. B. Eisen hoher Temperatur. Daß im Reiche der wirklichen Kristalle viele Gradabstufungen des mechanischen Zusammenhanges vorkommen, ist eine Sache für sich. Solche weichen Kristalle sind eben wirkliche Kristalle, auch wenn sie Baustörungen zeigen. Es spricht aber keine Erfahrung dafür, daß die „flüssigen Kristalle" dreidimensional periodischen, also Raumgitterbau, besitzen. Es handelt sich bei ihnen um Einzelmolekeln, die zueinander orientiert sind, etwa in Radialstellung oder Parallelstellung der molekularen Hauptbaurichtung.

Debye: Die Unsymmetrie von Wasser und Schwefelwasserstoff scheint auch physikalisch begründet durch die nachgewiesene Existenz ihres ausgesprochenen Dipolcharakters.

Nernst: Ich möchte nur ganz kurz darauf hinweisen, daß die soeben von Herrn Debye und vorher von Herrn Vorländer betonte Konstitution des H_2O-Moleküls mit Kossels „Valenztheorie" (Eliminierung der Valenzrichtungen) unvereinbar ist, wie auch schon in Halle

auf der Bunsengesellschaft diskutiert wurde. Wir brauchen auch hier Valenzrichtungen.

Kossel: Der ausschlaggebende Punkt sind hier die Dimensionen. Ich habe allerdings angenommen, daß es für die Übersicht über die elektrostatischen Verhältnisse wichtiger ist, das Wasser durch lineares *KOH* wiederzugeben, als etwa durch ein gleichseitiges Dreieck, wie es die Herren Rubens und Hettner gelegentlich vorgeschlagen haben. Die bei Herrn Debye ausgeführten Messungen haben nun in der Tat gezeigt, daß der Hebelarm des elektrischen Moments im Wasser nur von der Größe 10^{-9} cm ist, während der Atomradius bekanntlich von der Größe 10^{-8} cm ist. Wir haben also ein Dreieck, das bei 10^{-8} cm Grundseite nur 10^{-9} cm Höhe hat. Dadurch bestätigt sich, daß es richtiger war, ein lineares Gebilde als etwa ein gleichseitiges Dreieck zur Annäherung zu benützen. Daß wir keine ganz strenge gerade Linie, sondern einen schwachen Knick anzunehmen haben, ändert nichts an meinen früheren Überlegungen, sondern ist als Schritt zur Verfeinerung zu begrüßen.

Nernst: Die Differenz zwischen Schmelzpunkt und Klärungspunkt der anisotropen Flüssigkeit hängt natürlich auch vom Schmelzpunkt, also von den Eigenschaften des Raumgitters ab; sie ist also kein genaues Maß der Stabilität des anisotropen flüssigen Zustandes, aber wir haben kein besseres Maß und es ist ja erfreulich, dem Vortrage des Herrn Vorländer zu entnehmen, wie gut sich die Erfahrungen jetzt einordnen lassen.

Hückel: Auf Veranlassung von Herrn Prof. Debye habe ich mit Substanzen, die Herr Prof. Vorländer so freundlich war mir zur Verfügung zu stellen, Röntgeninterferenzaufnahmen nach der Methode Debye-Scherrer gemacht, und zwar bisher mit *p*-Azoxyanisol und *p*-Azoxyphenetol. Dabei ergaben sich für den festen kristallinischen Zustand die zu erwartenden scharfen Kristallinterferenzen: dagegen erhielt ich für den flüssig-kristallinischen Zustand ebenso wie für den flüssig-isotropen Zustand nur den unscharfen für Flüssigkeiten charakteristischen Interferenzring. Demnach haben diese flüssig-kristallinischen Substanzen keine Raumgitterstruktur.

Rinne: Die Darlegungen Vorländers bestätigen die Auffassung, daß der Grundzug des Wesens der „flüssigen Kristalle“ in der durch ihre Molekelgestalt begünstigten Möglichkeit einer Parallelstellung einer Hauptstrukturrichtung der Molekeln besteht. Diese Möglichkeit wird durch „Winkelform“ verringert. Würde es sich bei der Bildung flüssiger Kristalle um einen Kristallisationsakt handeln, so wäre nicht einzusehen, wie dies durch Winkelform erschwert werden könnte. Ausgeprägte „Winkelform“ der H_2O-Struktur ist nach Braggschen Untersuchungen am *ZnO*, bei dem tetraederartige Anordnung der Atome vorliegen soll, für H_2O als Eis übrigens nicht unwahrscheinlich.

Otto Hahn (Berlin), Protactinium, seine Lebensdauer und sein Gehalt in Uranmineralien. (Nach gemeinsam mit Lise Meitner ausgeführten Versuchen.)

In unserer ersten Mitteilung über das Protactinium, die Muttersubstanz des Actiniums, haben wir bereits eine vorläufige Bestimmung der Lebensdauer dieses neuen Elementes angegeben. Aus dem Durchdringungsbereich seiner α-Strahlen berechneten wir eine Halbwertszeit zwischen den Grenzen von 1200 und 180000 Jahren. Eine genaue Kenntnis dieser Größe ist aber von Wichtigkeit; denn von der Beständigkeit des Protactiniums hängt es ab, ob man dieses Element in nennenswerten Gewichtsmengen wird herstellen können oder nicht. Bei dem geringen Prozentsatz, mit dem sich die Actiniumreihe aus der Uranreihe abzweigt, ist die zu erwartende Menge ohnehin recht gering.

Später haben wir dann darauf hingewiesen, daß man auf einem anderen als dem oben erwähnten Wege zu einer genaueren Schätzung der Lebensdauer des Protactiniums kommen kann, und zwar durch die Bestimmung der in ursprünglich protactiniumfreien Uransalzen allmählich gebildeten Protactiniummenge. Je kürzer die Lebensdauer des Protactiniums, desto schneller bildet sich die Gleichgewichtsmenge aus dem Uran nach. Da man die Gleichgewichtsaktivität leicht berechnen kann, so läßt sich aus dem Verhältnis der nach einer bestimmten Zeit tatsächlich gebildeten Aktivität zu dieser Gleichgewichtsaktivität die Lebensdauer direkt ermitteln. Voraussetzung dabei ist einerseits, daß man die sehr geringen Protactiniummengen, um die es sich dabei handelt, aus den Uransalzen auch sicher abscheiden kann; man fände sonst zu wenig Protactinium und damit eine zu hohe Lebensdauer. Andererseits muß das Protactinium tatsächlich nachgebildet worden und nicht schon zum Teil in dem Uransalz von dessen Herstellung her enthalten gewesen sein, weil man sonst zuviel Protactinium fände und damit eine zu niedrige Lebensdauer.

Durch Zugabe dosierter Protactiniummengen zu vorher protactiniumfreien Uransalzen und deren nachträgliche Wiederabscheidung wurde bewiesen, daß die Abscheidung tatsächlich gelingt. Durch Untersuchung neuer reiner Uransalze auf Prot-

actinium wurde gezeigt, daß bei der Herstellung der reinen Salze Protactinium nicht mitgeschleppt wird. In drei alten Uransalzen wurden dann die Abtrennungen durchgeführt und folgende Halbwertszeiten gefunden:

Aus 141 g Urannitrat, mindestens 20 Jahre alt, 12800 Jahre,

Aus 86 g Urannitrat, mindestens 52 Jahre alt, 11800 Jahre,

Aus 33 g Natriumuranat + 21 g Uranacetat } ca. 60 Jahre alt, 12300 Jahre.

Diese Zahlen stimmen genauer überein, als man aus den Versuchsfehlern, die wohl bis zu 20 Proz. betragen, erwarten konnte. Im Mittel ergibt sich somit eine Halbwertszeit für das Protactinium von rund 12000 Jahren.

Wie gering die Aktivität an Protactinium ist, die aus den genannten Uransalzen abgeschieden wurde, möge die Tatsache erläutern, daß bei der jetzt gefundenen Lebensdauer des Protactiniums dessen α-Aktivität nach 12000 Jahren erst $^3/_4$ Proz. der α-Aktivität des betreffenden Uransalzes ausmacht.

Aus der Halbwertszeit des Protactiniums und dem Abzweigungsverhältnis Actinium zu Uran läßt sich nun ohne weiteres die Gewichtsmenge bestimmen, in der dies neue Element in Uranmineralien vorkommt. Die Halbwertszeit des Urans ist $5 \cdot 10^9$ Jahre, die des Protactiniums $12 \cdot 10^3$ Jahre; im Gleichgewicht verhalten sich die Gewichtsmengen wie diese Halbwertszeiten. Nach Versuchen von Hahn und Meitner entsteht nun aber die Actiniumreihe zu nur 3 Proz. aus der Uranreihe, Die Gleichgewichtsmenge Protactinium zu Uran ist also

$$\frac{0{,}03 \cdot 12 \cdot 10^3}{5 \cdot 10^9} = 7{,}2 \cdot 10^8.$$

Eine Tonne Uran eines beliebigen Minerals enthält $7{,}2 \cdot 10^{-8}$ Tonnen = 72 mg Protactinium; die entsprechende Menge für Radium ist 330 mg.

Bei der technischen Radiumherstellung bleibt, wie durch besondere Versuche festgestellt wurde, die größere Menge des Protactiniums in den wertlosen „Rückrückständen". Im kleinen Maßstabe läßt es sich hieraus ohne besondere Schwierigkeit mit den Erdsäuren zusammen abscheiden.

Versuche in größerem Maßstabe sind im Gange. Ob die weitere Anreicherung und die Abtrennung von den Erdsäuren glatt durchführbar ist, steht noch nicht fest. Immerhin darf die Erwartung ausgesprochen werden, daß man das neue radioaktive Element im Laufe der Zeit auch als neues chemisches Element wird herstellen können.

I. Traube (Charlottenburg), Über den Bau der Atome und Moleküle. Ältere und neuere Theorien.

In den Jahren 1892—1910 wurde eine Anzahl von Arbeiten über den Bau der Atome und Moleküle von mir[1]) veröffentlicht, welche bisher von der neuen Theorie der Atome und Moleküle nicht berücksichtigt wurden.

Ausgehend von Betrachtungen, wie Hermann Kopp, fand ich, daß das Molekularvolumen m/d nicht, wie Kopp annahm, gleich war einer Summe von Atomräumen ΣV_a, sondern daß die Gleichung lautete $m/d = \Sigma V_a + \Phi$, in welcher Φ eine Größe war, welche von mir als Covolumen bezeichnet wurde und deren Bedeutung sich ergab, als die Zustandsgleichung von van der Waals von mir zunächst auf den homogenen flüssigen Zustand angewandt wurde.

Φ war nichts anderes als die Größe $v—b$ und es wurden nun zunächst von mir für zahlreiche Flüssigkeiten die Größen $v—b$ und b berechnet und daneben als dritte Volumengröße die Lorenz-Lorentzkonstante $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{d}$ in Betracht gezogen.

Diese Größe, welche von mir Kernvolumen genannt wurde, stellt nach Clausius-Mossotti-Exner annähernd das von Masse erfüllte Volumen dar. Nach van der Waals ist die Größe b für Flüssigkeiten etwa 3 bis 3,5 mal so groß wie jenes Massevolumen und in der Tat konnte von mir festgestellt werden, daß die Lorenz-Lorentzkonstante im Mittel der 3,5. Teil der Größe b von van der Waals war. Die beiderseitigen Theorien führten daher zu demselben Ergebnis (vgl. l. c.).

Da indessen die Lorenz-Lorentzkonstante von der Größenordnung 10^{-8} ist, während das Rutherford-Bohrsche Kernvolumen von der Größenordnung 10^{-12} ist, so haben beide Größen nichts miteinander zu tun und wir müssen annehmen, daß in der Größe $\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} \frac{1}{d}$ derjenige Teil der inneren Elektronenräume mit enthalten ist, welcher beim Zusammenstoß eines Atoms mit anderen Atomen für diese undurchdringlich ist.

Volumen und Valenz[2]).

Es ergab sich nun zunächst zwischen Molekularrefraktion und Valenzzahl der verschiedenartigsten flüssigen Verbindungen eine bemerkens-

1) Siehe u. a. Raum der Atome, Ahrens Samml. Chem. und Techn. Vortr. Bd. IV, 1899, Stuttgart, Ann. d. Phys. (4) **8**, 267, 1902; Boltzmann, Festschr., 1904; ferner (4) **22**, 519, 1907; Phil. Mag. Sept. 1905; Verh. d. D. Phys. Ges. **7**, 199. 1905; **10**, 880, 1908; **11**, 231, 1909.

2) Traube, Ann. d. Phys. (4) **22**, 519, 1907 u. Ber. d. D. Chem. Ges. **40**, 130 u. 723, 1907.

werte Beziehung: der Quotient aus der Molekularrefraktion und der Summe der chemischen Valenzen erwies sich als annähernd konstant.

Die folgende Tabelle bildet einen kleinen Auszug umfassender, bereits früher veröffentlichter Tabellen. M_α ist die Molekularrefraktion für die Wasserstofflinie, N die Zahl der chemischen Valenzen. Es wurden gesetzt H und $F = 1$, $O = 2$, N und P 3 bzw. 5, $B = 3$, C und $Si = 4$, $Cl = 7$.

		M_α	ΣN	$M_\alpha/\Sigma N$
n-Pentan	C_5H_{12}	25,32	32	0,791
Oktan	C_8H_{18}	38,95	50	0,779
Äthylalkohol	C_2H_6O	12,71	16	0,794
Glyzerin	$C_3H_8O_3$	20,41	26	0,785
Paraldehyd	$C_6H_{12}O_3$	32,40	42	0,772
Buttersäure	$C_4H_8O_2$	22,05	28	0,787
Önanthsäure	$C_7H_{14}O_2$	35,85	46	0,780
i-Amylvalerat	$C_{10}H_{20}O_2$	49,72	64	0,777
Propylamin	C_3H_9N	19,31	24	0,804
Acetonitril	C_2H_3N	11,05	14	0,790
Piperidin	$C_5H_{11}N$	26,52	34	0,780
Propylnitrit	$C_3H_7NO_2$	22,10	28	0,789
Äthylchloracetat	$C_4H_7ClO_2$	26,77	34	0,788
Propylchlorid	C_3H_7Cl	20,75	26	0,798
Äthylenchlorid	$C_2H_4Cl_2$	20,92	26	0,805
Triäthylphosphit	$P(C_2H_5O)_3$	38,12	48	0,794
Triisoamylborat	$B(OC_5H_{11})_3$	79,50	102	0,783
Tetraäthylsilikat	$Si(OC_2H_5)_4$	51,71	64	0,806
Hexapropyldisilikat	$Si_2O(OC_3H_7)_6$	107,02	136	0,787
Methylfluoracetat	$C_3H_5FO_2$	17,83	22	0,810

Es wurde gefolgert: bei den kohlenstoffhaltigen Verbindungen, bestehend aus H, O, N, C, F, Cl, P, B und Si stehen die Atomrefraktionen in einfachen multiplen Verhältnissen. Dieselben verhalten sich wie 1 : 2 : 3 : 4 : 5 : 7.

Es handelt sich hier um ein Annäherungsgesetz. Gewisse konstitutive Einflüsse sind zweifellos vorhanden; so ein geringer Einfluß der Ringbildung, ein größerer Einfluß der doppelten und dreifachen Kohlenstoffbindung sowie der Molekularassoziation (vgl. Ann. d. Phys. l. c.). Wieweit die Beziehung für einfache Verbindungen und Elemente gilt, zeigt die Tabelle ebenda S. 526. Für Elemente mit größerem Atomgewicht muß man größere Valenzwerte einsetzen, falls man obige Beziehungen aufrecht erhalten will, so für $Br = 10$, $J = 17$, $S = 10$, $Se = 14$ und ebenso für Metalle beisp. in organischen Verbindungen für $Zn = 10$, Hg und Sn = etwa 16, für Pb, Sb, Fe und $Ni = 20$ bis 22.

Wenn man indessen an die Untersuchungen Lenards u. a. über die optischen Spektren der Metalle denkt, an die Feststellungen über die Kanalstrahlen, vor allem aber auch an die hohen Valenzen, welche etliche Metalle in bestimmten Legierungen zeigen, so scheint es mir kaum zweifelhaft, daß die einfachen Vorstellungen über die Valenzgrößen, wie dieselben sich aus Kossels Arbeiten ergeben, hier nicht statthaft sind. Es wäre also immerhin möglich, daß auch für Elemente mit höherem Atomgewicht obige Beziehung zwischen Molekularrefraktion und Valenzzahl eine annähernde Gültigkeit hat.

Ganz analoge Beziehungen wie für die Molekularrefraktion gelten nun aber auch für die Größe b sowie das Gesamtvolumen v bei übereinstimmenden Temperaturen. Beide Größen sind ja bei übereinstimmenden Temperaturen und auch annähernd bei den normalen Siedepunkten einander proportional.

Hier genüge die folgende kleine Tabelle (vgl. l. c.).

v ist das Molekularvolumen beim normalen Siedepunkt. Die Valenz wurde gesetzt für $H = 1$, $O = 2$, in stark assoziierten Verbindungen $= 4$, N und $P = 3$ bzw. 5, $As = 3$, $S = 6$, $Cl = 7$, sowie C, Si und $Ti = 4$.

		v	ΣN	$v/3{,}75$
Oktylen	C_8H_{16}	177,2	48	47,2
n-Heptan	C_7H_{16}	162,6	44	43,4
Dipropargyl	C_6H_6	110,3	30	29,4
Äthylacetat	$C_4H_8O_2$	106,2	28	28,3
Oktylalkohol	$C_4H_{18}O$	190,3	52	50,7
Diisopropyläther	$C_6H_{14}O$	150,9	40	40,2
Diäthylamin	$C_4H_{11}N$	109,0	30	29,1
Cyanäthyl	C_2H_5CN	78,35	20	20,9
Äthylsulfid	$C_4H_{10}S$	121,0	32	32,3
Äthylsulfhydrat	C_2H_6S	77,6	20	20,7
Phosphorchlorür	PCl_3	93,4	24	24,9
Phosphorsulfochlorid	$PSCl_3$	116,1	32	31,0
Kohlenoxyd	CO	22,2	6	5,9
Kohlensäure	CO_3	33,0	8	8,9
Wasserstoffsuperoxyd	H_2O_2	23,4	6	6,1
Ammoniak	NH_3	26,9	6	7,2
Arsenchlorür	$AsCl_3$	94,4	24	25,2
Kohlenstoffchlorid	CCl_4	103,7	32	27,6
Siliciumchlorid	$SiCl_4$	120,8	32	32,2
Titanchlorid	$TiCl_4$	124,5	32	33,2

Es ist somit annähernd für den normalen Siedepunkt $v = 3{,}75\,\Sigma N$; für den absoluten Nullpunkt gilt annähernd die Gleichung $v = 2{,}52\,\Sigma N$. Selbst für recht einfach zusammengesetzte Stoffe gilt angenähert diese Beziehung. Der Einfluß der mehrfachen Bindungen beim Kohlenstoffatom ist hier gering, dagegen groß derjenige der Ringbildung. Beispielsweise für jeden Benzol-, Hexamethylen- oder Pyridinring muß man, sofern man die Beziehung aufrecht erhalten will, 4 bis 5 Valenzelektronen von der ΣN abziehen. Für Schwefel ist hier die Valenz = 6 einzusetzen, für $Br = 7$, aber für J etwa = 9, für Metalle wie Zinn und Germanium kommen auch hier höhere Werte in Betracht. Wohl nur ein Zufall ist es, daß bei den normalen Siedepunkten das Covolumen

$v - b = \Sigma N$ ist. Es ist bemerkenswert, daß die Abweichungen von den Gleichungen $M_\alpha / \Sigma N$ und $v / \Sigma N$ = const. meist in reziprokem Verhältnisse stehen[1]).

Vom Standpunkte des Rutherford-Bohrschen Atommodells würden die hier skizzierten Beziehungen zwischen Valenzzahl und Atomräumen besagen, daß die Zahl der Valenzelektronen (die ich nicht unzweckmäßig als Valonen bezeichnete) in erster Annäherung den Raum der Atome bestimmt. Der Raum der Atome ist hiernach in zahlreichen Verbindungen angenähert der Zahl der Valenzelektronen proportional; so ist der Raum eines Chloratoms 7 mal, derjenige eines Schwefelatoms 6 mal und derjenige eines Kohlenstoffatoms 4 mal so groß als derjenige eines Wasserstoffatoms. Der Raum, welcher somit auf 1 Valenzelektron von H, O, N, C usw. entfällt, ist annähernd gleich groß. Es handelt sich aber hier nur um ein Annäherungsgesetz, denn beispielsweise beim Ringschlusse müssen wir annehmen, daß die Atome wie elastische Bälle unter Verkleinerung der Elektronenräume zusammengepreßt werden. Wie ich indessen früher bemerkte, könnte man versuchen, die gaskinetische Betrachtungsweise und van der Waals Zustandsgleichung auf das Innere der Atome zu übertragen, indem man Valonendruck und Valonenraum aufeinander bezieht. Der Satz von Avogadro würde dann im allgemeinen gültig sein, da der Valonendruck meist der gleiche ist.

Bemerkenswert ist es, daß ein wenig später als ich Pope und Barlow[2]), ohne von mir beeinflußt zu sein, proportionale Beziehungen zwischen Volumen und Valenz der Atome für den kristallisierten Zustand ableiteten. Pope und Barlow (und ebenso Th. W. Richards siehe w. u.) vernachlässigten allerdings das Covolumen, während ich der Ansicht bin, daß diese Größe auch bei der neueren Theorie — vermutlich selbst für die Kristalle — nicht vernachlässigt werden darf.

Walden[3]) hat alsdann, meine Betrachtungsweise ausdehnend, festgestellt, daß sowohl die molekulare Kohäsion Ma^2 (a^2 die Kapillaritätskonstante beim Siedepunkt) wie die absoluten Siedetemperaturen T und die molekularen Verdampfungswärmen M insbesondere kohlenstoffhaltiger Verbindungen usw. der Valenzsumme ΣN proportional sind.

1) Vgl. darüber meine Ausführungen Ann. d. Phys. (4) **22**, 531 ff., 1907.

2) Pope und Barlow, Journ. Chem. Soc. **89**, 1679, 1906. Eine Anzahl Arbeiten eines Schülers von Pope, Gervais le Bas, welche in verschiedenen Bänden der Phil. Mag. veröffentlicht wurden (vgl. die Referate im Chem. Zentralbl.), enthalten gegenüber meinen Ergebnissen nichts Neues. Der Autor erwähnt meinen Namen nur an versteckter Stelle.

3) Walden, Zeitschr. d. Phys. Chem. **65**, 280, 1909, siehe auch **66**, 411, 1909.

Das Valenzelektron und die Summe der Atomgewichtswurzeln.

W. H. Bragg und Kleeman[1]) haben gezeigt, daß der Geschwindigkeitsverlust der α-Strahlen beim Durchgang durch Metalle[2]) sowie andererseits durch Gase und Dämpfe proportional der Quadratwurzel der Atomgewichte bzw. der Summe der Quadratwurzeln der Atomgewichte der das Gas zusammensetzenden Elemente $\Sigma \sqrt{A}$ ist. Ferner stellte Bragg an einem kleineren Zahlenmaterial fest, daß jener Geschwindigkeitsverlust auch dem Molekularvolumen der betreffenden Gase und Dämpfe bei deren Siedepunkten proportional ist.

Von mir wurde alsdann gezeigt[3]) daß in der Tat in roher Annäherung eine Proportionalität zwischen Volumen und der $\Sigma \sqrt{A}$ für zahlreiche Verbindungen besteht, ganz besonders aber eine einfache Beziehung zwischen der Summe der Valenzelektronen ΣN und der $\Sigma \sqrt{A}$, wie fol-

		$\Sigma \sqrt{A}$	ΣN	$\Sigma N / \Sigma \sqrt{A}$
Hexapropylsilikat	$Si_2O(OC_3H_7)_6$	143,1	136	0,95
Triisoamylborat .	$B(OC_5H_{11})_3$	100,4	102	1,02
Traubens. Diamylester.	$C_{14}H_{26}O_6$	98,6	94	0,96
ν-Äthylenpiperidin	$C_{12}H_{24}N_2$	73,1	78	1,07
Diisoamylcyanamid	$C_{11}H_{22}N_2$	67,7	72	1,06
Triäthylphosphat.	$PO(C_2H_5O)_3$	57,4	52	0,91
Nitrooctan	$C_8H_{17}NO_2$	56,5	58	1,03
Octan	C_8H_{18}	45,8	50	1,09
Dichlorpropions. Äthyl	$C_5H_8Cl_2O_2$	45,25	46	1,02
Benzoylchlorid . .	C_7H_5OCl	39,2	42	1,07
i-Amylalkohol . .	$C_5H_{12}O$	33,3	34	1,02
Titanchlorid . . .	$TiCl_4$	30,8	32	1,04
Fluorbenzol. . . .	C_6H_5F	30,1	30	1,00
Propyljodid	C_3H_7F	28,5	28	0,99
Phosphorchlorür .	PCl_3	23,4	24	1,02
Phosphoroxychlorid	$POCl_3$	27,4	28	1,02
Schwefelchlorür .	S_2Cl_2	23,2	26	1,12
Schwefelkohlenstoff	CS_2	14,8	16	1,08
Äthylbromid . . .	C_2H_5Br	20,9	22	1,10
Brom	Br_2	17,9	18	1,00
Methylalkohol . .	CH_4O	11,5	12	1,04
Wasserstoffsuperoxyd	H_2O_2	10,0	10	1,00
Ammoniak	NH_3	6,7	6	0,90
Wasser	H_2O	6,0	6	1,00
Helium	He	2,0	2	1,00
Wasserstoff	H_2	2,0	2	1,00

1) Bragg, Trans. Roy. Soc. South Australia **30**, 1906 u. Phil. Mag. S. 620, 1906; Bragg u, Kleeman, Phil. Mag. Sept. 1905.

2) Vgl. auch Rausch v. Traubenberg, Zeitschr. f. Physik 6. Juni 1920.

3) Traube, diese Zeitschr. **10**, 667, 1909.

gende nur auszugsweise wiedergegebene Tabelle zeigen möge.

Die Valenzen wurden gesetzt: H und $F = 1$, $O = 2$ und in stark assoziierten Verbindungen $= 4$, N und $P = 3$ bzw. 5, $B = 3$; C, Si und $Ti = 4$, $S = 6$, $Cl = 7$, Br und J wurde $= 9$ angenommen. Vgl. w. o. diese Mitteilung.

Die Zahl der Valenzelektronen ist somit gleich der Summe der Quadratwurzeln der Atomgewichte, während bekanntlich die Zahl der Gesamtelektronen im neutralen Molekül gleich der halben Summe der Atomgewichte ist.

Man erkennt demnach, daß auch die Valenzelektronenzahl zu den Atommassen in Beziehung steht, wie man dies allerdings auf Grund der bekannten Beziehungen der Dublets in den optischen Spektren der Alkalimetalle zu den Atomgewichtquadraten bereits annehmen konnte.

Aus Braggs Arbeit und meinen Feststellungen ergibt sich ferner, daß der Geschwindigkeitsverlust der α-Strahlen beim Durchgang durch Gase der Valenzelektronenzahl der das Gas zusammensetzenden Atome proportional ist. Ob und wieweit die Beziehungen für Metalle gelten, ist einstweilen nicht abzusehen, da die Valenzelektronenzahlen der Metallatome zu wenig bekannt sind. Sicherlich sind Kossels Annahmen nach dieser Richtung bedenklich; so hat beispielsweise das Cäsium aus chemischen wie aus spektralanalytischen Gründen eine größere Valenzelektronenzahl wie etwa das Kalium. Vgl. auch w. o.

Hingewiesen sei an dieser Stelle auf die weiteren interessanten Beziehungen, welche Kleeman[1]) in bezug auf die $\Sigma\sqrt{A}$ abgeleitet hat.

Nach Martens[2]) würden wir anzunehmen haben, daß die Periode der Eigenschwingung etlichster Elementaratome der Wurzel aus dem Atomgewicht entspricht. Indessen hier ist eine weitere Klärung erforderlich.

Über Gasonen und Fluidonen. In Arbeiten von mir[3]) und meinen Schülern Teichner[4]) und Hein[5]) über den kritischen Zustand wurde die Ansicht ausgesprochen, daß die kritische Temperatur als die Temperatur aufzufassen wäre, bei welcher zwei Phasen, eine Lösung von Gasonen in Fluidonen sowie von Fluidonen in Gasonen in jedem Verhältnis miteinander mischbar werden. Das Gason ist das gasförmige b von van der Waals, das Fluidon das flüssige b, und es wurde von mir unter anderem gezeigt, daß beim Übergang der Flüssigkeit in den Gaszustand im allgemeinen eine erhebliche Vergrößerung der Größe b statthat. Hiermit wurde unter anderem von mir in Zusammenhang gebracht, daß im allgemeinen die Größe $\frac{a}{v}$ von van der Waals nicht die Verdampfungswärme, sondern etwa zweimal so groß ist[1]). Nur für das einatomige Quecksilber war die Verdampfungswärme der Theorie entsprechend $\frac{a}{v}$. Sehr beachtenswert ist es nun, daß nach v. Jüptners Berechnungen[2]) für die Edelgase $b_{gas} = b_{fl}$ ist; es würde dies im Sinne der neuen Theorie heißen, daß an der Volumvergrößerung nur die äußeren Valenzelektronen jenseits von Kossels Achterringen teilnehmen. Die Valenzelektronen würden in weitere Ellipsen überspringen.

1) Vgl. u. a. Kleeman, Phil. Mag. Jahrgänge 1909 u. 1910.

2) Vgl. darüber auch über Batschinkys Annahme meine Ausführungen diese Zeitschr. **10**, 667, 1909.

3) Traube, Verh. d. D. Phys. Ges. **15**, 1219, 1913; siehe auch Ann. d. Phys. (4) **8**, 267, 1902.

4) Teichner, Ann. d. Phys. (4) **13**, 595, 1904.

5) Hein, Zeitschr. f. Phys. Chem. **86**, 385, 1914.

Die Kontraktion der Moleküle und Ionen und die Größe der Wasserstoffionen.

Nach Kossels Annahmen hängt die Festigkeit, mit welcher Ionen aneinander haften, außer von der Größe der elektrischen Ladung noch von den Volumina der Ionen ab. Ein kleines Ion bestimmter elektrischer Ladung läßt andere Ionen näher an den Schwerpunkt seiner positiven Ladung heran, als es ein größeres bei gleicher elektrischer Ladung vermag. Das Volumen der Ionen bestimmt somit nach Kossel bei gleicher Valenzelektronenzahl die Größe der Affinitäten.

Diese Annahme Kossels ist nur insofern zu modifizieren, als in zahlreichen Fällen gerade umgekehrt die Größe der Affinitäten maßgebend ist für die Größe des Volumens der Atome. Das, was Kossel die Ursache nennt, ist vielfach die Wirkung.

Von mir wurde, ebenso wie später von Th. W. Richards[3]) gezeigt, daß die Affinitäten sich zunächst in entsprechende Kontraktionen umsetzen, deren Größen ein Maß der Affinitäten sind. Dieser mechanischen Wirkung der Affinität entsprechen alsdann die thermischen und in besonderen Fällen auch die elektrischen Wirkungen.

Nicht richtig sind aber insbesondere Kossels Annahmen in bezug auf die Größe des Wasserstoffions. Jedenfalls ist dasselbe in wäßriger Lösung von der Größenordnung

1) Siehe Traube, Ann. d. Phys. (4) **8**, l. c. S. 300.

2) v. Jüptner, Zeitschr. f. Phys. Chem. **63**, 618, 1908 und **64**, 709, 1908.

3) Vgl. meine Ausführungen darüber, Verh. d. D. Phys. Ges. **7**, 199, 1905.

10^{-8} und nicht 10^{-12}. Das *H*-Ion ist in Wasser sehr angenähert gleich groß dem *Li*-, *Na*-, *Ag*-Ion sowie den einwertigen Ionen von *Hg*, *Cu* und *Au*.

Folgende Tabelle mag hier aus älteren Arbeiten von mir[1]) übernommen werden.

Salzsäure (nach Kohlrausch)		Chlornatrium (nach Schütz)	
Molare Konzentr.	Mol. Lösungsvol. bei 17,1°	Gewichtsprozente	Mol. Lösungsvol. bei 18°
0,005	17,9	0,3	17,8
0,01	17,8	0,5	17,7
0,02	17,7	1	17,8
0,05	17,8	2	17,5
0,1	17,9	3	17,7
0,2	18,1	5	18,0
0,5	18,3	10	18,9
1	18,6	15	19,7
2	19,1	20	20,4
3	19,3	25	21,1
5	19,7	—	—
10	20,5	—	—

Die molekularen Lösungsvolumina in 10 proz. wäßriger Lösung von *NaCl*, *HCl* und *LiCl* sind bei 15°, 18,9, 18,8 bzw. 19,2; von etwa 3 proz. wäßrigen Lösungen von $AgClO_3$, $NaClO_3$, $HClO_3$ und $HgClO_3$ 35,9, 36,2, 35,8 und 36,1 usw. Aus Überführungsversuchen weiß man, daß das Lithiumion die größte Anzahl Wasserteilchen mit sich reißt. Dann folgt das schwerere Natriumion und dann erst das Wasserstoffion. Diesen Überführungen entsprechen die Affinitäten zu Wasser. Wäre die Reihenfolge der überführten H_2O-Mengen für $Na > Li > H$, so könnte man allenfalls annehmen, die Gleichheit der Ionenvolumina sei nur scheinbar und auf die verschieden große Wasserkontraktion zurückzuführen, aber die Reihenfolge ist $Li > Na > H$ und manches andere, beispielsweise die Isomorphie etlicher *Li*-, *Na*- und *Ag*-Verbindungen, spricht für die Gleichheit der Ionenvolumina. Auch ergeben sich aus den erwähnten Arbeiten noch etliche Belege, daß verwandte Ionen gleiche Volumina haben. (Beispielsweise $KNO_3 = KVO_3$; $KClO_3 = KMnO_3$; $Cl = Br = J = CN$ in den halogenierten Fettsäuren usw.).

Wenn somit das Wasserstoffatom durch Abgabe seines Elektrons in den Ionenzustand übergeht, so erfolgt wenigstens in Wasser nicht die Volumenänderung von $10^{-8} : 10^{-12}$. Der positive Kern tritt nicht unmittelbar an andere Atome oder Moleküle heran, wie dies Kossel in seinen schematischen Molekülzeichnungen darstellt.

Während Säuren und ihre Natriumsalze, beispielsweise *HCl* und *NaCl*, bei gleicher Ionisation annähernd gleiche molekulare Lösungsvolumina haben, hat eine nicht ionisierte Säure, wie die Essigsäure, in verdünnter wäßriger Lösung ein um 13,5 ccm pro Mol. größeres molekulares Lösungsvolumen als die Natriumacetatlösung. Diese Kontraktion entspricht der Wasserkontraktion bei der Bildung eines Grammions. Für Milchsäure, Metaborsäure, Crotonsäure, Buttersäure, Cyanessigsäure, Jodpropionsäure und deren Natriumsalze sind die entsprechenden Kontraktionen gleich 13,6; 12,7; 14,4; 14,0; 12,7; 15,0 usw., also annähernd gleich groß[1]); ebenso folgt aus einem Vergleich der Volumina von *K*-, *Na*-, *Li*-, *Ag*-Salzen usw. in ungelöstem Zustande und im Zustande verdünnter wäßriger Lösung, daß **die verschiedensten einwertigen Ionen bei der Lösung in Wasser die gleiche Kontraktion hervorbringen**[2]), eine Feststellung, die in Parallele gesetzt wurde zu dem elektrolytischen Gesetz von Faraday.

Kohäsion, Affinität und elektrische Kräfte.

Der Versuch, die Zustandsgleichung von van der Waals auf den festen Zustand[3]) zu übertragen, führte zu Ergebnissen zunächst qualitativer Art, die immerhin beachtenswert waren. Die so berechneten Binnendrucke der festen Elemente, insbesondere der Metalle, gehen parallel den Härten, Elastizitätsmoduln, den Reibungs- und Kompressionskoeffizienten. In bezug auf die Kompression ergab sich in allerdings nur roher Annäherung eine von van der Waals abgeleitete quantitative Beziehung zum Binnendruck. Nach meinen Ergebnissen beim *Hg* und Berechnungen für *Zn* und *Cd* ist das $\int \frac{a}{v^2} dv =$ der Verdampfungswärme der Metalle. Über die Beziehung des Binnendrucks der Metalle zu den von Richards berechneten Größen $3\,C\frac{dt}{dv}$ ($C =$ spezifische Wärme, dv/dt die Änderung des Volumens mit der Temperatur), vgl. l. c.

Vom Standpunkte der neueren Theorie in-

1) Traube, Zeitschr. f. anorg. Chem. **3**, 1892 und **8**, 12, 1895; vgl. auch Lieb. Ann. **290**, 43.

1) Vgl. Traube, Lieb. Ann. l. c. S. 87.

2) Vgl. Traube, Zeitschr. f. anorg. Chem. **8**, 63 ff., 1895.

3) Traube, Verh. d. D. Phys. Ges. **11**, 231, 1909 u. Zeitschr. f. anorg. Chem. **34**, 413, 1903.



teressieren uns aber besonders gewisse Ausführungen einer Arbeit von mir: Über Kohäsion und elektrische Kräfte [1]).

In der folgenden Tabelle sind die Metalle geordnet entsprechend der elektrischen Potentialreihe. a ist die Konstante von van der Waals, v das Atomvolumen, also a/v die auf die Einheit der Fläche bezogene Oberflächenspannung.

Elektr. Spannungsreihe	$\frac{a}{v^{2/3}}$ in 10^{10} Ergs.
Natrium	125
Zink	208
Cadmium	224
Blei	246
Zinn	282
Eisen	327
Kupfer	324
Silber	352
Gold	395
Palladium	443
Platin	612
Rhodium	675

Die Voltapotentiale der Metalle sind somit parallel deren Oberflächenspannungen (vgl. auch meine weiteren Ausführungen in der genannten Arbeit.)

Es wurde von mir in den verschiedensten Arbeiten darauf hingewiesen, daß Oberflächenspannungsdifferenzen in derselben Weise wie die Affinitäten sowohl der homöopolaren Metalle wie der homöopolaren kohlenstoffhaltigen Verbindungen auf Elektronenwirkungen zurückzuführen sind.

In bezug auf die kohlenstoffhaltigen Verbindungen sei auf die von mir festgestellten Beziehungen von van der Waals Größe a und den Volumengrößen b und v bei gleicher Temperatur verwiesen [2]).

Die Kohäsionsgröße a, also die Anziehung gleichartiger Molekeln wächst mit der Größe des Eigenvolumens der Molekeln. Die Größen a/v und besser noch a/b sind angenähert konstant. a/v ist die Verdampfungswärme bei gleicher Temperatur. Bestätigt wurden diese von mir gefundenen Beziehungen durch Kleeman [3]). In Anbetracht der Beziehungen der Volumengrößen und Valenzsummen gelangen wir auch hier zu nahen Beziehungen von Affinität und Kohäsion. Dieselben lassen sich auch ableiten aus den oben erwähnten Feststellungen von Walden, nach welchen die molekulare Kohäsion Ma^2 und ebenso die Verdampfungswärme beim

1) Traube, Ber. d. D. chem. Ges. **42**, 1594, 1909.
2) Traube, Zeitschr. f. phys. Chem. **68**, 289, 1909.
3) Kleeman, l. c.

Siedepunkte für zahlreiche Flüssigkeiten den Valenzsummen proportional ist.

In einer neueren Arbeit über Balloelektrizität, Molekularkräfte und elektrische Kräfte [1]) wies ich im Anschluß an Arbeiten von Lenard und Christiansen auf die Parallelität der elektrischen Potentiale der Zerstäubungselektrizität und der Oberflächenaktivität wäßriger Lösungen kohlenstoffhaltiger Verbindungen hin. Die Zerstäubungspotentiale wachsen mit der Oberflächenaktivität der gelösten Stoffe. Endlich sei hingewiesen auf eine Arbeit von mir über den Haftdruck [2]), in welcher ich zeigte, daß die Anziehung eines in Wasser löslichen Alkalisalzes um so größer ist, je größer der Binnendruck des Salzes als solches ist; also wiederum ergeben sich hier Beziehungen von Affinität und Kohäsionsgrößen.

Die schönen Arbeiten von Born und Landé sind daher keineswegs die ersten auf diesem Gebiete.

Vor allem aber ergibt sich aus meinen früheren Arbeiten, daß die Zustandsgleichung von van der Waals trotz ihrer unvollkommenen Gültigkeit auch in bezug auf die neuere Atom- und Molekulartheorie von hervorragender Bedeutung ist, worauf ja auch in einer seiner neuesten Arbeiten Debye hingewiesen hat [3]).

1) Traube, Ann. d. Phys. (4) **62**, 165, 1920.
2) Traube, Verh. d. D. Phys. Ges. **10**, 893ff., 1908.
3) Vgl. meine Betrachtungen über das periodische System d. Elemente (beisp. Jahrb. d. Radioakt. l. c. S. 179 u. 180, sowie Verh. d. D. Phys. Ges. **7**, 210, 1905). Meine Ansichten über die Unvollkommenheiten des Systems deckten sich im wesentlichen mit den neueren Ansichten, wenn ich darauf hinwies, daß die Beziehungen der verschiedensten physikalischen und chemischen Eigenschaften der Elemente und Verbindungen wie Valenz, Schmelzpunkt, Siedepunkt usw. zu den Atomräumen in viel unmittelbarerer Beziehung stehen als zu den Atomgewichten, und daß die Zahlenbeziehungen zwischen den Atomräumen der Elemente noch einfachere sind als zwischen den Atomgewichten.

Franz Skaupy (Berlin), Elektrizitätsleitung und Konstitution flüssiger Metalle und Legierungen.

§ 1. Ich darf Sie heute in kurz zusammenfassender Weise mit den Anschauungen bekannt machen, die ich im Laufe der letzten Jahre über die Elektrizitätsleitung in flüssigen Metallen und Metallegierungen sowie über deren Konstitution entwickelt habe [1]).

Man bemüht sich seit langem, die metallische

1) Zeitschr. f. phys. Chemie **58**, S. 560 [l. c. I]; Verh. d. D. Phys. Ges. 1916, S. 252 [l. c. II]; Verh. d. D. Phys. Ges. 1916, S. 302 [l. c. III].

Leitung in ähnlicher Weise zu verstehen, wie die Leitung wässeriger Salzlösungen, d. h. durch Annahme elektrisch geladener in dem Metalle frei beweglicher Teilchen. Die bisherigen Berechnungen bezogen sich fast durchweg auf feste Metalle und Legierungen. Im Gegensatz dazu habe ich von vornherein nur flüssige Metalle und insbesondere Metallegierungen meiner Betrachtung zugrunde gelegt. Die freie Beweglichkeit der Teilchen, sowie die Homogenität der metallischen Flüssigkeit, die sich auch bei Legierungen nach den bekannten Methoden der Molekulargewichtsbestimmung gelöster Körper leicht feststellen läßt, lassen dieselben für einen Vergleich mit den Elektrolytlösungen weit geeigneter erscheinen als das feste Metall.

Den Ausgangspunkt meiner Betrachtungen bildet die langbekannte Tatsache, daß flüssiges Quecksilber durch Auflösen auch kleiner Mengen verschiedener Metalle, wie Blei, Zink, Kadmium u. a., eine Vergrößerung seiner Leitfähigkeit erfährt. Dies ist sehr auffällig, wenn man berücksichtigt, daß homogene feste Metalllösungen, d. h. Mischkristalle, stets eine weit geringere Leitfähigkeit zeigen als das Grundmetall, dem man ein zweites Metall in geringer Menge beigemischt hat. Dieser Unterschied braucht durchaus nicht in dem Sinne gedeutet zu werden, als ob zwischen flüssigen und festen Legierungen ein Wesensunterschied bezüglich der Leitfähigkeit bestünde. Dies erhellt schon aus der Tatsache, daß es auch verdünnte flüssige Amalgame gibt, welche wesentlich schlechter leiten als reines Quecksilber, vor allem die Amalgame der Alkalimetalle. Bei diesen letzteren wurde überdies festgestellt, daß sie eine beträchtlich größere innere Reibung, bestimmt nach den üblichen Methoden, aufweisen, als reines Quecksilber, während die innere Reibung derjenigen Amalgame, welche eine Leitfähigkeitserhöhung zeigen, gegenüber reinem Quecksilber nur eine geringe Erhöhung aufweist. Nichts liegt daher näher, als für die Leitfähigkeitsverminderung bei Alkalimetallamalgamen die hohe innere Reibung verantwortlich zu machen und sie in Parallele zu stellen mit den metallischen Mischkristallen, aus deren geringer Leitfähigkeit man nach einer bekannten Annahme von Schenck auf eine hohe innere Reibung schließt.

§ 2. Die Durchführung einer Analogie zwischen flüssigen Metallen und Elektrolytlösungen führt zu einer Reihe von Folgerungen:

1. Die elektrische Leitfähigkeit des reinen Lösungsmittels sowohl wie der verdünnten Lösung muß sich als Funktion der Elektronenkonzentration und der nach den üblichen Methoden bestimmten inneren Reibung der Flüssigkeit darstellen lassen.
2. Es müssen verdünnte Metallösungen eine höhere Elektronenkonzentration aufweisen als das Lösungsmittel, falls, wie zu erwarten, der aufgelöste Stoff unter Abspaltung von Elektronen dissoziiert.
3. Zwischen dem Lösungmittel und dem gelösten Stoff müssen chemische Gleichgewichtsbeziehungen bestehen, da beide ein gemeinsames Ion, nämlich das negative Elektron besitzen.
4. Auch die Veränderung der Elektronenkonzentration des reinen Lösungsmittels mit Temperatur und Druck muß durch chemische Gleichgewichtsbeziehungen gegeben sein.
5. Es müssen bei Durchgang des elektrischen Stroms durch flüssige Metallegierungen Konzentrationsänderungen nachweisbar sein.

Inwieweit diese Folgerungen nach dem heute bekannten experimentellen Material erfüllt sind, soll im folgenden gezeigt werden.

§ 3. Der erste Satz besagt genauer, daß die Leitfähigkeit L der metallischen Flüssigkeit der Elektronenkonzentration ε direkt, der inneren Reibung η umgekehrt proportional ist, was wir in der Form schreiben wollen:

$$\varepsilon = \mathrm{const} \cdot L\eta.$$

Wenn man diese Gleichung logarithmiert und differenziert, dann die daraus entstehende durch die Konzentration c des gelösten Stoffes (ausgedrückt in Grammatomen auf 100 Grammatome Lösungsmittel, d. h. annähernd in Atomprozenten) dividiert, erhält man:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta\varepsilon}{c} = \frac{1}{L}\frac{\Delta L}{c} + \frac{1}{\eta}\frac{\Delta\eta}{c}.$$

Das Zeichen Δ drückt aus, daß es sich um, wenn auch kleine, so doch endliche Änderungen handelt, entsprechend kleinen aber endlichen Konzentrationen c. Für L und η können dann die entsprechenden für das reine Lösungsmittel geltenden Werte eingesetzt werden. Wir wollen setzen:

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\Delta\varepsilon}{c} = H \quad \frac{1}{L}\frac{\Delta L}{c} = l \quad \frac{1}{\eta}\frac{\Delta\eta}{c} = r.$$

H ist die relative Erhöhung der Elektronenkonzentration des Lösungmittels, bezogen auf die Einheit der Konzentration des gelösten Stoffes, l und r die entsprechenden Größen für die Leitfähigkeit und die innere Reibung. Man erhält

$$H = l + r$$

und bei unendlicher Verdünnung:

$$H_\infty = l_\infty + r_\infty.$$

Es sei hier gleich hervorgehoben, daß in den folgenden Betrachtungen sowohl das Lösungs-

mittel wie die gelösten Metalle als einwertig angenommen werden. Desgleichen wird das Lösungsmittel als verdünnte Elektronenlösung vorausgesetzt, so daß die Gesetze verdünnter Lösungen anwendbar sind. Über die Berechtigung beider Annahmen kann in einer meiner Arbeiten (l. c. II) nachgelesen werden.

Für die weitere Betrachtung ist es notwendig, eine wichtige Beziehung der Größe H zu anderen Größen hervorzuheben. $\Delta\varepsilon$ ist ja die Vermehrung der Elektronenkonzentration, die dadurch entsteht, daß ein Metall bis zur Konzentration c in dem Lösungsmittel aufgelöst wird und bei seiner Auflösung Elektronen abspaltet. Bezeichnet man mit γ den Dissoziationsgrad dieses Metalles in der Lösung, dann wird offenbar:

$$\Delta\varepsilon = c\gamma$$

und es ergibt sich für H der Ausdruck:

$$H = \frac{\gamma}{\varepsilon}.$$

Konsequenterweise ist die Elektronenkonzentration ε auch in Grammäquivalenten freier Elektronen (je 96500 Coulomb) auf 100 Grammatome des Lösungsmittels ausgedrückt. Dann bedeutet ε gleichzeitig den Dissoziationsgrad des Lösungsmittels. Die Größe H stellt also einfach das Verhältnis der Dissoziationsgrade des gelösten Stoffes und des reinen Lösungsmittels in der Lösung vor. Genau gilt dies allerdings nur bei unendlicher Verdünnung, also:

$$H_\infty = \frac{\gamma_\infty}{\varepsilon}.$$

H_∞ ist eine experimentell bestimmbare Größe. Ist es bekannt und gleichzeitig γ_∞ unendlich ermittelt, so kann ε und somit der Dissoziationsgrad des Lösungsmittels berechnet werden.

Schon in meiner ersten Arbeit über diesen Gegenstand habe ich den Satz aufgestellt, daß die relative atomare Leitfähigkeitsänderung l_∞ für eine Anzahl von in Quecksilber gelösten Metallen nahezu denselben Wert hat. Die folgende Tabelle I mag dies erläutern.

Tabelle I.

gelöstes Metall	$l_\infty \cdot 10^2$	gelöstes Metall	$l_\infty \cdot 10^2$
Zinn	8,0	Cadmium	6,0
Blei	7,0	Silber	5,0
Wismut	4,6	Gold	9,0
Zink	8,5		

Wenn man die Änderung der inneren Reibung r_∞ vernachlässigen kann, wofür spätere Erläuterungen eine gewisse Berechtigung ergeben, ist l_∞ mit H_∞ zu identifizieren. Man kann dann setzen

$$H_\infty = l_\infty = \frac{\gamma_\infty}{\varepsilon}.$$

Aus der Gleichheit von l_∞ für verschiedene Metalle folgt aber mit Hilfe dieser Gleichung, daß für diese Metalle auch die Dissoziationsgrade γ_∞ annähernd denselben Wert haben. Dies ist bei Metallen von sehr verschiedener chemischer Natur fürs erste verwunderlich, wird aber leicht verständlich, wenn man annimmt, daß diese Metalle in Lösung weitgehend dissoziiert sind, sich also der Dissoziationsgrad seiner oberen Grenze 1 nähert. Dieser Schluß wurde denn auch von mir gezogen, doch blieb eines unbefriedigend, nämlich daß es Amalgame gibt, welche statt einer Leitfähigkeitserhöhung eine Erniedrigung derselben aufwiesen, also dieser Regel sich nicht nur nicht fügten, sondern scheinbar ein grundverschiedenes Verhalten zeigten, vor allem, wie schon erwähnt, die Alkalimetallamalgame. Erst als durch Fenningers Untersuchungen[1]) die hohe innere Reibung dieser Amalgame bekannt wurde, löste sich diese Schwierigkeit. Es darf eben die innere Reibung nicht vernachlässigt werden und an Stelle von l_∞ hat H_∞ zu treten. Es ergibt sich so der allgemeinere für sämtliche bisher untersuchte Amalgame geltende Satz: Die Werte für H_∞ also die Summen aus l_∞ und r_∞ verschiedener in Quecksilber gelöster Metalle sind mindestens der Größenordnung nach einander gleich. Tabelle II zeigt eine Zusammenstellung dieser Werte.

Tabelle II[2]).

Metall	$H_\infty \cdot 10^2$	Metall	$H_\infty \cdot 10^2$
Lithium	8,5	Thallium	4,1
Natrium	9,0	Zink	10,5
Kalium	14,0	Cadmium	7,2
Rubidium	16,0	Wismut	5,5
Cäsium	26,5	Zinn	9,4
Calcium	10,5	Blei	8,2
Barium	29	Gold	14,9

Wie schon erwähnt, führt diese Tatsache zur Folgerung, daß auch die Dissoziationsgrade γ_∞ verschiedener Metalle nicht sehr verschieden sind und sich der Einheit nähern. Von den sicher einwertigen Metallen zeigt das Cäsium den größten Wert von H_∞. Sein Dissoziationsgrad in Quecksilberlösung wurde daher gleich 1

1) Diss. Freiburg 1914.

2) Bei dieser Tabelle II wurden zur Berechnung von r_∞ die Zahlen von Fenninger benutzt, wobei meist der für die kleinste Konzentration erhaltene Wert von r zugrunde gelegt wurde. Für die Berechnung von l_∞ dienten bei *Sn*, *Pb*, *Bi*, *Zn*, *Cd* die aus den Larsenschen Zahlen extrapolierten Werte. Bei Gold und Silber wurden analog die von Matthiessen und Vogt verwendet, bei den übrigen Metallen die von Fenninger gefundenen Werte.

gesetzt und der Berechnung des Dissoziationsgrades des Quecksilbers zugrunde gelegt. Es ergab sich: $\varepsilon = 0{,}04$, d. h. auf 100 Atome Quecksilber kommen 4 freie Elektronen.

Den Umstand, daß sich das so verschiedene Verhalten der Amalgame durch Berücksichtigung der inneren Reibung einheitlich erklären läßt, wird man wohl als wesentliche Stütze der vorgetragenen Auffassungen ansehen dürfen.

§ 4. Zur Frage der chemischen Gleichgewichtsbeziehungen in verdünnten Amalgamen läßt sich ohne weiteres folgendes sagen. Die Dissoziation des Lösungsmittels muß durch die Elektronen des gelösten Stoffes zurückgedrängt werden, was zur Folge hat, daß bei steigender Konzentration des gelösten Stoffes die Werte H kleiner werden müssen. Es läßt sich berechnen, daß der Ausdruck:

$$\frac{H_\infty - H}{c}$$

konstant sein müßte. Da aber die Veränderlichkeit der inneren Reibung mit der Konzentration nicht genügend bekannt ist, mußte bei Prüfung dieser Beziehung auf die Amalgame zurückgegriffen werden, bei denen die Veränderung der inneren Reibung eine geringere Rolle spielt und daher die Änderung der Leitfähigkeit allein der Berechnung zugrunde gelegt werden durfte. Diese Vernachlässigung ist allerdings insofern nicht unbedenklich, als ein an sich kleiner Wert von r eine verhältnismäßig große Änderung mit der Konzentration zeigen könnte. Ist sie zulässig, dann muß der Wert des Ausdruckes

$$\frac{l_\infty - l}{c} = k$$

von der Konzentration unabhängig sein. Dies ist in der Tat annähernd der Fall, was von mir seinerzeit (l. c. I) in der komplizierteren Form ausgedrückt wurde, daß für die Leitfähigkeitsänderung einer Reihe von Amalgamen das Ostwaldsche Verdünnungsgesetz gelte. Die Rechnung zeigt jedoch, daß die Werte von k bei verschiedenen Metallen nicht sehr verschieden sein dürften und sich aus der Elektronenkonzentration des reinen Quecksilbers und den l_∞-Werten berechnen lassen müßten. Dies trifft jedoch keineswegs zu, Tabelle III zeigt vielmehr, daß diese Werte für verschiedene Amalgame sehr verschieden sind.

Tabelle III.

Metall	$k \cdot 10^2$	Metall	$k \cdot 10^2$
Zinn	1,1	Cadmium	17
Blei	1,9	Silber	8
Wismut	3,1	Gold	44
Zink	32		

Ich will auf diese Verhältnisse hier nicht näher eingehen, sondern nur bemerken, daß sich der Widerspruch lösen läßt durch die Annahme, das gelöste Metall sei zum Teil in Form von Doppelatomen vorhanden, welche nichts Befremdendes hat und sowohl durch die Theorie von Liebenow, welcher im flüssigen Quecksilber kompliziertere Moleküle annimmt, als auch durch die Untersuchungen von Richards über die elektromotorische Kraft von Zinkamalgamen gestützt wird, welcher zu dem Schluß kommt, daß im Zinkamalgam Zinkdoppelatome zugegen sein müßten[1]). Eine nähere Untersuchung dieser Fragen wird erst möglich sein, wenn über die Abhängigkeit der inneren Reibung von der Konzentration genauere Messungen vorliegen, vor allem bei sehr verdünnten Amalgamen.

§ 5. Auch an dem reinen Lösungsmittel lassen sich die Gesetze des chemischen Gleichgewichts prüfen. Wendet man die bekannte van't Hoffsche Formel für die Veränderung der Gleichgewichtskonstante mit der Temperatur auf die Dissoziation des flüssigen Metalles in Ionen und Elektronen an und nimmt das Produkt $L\eta$ als Maß der Elektronenkonzentration (s. l. c. II, § 4), dann muß der Ausdruck

$$S = T_1 T_2 \left[\log\left(\frac{L\eta}{s}\right)_1 - \log\left(\frac{L\eta}{s}\right)_2\right]$$

für verschiedene aber gleich große Temperaturintervalle denselben Wert haben. Daß dies mit genügender Genauigkeit der Fall ist, zeigt die Tabelle IV. Die Elektronenkonzentration nimmt nach dieser Berechnung mit steigender Temperatur ziemlich rasch ab.

Tabelle IV.

Intervall	$S \cdot 10^{-2}$
0°—100°	175
100°—200°	209
200° 300°	207

Aus den Werten für S läßt sich die Dissoziationswärme des Quecksilbers zu ca. 1600 cal. berechnen, einwertiges Quecksilber vorausgesetzt. Wenn also 1 Grammatom Quecksilber in Ionen und Elektronen zerfällt, werden 1600 cal. frei.

§ 6. Es ist klar, daß diese Dissoziationswärme auch auf die spezifische Wärme des flüssigen Quecksilbers von Einfluß sein muß. Die schon lange bekannte auffällige Tatsache, daß die spezifische Wärme des flüssigen Quecksilbers mit steigender Temperatur abnimmt, findet so ihre einfache Erklärung. Ich verzichte auf die Wiedergabe der in einer früheren Abhandlung niedergelegten Rechnung (l. c. III),

1) Zeitschr. f. phys. Chemie 58, 742, 1907.

Es hat sich ergeben, daß sich aus der Änderung der spezifischen Wärme mit der Temperatur unter Verwendung des soeben mitgeteilten Wertes der Dissoziationswärme der Dissoziationsgrad des Quecksilbers zu $\varepsilon = 0{,}02$ berechnen läßt, nicht sehr verschieden von dem bereits mitgeteilten, auf anderem Wege gewonnenen Werte.

§ 7. Ich komme nun zur wichtigen Frage der Konzentrationsänderungen in flüssigen Legierungen bei Stromdurchgang. Lange hat man nach solchen Entmischungserscheinungen vergeblich gesucht. Erst in den letzten Jahren haben amerikanische Forscher[1]) Versuche beschrieben, nach denen es ihnen geglückt ist, solche bei Alkalimetallamalgamen nachzuweisen und die Überführungszahlen zu bestimmen. Nach ihren Angaben wandert das Alkalimetall nach der Anode. Ich gebe die von ihnen gemessenen Überführungszahlen hier wieder.

Tabelle V.

Metall	c (Atom %)	$n \cdot 10^6$
Natrium	3,24	2,93
Natrium	0,58	0,29
Kalium	2,16	3,56

Unter der Überführungszahl n ist die Anzahl Grammatome Alkalimetall zu verstehen, welche bei Durchgang von 1 Faraday = 96500 Coulomb zur Anode geführt werden. Die Effekte sind, wie man sieht, sehr klein. Es fragt sich, wie man diese Überführung zu deuten hat. Die Amerikaner haben sie, einer früheren Abhandlung von mir folgend, qualitativ durch Elektronenreibung zu erklären gesucht. In einer im Druck befindlichen Mitteilung habe ich eine quantitative Berechnung durchgeführt, von der ich hier nur den Gedankengang wiedergebe. Wird ein flüssiges Amalgam von Strom durchflossen, dann werden die positiven Ionen zur Kathode wandern. Da die Flüssigkeit aber im ganzen ihre Lage beibehält, muß ein entsprechendes Volumen des übrigen Teiles der Lösung und damit auch das darin enthaltene Alkalimetall zur Anode gedrängt werden, vorausgesetzt, daß nicht etwa das Alkalimetall selbst als positives Ion mit genügender Schnelligkeit zur Kathode wandert. Bei der großen Reibung, welche Alkalimetalle in Quecksilber erfahren, ist diese Bedingung genügend erfüllt. Die Rechnung hat zu plausiblen Ergebnissen geführt, deren eines, die Ermittlung des Dissoziationsgrades des Quecksilbers aus der Überführungszahl, ich in meiner letzten Tabelle VI wiedergebe. Dieselbe enthält die nach den verschiedenen besprochenen Methoden ermittelten Dissoziationsgrade.

1) Lewis, Adams u. Lamann, Journal Amer. Chem. Soc. 37, 2656, 1915.

Tabelle VI.

Methode	ε
Aus H_∞	0,04
Spez. Wärme	0,02
Überführungszahl	0,38 für $z = 0$
	0,03 „ $z = 10$
Aus dem Elektronenradius mittels der Stokesschen Formel	0,05

z ist die Zahl der neutralen Quecksilberatome, welche das positive Quecksilberion mit sich führt, ähnlich wie die Ionen in wässerigen Lösungen Wassermoleküle gebunden halten.

§ 8. Die letzte Zeile der Tabelle VI zeigt den Wert des Dissoziationsgrades von Quecksilber wie er sich aus dem Elektronenradius ($1{,}8 \cdot 10^{-13}$ cm) berechnet, wenn man für die Elektronen die Stokessche Formel als gültig annimmt. Bekanntlich hat man, seit Einstein zum erstenmal die Stokessche Formel auf die Moleküle angewendet hat, mit derselben bei elektrolytischen Ionen recht befriedigende Erfolge erzielt. Daß sie auch auf so kleine Körper wie Elektronen angewendet, Resultate gibt, die von anders berechneten nur wenig abweichen, dürfte nicht uninteressant sein.

§ 9. Bevor ich schließe, möchte ich noch darauf hinweisen, daß die Kenntnis der Elektronenkonzentration im flüssigen Zustand auch die Möglichkeit an die Hand gibt, die im festen Zustande wenigstens in der Nähe des Schmelzpunktes kennen zu lernen. Verschiedenes weist darauf hin, daß beim Schmelzen keine wesentliche Änderung in der Anzahl der freien Elektronen stattfindet. Dagegen spricht auch nicht die Tatsache, daß man neuerdings, wie es scheint, mit Sicherheit die Existenz von Thermokräften zwischen dem festen und flüssigen Metall beim Schmelzpunkte nachgewiesen hat[1]). Denn diese Thermokräfte sind nur klein und ergeben nach der Thomsonschen Formel nur eine Änderung in der Elektronenkonzentration von wenigen Prozenten.

1) Siehe z. B. Gehlhoff u. Neumeier, Verh. d. D. Phys. Ges. 21, 201, 1919.

A. Reis (Karlsruhe), Über eine Methode zur Identifizierung der Träger von Emissions-Bandenspektren.

Die Zuordnung der Spektren zu bestimmten materiellen Trägern durch eindeutige Versuche ermangelt besonders bei Bandenspektren in

Emission trotz ihrer großen Wichtigkeit bisher einer brauchbaren Methodik. Verfasser hat versucht, durch Verwendung der gemischten und gespaltenen Flammen[1]) als Emissionsquelle in der Zuordnung der Spektren einen Fortschritt zu erzielen. Diese Flammenmethode gestattet auf dem Spalte eines Spektrographen das Bild eines Flammenteiles zu entwerfen, dessen Temperatur und chemische Zusammensetzung praktisch einheitlich ist. Mit dieser Methode hat Verfasser bereits früher einige Untersuchungen ausgeführt[2]). Neuerdings hat Verfasser gemeinsam mit K. Ullmann die Zuordnung des sogenannten „Wasserdampf-Spektrums" im UV[3]) in Angriff genommen, als Emissionsquelle wurde die CO-Flamme gewählt, die mit Luft und O_2 gemischt gebrannt wurde. Diese Flamme sendet das fragliche Spektrum bei höherer Temperatur und geeigneter Zusammensetzung auch außerhalb des Verbrennungskegels kräftig aus. Die Zusammensetzung der Flammengase wurde durch chemische Analyse[4]) ermittelt. In den Hauptversuchsreihen wurde die Intensität des fraglichen Spektrums in Flammen gleicher Temperatur bei wechselndem O_2-Gehalt verglichen. Auf Temperaturgleichheit wurde eingestellt durch pyrometrische Helligkeitsmessung eines Glühstiftes, der in die entsprechende Stelle der Flamme gehalten wurde; bei annähernd gleicher Kegelhöhe und Gesamtgeschwindigkeit der Flammengase ist hierdurch die Temperaturgleichheit ausreichend sichergestellt. Bei der Temperatur von etwa 1900° C stellte sich das CO_2-Dissioziationsgleichgewicht so schnell ein, daß sehr kleine O_2-Gehalte aus den Gehalten an CO_2 und CO thermodynamisch berechnet werden durften.

Es ergab sich, daß die Intensität des fraglichen Spektrums bei kleinem O_2-Gehalt diesem annähernd proportional geht und bei stark reduzierenden Flammen unmerklich klein wird. Bei höherem O_2-Gehalte (etwa 0,5 Proz.) bleibt die Intensität des Spektrums hinter der Proportionalität bereits merklich zurück; geht man zu O_2-Gehalten von ganzen Prozenten über, so steigt die Intensität des Spektrums nur mehr wenig. Der H_2O-Gehalt der Flammen änderte sich nur wenig, und zwar im entgegengesetzten Sinne wie der O_2-Gehalt; er betrug bei den O_2-reichen Flammen etwa 0,5 Proz., bei den stark reduzierenden etwa 1 Proz.

1) Siehe Haber und dessen Mitarbeiter, Zeitschr. f. phys. Chemie.
2) Zeitschr. f. phys. Chem. **88**, 513, 1914; Verh. d. D. Phys. Ges. 1913, S. 1247.
3) Die Zuordnung dieses Spektrums zu O_2 wurde bereits durch die Versuche von J. Stark u. W. Steubing (Ann. d. Phys., 1912) wahrscheinlich gemacht.
4) Das Absaugen der Analysenproben geschah nach Reis u. Waldbauer, Zeitschr. f. phys. Chem. **81**, 67, 1913.

Aus diesen Ergebnissen, deren genauere Nachprüfung im Gange ist, geht mit Sicherheit hervor, daß das Spektrum mit H_2O nichts zu tun hat, sondern von einem Stoffe ausgesendet wird, dessen Gehalt in der Flamme dem O_2 parallel geht. Den Wert der Methode erblickt Verfasser in der Zurückführung der spektroskopischen Zuordnung auf die gesicherte Methodik der chemischen Analyse. Die Anwendung der Methode auf die Zuordnung anderer Spektren ist im Gange.

Über die eigentümliche Erscheinung der Entmischung in Innenkegeln von Flammen[1]) wurden neue Beobachtungen gemacht, die eine Aufklärung dieses Effektes erhoffen lassen.

Diskussion.

Martens fragt an, ob der Vortragende auch bereits Salze in seine Flammen eingeführt hat.

Reis: Die Untersuchung von Flammen, in welche Salze und andere Zusätze eingeführt wurden, wird demnächst erfolgen.

1) Siehe F. Hiller, Zeitschr. f. phys. Chem. **81**, 591, 1912; N. Bubnoff, ebenda **88**, 641, 1914.

W. Nernst (Berlin), Zur Kenntnis der photochemischen Reaktionen. (Nach Versuchen von Herrn Noddack.)

Vor einiger Zeit zeigte ich[1]), analogen Betrachtungen Warburgs[2]) folgend, daß unter der Annahme, daß der primäre Prozeß bei der Einwirkung des Lichtes auf Chlorknallgas in einer Spaltung des Cl_2-Moleküls in die Atome besteht und unter Benutzung meines Wärmesatzes sich eine ungeheuer viel größere Ausbeute von HCl ergeben muß, als Einsteins Äquivalentgesetz

$$\frac{Q}{h\nu} = N$$

(Q absorbierte Energie, $h\nu$ Energiequantum, N Zahl der gespaltenen Molekeln) entspricht. Gleichzeitig gab ich als Bedingung für die Gültigkeit des Gesetzes in diesem Falle an, daß anstatt des Wasserstoffs ein Akzeptor für Cl-Atome zu wählen sei, der ohne störende Dunkelreaktionen die Cl-Atome (naszierendes Chlor) aufnimmt.

Diese meine Auffassung ließ sich u. a. bestätigen bei der Untersuchung der Einwirkung von Bromdampf auf geeignete Kohlenwasserstoffe, wie die eingehende Arbeit von Fr. L. Pusch[3]) gezeigt hat. Immerhin schien

1) Nernst, Zeitschr. f. Elektrochem. **24**, 335, 1918.
2) Vgl. Warburg, Zeitschr. f. Elektrochem. **26**, 54, 1920.
3) Zeitschr. f. Elektrochem. **24**, 336, 1918.

erwünscht, zur völligen Aufklärung der klassischen Lichtreaktion des Chorknallgases auch einen für Cl-Atome geeigneten Akzeptor ausfindig zu machen. Herrn W. Noddack, der die Arbeit von Fräulein Pusch in meinem Institut fortsetzte, ist dies in vollkommenster Weise gelungen, worüber ich kurz berichten möchte, indem ich wegen aller Einzelheiten auf seine demnächst erscheinende ausführliche Dissertation verweise.

Zunächst wiederholte Herr Noddack die Messungen von Fräulein Pusch und fand in völliger Bestätigung derselben eine recht genaue Übereinstimmung der photochemischen Wirkung von Brom auf Hexahydrobenzol mit Einsteins Gesetz. Dann aber entdeckte er in dem von Paterno zuerst dargestellten Trichlorbrommethan (CCl_3Br) einen ganz vortrefflichen Akzeptor für Cl-Atome:

$$Cl + CCl_3Br = CCl_4 + Br \ldots . \qquad (1)$$

Im Dunkeln findet bei Zimmertemperatur keine merkliche Reaktion statt; im Lichte entsprach die gebildete Brommenge bis auf die Beobachtungsfehler Einsteins Gesetz, womit die oben gestellte Aufgabe gelöst ist. Hinzuzufügen ist noch, daß im flüssigen Akzeptor gelöstes Chlor zur Einwirkung gelangte, daß also meines Wissens gleichzeitig zum ersten Male das Gesetz in Lösungen sich verifizieren ließ.

In obiger Reaktion bildet sich das gegen die sonstigen reagierenden Stoffe völlig indifferente Kohlenstofftetrachlorid; es erschien von Interesse, die Lichtreaktion bei überschüssig zugesetztem CCl_4 zu untersuchen.

Hier ergab sich nun höchst überraschenderweise, daß die Lichtausbeute zwar praktisch ungeändert blieb, als nur ein 1 Mol CCl_4 pro Mol Akzeptor der Lösung beigemischt wurde, daß aber ein starker Abfall bei größerem Zusatz erfolgt. Zum Beispiel betrug bei Zusatz von 16 Mol CCl_4 die Lichtausbeute nur mehr die Hälfte. Eine Absorption des wirksamen Lichtes (mittlere Wellenlänge 410 $\mu\mu$) seitens des CCl_4 findet natürlich nicht statt.

Dieser Befund überrascht deshalb zunächst, weil an eine Einwirkung des naszierenden Chlors auf CCl_4 nicht zu denken, daher zu erwarten ist, daß die gebildeten Cl-Atome nach dem Zusatz von CCl_4 quantitativ das Brom substituieren müßten. Aber folgende Auffassung führt vielleicht zu einer Deutung obigen Verhaltens.

Daran, daß durch das Licht Cl-Atome gebildet werden, möchte ich zunächst festhalten, doch kann dies, wie schon früher betont[1]), nicht der eigentliche photochemische Prozeß sein. Hier dürfte eine von E. Warburg zuerst geäußerte Vermutung ergänzend eintreten, daß nämlich zunächst von dem absorbierenden Molekül ein Energiequantum aufgenommen wird, daß also in unserem Falle aktiviertes Chlor im Sinne der Gleichung

$$Cl_2 = Cl_2'$$

sich bildet. Später haben Stern und Volmer[1]) mit der gleichen Auffassung operiert, doch scheint mir die Priorität derselben Warburg zu gebühren. Da in unserem Falle das Quantum, auf ein Mol bezogen, ca. 70000 cal beträgt, so würde die Dissoziation

$$Cl_2' = 2\,Cl$$

nur mehr einer Zufuhr von etwa 30000 cal bedürfen, müßte also im Sinne meines Wärmesatzes in Anbetracht der ganz ungeheuer kleinen Cl_2'-Konzentrationen spontan erfolgen. Dabei ist die Dissoziationswärme des nicht aktivierten Chlors zu 100000 cal angenommen, doch bedarf diese Zahl noch einer Nachprüfung, die in meinem Institut im Gange ist. Der, wie mir scheint, wesentliche Punkt, daß derartig aktivierte Moleküle nur mehr eine verhältnismäßig kleine Dissoziationswärme besitzen und daher nach wohlbegründeten Gesetzen spontan dissoziieren müssen, ist von den Herren Stern und Volmer in ihren Betrachtungen nicht berücksichtigt worden.

So gelangen wir zu der Auffassung, daß zwar letzten Endes infolge der Lichtwirkung Cl-Atome entstehen, wie ich früher angenommen habe, jedoch unter intermediärer Bildung einer sehr energiereichen Cl_2-Modifikation. Es erklärt sich nunmehr einfach der merkwürdige Befund Herrn Noddacks; bevor die Cl_2'-Moleküle dissoziieren — die dazu erforderliche Energie müssen sie durch eine Anzahl Zusammenstöße gewinnen —, wird notwendig ein mehr oder weniger großer Teil von ihnen infolge der Zusammenstöße Energie abgeben, d. h. stufenweise das Energiequantum wieder verlieren. Offenbar wird in dem von Herrn Noddack untersuchten Falle auch die Reaktion

$$Cl_2' + CCl_3Br = CCl_4 + Br + Cl \ldots . \qquad (2)$$

direkt sich abspielen können, wie vielleicht auch im Falle der Chlorknallgasreaktion die Reaktion

$$Cl_2' + H_2 = HCl + H + Cl_1 \ldots . \qquad (3)$$

möglich ist, obwohl natürlich letztere Gleichung viel weniger plausibel ist. Jedenfalls aber hat die obige Auffassung den Vorteil —

1) Zeitschr. f. Elektrochem. **26**, 57, 1920, Anmerkg.

1) Zeitschr. f. wissensch. Photographie 1919, S. 275.

im Gegensatz zu den Betrachtungen der Herren Stern und Volmer —, daß die von mir früher gegebene, allgemein wohl als einleuchtend empfundene Erklärung der gewaltigen Lichtausbeute bei der Chlorknallgasreaktion unverändert bestehen bleibt.

Zum Schluß möchte ich noch betonen, daß sowohl die wahre Deutung des Äquivalentgesetzes, d. h. die Frage, auf welchen chemischen Vorgang es im Grunde anzuwenden ist, wie auch die Frage der dem primären Vorgang folgenden Dunkelreaktionen noch weiterer eingehender experimenteller Prüfung bedarf. Auf der anderen Seite aber steht als Nebengewinn derartiger experimenteller Arbeiten ein tieferer Einblick in die Reaktionen einzelner Atome in Aussicht.

Diskussion.

Stern: Obwohl die Hypothese der Kettenreaktion bei der Chlorknallgasreaktion mir sehr plausibel erscheint, möchte ich doch auf einige schwerwiegende Bedenken[1]) hinweisen, die mir der Theorie von Herrn Geheimrat Nernst über die Entstehung der erforderlichen Cl-Atome entgegen zu stehen scheinen. Die Dissoziationswärme des Chlors beträgt, wie auch Herr Nernst annimmt, etwa 90000 Kalorien, das Quantum $h\nu$ der größten Wellenlänge, bei der die Reaktion noch erfolgt, beträgt pro Mol höchstens 70000 Kalorien. Um in Chloratome dissoziieren zu können, muß das Cl_2-Molekül, das ein Quantum = 70000 Kalorien absorbiert hat, das Cl_2', noch mindestens 20000 Kalorien aufnehmen. Herr Nernst argumentiert nun folgendermaßen: Die Cl_2'-Moleküle stellen ein Gas mit einer Dissoziationswärme von 20000 Kalorien dar. Außerdem ist dieses Gas äußerst verdünnt, denn die Anzahl der Cl_2'-Moleküle ist selbst bei intensivster Bestrahlung äußerst gering. Also folgt thermodynamisch mit Hilfe des Nernstschen Wärmesatzes, daß das Cl_2'-Gas fast vollständig dissoziiert ist. Hiergegen richtet sich nun mein Einwand. Diese Überlegung gilt nämlich nur für den Fall des thermodynamischen Gleichgewichtes. In unserem Falle liegt die Sache anders. Das Cl_2-Molekül absorbiert 70000 Kalorien. Um in Atome zerfallen zu können, muß es, wenn man mit Herrn Nernst eine Dissoziationswärme von 90000 Kalorien zugrunde legt, unter allen Umständen noch 20000 Kalorien aufnehmen. Diese Energie kann es nur durch Zusammenstöße mit anderen Molekülen bekommen. Abgesehen davon, daß eine thermische Energie von 20000 Kalorien überhaupt nur bei extrem seltenen Zusammenstößen auftritt, lehren nun die Erfahrungen der Spektroskopie, speziell beim Jod, daß die erregten Moleküle bei Zusammenstößen nie Energie aufnehmen, sondern immer nur abgeben. Aus diesen Gründen scheint mir die Nernstsche Theorie über die Entstehung der Cl-Atome nicht haltbar.

Ich möchte mir erlauben, noch kurz auf eine historische Frage einzugehen. Herr Geheimrat Nernst rügt, daß Herr Volmer und ich bezüglich der von uns vertretenen Hypothese, daß bei jedem photochemischen Prozeß der primäre Vorgang in dem Übergange der absorbierenden Moleküle aus einem Bohrschen Quantenzustand in einen andern besteht, die Priorität von Herrn Warburg nicht genügend betont hätten. Es liegt sowohl Herrn Volmer als mir absolut fern, uns in einen Prioritätsstreit hierüber einzulassen, zumal die obige Hypothese für jeden Kenner der Bohrschen Theorie eine Selbstverständlichkeit ist. Ich möchte nur zu unserer Rechtfertigung und sachlichen Klarstellung folgendes bemerken. Herr Warburg nimmt an, daß in solchen Fällen, wo das aufgenommene Energiequantum nicht zur Dissoziation ausreicht, die Molekel sich nach Aufnahme des Quantums mit diesem fortbewegt und beim Zusammenstoß mit einem andern Molekel reagiert[1]). Diese Annahme ist, wie Warburg selbst anführt, bereits von Stark[2]) gemacht worden. Dabei bleibt es dahingestellt, in welcher Form die Energie von der Molekel getragen wird. Der von Stark für den Vorgang benutzte Ausdruck „thermophotochemische Reaktion" läßt vermuten, daß die Energie als kinetische Energie der Molekel aufgefaßt wird. Jedenfalls war die Auffassung so unbestimmt, daß sie zu keinen quantitativen Gesetzen führen konnte. Unsere Auffassung, die sich im wesentlichen auf Versuche mit fluoreszierendem Joddampf[3]) stützt, geht dahin, daß das absorbierte Energiequantum zunächst lediglich in Elektronenenergie der Moleküle übergeht, sich also nicht auf die Freiheitsgrade der Molekel verteilt und selbst dann nicht direkt zur Dissoziation führt, wenn das Quantum erheblich größer als die Dissoziationsarbeit ist. Die Einführung der mittleren Lebensdauer, sowie der aus anderen Arbeiten bekannten Eigenschaften Bohrscher Quantenzustände gibt dieser Auffassung die Möglichkeit einer quantitativen Ausgestaltung.

1) Vgl. O. Stern und M. Volmer, Zeitschr. f. wissenschaftl. Photogr. 19, 275, 1920.

1) Berl. Akad. Ber. 1916.
2) Diese Zeitschr. 9, 889, 1908.
3) Diese Zeitschr. 20, 163, 1919.

Schließlich möchte ich noch auf einen experimentellen Einwand gegen die Nernstsche Theorie der Chlorknallgasreaktion hinweisen. Volmer[1]) hat untersucht, ob vorbelichtetes Chlor, nach ganz kurzen Zeiten mit Wasserstoff in Berührung gebracht, eine Reaktion gibt, und hat festgestellt, daß dies nicht der Fall ist. Auch das spricht sehr gegen die Hypothese der Dissoziation in Chloratome, denn die Wiedervereinigung der Chloratome würde bei ihrer extremen Verdünnung eine merkliche Zeit beanspruchen.

Nernst: Dem von Herrn Stern zuletzt erwähnten, sehr wichtigen, aber ganz gelegentlich ausgeführten Versuch Volmers wird man kaum eine entscheidende Bedeutung beimessen können; minimalste Verunreinigungen des Chlors können z. B. die in sehr kleiner Zahl gebildeten Cl-Atome beseitigt haben. Ich betone ferner, daß Herr Stern eine Erklärung der ungeheuer großen Abweichung vom Äquivalentgesetz, die Chlorknallgas zeigt, bei seiner Auffassung uns schuldig bleibt. Ich kann nur nochmals sagen, daß es mir wichtiger scheint, neue experimentelle Beiträge als neue Hypothesen auf diesem Gebiete zu liefern. Übrigens verschwindet jede Meinungsdifferenz, wenn man sich dazu entschließt, Reaktion 3 als möglich anzusehen, aber auch diese Frage kann nur durch weitere Versuche geklärt werden. — Der Auffassung des Herrn Stern[2]), daß Cl_2' entgegen allen unsern analogen Erfahrungen nicht dissoziieren soll, kann ich nicht zustimmen. — Warburgs Priorität der Einführung von mit einem Energiequantum $h\nu$ beladenen neuen Molekülarten kann unmöglich bestritten werden.

Gerlach: Ich möchte trotz mancher entgegenstehender Bedenken doch die Möglichkeit in Betracht gezogen haben, daß auf die Lichtreaktion $Cl_2 + h\nu = (Cl_2)'$ die Dunkelreaktion $(Cl_2)' = Cl + Cl$ nicht statthat, sondern daß die chemische Reaktionsfähigkeit des $(Cl_2)'$ eine erhöhte ist. Die Herabsetzung der photochemischen Ausbeute der HCl-Reaktion durch geringe Mengen von Sauerstoff ist dann so zu deuten, daß beim Zusammenstoß von $(Cl_2)'$ mit O_2 dem ersteren Energie entzogen wird, entweder so, daß es kleine Beträge verliert, oder so, daß es nach Art der Franckschen Überlegungen an He über eine unstabile Chlor-Sauerstoffverbindung sich zu normalem Cl_2 zurückverwandelt.

Trautz: Die Berechnungen führen zu einem andern Ergebnis infolge neuer Messungen der Zerfallswärme des Chlors, die Herr Stäckel auf meinen Anlaß angestellt hat. Anregung dazu gab die Beziehung der Wärmetönung binärer Zerfälle in Atome zu jener Schwingungszahl ν, bei der, vom Rot herkommend, die Hauptabsorption im Spektrum des zerfallenden Stoffs beginnt. Die Infrarotabsorption ist auf die spezifischen Wärmen zu schieben. Dividiert man die Zerfallswärme durch Loschmidtsche und Plancksche Zahl, also durch $A \cdot h$, so erhält man jene rote Grenze der Hauptabsorption und diese Beziehung hat bei Jod und Brom so befriedigend gestimmt, wenn sie auch naturgemäß nur eine rohe sein kann, wie ich schon anderweit zeigte, daß eine Unstimmigkeit bei Chlor, wie sie vorzuliegen schien, experimenteller Nachprüfung wert war.

Manometrische Dampfdichtebestimmung zwischen 1100° und 1200° haben entsprechend einen Überdruck von 5—15 mm über Cl_2 von Atmosphärendruck zu der uns aus dem Spektrum vorher abgeleiteten Zerfallswärme von ungefähr 60 000—70 000 cal geführt; die auch allein ins periodische System paßt.

Damit fällt Herrn Sterns Einwand gegen Herrn Nernst dahin.

Bei äußerster Vorsicht in der Deutung der bei 1100—1200° auftretenden Drucksteigerungen konnte man allenfalls eine Unschärfe der Berechnung zugeben, falls das Trichlor Cl_3 merklich in Betracht kommt. Deshalb haben wir die Dampfdichtebestimmung von Chlor im ganzen Gebiet zwischen Zimmertemperatur und 1200° ins Auge gefaßt. Wir werden die in Rede stehende Frage nach der Zerfallswärme des Chlors mit unserer Methode, die alle Zahlen zu blockieren erlaubt, experimentell in den nächsten Monaten mit voller Bestimmtheit entscheiden können.

Nernst: Die Mitteilung von Herrn Trautz ist sehr interessant. Wir sind seit langer Zeit damit beschäftigt, die vorläufige Bestimmung von Pier zu wiederholen. Leider ist Herr Russel, der seine Arbeit über die Dissoziation von Cl_2 unter Benutzung der Explosionsmethode abgeschlossen hatte, gefallen, und ich habe sein Manuskript nie einsehen können. Eine neue Arbeit ist im Gange.

---

1) Vgl. Le Blanc und Volmer, Zeitschr. f. Elektrochem. **20**, 494, 1914.

2) Anm. bei der Korrektur. Daß Reaktionen, z. B. $H_2O = \overset{+}{H} + \overset{-}{OH}$ und $N_2O_4 = 2NO_2$, sehr rasch bei Zimmertemperatur trotz der großen Wärmeabsorption erfolgen, widerspricht Herrn Sterns Auffassnng.

J. J. P. Valeton (Gießen), Kristallwachstum und chemische Affinität.

Die Kosselsche Valenztheorie bringt nicht nur eine befriedigende Lösung für die typischen Probleme der klassischen Valenzlehre, vor allen Dingen für die Frage der „Molekülbindungen" (wie z. B. $NH_3 \cdot HCl$ oder $PtCl_4 \cdot 2KCl$), sondern sie liefert uns auch eine rationelle Deutung für die Braggschen Kristallmodelle, indem sie den Zusammenhalt z. B. eines Steinsalzkristalles auf die elektrostatische Anziehung der geladenen Atome zurückführt und damit die Annahme von selbständigen Molekülen, die durch besondere Kräfte zusammengehalten werden, überflüssig macht.

Im Anschluß daran liefern uns die Kosselschen Vorstellungen ebenfalls den Schlüssel zum Verständnis einer Gruppe von Erscheinungen, die von jeher ein wichtiges Problem der Kristallographie bildeten, und für die eine befriedigende Erklärung bis jetzt vergeblich gesucht wurde. Es sind dies die Erscheinungen des Kristallwachstums.

Die Kristalle bilden bekanntlich von ebenen Flächen begrenzte Polyeder. Die Lage dieser Flächen ist eine durchaus gesetzmäßige. Nicht nur sind sie dem Gesetz der rationalen Indizes unterworfen, welches gestattet, aus 4 vorhandenen Flächenrichtungen sämtliche überhaupt mögliche Flächenrichtungen a priori abzuleiten, sondern es herrschen im großen und ganzen fast ausschließlich diejenigen Flächen vor, die sich durch sehr kleine rationale Indizes auszeichnen. Während nun das Gesetz der Rationalität sich ohne weiteres aus der Raumgitterhypothese ergibt, sobald man die naheliegende Annahme einführt, daß nur Gitterebenen als Kristallflächen auftreten können, ist für die Erklärung der bevorzugten Rolle der sehr einfachen Indexsymbole ein näheres Eingehen auf den Vorgang des Kristallwachstums erforderlich.

Bravais (1850) stellte eine Regel auf, nach der die Wichtigkeit einer Gitterebene als Kristallfläche in engstem Zusammenhang mit ihrer Netzdichtigkeit im Raumgitter stehen soll. Ordnen wir die sämtlichen an einer Kristallart beobachteten Flächen nach ihrer Wichtigkeit, die sich durch ihre relative Größe und Häufigkeit des Vorkommens ausspricht, so soll diese Reihe der Reihenfolge der Netzdichtigkeiten entsprechen.

Tatsächlich steht in einem Raumgitter die Netzdichtigkeit in naher Beziehung zum Indexsymbol einer Fläche, indem die Flächen mit den einfachsten Indexverhältnissen die größte Netzdichtigkeit besitzen und diese mit steigenden Indexzahlen rasch abnimmt. Doch kann die Bravaissche Regel nur als eine erste rohe Deutung der Tatsachen gelten. Abgesehen davon, daß sie die Erfahrungen über die Kristalltracht zwar auf die Struktur zurückführt aber nicht eigentlich erklärt, versagt der Ansatz bei der Durchführung im einzelnen. Wohl stimmt die Reihenfolge der Häufigkeiten der verschiedenen Flächen, wie man sie auf statistischem Wege bei vielen Mineralien bestimmt hat, im großen und ganzen mit der Bravaisschen Regel überein; aber gerade in bezug auf das Auftreten oder Nichtauftreten der einfachsten und somit wichtigsten Formen, z. B. von Würfel, Oktaeder oder Rhombendodekaeder im regulären System zeigt jede Kristallart ihre besonderen Eigentümlichkeiten, die sich in keiner Weise auf Grund der Bravaisschen Regel voraussagen lassen. Auch bietet sie keine Handhabe für die Erklärung des Auftretens von hemiedrischen und tetartoedrischen Formen, da die Raumgitter an sich holoedrische Symmetrie besitzen.

Die Frage der Kristallform ist eine Geschwindigkeitsfrage. Nimmt man an, daß jede vorhandene Kristallfläche sich in der übersättigten Lösung durch die Anlagerung neuer Teilchen parallel zu sich selbst verschiebt, so lehrt eine einfache geometrische Überlegung, daß eine Fläche, deren Wachstumsgeschwindigkeit (d. h. die Geschwindigkeit der Verschiebung, senkrecht zur Fläche gemessen) klein ist im Verhältnis zu den Geschwindigkeiten der benachbarten Flächen, sich in tangentialer Richtung vergrößern wird auf Kosten der Nachbarflächen. Die allgemeine kristallographische Erfahrung ist also in dem Sinne zu deuten, daß es in jedem Kristall einige wenige Richtungen von ausgesprochen minimaler W.-G. (Wachtumsgeschwindigkeit) gibt. Aus dieser Annahme erklärt sich die Bildung von wenigen ebenen Flächen. Die Frage des Kristallhabitus ist damit zurückgeführt auf die Frage der Richtungsabhängigkeit der W.-G.

Der erste Versuch einer physikalischen Erklärung dieser Richtungsabhängigkeit ist die Theorie von G. Wulff[1]). Ausgehend von einer von P. Curie gegebenen Anregung[2]) sieht Wulff die Ursache der Verschiedenheit der W.-G. für verschiedene Kristallflächen in dem Streben nach minimaler Oberflächenenergie. Er leitet ab, daß die gesamte Oberflächenenergie des Kristalles in jedem Stadium des Wachstums minimal sein wird im Verhältnis zum jeweiligen Volum, wenn die W.-G. für jede Kristallfläche sich proportional zur Kapillarkonstante der betreffenden Fläche verhält.

Der Curie-Wulffsche Ansatz ist jedoch

1) G. Wulff, Zeitschr. f. Krist. **34**, 512, 1901.
2) P. Curie, Bull. d. l. Soc. min. d. Fr. **8**, 145, 1885.

für die Erklärung des Kristallwachstums wertlos, wie ich in einer früheren Arbeit[1]) ausführlich dargetan habe. Aus der bereits von Gibbs in seiner Abhandlung über die heterogenen Gleichgewichte (1878) gegebenen eingehenden Behandlung des Kapillaritätsproblems bei Kristallen geht hervor, daß die Rolle der Oberflächenenergie sich auf eine Korrektion zum Werte des thermodynamischen Potentials beschränkt, die bei zunehmender Größe des Kristalles rasch abnimmt und bei Kristallen von sichtbaren Dimensionen von keinerlei Bedeutung mehr ist.

Die Kosselsche Theorie scheint mir nun, wie eingangs gesagt, den Schlüssel zum Verständnis des Wachstumsvorgangs zu liefern. Dabei ist zu betonen, daß wir vorläufig nur die typisch heteropolaren Verbindungen in Betracht ziehen wollen; für ein näheres Eingehen auf die homöopolaren Verbindungen empfiehlt es sich, den weiteren Ausbau der Theorie für solche Verbindungen abzuwarten.

Der Ausgangspunkt der Kosselschen Theorie ist bekanntlich die Annahme, daß die Atome auch im undissoziierten Molekül sowie im Kristall einen positiven oder negativen Ladungsüberschuß besitzen. Diese Ladungen, die auf Elektronenaustausch beruhen, sollen durch ihre elektrostatische Wirkung die direkte Ursache der chemischen Affinität sein. Aus dieser Grundannahme ergibt sich sofort, daß die Atome, oder vielmehr die Ionen, die sich in der äußersten Schicht eines Kristalles befinden, ihre elektrostatische Wirkung teilweise nach außen, also in die Lösung hinein ausüben. Infolgedessen werden die Ionen und Moleküle, die sich in der Lösung befinden und infolge der thermischen Bewegung mit verschiedenen Geschwindigkeiten gegen die Kristalloberfläche anprallen, von dieser angezogen oder abgestoßen. Diejenigen, die angezogen werden, können dauernd festgehalten werden, falls die anziehende Kraft ausreicht, um die Geschwindigkeit des anprallenden Teilchens zu vernichten. Andererseits werden durch die Stöße der Moleküle des Lösungsmittels fortwährend Teilchen aus der Kristalloberfläche herausgeschleudert. Je nachdem die Lösung übersättigt oder untersättigt ist, wird die eine oder die andere Erscheinung die Überhand haben und der Kristall wachsen oder sich auflösen.

Nun ist es klar, daß die Intensität der Anlagerung von Teilchen, also des Wachstums einer Kristallfläche in hohem Grade von der Natur und Anordnung der Ionen in der betreffenden Kristalloberfläche abhängen wird. Am deutlichsten wird sich dies zeigen, wenn wir ein bestimmtes und möglichst einfaches Beispiel ins Auge fassen. Wir wählen dazu das Steinsalz $NaCl$, dessen Struktur wohl als allgemein bekannt vorausgesetzt werden darf.

Betrachten wir zunächst eine Würfelfläche des Steinsalzes, die mit übersättigter Lösung in Berührung ist. Die Anordnung der Na- und Cl-Ionen ist vergleichbar mit der der schwarzen und weißen Felder eines Schachbrettes, auf dem man in der Mitte eines jeden schwarzen Feldes eine positive, in der Mitte eines jeden weißen Feldes eine negative Einheitsladung eingesetzt hätte. Die elektrostatische Wirkung dieser Ladungen nimmt mit der Entfernung schnell ab; praktisch können wir sie auf eine sehr dünne Schicht der Flüssigkeit beschränkt denken, die die Kristalloberfläche unmittelbar berührt. Wir wollen diese dünne Schicht, in der die elektrostatische Wirkung der Oberfläche bemerkbar ist, als ihr Wirkungsfeld bezeichnen[1]).

In jeder Zeiteinheit prallen nun eine Anzahl von gelösten Na- und Cl-Ionen an die Kristalloberfläche an und werden durch die Kraft des Anpralls wieder zurückgeworfen. Da sie aber selbst geladen sind, sind sie während der Zeit, in der sie sich im Wirkungsfeld befinden, der elektrostatischen Kraft, die von der Kristalloberfläche ausgeht, unterworfen. Nun ist zunächst klar, daß durchschnittlich die Hälfte der anprallenden Ionen im Wirkungsfeld überhaupt angezogen, die andere Hälfte abgestoßen wird. Bedienen wir uns des obenerwähnten Vergleichs mit einem Schachbrett, so wird ein positives Ion angezogen, wenn es gerade auf ein weißes Feld auftrifft, abgestoßen dagegen, wenn es gerade auf ein schwarzes auftrifft. Für ein negatives Ion gilt das Umgekehrte.

Von den anprallenden Ionen, die angezogen werden, wird aber nur ein Bruchteil tatsächlich festgehalten. Dies hängt von der Größe der Anziehungskraft an der betreffenden Stelle und von Richtung und Geschwindigkeit des anprallenden Teilchens ab. Die Kraft ist für jedes Schachbrettfeld am größten in der Mitte desselben und nimmt dann nach den Rändern schnell ab, denn an der Grenze eines weißen und eines schwarzen Feldes heben sich die Kräfte der beiden Felder gerade auf. Die Ge-

1) J. J. P. Valeton, Ber. d. Math.-Phys. Kl. d. Königl. Sächs. Ges. d. Wiss. zu Leipzig 67, 1, 1915.

1) Es wird hier also angenommen, daß die Kristallstruktur bis zur äußersten Gitterebene exakt so ist, wie im Innern des Kristalles; das wird wohl nicht ganz richtig sein, doch scheint es mir für die Zwecke der vorliegenden Besprechung nicht nötig, auf diese Frage einzugehen. Ich möchte mir vorbehalten, an anderer Stelle darauf zurückzukommen.

schwindigkeit der anprallenden Teilchen ist sehr verschieden; sie unterliegt dem Maxwellschen Verteilungsgesetz. Aus dem Gesagten geht hervor, daß nur ein kleiner Bruchteil der anprallenden Teilchen festgehalten wird. Denn dazu ist nötig, daß ein Teilchen ziemlich genau in der Mitte eines Schachbrettfeldes auftrifft, oder aber eine sehr geringe Geschwindigkeit besitzt, was auf Grund der Wahrscheinlichkeitskurve nur für einen sehr geringen Prozentsatz zutrifft.

Es ergibt sich somit, daß eine Kristallfläche, bei der die Anordnung der Ionen so oder ähnlich ist wie bei der Würfelfläche von Steinsalz, d. h. bei der positive und negative Ionen in regelmäßiger Abwechslung verteilt sind, nur eine geringe anziehende Wirkung auf die gelösten Ionen ausüben wird. Eine solche Fläche „enthält das ganze stöchiometrische Molekül", ist gewissermaßen „in sich abgesättigt". Tatsächlich ist beim Steinsalz die Würfelfläche in rein wässeriger Lösung die unbedingt vorherrschende Wachstumsfläche: sie zeichnet sich durch ausgesprochen minimale W.-G. aus.

Einen ganz entgegengesetzten Typus bildet die Oktaederfläche des Steinsalzes. Parallel zu ihr folgen Netzebenen aufeinander, die abwechselnd nur mit *Na*-Ionen oder nur mit *Cl*-Ionen besetzt sind. Beim fortschreitenden Wachstum setzen sich also abwechselnd positive und negative Schichten an. Besteht die Oberfläche in einem bestimmten Augenblick z. B. aus einer Schicht von *Na*-Ionen, so werden alle anprallenden *Cl*-Ionen stark angezogen, und zwar an jeder Stelle der Oberfläche, denn an einem Punkte der Oberfläche, der gerade in der Mitte zwischen zwei Ionen liegt, wo die Anziehungskraft also am geringsten ist, ist sie immer noch die Resultante aus den anziehenden Kräften dieser beiden Ionen, während sie bei der Würfelfläche in einem solchen Punkte gleich Null war. Überhaupt angezogen werden auch hier durchschnittlich die Hälfte der in der Zeiteinheit anprallenden Ionen, denn hier werden in zeitlicher Abwechslung entweder die positiven oder negativen Ionen angezogen. Aber der Prozentsatz von den Angezogenen, der auch festgehalten wird, ist bei der Oktaederfläche bedeutend größer, weil die Kraft hier in jedem Punkte der Oberfläche erheblich ist. Hieraus erklärt es sich, daß die Oktaederfläche beim Wachsen eines Steinsalzes in rein wässeriger Lösung nie auftritt, ihre W.-G. ist dafür viel zu groß[1]).

Die Würfelfläche und die Oktaederfläche des Steinsalzes bilden (innerhalb der Flächen mit kleinen Indizes!) zwei extreme Typen, zwischen denen namentlich bei komplizierteren Strukturen mannigfache Übergänge möglich sind. Es würde zu weit führen, an dieser Stelle näher auf Einzelbeispiele einzugehen. Hier sollte nur das Prinzip einer möglichen Deutung des Wachtumsvorganges auf Grund der Kosselschen Theorie mit wenigen Strichen skizziert werden.

Die beiden oben besprochenen Typen gehören beide zu den Flächen mit sehr kleinen Indizes, zwischen denen auf Grund der Bravaisschen Regel eine Wahl nicht möglich ist. Dagegen scheint mir für die allgemeine Seltenheit von Flächen mit höheren Indizes das Prinzip der abnehmenden Netzdichtigkeit mehr und mehr die ausschlaggebende Rolle zu spielen. Hand in Hand mit steigenden Indexzahlen und abnehmender Netzdichtigkeit nimmt die Entfernung zwischen den Gitterebenen einer Parallelschar, ihre Gitterkonstante, ab. Bei solchen Flächen ist es nicht mehr zulässig, für den Wachstumsvorgang nur die äußerste Gitterebene zu berücksichtigen, wie wir es oben gemacht haben. Vielmehr wirken hier mehrere Netzebenen zusammen, und es treten Überlegungen in den Vordergrund, wie sie Niggli neuerdings[1]) zur Erklärung des Verhaltens gewisser sogenannter Vizinalflächen angestellt hat. Bei solchen Flächen, bei denen mehrere parallele Netzebenen zu gleicher Zeit eine Wirkung nach außen ausüben, kann man a priori eine große W.-G. erwarten. So erklärt sich das Zutreffen der Bravaisschen Regel. Daß einzelne Flächen mit hohen Indizes trotzdem gelegentlich als „Vizinalflächen" in die Erscheinung treten, ist ein Problem für sich, dessen Behandlung ein näheres Eingehen auf die besonderen Verhältnisse in der Lösung erfordert, und hier nicht weiter erörtert werden kann[2]).

Diskussion.

Groß: Es wurde demonstriert, daß die

---

1) Allerdings tritt die Oktaederfläche auf, wenn man Steinsalz aus stark mit Harnstoff versetzter Lösung auskristallisieren läßt. Für diesen Einfluß läßt sich leicht eine Erklärung finden, wenn man etwa annimmt, daß die Harnstoffmoleküle an die stark elektrisch wirkenden Oktaederflächen adsorbiert werden, und sie so schützen. Leider spielen solche Beeinflussungen durch „Lösungsgenossen" gerade in der Natur eine große Rolle, und erschweren dadurch die Deutung der Kristalltracht bei den Mineralien.

1) P. Niggli, Zeitschr. f. anorgan. Chem. **110**, 55, 1920.

2) Die in dem vorliegenden Aufsatz kurz besprochenen Probleme sollen in einer ausführlichen Arbeit über Wachstum und Auflösung der Kristalle, die in der Zeitschr. f. Kristall. erscheinen wird, eingehend erörtert werden. Auch das Problem der Vizinalflächen wird dort diskutiert werden. Gerade die Rolle der äußeren Bedingungen bei Wachstum und Auflösung, auf die in dem vorliegenden Aufsatz gar nicht eingegangen werden konnte, ist von hervorragender Bedeutung für das Verständnis der Erfahrungstatsachen.

Kristallwachstums- und Lösungskörper auf prinzipiell gleiche Verteilung der Geschwindigkeitsvektoren des Wachstums und der Lösung hindeuten. Der Lösungsvorgang stellt jedoch nicht die genaue Umkehrung des Wachstums vor: Man kann Lösungskörper krummflächig oder ebenflächig begrenzt erhalten; der Wachstumskörper wächst stets ebenflächig mit wenigen kristallonomischen Flächen.

Valeton: Aus dem Prinzip der Korrelation von Wachstum und Auflösung ergibt sich tatsächlich, daß es unter gewissen Bedingungen möglich sein muß, eine krummflächige Wachstumsoberfläche zu erhalten. Ob dies praktisch gelingt, hängt aber noch wesentlich von den Versuchsbedingungen ab. Ich beabsichtige, in einer ausführlichen Publikation auf diese Frage näher einzugehen.

F. Rinne (Leipzig), Grundzüge des feinbaulichen Wesens der Kristalle[1]).

I. Einleitung: Leptonologie.

Stereochemie, Stereophysik und Kristallstrukturlehre verdienen in Ansehung ihrer nahen Verwandtschaft einen gemeinsamen Wissenschaftsnamen. Wenn man in dem Sinne die Elektronen, Atome, Ionen und Molekeln sie — wie oft erwünscht — zusammenfassend „Feinbauteilchen" oder international verständlich „Leptonen" (von λεπτός = fein, zart) nennt, so ist die Bezeichnung „Feinbaulehre" oder „Leptonologie" wohl zweckmäßig.

II. Kristallographie und Leptonologie.

Die Beziehungen der Kristallographie zur Leptonologie sind sachlich und geschichtlich sehr enge (Huygens, Haüy, Bravais, Schoenflies und Fedorow). Gab doch die Raumgittervorstellung Veranlassung zu den stets denkwürdigen Versuchen von Laue, Friedrich und Knipping, die Kristalle als Beugungsgitter für Röntgenstrahlen zu benutzen, wobei in den „Lauediagrammen" ein spektrales Symbol der Atomverteilung erzielt wurde. Es entstand zudem die Möglichkeit, auf physikalischem Wege exakte stereochemische Formeln aufzustellen. Nach dem Vorgange von W. H. und W. L. Bragg sind für eine allerdings noch kleine Zahl von Kristallarten solche „Stereogramme" bekannt geworden. Zeitverhältnisse und methodische Schwierigkeiten verhinderten einen weitumfassenden systematischen Einblick. Da ist denn jeder stützende Anhaltspunkt bei leptonischen Untersuchungen willkommen. Die morphologische Kristallographie stellt eine solche Helferin dar, sie ist in gewissem Sinne „Makrostereochemie", nicht, als ob der Kristall ein riesengroßes, dem submikrospischen konformes Molekül sei, es fehlt ihm ja die stets gleiche Form und das konstante Gewicht, wohl aber sind die Kristallgebilde stereochemische Symbole, insofern sie sichtbare und daher leicht studierbare Ausschnitte des betreffenden leptonischen Baues vorstellen: ihre Hauptflächen entsprechen von Atomen netzdicht besetzten Ebenenscharen, ihre Hauptkanten geben die Richtung stark besetzter Atomreihen an. Die morphologische Symmetrie ist ein Hinweis auf die Anordnung der Feinbauteilchen. So ist z. B. der Quarz ein Symbol der Pasteurschen sog. unsymmetrischen Molekülart, jeweils mit Rechts- oder Linksbau, während gewisse Zwillinge des Minerals dem racemischen Gemisch entsprechen. Einfache Führungspläne durch die kristallographischen Baustile sollten insbesondere dem Chemiker und Physiker die Übersicht der Kristallornamentik und damit der Feinbautypen erleichtern. Führt man zu dem Zwecke die kristallographische Formenwelt auf 5 Urformen Pedion (p); Pinakoid (pi); Sphenoid (s); Doma (d); Prisma (m) zurück, so läßt sich die Mannigfaltigkeit der sonstigen Makrostereochemie ableiten als Fälle rhythmischer Wiederholung der Urformen nach der 2-, 3-, 4- und 6-Zahl, also als Gruppierungen di-, tri-, tetra- und hexagyraler Art, wobei das trigyrale in Wirtelform und in oktantenweiser Durchdringung erscheinen muß. Grundsätzlich können die Rhythmen sich in einfacher (gyrischer) oder in einer aus Drehung und Spiegelung zusammengesetzten (gyroidischen) Art entwickeln. So ergeben sich in sehr übersichtlicher Weise als Typen der Anordnung 32 Kristallklassen entsprechend folgender Tabelle. Im leptonischen Sinne läßt sich diese Gruppierung durch Einführung der neuen Symmetriemotive einer Gleitdrehung (Schraubung) und einer Gleitspiegelung in feinbaulich festgelegter Art auseinanderteilen und zu Ende führen. (230 Raumgruppen.)

III. Kristalliner und „amorpher" Feinbau.

Das Leitmotiv auch der weiteren Darlegungen des Vortrages trat heraus in der Betonung des Umstandes, daß die Kristallwelt in vieler Beziehung vorbildliche Materie des Feinbaues ist, und oft sichtbar und deutlich zeigt, was bei

1) Auszug aus dem Vortrage auf der Versammlung deutscher Naturforscher und Ärzte in Nauheim, den 22. September 1920. Ausführlicheres und weiteres in einem kleinen Werke: F. Rinne, Die Kristalle als Vorbilder des feinbaulichen Wesens der Materie. Mit 90 Textfiguren. Berlin, Gebr. Bornträger, 1920.

Plan der 32 Kristallklassen.

Baustufen →	Gyrische Herleitung					Gyroidische Herleitung	
	1. Pediale Stufe	2. Pinakoidale Stufe	3. Sphenoidische Stufe	4. Domatische Stufe	5. Prismatische Stufe	1a. Pediale Stufe	4a. Sphenoidische Stufe
Urformen (triklines und monoklines System)	*p*	*pi*	*s*	*d*	*m*		
Digyraler Rhythmus der Urformen (rhombisches System)	(2*p*)	(2*pi*)	2*s*	2*d*	2*m*		
Trigyraler Rhythmus der Urformen (trigonales System)	3*p*	3*pi*	3*s*	3*d*	3*m*	$\underline{3}p$	$\underline{3}s$
Tetragyraler Rhythmus der Urformen (tetragonales System)	4*p*	4*pi*	4*s*	4*d*	4*m*	$\underline{4}p$	$\underline{4}s$
Hexagyraler Rhythmus der Urformen (hexagonales System)	6*p*	6*pi*	6*s*	6*d*	6*m*		
Isometrischer Rhythmus der Urformen (isometrisches System)	*ip*	*ipi*	*is*	*id*	*im*		

Atomen und Molekeln theoretisch erschlossen werden muß. Eine einheitliche feinbauliche Auffassung läßt sich auf alle Materie anwenden, in deren Mannigfaltigkeit die Kristalle nur als Spezialfälle einer allgemeinen Gesetzmäßigkeit stehen. Die Beschränkung ihrer Bautypen beruht auf der dreidimensionalen Periodizität der Raumgitter, die als ineinandergreifende Partikelsysteme nur di-, tri-, tetra- und hexagyralen Rhythmus zulassen. Die „amorphe" Materie ist im leptonischen Sinne nicht minder von morphologischer Regelmäßigkeit, und zwar ohne die Rhythmenbeschränkung des Kristallinen. Sie reagiert röntgenographisch im Debye-Scherrer-Diagramm daher wie ein äußerst zartes Kristallpulver[1]). Diese grundsätzlich gleiche feinbauliche Auffassung der Atome, Molekeln und Kristalle als stets regelmäßige „Stereonen" ist auch für die Anordnungen ihrer Elektronen anzunehmen, deren Stellung die polyedrische „Gestalt" der Atome markiert. In den Kristallen haben die Elektronenlagerungen je nach dem Kristallsystem und je nach spezieller und allgemeiner Lage im Gitter verschiedene Symmetrieanforderungen zu erfüllen, z. B. die 4 äußeren Elektronen des Kohlenstoffs im Diamanten andere als die des Kohlenstoffs im Graphit, bei dem überdies 2 verschiedene *C*-Symmetrien anzunehmen sind.

1) Die röntgenographische Interferenzbezeugung ist allerdings beim Amorphen zufolge weitläufiger Lagerung und größerer innerer leptonischer Beweglichkeit der Teilchen lichtschwächerer als beim Kristallisieren. Zur Verschwommenheit der Erscheinung trägt natürlich auch bei, wenn mehrere Molekelarten (wie bei gewöhnlichem Glase) zusammenwirken.

IV. Allgemeiner Grundzug des Feinbaus der Materie.

Die Kristalle bekunden als allgemeine Momente ihres Feinbaues: 1. Anisotropie der Form, der physikalischen und chemischen Verhältnisse sowie 2. Isostasie, die in Ansehung der leptonischen Bewegung als Isodynamostasie aufzufassen ist. Der Grundzug des Wesens der Einzelleptonen kann nicht anders sein. Auf ihre morphologischen gesetzmäßigen Richtungsverschiedenheiten weisen schon die üblichen Stereogramme der Atome mit ihren Aggregierungen von Kern und Elektronen, sowie der Molekeln hin. Lediglich durch wirre Lagerung wird diese gestaltliche und entsprechend ihre chemische und physikalische Anisotropie verdeckt und in Isotropie durch Mittelwerte verwandelt. Eine Isodynamostasie liegt im ganzen Wesen der Leptonen als kinetischer Einheiten begründet.

Bei aller Materie stellen sich die feinbaulichen Konstellationen also dar als anisotrope Stabilitätsgebilde. Ihr Gefüge ist durch anziehende und abstoßende richtende Kräfte bedingt. Die spezielle Anordnung der Teilchen einer Aggregation ist jeweils eine Komplexwirkung aller ihrer Partikeln aufeinander. Die Valenz- und Koordinationsbindestriche der chemischen Formeln sind somit keine wirklich bestehenden linear oder in Kurvenform gerichteten Einzelkraftstränge, vielmehr formelle Zeichen des vektoriell stärkeren oder schwächeren Zusammenhaltes im Kraftfelde. Ihr didaktischer Wert als vereinfachte, gewissermaßen projektionsmäßige Darlegung verwickelter räumlicher Verhältnisse wird dadurch nicht herabgesetzt. Im übrigen

wirken die Aggregationseinheiten auch in gegenseitiger Wechselwirkung unter Betätigung eines anisotropen Kraftbereiches aufeinander ein; es bildet sich außer dem endoleptonischen ein zwischenleptonisches Kraftfeld aus, unter dessen Einfluß Änderungen der inneren Konstellation, Vereinigung vorher getrennter gleicher oder ungleicher Partikel zu höheren Einheiten oder Zergliederungen und Austausch, also die Fülle von teils mehr physikalischen teils ausgeprägt chemischen Vorgängen im Ausdruck des Strebens nach neuer feinbaulicher Stabilität sich vollziehen. Der Einsatz eines physikalischen Feldes, z. B. ein Wandel der Temperatur oder des Druckes kann ganz entsprechende Vorgänge auslösen.

V. Die Metamorphosenreihe der Materie.

Den breitesten Überblick über die Verhältnisse der feinbaulichen Aggregation unter dem Einfluß anziehender und abstoßender anisotrop richtender Kräfte gewährt die Betrachtung der Zustandsänderungen, die sich allgemein an den Stoffen beim Wechsel physikalischer Verhältnisse ereignen und in der Aufeinanderfolge der gasigen, flüssigen und kristallin festen Form bekunden. Zwischenstufen des Flüssigen und Kristallinen sind die sogenannten flüssigen Kristalle; ihre Teilchen orientieren sich durch zwischenleptonische Feldwirkung zueinander, eventuell stellen sie sich mit einer Richtung parallel, so daß die Anisotropie, die ihre Moleküle wie alle Moleküle besitzen, optisch regelmäßig zur Geltung kommt; sie entbehren aber der dreidimensionalen Raumgitterperiodizität wahrer Kristalle. Man kann sie „Fastkristalle" nennen.

Noch größere Anklänge und somit weitere Übergänge im Bau der Einzelleptonen zu den Kristallen liegen insofern im Bereiche der Wahrscheinlichkeit, als hochatomzählige Molekeln, wie etwa von Eiweiß (vielleicht auch hochelektronenzählige Atome), mit ihren vielen gleichartigen Baugruppen, letztere zum Teil oder ganz, in Raumgitterordnung führen könnten. Sie würden einen entsprechenden Debye-Scherrer-Kristalleffekt veranlassen im abgestuften Gegensatz zu gewöhnlichen Molekeln, deren geringe Zahl gleichartiger Baugruppen in der kinetischen Einheit eine Raumgitterordnung nicht ermöglicht.

Unterabteilungen mit jeweils bestimmtem großquantigen Energieinhalt gliedern die Aggregatzustände in Modifikationen. Bei den Kristallen sind es solche des Polymorphismus. Es lassen sich dabei Polytypie (Modifikationen mit gleich dimensioniertem Elementarkörper und gleicher Anzahl der darin enthaltenen Atome aber verschiedener Gruppierung), homöomere Modifikationen (z. B. α-, β-Quarz; α-, β-Borazit, die ohne Einsturz des Feinbaus ineinander überführbar sind) und allomere Modifikationen (die im Feinbauvolumen und inneren Gefüge wesentlich abweichen) unterscheiden. Für diese Gruppe sind Anatas, Rutil und Brookit (alle drei TiO_2), sowie Diamant und Graphit gute Beispiele[1]).

VI. Allgemeine tektonische Gliederung des Feinbaues der Kristalle.

Wie in der Schreibweise chemischer Formeln etwa Hg; $NaCl$; $(NH_4)Cl$; $(C_6H_4)(COOH)(NH_2)$ sich die chemische Einheit und ihre Gliederung heraushebt, so wird man auch im feinbaulichen Kristallschema insbesondere versuchen müssen, entsprechende Radikale aufzufinden. Andrerseits ist nicht zu verkennen, daß die kinetischen Einheiten bei der Errichtung höherer chemischer Komplexe wie bei der Aggregierung von Atomen zum Molekül und somit wohl auch zur Kristalleinheit feinbaulich unkenntlich oder sogar verbraucht werden können. So ist es ja z. B. bei der Bildung eines Moleküls H_2 aus seinen Atomen. Man kann in den figürlichen Schematen nicht mehr demonstrieren, welches der beiden Elektronen vorher mit einem bestimmten Kern atomistisch zusammengehörte. Daher wird man von vornherein sich auch nicht auf eine starre Auffassung des Feingefüges der Kristalle festlegen, sondern in der riesigen Fülle der chemischen Umstände mannigfache Abstufungen erwarten. Die Annahme eines etwa rein atomistischen oder eines reinen Koordinationsbaues sind voraussichtlich zu allgemein.

Bekanntermaßen tritt die gesuchte Gliederung in den Baugruppen (geometrischen Radikalen oder Leptylen) der Strukturschemata oft deutlich heraus; solche knäuelartige Anhäufungen haben gelegentlich selbst Molekelcharakter. So beim TiO_2 vom Anatas und Rutil. Insbesondere werden manche Konstitutionen organischer Körper im Kristallfeinbau zur Geltung kommen. Unterstützt wird die Erkenntnis solcher mehr oder minder selbständiger Leptyle durch Betrachtung der Spaltbarkeit, die planen Baulücken folgt und keine starken chemischen Bindungen durchschneidet (E. Schiebold), der Zwillingsgleichung (A. Johnsen) und der selektiven Reflexion im Ultrarot (Cl. Schäfer). Man wird darnach eine Mannigfaltigkeit von Kristallgittern zu unterscheiden haben: Atomgitter, Atomionengitter, Radikalgitter und Molekelgitter, denen noch

1) Enantiomorphe Ausbildungen, wie Rechts- und Linksquarz haben im Gegensatz zu verschiedenen Modifikationen gleichen Energieinhalt, sind also unter jedem Wechsel der Umstände von gleicher Stabilität, mithin nicht ineinander überführbar, und stellen wahre Beispiele lediglich physikalischer Isomerie dar.

die gemischten Gitter (z. B. Kalkspat, Zeolithe) zuzufügen sind. Wie die Verhältnisse jeweils im einzelnen liegen, müssen röntgenographische Untersuchungen feststellen; eine Überraschung ist z. B., daß der Olivin (Mg_2SiO_4) nicht Mg und (SiO_4)-Leptyle aufweist, sondern ein $MgO \cdot MgO \cdot SiO_2$-Gitter vorstellt (L. Berndt).

VII. Zusammenhang der Feinbauteile bei Mischkristallen.

In den Mischkristallen vikariieren Atome bzw. Atomgruppen im Feinbau je nach ihrer Formähnlichkeit (die mit der Temperatur oder dem stofflichen Felde wechselt) in mehr oder minder weitgehendem Maße (Mischungslücken). Es handelt sich also um regelmäßige Verkettung wie bei chemischen Verbindungen. Andererseits folgt ihre Zusammensetzung praktisch dem Wandel der Verhältnisse in stetiger Weise, also wie bei Mischungen, d. h. indes, in Wirklichkeit vollzieht sich die Quantelung atomistisch, also in sehr kleinen Sprüngen. Somit erscheinen die Mischkristalle als bedeutsame Überbrückungen des Begriffes der chemischen Verbindungen und der Gemische. Es lassen sich diese Vorstellungen sogar ausdehnen auf die gesetzmäßigen Verwachsungen ungleichartiger kristallisierter Stoffe etwa von Jodkalium und dem Glimmersilikat oder andere orientierte Zusammenhänge, bei denen die Vermischung bis zur kolloidalen Feinheit geht.

VIII. Morphotropie und Isotypie.

Die Änderung einer Aggregierung durch chemische Substitution deutet sich in der Wandlung der Kristallgestalt an, die von Schülern des Vortragenden unter seiner und E. Schiebolds Leitung am Eisenkies ($FeSS$) und Kobaltglanz ($CoAsS$), sowie am Olivin [$(Mg, Fe)_2SiO_4$] feinbaulich verfolgt ist (M. Mechling, L. Berndt). Ebenso wurde im Leipziger Mineralogischen Institut durch H. Espig röntgenographisch erforscht, welche Veränderungen der Feinbau von Kohlenstoff (als Diamant) und von Silizium erfährt, wenn diese Elemente sich zur chemischen Verbindung CSi (Karborund) zusammenfinden. Es tritt deutlich heraus, daß Stabilitätsmomente ausschlaggebend sind. Gewisse Bautypen, wie sie ja schon in den Kristallsystemen, Kristallklassen vorliegen, erscheinen hier in bestimmten miteinander in einfachem morphologischen Zusammenhang stehenden Formengruppen unbekümmert um die spezielle chemische Zusammensetzung, insbesondere bei einfach aufgebauten Stoffen, wie Elementen, Oxyden, Sulfiden u. a. Die Kristallsysteme und Kristallklassen sind allgemeine, die Formengruppen spezielle Fälle der Isotypie. Sie hat auch im feinbaulichen Sinne ihre Bedeutung als Stabilitätsmoment. (Vgl. das häufige Auftreten von flächenzentrierten würfeligen Elementarkörpern, von Tetraedom und tetraederartigen Gruppierungen, die Verwandtschaft des Steinsalz- und Kalkspatbaus, die Beziehung der Elektronenzahl von Edelgasen zu isometrischen Kristallformen u. a. m.)

IX. Kristallwachstum, Kristallauflösung und chemische Umsetzung kristalliner Systeme.

Die gewissermaßen biologische Betätigung der Anisotropie der Materie und ihres Strebens nach Gleichgewicht bei Störung der Isodynamostasie bekundet sich bei den Kristallen wiederum vorbildlich in den Erscheinungen des Wachstums, der Auflösung und der chemischen Umsetzungen.

Das Wachstum ist auf die Wirkung des sich zwischen Kristall und Umgebung einstellenden leptonischen Feldes zurückzuführen. Die einfachen Annahmen Nigglis, daß die Wachstumsgeschwindigkeiten proportional der Dicke der valenzmäßig ungesättigten Oberflächenzone unter den verschiedenen Kristallflächen zu setzen seien, ist als Arbeitshypothese ein guter Schritt voran. Allerdings wird hier mit anziehenden und abstoßenden, richtenden Kräften in Komplexwirkung aller beteiligten (auch in der Lösung befindlichen) Partikeln zu rechnen sein, sonst wäre keine Möglichkeit gegeben, den so auffälligen Einfluß der Lösungsgenossen auf die Kristallgestalt zu erklären. Der Wirkungsbereich um jedes Teilchen erstreckt sich bei diesem Vorgange sicherlich nicht nur auf seine nächsten Nachbarn, sondern in einer allerdings noch nicht sicher bekannten Art der Abklingung auch auf seine weitere Umgebung. Im Streben nach Gleichgewicht wird jeweils eine bestimmte Kristalltracht als Stabilitätsform des anisotropen Wachstumsvorgangs erreicht. Im übrigen ist es von großem Interesse, daß sich der Aggregationszwang des Wachstums nicht nur zwischen Kristall und Lösung, sondern auch zwischen Kristall und seinesgleichen geltend macht. Trotz der Starrheit des Materials waltet das Bestreben, sich zu größeren Individuen zusammenzuscharen, also die Raumgitter benachbarter Einheiten im Akte der Sammelkristallisation parallel zu richten und aneinander zu gliedern (erhitztes Flußeisen, Platin, Wolfram, Marmorisierung von Kalkstein usw.).

Die Erscheinungen der Kristallauflösung entsprechen denen des Wachstums; ihre Vektorfiguren sind in den Hauptzügen konform. Im übrigen trifft auch die Analogie zu, daß es

sich je nach Art des stofflichen Feldes um eine jeweils bestimmte Wechselwirkung zwischen Kristall und seiner Umgebung handelt. Recht anschaulich zeigt das eine Arbeit von Burckhardt am Anhydrit; das Mineral liefert je nach dem Lösungsmittel verschiedene Lösungskörper. Die gerichtete Wechselwirkung zwischen Kristall und dem ihn umgebenden und von außen nach innen zerstörenden Medium führt zu einem Gleichgewichtskörper bestimmter kristallographischer Form, die sich bei Weiterauflösung bis zur Unsichtbarkeit konform verkleinert.

Ganz entsprechend vollziehen sich die chemischen Umsetzungen als Akte anisotroper und nach Gleichgewicht strebender Kräfte bei kristallinen Systemen, wie z. B. die mikroskopische Betrachtung beim Aufschluß von Silikaten, wie Turmalin, an jedem Kristallindividuum zeigt, wenn es in die schickliche Kugelform gebracht wird. In besonders beachtenswerten Fällen vollziehen sich chemische Umsetzungen an kristallinen Systemen unter Erhaltung ihres feinbaulichen Charakters (Kristallab- und -umbau). Es lassen sich dann, so bei Brucit, Zeolithen, Glimmern u. a., die Kristalle förmlich wie Organismen chemisch-anatomisch präparieren, indem z. B. ohne Einsturz des Kristallgebäudes Wasser aus $Mg(OH)_2$ oder dem Hydrosilikat des Zeoliths oder sogar sämtliche basische Stoffe entfernt werden. Ausschlaggebend für solche und andere chemische Änderungen ist die feinbauliche Konstruktion, die mehr oder minder abschirmend wirken kann und so die Erhaltung von geometrischen Radikalen im Kristallbau begünstigt.

Einen Analogieanhalt für den Feinverlauf chemischer Reaktionen an Kristallen geben die Beobachtungen des Umbaus von Modifikationen, etwa am Quarz. Man erkennt an der Veränderung der Brechungsexponenten des β-Quarzes einen besonders kräftigen Absturz der Zahlenkurve nahe vor dem Umschlage, wohl zum Zeichen, daß sich zunächst ein Spannungszustand feinbaulicher Deformation einstellt, der sich mehr und mehr verstärkt und schließlich durch die nun schnell verlaufende Reaktion ausgelöst wird.

Nach solchen und manchen anderen Erfahrungen an kristallinen Stoffen wird man sich vorstellen dürfen, daß auch die chemischen Reaktionen zwischen Einzelmolekülen durch das Vorspiel eines mehr oder minder entwickelten prächemischen Aktes eingeleitet werden, der sich als Spannungsdeformation des Baus der Partikel kennzeichnet; ihm folgt die ruckweise Auslösung und Einstellung zu neuer chemischer Stabilität. Eine schwer prächemisch deformierbar leptonische Art, wie sie z. B. bei rund um einen Atomkern wohl nach kristallographischer Isodynamostasie verteilten Elektronen anzunehmen ist, macht eine Nichtgeneigtheit zu chemischen Umsetzungen verständlich, so bei Edelgasen die Nullwertigkeit. Körper, welche zwar prächemisch kräftig auf andere einwirken, aber wegen zu geringer eigener feinbaulicher Beeinflußbarkeit sich nicht chemisch umsetzen, spielen die Rolle von Katalysatoren.

Diskussion.

Kohlschütter weist auf von ihm erhaltenes Beobachtungsmaterial hin, in welchem eine weitere Stufe im gesetzmäßigen Ab- bzw. Umbau von Kristallen zutage tritt. Sie ist dadurch gekennzeichnet, daß die chemische Reaktion zu dispersen Produkten regelmäßiger Beschaffenheit führt deren Teilchen in der Form des ursprünglichen Kristalls zusammengehalten werden, aber bereits soweit voneinander gelockert sind, daß sie sich ohne weiteres zu kolloiden Lösungen entsprechender Dispersität zerteilen lassen. Eine derartige Pseudomorphose entspricht Zuständen, die umgekehrt als Vorstufen bei der Sammelkristallisation entstehen können. Teilchen sind orientiert, ohne dem Raumgitterverband eingefügt zu sein.

W. Lenz (Rostock), Beitrag zum Verständnis der magnetischen Erscheinungen in festen Körpern.

Die festen paramagnetischen Salze zeigen überraschenderweise die gleiche Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität X wie die paramagnetischen Gase, d. h. es gilt das Curiesche Gesetz $X \cdot T = \text{const.}$ Kamerlingh-Onnes und Oosterhuis haben die Gültigkeit dieses Gesetzes bis zur Temperatur des flüssigen Wasserstoffs an einer Reihe von Salzen hohen Kristallwassergehalts mit großer Genauigkeit bestätigt gefunden. Wir haben es zweifellos dabei mit einer ganz elementaren Gesetzmäßigkeit zu tun, und es dürfte hier der Schlüssel zum Verständnis der viel verwickelteren ferromagnetischen Erscheinungen liegen, für die das sogen. Weisssche Eigenfeld ja immerhin nur rein phänomenologische Fingerzeige bietet.

Die beiden bisherigen auf Weiss zurückgehenden Erklärungsversuche des Curieschen Gesetzes bei festen paramagnetischen Körpern müssen als durchaus unzulänglich bezeichnet werden. Der eine geht bekanntlich von der gänzlich verfehlten Vorstellung aus, daß die Moleküle im Kristall ebenso frei drehbar seien wie im Gas, und es muß in Verwunderung versetzen, daß dieser Gedanke, an-

gesichts unserer heutigen Kenntnis des Kristallbaues bis in die letzte Zeit in der Literatur hat diskutiert werden können. Bei dem zweiten beachtenswerteren Erklärungsversuch geht Weiss[1]) von der Vorstellung aus, daß die Elementarmagnete nur Schwingungen um feste Gleichgewichtslagen ausführen. Er gelangt so zwar tatsächlich zum Curieschen Gesetz, doch zeigte Stern[2]) kürzlich, daß das Ergebnis seiner Rechnung mit seinen Voraussetzungen nicht im Einklang ist, wie dies auch ohne Rechnung leicht eingesehen werden kann; es ist damit nur eine schwach temperaturabhängige Suszeptibilität verträglich.

Zum Zustandekommen des Curieschen Gesetzes scheint also die Annahme freier Drehbarkeit der Magnete unerläßlich zu sein; und da das Kristallgefüge eine freie Drehung der Moleküle verbietet, so wird man eine freie Drehbarkeit der Atome denken. Aber auch diese Annahme ist mit unserer Auffassung der Kristallstruktur unverträglich, indem wir mit Born annehmen müssen, daß die Symmetrie des Kristalls schon in derjenigen des Atoms seiner Struktur und räumlichen Lage nach vorgebildet ist.

Daher möchte ich dem Begriff der freien Drehbarkeit eine abgeänderte Fassung geben, die mir durch die Weissschen Beobachtungen an Magnetit und Pyrrhotin nahegelegt scheint, und die den Erfordernissen der Kristallstruktur angepaßt ist. Bekanntlich gehört es zum Kristallzustand der genannten Mineralien, daß sie spontan gesättigt magnetisiert sind. Durch angelegte äußere Felder ist es praktisch zwar nicht möglich, diese Magnetisierung dem Betrage nach merklich zu verändern, doch kann ihre Richtung geändert werden, indem bei Magnetit der Kristallsymmetrie entsprechend ein Umklappen um je 90^0, bei Pyrrhotin um je 60^0 beobachtet wird[3]). Für die Richtung der elementaren Magnete gibt es also jeweils mehrere kristallsymmetrisch bestimmte gleichwertige Lagen[4]), und man wird annehmen dürfen, daß im allgemeinen zu jeder Lage zumindest noch die entgegengesetzte gleichberechtigt ist. Wenn man also auch die freie Drehbarkeit der Elementarmagnete leugnen muß, so ist aus Obigem doch zu entnehmen, daß sie die Fähigkeit besitzen, umzuklappen. Ich möchte zeigen, daß diese Voraussetzung genügt, um das Curiesche Gesetz zu erklären.

1) C. R. **156**, 1674, 1913.

2) Zeitschr. f. Physik 1, 147, 1920; vgl. insbesondere auch die dort befindlichen Literaturangaben.

3) P. Weiss, Journ. de Phys. S. 435, 1896 und S. 469 u. 829, 1905.

4) Man denke z. B. an die kubischen Atome.

Zu diesem Zweck denken wir uns zunächst idealisierend einen Stabmagneten vom magnetischen Moment μ an eine Gleichgewichtslage derart gebunden, daß seine potentielle Energie W für die Winkel α und $\pi - \alpha$ der Abweichung von der Nullage denselben Wert hat. Der in thermischer Wechselwirkung mit seiner Umgebung gedachte Magnet wird dann Schwingungs- und Umklappbewegungen ausführen und unabhängig von der Form von $W(\alpha)$ wegen der vorausgesetzten Symmetrie der Bindung die Lagen α und $\pi - \alpha$ gleich oft anzunehmen, d. h. einen verschwindenden zeitlichen Mittelwert des magnetischen Moments ergeben. In quantenmäßiger Behandlungsweise werden bestimmte Winkel α ausgezeichnet sein, unter ihnen auf jeden Fall $\alpha = o$ und $\alpha = \pi$. Besitzt W in den Zwischenlagen große Werte, wie man im Hinblick auf die Kristallstruktur annehmen muß, so werden diese Lagen sehr selten erreicht, die Umklappung geschieht also sehr selten, und der Magnet befindet sich fast ausschließlich in den beiden ausgezeichneten Lagen, und zwar durchschnittlich gleich lange in jeder derselben. Mit Anlegung eines äußeren Magnetfeldes H, das der Einfachheit halber die Richtung der Nullage haben möge, verschwindet jedoch diese Gleichberechtigung, und man hat nach dem Boltzmannschen Satz bei der Temperatur T ein resultierendes mittleres magnetisches Moment μ des Stabmagneten:

$$\bar{\mu} = \mu \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{e^a + e^{-a}}; \quad a = \frac{\mu H}{kT}.$$

Für hinreichend kleine Werte von a geht dies über in

$$\bar{\mu} = \frac{\mu^2 H}{kT},$$

d. h. wir erhalten das Curiesche Gesetz. Offenbar wird hierin nur der Zahlenfaktor geändert, wenn man den Kristallsymmetrien entsprechend 6 (Würfel) oder mehr gleichberechtigte Lagen zuläßt. Es möge nochmals darauf hingewiesen werden, daß unser Ergebnis unabhängig von der Häufigkeit der Umklappungen ist und nur voraussetzt, daß die mittlere Verweilzeit des Atoms, mit dem ja ein Elementarmagnet fest verbunden zu denken ist, in jeder der Lagen klein ist gegenüber der Beobachtungszeit.

Daß überhaupt Umklappbewegungen der Atome im festen Körper stattfinden, ergibt sich aus der bei der Selbst- und Fremddiffusion beobachteten Tatsache des Platzwechsels benachbarter Atome. Wir müssen uns die Auffassung bilden, daß im festen Körper bei jeder Temperatur partielle Schmelzvorgänge stattfinden, davon herrührend, daß zufällig an

einer Stelle eine große Energieanhäufung entsteht. Indessen sind diese Vorgänge sehr stark temperaturabhängig und können bei den in Frage kommenden tiefen Temperaturen wohl praktisch als verschwunden angesehen werden. Doch wird beim Platzwechsel offenbar das Schmelzen eines ganzen Elementargebiets verlangt[1]), und es ist nicht unwahrscheinlich, daß die viel einfacheren Umklappvorgänge selbst bei der Temperatur des flüssigen Wasserstoffes in den untersuchten Salzen hohen Kristallwassergehalts noch in genügender Häufigkeit auftreten. Bei zunehmender Verlangsamung der Umklappungen muß eine Verzögerung in der Einstellung des mittleren magnetischen Moments, also der Suszeptibilität, erfolgen, und es wäre interessant zu wissen, ob bei den tiefsten Temperaturen der Versuche von Kamerlingh-Onnes und Oosterhuis nicht schon Andeutungen solcher Verzögerungen beobachtet werden können.

Bei den ferromagnetischen Körpern ist neben der Temperaturabhängigkeit der Suszeptibilität vor allem die Tatsache der spontanen Magnetisierung zu erklären, wie sie bei Magnetit und Pyrrhotin beobachtet wird. (Der unmagnetische Zustand gewöhnlichen Eisens ist nach Weiss durch mikrokristalline Unordnung vorgetäuscht.) Nimmt man an, daß im ferromagnetischen Körper die potentielle Energie eines Atoms (Elementarmagnets) gegenüber seinen Nachbarn in der Nullage eine andere ist als in der π-Lage, so entsteht eine natürliche zum Kristallzustand gehörige Gerichtetheit der Atome und daher spontane Magnetisierung. Die magnetischen Eigenschaften der Ferromagnetika werden dadurch auf nichtmagnetische Kräfte zurückgeführt in Übereinstimmung mit der Auffassung von Weiss, der durch Rechnung und Versuch überzeugend dargetan hat, daß das von ihm eingeführte und die Verhältnisse in großen Zügen gut darstellende Eigenfeld nichtmagnetischer Natur ist. Es ist zu hoffen, daß es gelingt, auf dem angedeuteten Weg die Eigenschaften der Ferromagnetika zu erklären.

1) Der Temperaturverlauf der Platzwechselkonstante scheint hierfür zu sprechen.

W. Pauli jr. (München), Quantentheorie und Magneton.

§ 1. Bohrsches und Weißsches Magneton.

Wie schon seit langem bekannt, besteht zwischen der Quanthentheorie des Magnetismus und den Beobachtungen die folgende Diskrepanz. Theoretisch ist zu fordern, daß das gesamte Impulsmoment $\mathfrak{N}$ der Elektronen eines Atoms oder Moleküls ein Multiplum von $\frac{h}{2\pi}$ ist:

$$\mathfrak{N} = \frac{nh}{2\pi}. \qquad (1)$$

Das magnetische Moment μ ergibt sich daraus durch Multiplikation mit der halben spezifischen Ladung η des Elektrons:

$$\mu = \frac{1}{2}\eta\mathfrak{N} = n \cdot \frac{\eta h}{4\pi}. \qquad (2)$$

Die magnetischen Momente pro Mol bzw. Grammatom müssen deshalb für alle Substanzen Multipla einer bestimmten Einheit sein, die wir Bohrsches Magneton nennen wollen. Sie ist gegeben durch

$$\mu_B = \frac{\eta h}{4\pi} L \qquad (3)$$

(L = Loschmidtsche Zahl für das Mol). Ihr numerischer Wert ist 5584 C.G.S.-Einheiten. Weiß[1]) dagegen faßte seine Versuchsergebnisse dahin zusammen, daß zwar tatsächlich alle magnetischen Momente Multipla einer bestimmten Einheit seien, diese aber den Betrag habe 1123,5; das „Weißsche Magneton" hat hiernach einen fast genau fünfmal kleineren Wert als das Bohrsche Magneton.

Zur Beurteilung dieses Ergebnisses möchten wir zunächst die Aufmerksamkeit auf folgende Umstände lenken. Erstens haben sich Unterschreitungen des Bohrschen Magnetons nur bei ferromagnetischen festen Körpern und tiefen Temperaturen gezeigt. Gerade in diesem Fall sind solche Unterschreitungen aber leicht verständlich, wenn man entgegen Weiß annimmt, daß bei der Sättigungsmagnetisierung die magnetischen Achsen im Gitter nicht alle parallel gerichtet sind. Zweitens treten in Lösungen oft sehr große Abweichungen von der Ganzzahligkeit auf, und drittens scheint die Meßgenauigkeit nicht genügend groß zu sein, um die Ganzzahligkeit der Magnetonenzahl sicher nachzuweisen, wenn diese, wie bei den meisten Substanzen, Werte zwischen 10 und 30 annimmt. Wir sind deshalb sehr geneigt, dem Weißschen Magneton keine Realität zuzuschreiben.

Wenn man aber die größere Bohrsche Einheit zugrunde legt, ist die Meßgenauigkeit vollständig ausreichend, um die Frage nach der Ganzzahligkeit der Magnetonenzahlen zu entscheiden und es bleibt die Frage bestehen: Warum sind die gemessenen Zahlen nicht Multipla des Bohrschen Magnetons? Nun erfordert der Magnetismus des festen Aggregat-

1) Diese Zeitschr. **12**, 935, 1911.

zustandes, da die Atome hier nicht frei drehbar sind, eine besondere Theorie, die den Gegenstand des Vortrages von Herrn Dr. Lenz gebildet hat und auf die jetzt nicht weiter eingegangen werden soll. In Lösungen andrerseits werden die Verhältnisse durch das Vorhandensein des starken elektrischen Feldes der Wasserdipole, eventuell durch Bildung von Hydraten und Solvaten sehr kompliziert. Wir wollen also im folgenden bloß den Paramagnetismus von Gasen betrachten. Die einzigen der vielen untersuchten Gase, die sich als paramagnetisch erwiesen haben, sind O_2 und NO. Weiß und Piccard[1]) weisen auf Grund ihrer Messungen dem NO 9, dem O_2 14 Magnetonen zu. Auf die Bohrsche Einheit umgerechnet, gibt das für NO

$$p = 1{,}8,$$

für O_2

$$p = 2{,}8$$

Magnetonen. Die Messung von Soné[2]) an Sauerstoff gibt einen übereinstimmenden Wert. Es ist nun unsere Aufgabe, diese Zahlen theoretisch zu deuten.

§ 2. Der Zahlenfaktor der Langevinschen Formel.

Wir bemerken vor allem, daß für die Berechnung des magnetischen Momentes μ aus der beobachteten Suszeptibilität χ die Langevinsche Formel wesentlich ist. Wenn wir statt der Suszeptibilität den Molmagnetismus χ_m einführen, lautet sie

$$\chi_m = \frac{\mu^2}{3RT}, \tag{4}$$

also

$$\mu = \sqrt{3RC}, \tag{5}$$

wenn $C = \chi_m T$ die beobachtete Curiesche Konstante der Substanz ist. Der Zahlenfaktor $\frac{1}{3}$ kommt auf folgende Weise zustande. Aus dem Maxwellschen Verteilungsgesetz für die Richtungen der magnetischen Achsen, die wir charakterisieren durch den Winkel ϑ, den sie mit der Richtung des äußeren Magnetfeldes einschließen, folgt nach einfacher Rechnung[3]) für das tatsächlich vorhandene Gesamtmoment $\mathfrak{M}$ pro Mol:

$$\mathfrak{M} = \chi_m H = \mu \cdot \frac{\mu H}{RT} \cdot \overline{\cos^2 \vartheta}, \tag{6}$$

wenn wir Glieder mit höheren Potenzen von H vernachlässigen. Kann nun ϑ kontinuierlich alle Werte annehmen, dann ist $\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{3}$, und man kommt zum Langevinschen Zahlenfaktor. Nach der Quantentheorie ist das jedoch nicht der Fall, vielmehr kann $\cos \vartheta$ nur die rationalen Werte

$$\cos \vartheta = \pm \frac{k}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots n \tag{7}$$

annehmen. n ist die Quantenzahl des Drehimpulses, und zugleich die Zahl der Magnetonen. Den Wert $k = 0$ haben wir mit Bohr[1]) ausgeschlossen.

Der Mittelwert $\overline{\cos^2 \vartheta}$ wird dann statt $\frac{1}{3}$ für $n = 1$, 1 für $n = 2$ $\frac{5}{8}$, allgemein

$$\overline{\cos^2 \vartheta} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)(2n+1)}{2n^2}. \tag{8}$$

Der nach (5) berechnete Wert ist also gar nicht das wirkliche magnetische Moment der Substanz. Wir wollen es das scheinbare magnetische Moment nennen und entsprechend auch eine scheinbare Magnetonenzahl p einführen durch die Relation

$$p = \frac{\sqrt{3RC}}{\mu_B} \tag{9}$$

Sie ist nach (6) und (8) als Funktion der wahren Magnetonenzahl n gegeben durch

$$p = n\sqrt{3\overline{\cos^2 \vartheta}} = \sqrt{\frac{1}{2}(n+1)(2n+1)}. \tag{10}$$

Für große n nähert sich p zwar asymptotisch dem Wert n, in Wirklichkeit ist n aber eine kleine Zahl.

§ 3. Moleküle mit Wärmerotation.

Wir haben bei unserer Ableitung stillschweigend vorausgesetzt, daß das Impulsmoment der Elektronen auch der Richtung nach konstant ist, oder besser gesagt, nur durch die Zusammenstöße verändert wird. Bei einatomigen Gasen ist dies sicher der Fall, leider ist aber kein einatomiges, paramagnetisches Gas bekannt[2]). Es wäre von größtem Interesse, die

1) Arch. de Genève **35**, 209, 340, 458, 1913; C. R. **155**, 1234, 1912. Über NO vgl. C. R. **157**, 916, 1913.
2) Phil. Mag. **39**, 305, 1920.
3) Dabei macht man passend von der Bemerkung Gebrauch, daß wegen der Kleinheit der Größe $\frac{\mu H}{RT}$ die Maxwellsche Verteilung $A e^{\frac{\mu H}{RT}\cos\vartheta} d\Omega$ durch $A\left(1 + \frac{\mu H}{RT}\cos\vartheta\right) d\Omega$ ersetzt werden kann.

1) D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skrifter, nat.-math. Abt. 8, Raekke IV, 1918, Part. II, S. 75. Vgl. auch die Dissertation von H. A. Kramers, S. 378.
2) Es könnte auch sein, daß die Statistik auf diesen Fall überhaupt nicht angewendet werden darf (vgl. unsere Bemerkung in der Zeitschr. f. Phys. **2**, 201, 1920).

Dämpfe der Alkalimetalle zu untersuchen. Um jetzt schon die Theorie an der Erfahrung prüfen zu können, müssen wir auch Molekülgase mit Wärmerotation in unsere Betrachtungen mit einbeziehen. Hier ist nun die Quantenstatistik in einer viel weniger angenehmen Lage als die klassische Statistik. Dieser ist es nämlich völlig gleichgültig, ob die Richtungen der magnetischen Achsen sich außer bei den Zusammenstößen selbst auch in der Zwischenzeit infolge der Wärmerotation zeitlich verändern oder nicht. Sie führt immer auf das Maxwellsche Verteilungsgesetz und auf den Faktor $\frac{1}{3}$ in der Langevinschen Formel wie es sein muß[1]). Bei der Quantenstatistik hängt jedoch das Ergebnis in gewisser Hinsicht vom Modell ab. Die einfachste Annahme, die man über ein zweiatomiges magnetisches Molekül machen kann, ist die, daß sein magnetisches Moment die Richtung der Verbindungslinie der Kerne (Figurenachse) hat. Wir haben es dann mit einem Kreisel zu tun. Dieser Fall läßt sich vollständig durchrechnen, führt aber zu einem Ergebnis, das der Erfahrung widerspricht. Nicht nur die scheinbare Magnetonenzahl kommt unrichtig heraus, sondern es ergeben sich auch bei tiefen Temperaturen Abweichungen vom Curieschen Gesetz, die nach Messungen an Sauerstoff von Kamerlingh-Onnes und Perrier[2]) nicht vorhanden sind. Wir werden daher umgekehrt annehmen, daß in Wirklichkeit das magnetische Moment auf der Verbindungslinie der Kerne senkrecht steht.

Wenn man über die vorstehende Begründung hinausgehend annimmt, daß dauernd um die Figurenachse kein Impuls vorhanden ist, dann ist aus mechanischen Gründen eine Wärmerotation nur um eine Achse möglich, welche zur magnetischen parallel ist[3]). Die Richtung der magnetischen Achse ist jetzt wieder konstant und ihre Neigung gegen die Feldrichtung daher zu quanteln. Man wird zunächst im Zweifel sein, ob jetzt für die räumliche Quantelung die Quantenzahl des gesamten Drehimpulses oder die des Elektronenimpulses maßgebend ist. Die erstgenannte Annahme läßt sich jedoch nicht konsequent durchführen, denn das gesamte Impulsmoment kann auch Null sein, dann nämlich, wenn das Impulsmoment der Wärmerotation das der Elektronen gerade kompensiert. Machen wir jedoch die zweite Annahme, so werden wir wieder zu der bereits abgeleiteten Formel (10) für die scheinbare Magnetonenzahl geführt. Man sieht hiernach, daß die Begründung dieser Formel für Molekularmodelle noch wesentliche Lücken aufweist.

1) Am Beispiel der Kreiselmoleküle kann man dies im einzelnen rechnerisch verfolgen.

2) Leiden. Komm. 139d, S. 49, Anm. 1.

3) Auf diesen Umstand hat mich schon vor längerer Zeit Herr Prof. Schrödinger brieflich aufmerksam gemacht, wofür ich ihm zu Dank verpflichtet bin.

§ 4. Prüfung durch die Erfahrung. Folgerungen für den Molekülbau.

Wir wenden jetzt also unsere Formel auf den Magnetismus von NO und O_2 an. Es ergibt sich nach (10) für $n = 1$:

$$p = \sqrt{3} = 1{,}732 \quad | \quad \text{beob. } NO \ 1{,}8,$$

für $n = 2$:

$$p = \sqrt{\frac{15}{2}} = 2{,}739 \quad | \quad \text{beob. } O_2 \ 2{,}8.$$

Die Übereinstimmung mit den beobachteten Werten ist wohl als genügend anzusehen angesichts der Schwierigkeit der magnetischen Messungen. Wir möchten also als gesichertes Ergebnis betrachten: Sauerstoff hat ein zweiquantiges, Stickoxyd ein einquantiges Moment senkrecht zur Figurenachse.

Es drängt sich die Vermutung auf, daß das neutrale O-Atom ein einquantiges Moment besitzt und im Molekül O_2 zwei O-Atome in solcher Weise zusammentreten, daß sich ihre Momente nicht kompensieren, sondern addieren. Ferner ist zu vermuten, daß die Atome im NO-Molekül ungeladen sind. Dies wird dadurch nahegelegt, daß die heteropolaren Gase CO, CO_2 diamagnetisch sind. Die Ionen des Sauerstoffes scheinen also kein magnetisches Moment zu haben. Durch eine Untersuchung, ob NO für ultrarotes Licht durchlässig ist oder nicht, ließe sich unsere Vermutung prüfen[1]).

1) Anm. bei der Korr. Herr Geheimrat Rubens war so freundlich, mich darauf aufmerksam zu machen, daß er gemeinsam mit H. v. Wartenberg eine solche Untersuchung ausgeführt hat (Verh. d. D. Phys. Ges. **13**, 796, 1911). Es zeigt sich bei der langwelligen Strahlung der Quecksilberlampe eine Absorption von 12 bis 15 Proz. bei NO. Unsere Vermutung bezüglich NO ist also nicht zutreffend.

P. P. Ewald (München), Abweichungen vom Braggschen Reflexionsgesetz der Röntgenstrahlen.

Es ist erstaunlich, wie die Lauesche Theorie vom Jahr 1912 bis heute allen Anforderungen, die die ungeheuer verfeinerte experimentelle Technik gestellt hat, genügte. Erst in der allerletzten Zeit haben die Präzisionsmessungen in Lund (Stenström, Hjalmar) kleine Abweichungen vom Braggschen Reflexionsgesetz,

einer der Folgerungen aus der Laueschen Theorie ergeben. Dabei ist der Ansatz der Dipolschwingungen, der in der Theorie von 1912 gemacht wird, dynamisch unmöglich und muß, wie ich in meiner Habilitationsschrift gezeigt habe, durch einen ganz anderen, viel verwickelteren, ersetzt werden. Diese erweiterte Theorie führt u. a. zu der Aussage, daß kleine Abweichungen vom Braggschen Reflexionsgesetz vorhanden sein müssen, welche allerdings erst bei außerordentlich exakten Messungen bemerkbar werden.

Für den Vergleich dieser Abweichungen mit den von Herrn Hjalmar festgestellten verweise ich hier auf Zeitschr. f. Phys. **2**, 332, 1920. Als Ergebnis möchte ich nur angeben, daß der von Herrn Hjalmar gefundene Effekt mit der theoretisch zu fordernden Abweichung in gutem Einklang steht. Die Abhängigkeit von der Ordnung der Reflexion, seine absolute Größe und die Tatsache, daß die Abweichungen bisher nur an Kristallen mit besonders großer Netzebenenentfernung auftraten, läßt sich auf Grund der Theorie einsehen. Mit der Abweichung ist eine endliche Linienbreite verbunden, worüber aber noch keine Messungen vorliegen. Die genaue Theorie ist erforderlich, um Aufschluß über den Intensitätsverlauf innerhalb und beiderseits von der Linie zu geben. Doch fragen wir, ob es möglich ist, direkt physikalisch-anschaulich einzusehen, warum die Linienmitte, also der Ort der besten Ausbildung, von der Lage abweicht, welche durch das Braggsche Gesetz vorgeschrieben wird.

Wir betrachten dazu erst das Kreuzgitterspektrum, das von einer Netzebene ausgesandt wird. Die Huyghenssche Konstruktion zeigt, daß es ein beiderseits der Netzebene symmetrisches Feld ist, das im wesentlichen aus einer Reihe von ebenen Wellen besteht. Unter ihnen befinden sich eine zur einfallenden Welle gleich gerichtete und die durch Spiegelung aus ihr hervorgehende. Ist E die Amplitude der primären, so sei $\varrho E e^{i\chi}$ die gemeinsame komplexe Amplitude jener beiden Wellen. Von den weiteren Wellen des Kreuzgitterspektrums sehen wir ab, unter der Annahme, daß sie nicht durch phasengleiche Anhäufung in ihrem Lauf durch den Kristall verstärkt werden. Der Faktor $e^{i\chi}$ ist zugefügt, weil die Phase der von der Netzebene ausgehenden Wellen nicht die gleiche zu sein braucht, wie die der einfallenden Welle. Durch Energiebetrachtung läßt sich ein Zusammenhang zwischen Reflexionsvermögen ϱ und Phase χ der austretenden Welle gewinnen. Da nämlich die Energie der einfallenden Welle sich in der durchgelassenen und der reflektierten wiederfinden muß, muß für die komplexen Amplituden dieser Wellen gelten:

$$E^2 = |E + \varrho E e^{i}\chi|^2 + |\varrho E e^{i}\chi|^2.$$

Hieraus folgt:

$$\cos\chi = -\varrho.$$

Nun ist das Reflexionsvermögen ϱ der einzelnen Netzebene klein gegen 1, und so sind die von der Netzebene kommenden Wellen um etwas mehr als 90° gegen die einfallende in der Phase versetzt. Außerdem sehen wir aus der Huyghensschen Konstruktion, daß im cm² der Wellenfläche um so mehr Kugelwellen zusammenfließen, je schräger die Welle ausgesandt wird. Wir werden deshalb

$$\varrho = \frac{\varDelta}{\sin\vartheta}$$

setzen, wo $\varDelta$ von der Natur der Dipole, der Maschenweite der Netzebene und der Wellenlänge, nicht aber von der Richtung ϑ abhängt. Geben wir in Näherung $e^{i}\chi$ den Wert i, so ist die Amplitude der von der Netzebene ausgehenden Wellen je

$$E\frac{i\varDelta}{\sin\vartheta},$$

und ein Strahl von der Amplitude E des Primärstrahls wird nach Durchgang durch die Netzebene eine Amplitude haben

$$E\left(1 + \frac{i\varDelta}{\sin\vartheta}\right) \sim E \cdot e^{\frac{i\varDelta}{\sin\vartheta}}.$$

Die Welle erleidet an jeder Netzebene einen Phasensprung.

Welches wird unter Berücksichtigung dieses Umstandes die Richtung sein, in welcher die von aufeinanderfolgenden Netzebenen reflektierten Strahlen sich maximal verstärken? Der Phasenunterschied beträgt nicht mehr wie bei der gewöhnlichen Braggschen Betrachtung

$$e^{2\pi i\frac{2d\sin\vartheta}{\lambda}},$$

sondern

$$e^{2\pi i\frac{2d\sin\vartheta}{\lambda} + 2i\frac{\varDelta}{\sin\vartheta}},$$

wegen des zweimaligen Durchganges der einen Welle durch die obere Netzebene. Maximale Verstärkung beider und somit aller reflektierten Strahlen tritt ein, wenn

$$\frac{2d\sin\vartheta}{\lambda} + \frac{\varDelta}{\pi\sin\vartheta} = \text{einer ganzen Zahl } n$$

ist. Bedeutet ϑ_0 den Winkel der Braggschen Formel:

$$\frac{2d\sin\vartheta_0}{\lambda} = n,$$

so gibt Entwicklung nach der kleinen Differenz $\vartheta - \vartheta_0$

$$\frac{2d}{\lambda}\cos\vartheta_0(\vartheta-\vartheta_0)=-\frac{\Delta}{\pi\sin\vartheta_0}$$

oder

$$\vartheta-\vartheta_0=-\frac{2d}{\lambda}\frac{\Delta}{\pi}\frac{1}{n^2}\operatorname{tg}\vartheta.$$

Diese Betrachtung liefert bei festem λ die richtigen Abweichungen von der Braggschen Formel und deckt die physikalische Ursache der Verschiebung auf in dem Phasensprung beim Durchtritt durch die einzelne Netzebene.

Die endliche Linienbreite hingegen läßt sich nur erklären, wenn nicht nur die geometrische Bedingung für günstigste Interferenz aufgesucht, sondern auch die gegenseitige Beeinflussung der Netzebenen berücksichtigt wird. Dies ist auch erforderlich, um über die interessante Intensitätsverteilung Aufschluß zu gewinnen, welche dann vorhanden ist, wenn außer dem primären und reflektierten noch ein weiterer Interferenzstrahl auftritt (vgl. die Diskussionsbemerkung von Wagner zum Vortrag Hertz).

Diskussion.

Laue: Es ist mit Freude zu begrüßen, daß Herrn Ewalds Theorie nunmehr durch die Präzisionsmessungen auch für die experimentelle Forschung bedeutungsvoll wird.

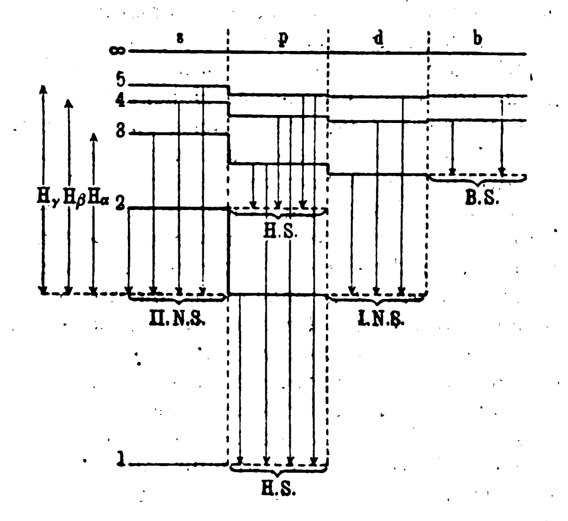
Debye: Wissen Sie vielleicht Genaueres über den Übergang in die gewöhnliche Reflexion, welcher mit zunehmender Wellenlänge auftreten muß?

Ewald: Hierüber kann ich ohne nähere Rechnung keine Auskunft geben. Aus dem Bündel von Interferenzstrahlen, die von einem einfallenden Röntgenstrahl abgespalten werden, legen sich bei zunehmender Wellenlänge mehr und mehr an den Rand des Kristalls an und degenerieren zu inhomogenen Wellen. Deren Einfluß muß in dem fraglichen Grenzgebiet mitberücksichtigt werden, während für optische Wellen ihre Intensität so gering ist, daß sie vernachlässigt werden können.

A. Sommerfeld (München), Schwebende Fragen der Atomphysik.

Schwebende Fragen der Atomphysik gibt es mehr als Fragen, die sich gesetzt haben und durch Beantwortung geklärt sind. Die Quelle, aus der Antworten von hinreichender Präzision zu schöpfen sind, ist bekanntlich die Spektroskopie, für das Atom die der Serien- und Röntgenspektren, für die Molekel die der Bandenspektren. Ich möchte zunächst ein spektroskopisches Schema aus der zweiten Auflage meines Buches „Atombau und Spektrallinien" vorführen, an das sich solche Fragen und Antworten anschließen.

1. Wasserstoff- und Wasserstoffunähnliche Spektren. Wir wissen, daß die Emission einer Spektrallinie auftritt beim Übergange des Atoms aus einem höheren in ein tieferes Energieniveau. Die ausgestrahlte Frequenz ist proportional der Energiestufe. Die Energiestufen ordnen sich in verschiedene Treppen oder Reihen, die wir als die scharfe Reihe, Hauptreihe, diffuse Reihe, Bergmannreihe (s, p, d, b) bezeichnen. Sie haben alle unendlich viele Stufen und endigen alle im Energieniveau ∞, welches der unendlichen Entfernung vom Atom entspricht. Die Stufennummer bedeutet die Quantenzahl m. Diese zerlegt sich in zwei Quantenzahlen, eine feste „azimutale" und eine variable „radiale", $m = n + n' \cdot n$ ist der Reihe nach gleich 1, 2, 3, 4 für die s-, p-, d-, b-Reihe



Die Figur zeigt maßstäblich die Gesamtheit der Energiestufen von *Na*. (Die von Herrn J. Franck in seinem allgemeinen Vortrage benutzten Schemata geben dasselbe, zum Teil in noch übersichtlicherer Form. Was in meinen Augen für die hier gewählte Darstellung spricht, ist nur der Umstand, daß hier die Energiedifferenzen unter dem uns geläufigen Bilde von Höhenunterschieden erscheinen.) Die Linienemissionen führen stets von einer höheren zu einer niederen Stufe, und zwar wegen des Auswahlprinzips in der Regel von einer höheren Stufe der einen Treppe nach einer niederen Stufe einer benachbarten Treppe. Um diese Übergänge einzeichnen zu können, sind einzelne Energiestufen nötigenfalls nach rechts und links punktiert verlängert, z. B. die Grundstufe des ganzen Systems, die niederste s-Stufe, nach rechts hin in dem Bereich der p-Treppe. So entsteht die

Hauptserie beim Übergang von irgendeiner p-Stufe nach der niedersten s-Stufe, also von mp nach $1s$ (eine Hauptserie zweiter Art führt von mp nach $2s$); die I. oder diffuse Nebenserie entsteht beim Übergange von einer d-Stufe nach der niedersten p-Stufe, also von md nach $2p$ usw. Die Länge der Pfeile bedeutet allemal die Schwingungszahl der emittierten Linie.

Die Verschiedenheit der Stufenhöhen gleicher Quantenzahl wird bewirkt durch das innere Atomfeld, d. h. durch die Abweichung von dem reinen Coulombschen Felde, hervorgerufen durch die Anordnung und Bewegung der inneratomaren Elektronen. Gehen wir zum Fall des Wasserstoffes über, so wird die im allgemeinen von links nach rechts abfallende Stufenfolge merklich gerade gestreckt; wir haben dann

$$ms = mp = md = mb = -\frac{R}{m^2}.$$

Der Ursprung der sichtbaren Balmerlinien ist links in der Figur vermerkt.

Ich sagte, daß sich die Stufen merklich gerade strecken. Ein kleiner Höhenunterschied relativistischen Ursprungs bleibt auch beim Wasserstoff noch bestehen und gibt Anlaß zur Feinstruktur der Balmerlinien; zu dem bekannten Dublett, dessen eine Linie übrigens theoretisch noch aus zwei Komponenten bestehen muß. Auch diese Feinstruktur ist aus unserer Figur abzulesen: z. B. entsprechen die drei Komponenten von H_α den drei Übergängen: $3d \rightarrow 2p$, $3s \rightarrow 2p$ (erste Dublettlinie) und $3p \rightarrow 2s$ (zweite Dublettlinie). Man erkennt hieraus, daß die Wasserstoff-Feinstruktur der Nichtwasserstoff-Grobstruktur entspricht. Für die Nicht-Wasserstoff-Feinstruktur, also z. B. für die Dubletts der Alkalien, gibt es beim Wasserstoff kein Analogon. Wir müßten uns die p-Stufen der Figur und ähnlich die d-Stufen jede nochmals unterteilt denken, um der Dublettstruktur der Na-Linien im Rahmen unseres Bildes Rechnung zu tragen.

Für die modellmäßige Bedeutung dieser Unterstufen ist bisher noch keine befriedigende Erklärung gegeben. Wir erwarten sie von der Ausführung der Gedanken, die Bohr in seinem Berliner Vortrag (Zeitschr. f. Phys. **2**, Heft 5) gegeben hat. Daß wir es hierbei mit ganz neuen Dingen zu tun haben, zeigt insbesondere der anomale Zeemaneffekt, der an das Vorhandensein einer solchen feineren Unterteilung der Energiestufen gebunden ist.

2. Zur Frage der kubischen Elektronenanordnungen. Die Annahme flacher Ringe, die wir in den ersten Stadien unserer Atombauvorstellungen machten, war gewiß nur eine provisorische. Viel ansprechender ist die Vorstellung der mit Elektronen besetzten Kuben. Wir hoffen, daß es Herrn Landé gelingen wird oder gelungen sein möge, sie als dynamisch möglich zu erweisen. Bei den Alkalien hätten wir also ein äußeres Elektron, welches eine geschlossene kubische Achterschale in verschiedenen Bewegungszuständen umkreist.

Als Beleg für die Realität der Kubenanordnung sind bisher wesentlich nur die Tatsachen der Raumerfüllung (Molekularvolumen und Kompressibilität) herangezogen worden. Ich möchte darauf hinweisen, daß auch die Spektren uns etwas darüber aussagen können.

Wenn wir ein Atomfeld von Ringsymmetrie betrachten, finden wir als Potential desselben

$$V = \frac{e^2}{r}\left(c_1\left(\frac{a_1}{r}\right)^2 + c_2\left(\frac{a_1}{r}\right)^4\right). \quad (1)$$

Bei dieser Schreibweise sind die Atomfeldkonstanten c_1, c_2 dimensionslos; a_1 bedeutet den Radius des ersten Bohrschen Kreises bei Wasserstoff und ist als Vergleichslänge eingeführt. Setzen wir aber ein Atomfeld von kubischer Symmetrie voraus, so wird $c_1 = 0$ und bleibt als erster Koeffizient der mit r^{-5} behaftete c_2 stehen. Aus dem Atomfeld bestimmen sich die Konstanten der Spektren s, σ; p, π; ...., die in die Formeln von Rydberg-Ritz eingehen, und die wir unter dem Symbol a, α zusammenfassen. Der theoretische Ausdruck für diese ist[1])

$$a = \frac{1}{n^3}\,\frac{E}{e}\left(c_1 + \frac{5}{2}\,\frac{c_2}{n^4}\left(\frac{E}{e}\right)^2 - \frac{15}{4}\,\frac{c_1^2}{n^4}\,\frac{E}{e}\right) \quad (2)$$

$$R\alpha = -\frac{3}{2}\,\frac{1}{n^5}\left(c_2\,\frac{E}{e} - \frac{1}{2}\,c_1^2\right). \quad (3)$$

n ist die azimutale Quantenzahl, also z. B. 2 in der Hauptserie, R die Rydbergsche Zahl, E die Ladung des Atomrestes (des Kubus).

Man hätte also die Möglichkeit, indem man die z. B. aus dem Spektrum der Hauptserie entnommenen Werte von a und α benutzt, c_1 und c_2 zu berechnen und zu prüfen, ob $c_1 = 0$ ist, wie es für eine strenge Kubenanordnung sein sollte. Man würde dabei nicht $c_1 = 0$ finden, wie wir aus Folgendem mit einem Schlage sehen.

Wir vergleichen mit dem Spektrum des neutralen Atoms dasjenige des zugeordneten ionisierten Atoms; während für jenes $E = e$ ist, wird für dieses $E = 2e$. Zu Na gehört auf solche Weise Mg^+. Kossel und ich haben in unserer Arbeit über den spektroskopischen Verschiebungssatz, indem wir die Ringvorstellung

1) Leider sind die Vorzeichen in der entsprechenden Gl. (12) meines eingangs zitierten Buches (1. Aufl. S. 506, 2. Aufl. S. 509) falsch und entsprechend der obigen Gl. (2) abzuändern.

zugrunde legten und den Faktor E/e in Gleichung (2) im Auge hatten, behauptet, daß für das ionisierte Atom die Konstante a etwa doppelt so groß sein sollte, wie für das zugehörige neutrale Atom. Die numerische Nachprüfung hat dies inzwischen bestätigt. Unsere Erwartung ist aber nur berechtigt, wenn $c_1 \neq 0$ ist. Verschwindet c_1, so zeigt Gl. (2), daß a für das ionisierte Atom achtmal so groß sein müßte, wie für das neutrale. Davon ist in Wirklichkeit keine Rede.

Wir wollen daraus nicht schließen, daß die Kubenvorstellung falsch sei, sondern nur, daß die Kuben keine regelmäßigen Kuben bleiben. Sie werden durch die Wirkung des äußeren Elektrons verschoben und deformiert und wirken dann zusammen mit dem Kern, als Dipol und Quadrupol, deren Moment vom Abstande des äußeren Elektrons abhängt in die Ferne. Es ist klar, daß diese Glieder der potentiellen Energie zumal in größeren Entfernungen vom Atom mehr ins Gewicht fallen werden, als das eigentliche Kubusglied. Dadurch erklärt es sich, daß der Vergleich von Bogen- und Funkenspektren nicht den Faktor 8 erkennen läßt, sondern sich als Differenzwirkung des Dipol- und Kubus-Beitrages komplizierter verhält.

Bei genauerer Verfolgung dieses Weges scheint es mir möglich, aus den spektralen Atomfeldkonstanten bei Bogen- und Funkenspektren Aufschlüsse nicht sowohl über die Existenz als bei Voraussetzung der Existenz über die feineren Fragen nach der exzentrischen Verschiebung und der Deformation der Kuben zu gewinnen. Die Spektraltafeln würden sich dann auch hier als die eigentlichen Quellenbücher der Atomphysik bewähren.

Diskussion.

Born: Wenn ich Herrn Sommerfeld richtig verstanden habe, berücksichtigt er die Rückwirkung des äußeren Elektrons auf die inneren Elektronen nicht. Aber es ist wahrscheinlich und wird durch die Rechnungen von Herrn Landé über das He-Atom nahe gelegt, daß solche Rückwirkungen sehr wesentlich sind. Das äußere Elektron drückt die inneren von sich fort, dadurch entsteht eine Dipolwirkung des inneren Systems. Es kann sein, daß durch diesen Effekt die bei Herrn Sommerfeld fehlenden Glieder 3. Ordnung hervorgebracht werden.

Ernst Wagner (München), Über Spektraluntersuchungen an Röntgenstrahlen.

I. Präzisionsmessung der Quantenkonstante h.

In einer früher erschienenen Untersuchung[1]) konnte gezeigt werden, daß die Quantenbeziehung $eV = h\nu$ zwischen der Energie eV des Kathodenstrahls und der im kontinuierlichen Röntgenspektrum ausgestrahlten Maximalfrequenz ν zu einer Messung von h dienen kann, die zu einer Präzisionsmethode entwickelbar ist. Die damals nur ungenügend überwundene Schwierigkeit bestand in der unsicheren Art der Spannungsmessung durch Addition kleiner Teilspannungen. Die Messung der Spannung konnte nunmehr auf völlig sichere Grundlage gestellt werden durch Benutzung eines Hochspannungswiderstandes von ca. 2 Millionen Ohm, der in dankenswerter Weise von der physikalisch-technischen Reichsanstalt (Prof. Schering) zur Verfügung gestellt war. Sein Widerstandswert W war auf $^1/_{10}$ pro Mille genau angegeben. Der Manganindraht war auf 1 m langen Porzellanzylindern von 5 cm Durchmesser in einfacher Lage aufgewickelt. Die Spannungen V (zwischen 7000 und 10000 Volt) wurden nach dem Ohmschen Gesetz $V = I \cdot W$ bestimmt, indem I nach der Kompensationsmethode mittels eines geeichten Normalelements und eines Präzisionsrheostaten gemessen wurde. Auf diese Weise wurde das bei den eigentlichen Versuchen benutzte elektrostatische Voltmeter geeicht, und zwar im unmittelbaren Anschluß an den Versuch.

Die Wellenlängenmessung wurde wie früher an die durch Siegbahn genau ermittelten Wellenlängen der $K\alpha$-Linie des als Antikathode verwendeten Kupfers angeschlossen. Als Kristall diente Kalkspat, als Gitterkonstante der 100-Fläche wurde der Wert $3{,}029 \cdot 10^{-8}$ cm angenommen. Die Arbeitsmethode war die früher bewährte der Messung von Isochromaten mittels Ionisation. Bei drei Wellenlängen λ wurden folgende Minimumpotentiale V gefunden:

V	λ	h	Gewicht
Volt	10^{-8} cm	10^{-29} erg. sek.	
8008	1,538	653	3
9990	1,232	653	1
6845	1,794	651	1

Mittel: $h = 653 \pm 1$

1) Ann. d. Phys. 57, 401, 1918.

Hierbei ist für e der Millikansche Wert $4{,}774 \cdot 10^{-10}$ e. s. zugrunde gelegt.

Die Übereinstimmung wiederholter V-Messungen bei derselben Wellenlänge betrug $\pm$ 10 Volt. Die bei verschiedenen Wellenlängen erhaltenen h-Werte stimmen so gut überein, daß ihr Mittelwert auf 2 pro Mille zuverlässig erscheint.

Somit kann vorliegende Methode als eine Präzisionsmethode zur Messung von h gelten, jedenfalls sind die mit ihr erhaltenen Werte die bisher genauesten und direktesten Ermittelungen dieser fundamentalen Konstante.

Die nach der gleichen Methode bisher erhaltenen genauesten Werte sind:

Webster[1])	653 ± 1
Webster und Clark[2])	653 ± 1
Blake und Duane[3])	$655 \pm 0{,}5$
Wagner	653 ± 1

Die Bohrsche Theorie der Spektrallinien führt zu dem Wert: $654{,}5 \pm 1$.

Es ergibt sich hiernach eine vollkommene, innerhalb der Meßfehler liegende, Bestätigung des Bohrschen Wertes.

Zu den Arbeiten der amerikanischen Autoren seien zwei Bemerkungen erlaubt. Erstens fehlt eine Angabe über die Eichung des (stark belasteten) Hochspannungswiderstandes. Ferner war bei Blake und Duane zur Messung der Wellenlänge die Messung des Reflexionswinkels erforderlich. Hierbei ist die genaue Justierung der reflektierenden Kristallfläche in die Drehachse des Spektrometers wichtig. Diese geschah auf optischem Wege an der geschliffenen Oberfläche, nicht — wie nötig — mit Röntgenstrahlen an der wahren Kristallfläche. Beide Flächen können differieren. In diesem Fall wird h immer zu groß gemessen; vielleicht beruht hierauf der große h-Wert bei Blake-Duane.

II. Das kontinuierliche Röntgenspektrum in seiner Abhängigkeit vom Azimut zwischen Röntgenstrahl und Kathodenstrahl.

A. Die Minimumwellenlänge.

Nach W. Wiens Betrachtungen soll die Bremsstrahlung eine Impulsbreite besitzen, die in der Bremsrichtung ihren kleinsten Wert, entgegengesetzt zu der Bremsrichtung („rückläufig") ihren größten Wert annimmt (Dopplereffekt). Versuche über die azimute Härteverteilung der Primärstrahlung haben diesen Gedanken bestätigt. Die wichtige Frage, ob die Minimumwellenlänge im Spektrum eine solche Richtungsabhängigkeit zeigt, wurde durch folgende Versuchsanordnung entschieden:

Das Röntgenrohr (Fig. 1) enthielt die zwei Kathoden K_1 und K_2, die Antikathode A

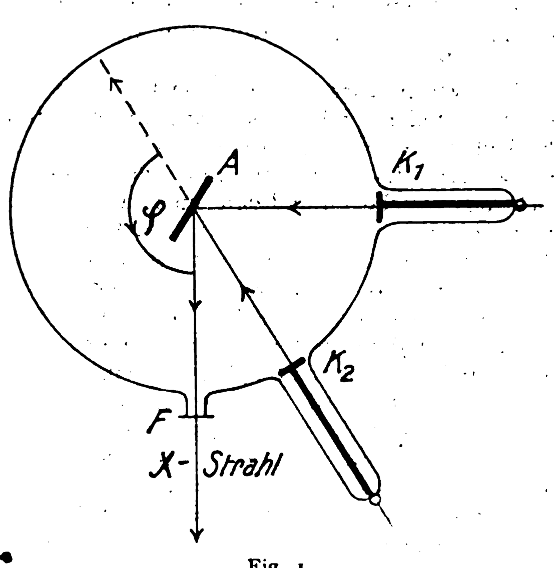


Fig. 1.

(Kupfer) und das Aluminiumfenster F, durch das die untersuchte x-Strahlung austrat, um in ein Braggsches Spektrometer zu gelangen. Die Azimute φ waren 90^0 (transversale Emission) und 150^0 (rückläufige Emission).

Um genau den gleichen Strahlenverlauf zu erhalten, wurden mittels eines Magneten die zwei Kathodenstrahlenbrennflecke auf denselben Punkt der Antikathode gelenkt und die Ebene der letzteren symmetrisch zu den beiden Kathodenstrahlrichtungen gestellt (vgl. Fig. 1).

Gearbeitet wurde mit der Isochromatenmethode bei zwei Wellenlängen λ, die an die $K\alpha$-Linien des Kupfers angeschlossen waren. Es ergaben sich folgende Minimumpotentiale V bei den Azimuten 90^0 und 150^0:

λ	V Volt	
10^{-8} cm	90^0	150^0
1,538	8008	8005
1,232	9990	9990

Nach dieser Tabelle besteht nicht der geringste Einfluß[1]) (innerhalb der sehr

1) Phys. Rev. 1916, p. 599.
2) Proc. Nat. Ac. Sc. 1917, p. 181.
3) Phys. Rev. 1917, p. 624.

1) Vgl. dagegen die abweichenden Resultate von G. Zecher, Ann. d. Phys. 63, 28, 1920.

kleinen Meßfehler) der Emissionsrichtung auf das Minimumpotential bzw. auf die Minimumwellenlänge bei konstantem Potential. Demnach ist auch der h-Wert, getreu seinem universellen Charakter, unabhängig von Dopplerschen Erscheinungen.

Nach den Wienschen Betrachtungen über letztere müßte für die Spannung von ca. 8000 Volt (entsprechend einer Kathodenstrahlgeschwindigkeit von ca. $^1/_5$ Lichtgeschwindigkeit) die Impulsbreite bei rückläufiger Emission um ca. 10 Proz. größer als bei transversaler sein; das würde eine Änderung des Minimumpotentials von ca. 800 Volt bedeuten!

B. Die spektrale Intensitätsverteilung.

Es wurde untersucht, ob schon bei den geringen angewandten Spannungen von ca. 9000 Volt ein Einfluß der Emissionsrichtung im Sinne des Dopplereffektes auf die mittlere Härte der Gesamtstrahlung bestand; ein solcher mußte sich bei unbeeinflußbarer Minimumwellenlänge in der spektralen Intensitätsverteilung äußern in dem Sinne, daß bei rückläufiger Emission das kurzwellige Spektralgebiet eine relativ schwächere Intensität zeigte als bei transversaler Emission.

In Fig. 2 sind die spektralen Intensitätsverteilungen wiedergegeben, die mit dem oben

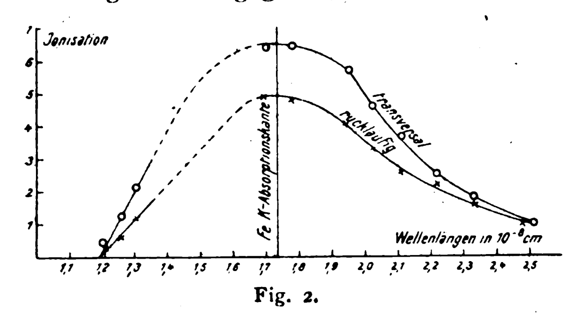


Fig. 2.

beschriebenen Röntgenrohr bei den zwei Azimuten von 90^0 und 150^0 bei 10 200 Volt gefunden wurden. An den punktierten Teilen der Kurven sind die starken K-Linien des Kupfers zu denken.

Ein Vergleich der Kurven zeigt den Richtungseinfluß deutlich und in der erwarteten Weise: während im langwelligen Gebiet die Intensitäten sich relativ wenig unterscheiden, steigt dieser relative Unterschied immer mehr an bis zur kurzwelligen gemeinsamen Spektralgrenze, wo sich die Intensitäten ungefähr wie 1 : 1,7 verhalten. Dieser Unterschied übertrifft bei weitem alle bisher an spektral nicht zerlegter Strahlung erhaltenen azimutalen Intensitätseinflüsse.

Die rückläufige Gesamtstrahlung erweist sich somit als die im Mittel weichere; und weiter als die bei allen Wellenlängen und daher in ihrer Gesamtintensität schwächere gegenüber der transversalen Strahlung.

Dieses Ergebnis der spektralen Untersuchung wurde erhärtet durch folgende Absorptionsversuche an der Primärstrahlung bei der Spannung von 8800 Volt, die die Linienstrahlung der Kupferantikathode noch nicht anregt.

Wurde einmal der kurzwellige Strahlenanteil nach kräftiger Abfilterung der weichen Bestandteile in Aluminium durch Ionisation (relativ) gemessen, so ergaben sich in den zwei Azimuten folgende Werte:

	Harter Strahlenanteil	
	transversal	rückläufig
Ionisation:	160	100

Andererseits konnte vermöge selektiver Absorption der Gesamtstrahlung in einem geeigneten Metallfilm (in unserem Fall: Eisen) der harte Strahlenanteil (links von der Linie Fe auf Fig. 2, welche die K-Absorptionswellenlänge angibt) relativ stark abgefiltert und der weiche Teil zur Messung gebracht werden. Diese ergab in relativer Ionisation:

	Weicher Strahlenanteil	
	transversal	rückläufig
Ionisation:	132	100

In Übereinstimmung mit dem spektralen Befund zeigt der Vergleich beider Meßpaare den überwiegenden Anteil harter Strahlung beim transversalen Azimut.

Untersuchungen bei einer größeren Zahl von Azimutwerten, insbesondere bei 0^0 und 180^0 sollen folgen.

Die Durchführung der Messungen im Teil I und II wurde mir durch die vozügliche Hilfeleistung des Herrn cand. H. Kulenkampff ermöglicht. Es sei ihm hierfür auch hier mein herzlichster Dank abgestattet.

III. Bemerkungen zur Theorie des kontinuierlichen Röntgenspektrums.

Die Tatsache einer scharfen Grenzfrequenz und deren präzise Quantenbeziehung zur Energie des Elektrons, sowie das Fehlen eines Dopplereffektes jener Frequenz lassen neuerdings die Unzulänglichkeit der Grundlagen der



Bremstheorie sehr fühlbar hervortreten. Auch die Sommerfeldsche Fassung[1]) der Bremstheorie, die lediglich in der Bestimmung der Bremsdauer eine Anleihe an die Quantentheorie macht, vermag von obigen Tatsachen keine Rechenschaft zu geben und dürfte auch um anderer, von neueren Experimenten nicht bestätigter Folgerungen willen nicht mehr aufrecht zu erhalten sein.

Andererseits lassen obige Tatsachen sowie die großen Erfolge in der Erklärung der Spektrallinien durch Bohr den Versuch wünschenswert erscheinen, die Theorie des kontinuierlichen Röntgenspektrums ausschließlich auf die Quantentheorie zu gründen. Letztere läßt den Mechanismus der Strahlungserzeugung leider im Dunkel, sie verknüpft lediglich formal eine beim Elektronenübergang zwischen zwei Quantenzuständen des Atoms stattgefundene Energieänderung ΔE mit einer monochromatischen Strahlung nach der Frequenzbedingung: $\Delta E = h \cdot \nu$. (Annahme I.)

Nach dieser Annahme möge auch die elementare Röntgenstrahlung in monochromatischer Weise entstehen, wenn das Kathodenstrahlelektron seine jeweilige ganze kinetische Energie $e \cdot V$ an das Atom abgibt, und zwar soll gelten: $\Delta E = e \cdot V = h \cdot \nu$, obwohl $e \cdot V$ als willkürliche äußere Energie hier nicht eigentlich als Energiedifferenz zwischen 2 vom Atombau allein bedingten Quantenzuständen erscheint.

Ferner soll die Energie und der Impuls des Elektrons sich restlos in der Röntgenstrahlung wiederfinden (Annahme II).

Annahme I erklärt ohne weiteres die Grenzfrequenz.

Auch das Fehlen eines Dopplereffektes von Frequenzen, die auf einem quantenhaften Elementarvorgang beruhen, scheint als Folgerung der eigenartigen Verknüpfung von Energie und Frequenz verständlich. Diese verlangt doch wohl, daß die Erzeugung der Strahlung erst dann beginnt, nachdem die Energieabgabe des Elektrons vollendet ist. Denn während der Energieabgabe verfügt der strahlungserzeugende Mechanismus noch nicht über die Kenntnis der die Frequenz bedingenden Größe der abzugebenden Gesamtenergie. Die Quantenstrahlung findet sonach statt, während das Elektron ruht (und selbst dann wohl nicht vermittels des Elektrons), während der Dopplereffekt eine rasch bewegte Strahlungsquelle voraussetzt. Der Dopplergedanke hat somit keinen Platz in der Theorie der Quantenstrahlung.

1) Brüssler Kongreß 1911.

Zur Erklärung des Kontinuums von Frequenzen müssen statistische Betrachtungen einsetzen über Energieverluste ΔV der Elektronen beim Durchqueren der Atome, welche von Arbeitsleistungen im Atom herstammen (Ionisierung, Sekundärstrahlung) und welche die für Röntgenstrahlung verfügbare Energie vermindern. Die weichsten Anteile der Strahlung veranlassen also Elektronen, welche die größten Energieverluste erlitten hatten. Soferne letztere bestimmte (quantenmäßig vom Atombau bedingte) Beträge sind, löste sich das „kontinuierliche" Spektrum für einen Mikrobeobachter in ein sehr dichtes Viellinienspektrum auf.

Die Intensitätsfrage, die Annahme II involviert, bringt freilich ernstliche Schwierigkeiten[1]). Es soll ja in jeder Elementarstrahlung die ganze jeweilige Energie des Elektrons $e \cdot V$ stecken. Erfahrungsgemäß beträgt aber die Energie des gesamten Spektrums nur ca. $^1/_{1000}$ von $e \cdot V$. Um dieser Schwierigkeit zu begegnen, müßte eine entsprechende Seltenheit derjenigen Elementarstrahlungen angenommen werden, die das Röntgenspektrum darstellen und die von Elektronen stammen, welche nach relativ kleinen Energieverlusten die Quantenemission verursachen. Und ferner müßte die Hauptenergie des Spektrums ($^{999}/_{1000}$) in den äußerst langwelligen Teil verlegt werden, der — wie wir wissen — sehr stark absorbierbar ist und darum schon innerhalb der Atome der Antikathode zurückgehalten wird, so daß er noch nicht als Strahlung zur Beobachtung kam, wohl aber als Grund für die starke Wärme der Antikathode angesehen werden könnte (wie bereits Herr Lenard vorgeschlagen hat), für die eine andere zureichende Erklärung fehlt. Nach dieser Anschauung müßten die Elektronen, die nach fast völligem Verlust ihrer Energie die extrem weiche Quantenstrahlung erzeugen, bei weitem die häufigsten sein. —

Eine Erklärung der Abhängigkeit der spektralen Energieverteilung vom Azimut des X-Strahls gegen den Kathodenstrahl (die im Sinne eines Dopplereffektes der mittleren Härte liegt und als eine Hauptstütze der Bremstheorie galt) gelingt, obwohl die elementare Quantenstrahlung selbst keinen Dopplereffekt zeigt, in einfacher Weise auf Grund der Annahme II in Verbindung mit einer statistischen und empirisch gesicherten Betrachtung über die Streuung der Elektronen und die hiermit verbundenen Energieverluste.

Annahme II sagt aus, daß die elementare

1) Es sind dies dieselben Schwierigkeiten, die Herr Mie in der Diskussion mit Recht betont hat.



Quantenstrahlung räumlich ungleichmäßig verteilt ist und nach dem Halbraum in der Richtung des Elektrons überwiegt. Was die Elektronenbewegungen betrifft, so ist bekannt, daß die am meisten durch Streuung aus der Kathodenstrahlachse abgelenkten Elektronen zugleich die im Mittel größten Energieverluste zeigen. Die Zahl und Energie von Elektronen wird daher in der Kathodenstrahlrichtung („vorwärts") größer sein als rückwärts. Damit ist obige Abhängigkeit erklärt. —

Diskussion.

W. Wien: Aus der Beobachtung folgt, daß das Röntgenspektrum bei einer bestimmten Wellenlänge nach kurzen Wellenlängen aufhört. Hiervon kann die Bremstheorie keine Rechenschaft geben. Andererseits ergeben sich aus diesen Folgerungen, die mit der Erfahrung übereinstimmen, wie die Größenordnung der Wellenlänge und die Wirkung, die der Vortragende eine Art Dopplereffekt nannte. Es dürfte daher nicht richtig sein, Quantentheorie oder Bremstheorie anzuwenden, sondern eine Vereinigung beider anzustreben wie es dem Korrespondenzprinzip von Bohr entspricht.

Franck: Trotz der gewiß ganz allgemein erwünschten Verkettung der Quantentheorie und der klassischen Theorie möchte ich doch mit dem Herrn Vortragenden annehmen, daß man das kontinuierliche Röntgenspektrum nach der Quantentheorie auf dieselbe Weise deuten kann wie die kontinuierlichen Spektren am Ende der optischen Serien. Hier haben wir, je nachdem, ob ein mehr äußeres oder inneres Elektron gerade vom getroffenen Atom losgerissen wird, die Grenzen aller möglichen Serien zwischen dem optischen und dem Röntgen-Gebiet zu berücksichtigen. Alle diese kontinuierlichen Spektren überlagern sich. Das von Lilienfeld beobachtete im Sichtbaren liegende Spektrum auf der Antikathode wäre hiernach das langwellige Ende des Röntgenspektrums.

Mie: Ich möchte darauf aufmerksam machen, daß man bei der Erklärung des kontinuierlichen Röntgenspektrums doch nicht ganz beliebige Annahmen darüber machen darf, in welcher Weise die Geschwindigkeiten der Elektronen sich ändern, wenn sie durch die Atome hindurchfliegen. In seinem wundervollen Buch: „Quantitatives über Kathodenstrahlen" gibt Lenard ganz genaue Angaben darüber, wie die Geschwindigkeiten beim Durchgang durch die Materie allmählich abnehmen und wieviel Elektronen bei jeder Geschwindigkeit ganz ausscheiden. Das Auffallende ist, daß die weit überwiegende Mehrheit bei Geschwindigkeiten ausscheidet, die nur sehr wenig unter der Anfangsgeschwindigkeit liegen.

Franck: Herrn Geheimrat Mie möchte ich erwidern, daß offenbar doch auch viele kleine Energieverluste der Schnellelektronen bei Zusammenstößen vorzukommen scheinen, was man aus der Ionisation durch diese Kathodenstrahlen und aus dem Auftreten langsamer Sekundärstrahlen im Gas schließen muß.

Pauli: Läßt sich aus den Versuchen ein Anhaltspunkt dafür gewinnen, ob der Elementarprozeß der Strahlung vollständig gerichtet ist?

Wagner: Über die räumliche Intensitätsverteilung der elementaren Quantenstrahlung im einzelnen sagt Annahme II nichts aus. Daß sie aber keine projektilartige — im Sinne der Einsteinschen Auffassung — sein kann, ist mit hoher Wahrscheinlichkeit aus dem Fehlen des Dopplereffektes der Grenzfrequenz wie folgt abzuleiten. Letztere ist unzweifelhaft durch die volle Energie des Kathodenstrahlelektrons bedingt. Da nun die Grenzfrequenz noch bei dem stark rückläufigen Azimut von 150° mit sehr merklicher Intensität ausgestrahlt wird, so könnte die Strahlung eine projektilartige nur dann sein, wenn eine große Streuung der Elektronen ohne den geringsten Energieverlust ein Vorgang von beträchtlicher Wahrscheinlichkeit wäre — was wohl abzulehnen ist.

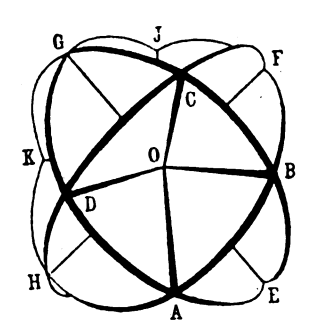
(Nicht vorgetragen wegen Zeitmangel.)

Um die Entstehung der Röntgenstrahlung beim Eindringen der Elektronen in immer tiefere Schichten der Antikathode experimentell zu verfolgen, wurde eine Kupferantikathode mit einem sehr dünnen Nickelüberzug versehen. Durch spektrale Zerlegung kann die in den beiden Metallen erregte K-Strahlung getrennt zur Beobachtung kommen. Hierbei zeigte sich die Durchdringung des Nickels deutlich am Auftreten der Kupferstrahlung. Die Intensität der letzteren nahm mit zunehmender Dicke des Nickelüberzugs ab, während die Stärke der Nickelstrahlung hierbei zunahm. Aus dem Vergleich zweier Isochromaten, die den Intensitätsverlauf der Kupferstrahlung mit wachsendem Potential darstellen, und insbesondere das Anregungspotential der K-Strahlung messen lassen einmal bei freiem, dann bei vernickeltem Kupfer, läßt

sich unter anderm folgern, daß Elektronen ohne Energieverlust die Nickelhaut durchqueren können. — Die mitgeteilte Methode bietet einen neuen Weg zur Erforschung des Elektronendurchgangs durch äußerst dünne Metallhäute, die frei nicht herstellbar sind und nicht haltbar wären, unter der starken Wärmewirkung der Kathodenstrahlung.

A. Landé (Frankfurt a. M.), Über Würfelatome.

Im Folgenden möchte ich das Ergebnis einiger Abschätzungen von Größenzusammenhängen zwischen universellen Konstanten und empirischen Atomeigenschaften auf Grund der Würfelhypothese[1]) mitteilen, welche in ihrer Gesamtheit zu dem Versuch ermutigen, durch exaktere Störungsrechnungen diese Abschätzungen auf festeren Boden zu stellen. Das Würfelatom sei ein System aus positivem Kern und 4 bzw. 8 Elektronen, bei dem die Gesamtheit der Elektronenbahnen in folgender Art die Bedingung der Würfelsymmetrie erfüllt, zunächst für vier Elektronen. Man denke sich durch den Atomkern 4 Ebnen gelegt, welche wie die 4 Ebnen eines regulären Tetraeders gegeneinander geneigt sind. Jedes der 4 Elektronen hat eine der 4 Ebnen zur Verfügung, um in ihr eine Kreisbahn (s. Figur) oder auch eine



Ellipsenbahn zu beschreiben in der Art, daß gewisse Koordinatenverknüpfungen dafür sorgen, daß diese Kreis- oder Ellipsenbahnen ein mechanisch mögliches System von räumlicher Symmetrie bilden, und dabei die Elektronen auf ihren einander kreuzenden Bahnen sich niemals in die Quere kommen. Man erhält auf diese Weise ein Modell für das Kohlenstoffatom (s. unten).

Eine Modifikation dieses Polyederbahnenmodells von vier Elektronen führt zu dem von Herrn Madelung und mir vorgeschlagenen Würfelatom aus acht Elektronen. Bei diesem soll nämlich hinter jedem der eben beschriebenen vier Elektronen ein zweites Elektron im Winkelabstand 75^0 laufen. Dieses Modell besitzt eine wesentlich geringere Abschirmungskonstante $s_8 = 2{,}486$ als ein ebner Ring von 8 Elektronen mit $s_8 = 2{,}805$, und hat dadurch eine wesentlich geringere potentielle Energie als ein ebner Achtring. Nimmt man an, mangels einer ausgebauten Theorie der quantenmäßig bevorzugten Zustände, daß die stabilste Elektronenanordnung um eine Kernladung $+ Z\varepsilon$ diejenige mit der kleinsten potentiellen Energie sei, so läßt sich beweisen, daß dann eine beliebige Zahl z von Elektronen, die nur kleiner als die Kernladungszahl Z sein soll, sich in lauter Würfelschalen von je 8 Elektronen aufteilt bis auf den außen an das Atom sich ansetzenden Rest der Division durch 8, wobei gegenseitige Störungen der Schalen nicht in Betracht gezogen sind. Obwohl das periodische System in Einzelheiten dieser Aussage widerspricht, nämlich erst eine innerste Schale von 2 Elektronen und später Schalen von 18 Elektronen verlangt, die vielleicht als Doppelschalen aufzufassen sind, wird doch der wesentliche Grundzug des Systems, die Sonderstellung der Zahl 8 in den kleinen Perioden, aus dem allgemeinen Prinzip der minimalen potentiellen Energie durch unsre Würfelbahnen verständlich.

Die Frage, ob die Würfelsymmetrie einer Elektronenschale durch Kreisbahnen oder, was dynamisch ebensogut möglich ist, durch Ellipsenbahnen im Würfelverband zustandekommt, mußte durch exakte Störungsrechnungen mit Berücksichtigung des Einflusses innerer und äußerer Elektronensphären entschieden werden. Da solche Störungsrechnungen noch nicht durchgeführt sind, bleibt nichts andres übrig, als sich auf anschauliche Betrachtungen zu stützen, die zu folgender durch ihre Anwendungen bestätigten These führen: „Im Normalzustand laufen die Elektronen der Würfelschalen auf zweiquantigen Ellipsen ($n = 1$, $n' = 1$), führt dann zu einer Reihe von numerischen Voraussagen über Atomeigenschaften, die sich allein aus universellen Konstanten und den beiden Quantenzahlen n und n' ergeben, wobei Störungseinflüsse stets nur schätzungsweise berücksichtigt sind.

1. Das positive *Na*-Ion. Die 8 Elektronen auf den von Herrn Madelung und mir angegebenen Würfelbahnen stellen eine um rund 900 kcal pro Mol stabilere Konfiguration dar als jede andere ebne oder räumliche Anordnung der 8 Elektronen um eine Zentral-

1) Ausführliche Mitteilung mit Literaturangaben siehe Zeitschr. f. Phys. 2, 380, 1920. Die Berechnungen über den Diamanten werden später publiziert.

ladung $Z = 9$. Der Radius des Na-Ions, Würfelschale im Ellipsenverband gemäß obiger These, berechnet sich im Aphelwert zu $0,605 \cdot 10^{-8}$ cm im Einklang mit Kristallgitterdaten. Fajans und Herzfeld finden nämlich unter der Annahme von 8 ruhenden Elektronen in den 8 Würfelecken den Wert $0,517 \cdot 10^{-8}$, ein Wert, der bei unsern dynamischen Ellipsenbahnen ungefähr auf den obigen universell berechneten Aphelwert zu vergrößern wäre.

2. Das neutrale Neon-Atom als Würfel ist selbst der stabilsten andern Konfiguration noch um rund 550 kcal pro Mol überlegen, woraus die chemische Trägheit des Ne verständlich wird. Dieselben 550 kcal bedeuten eine untere Grenze der Ionisierungsspannung des Ne von 23,8 Volt, während Messungen von Holst und Hopmanns und von Horton und Davies an Argon 15,1 bzw. 17 Volt ergaben.

3. Das negative Fluor-Ion steht gerade auf der Grenze, wo die Würfelanordnung beginnt unstabiler als andre Anordnungen zu werden. Freilich darf man sich gerade in solchen Grenzfällen, wo eine Reihe von Konfigurationen nahezu die gleiche Energie besitzen, nicht auf das Prinzip der minimalen potentiellen Energie als alleiniges Auswahlprinzip verlassen. Vielmehr wäre es möglich, daß hier auch der Impuls des Modells bei der Quantenauswahl der mechanisch möglichen Zustände mitspricht. In dieser Beziehung hätte dann unser Würfelmodell mit seinem Impuls Null eine Sonderstellung. Als Würfel-Ion im Ellipsenverband gemäß obiger These erhält das F'-Ion den Aphelradius $0,875 \cdot 10^{-8}$ cm, im Einklang mit dem Kristallgitterwert $0,75 \cdot 10^{-8}$ von Fajans und Herzfeld, der ungefähr in dem erforderlichen Maße vergrößert zu denken ist, wenn unsre dynamischen Bahnen statt ruhender Elektronen der Kristallgitterrechnung zugrunde gelegt werden. Wird ein positiver $H^{\cdot}$-Kern dem F'-Ion angelagert, so legt er sich aus Stabilitätsgründen dicht auf eine der Würfelecken auf, mit einem Kernabstand in 1. Näherung von $0,945 \cdot 10^{-8}$ cm. Aus dem Bandenspektrum des HF berechnet Herr A. Krazer den Wert $0,92 \cdot 10^{-8}$. Als Ionisierungsenergie des HF-Moleküls ergibt unsre universelle Berechnung in 1. Näherung 350 kcal, was in die Reihe 320, 311, 302 kcal für HCl, HBr, HI paßt, die Herr Born aus empirischen Daten abgeleitet hat.

4. Das doppelt negative O''-Ion kann aus Stabilitätsgründen keine Würfelschale aus 8 Elektronen besitzen. Dagegen wäre eine Doppelschale aus zwei konzentrisch ineinandergestellten Würfelschalen von je 4 Elektronen sehr wohl möglich, welche dann Kreisbahnen beschreiben müssen, weil sie sich als Ellipsenbahnen gegenseitig durchdringen müßten. Als Radius des O''-Ions ergibt sich dann $2,2 \cdot 10^{-8}$ cm (mehr als doppelt so groß wie der F'-Radius). Diese Größe bestätigt sich am H_2O-Molekül. Lagert man nämlich zwei $H^{\cdot}$-Kerne an ein O''-Ion an, und zwar aus Stabilitätsgründen auf zwei durch eine kurze Seitendiagonale getrennte Würfelecken, so gewinnt man dadurch mindestens 533 kcal pro Mol (unterer Grenzwert bei Vernachlässigung von Störungen), während Herr Born und Frl. Bormann für H_2S den Wert 716 kcal finden. Ferner erhält das H_2O-Modell in dieser Näherung drei Trägheitsmomente 4,05 und 9,1 und $11,5 \cdot 10^{-40}$, während Herr A. Eucken aus den Messungen von Rubens, Aschkinaß, E. v. Bahr (nach dem Planckschen Quantenansatz berichtigt) die zwei Trägheitsmomente 3,8 und $8,8 \cdot 10^{-40}$ ableitet.

5. Für das neutrale C-Atom, Würfelbahnen von 4 Elektronen im Ellipsenverband gemäß obiger These, berechnet sich der Aphelradius $1,3 \cdot 10^{-8}$, der seine Bestätigung in der absoluten Berechnung einiger Eigenschaften des Diamanten findet. Ein Weg zur Auffindung der Kohäsionskraft dieses neutralen Kristalls ergibt sich nämlich durch folgende Überlegung: Die Wechselwirkung zwischen zwei als gleich schnell gehende Uhren aufzufassenden C-Atomen hängt wesentlich von der dauernd oder doch wenigstens viele Perioden hindurch gleich bleibenden Phasendifferenz ihrer Elektronenbewegungen ab. Stellt man sich nun vor, daß in einem Diamantkristall die Phasen der einzelnen Atome nach Wahrscheinlichkeit verteilt wären, so würde auch die über eine Periode gemittelte Kraft zwischen je zwei Atomen von Ort zu Ort nach Zufall wechseln, und es könnte kein regelmäßiges Kristallgitter zustandekommen, sondern nur ein auf molekulare Entfernungen wechselndes Gefüge mit unregelmäßig verteilter Dichte, die überdies infolge der nach und nach eintretenden Phasenänderungen einzelner Atome langsamen Schwankungen unterworfen wäre. Der regelmäßige Aufbau auch der einatomigen Kristalle drängt vielmehr zu der Annahme, daß alle Elektronenbewegungsphasen irgendwie geordnet sind. Im einfachsten Fall (Diamant) mögen alle Atome die gleiche Phase besitzen[1]), oder anders ausgedrückt: Der ganze Kristall

1) Auf die als Einwand gegen die Existenz von Phasenbeziehungen erhobene Frage, wie sich denn bei der Bildung des Kristalls die Phasenbeziehungen herstellen sollen, ist zu antworten, daß man dies derselben Ursache zuzuschreiben hat, die auch bei der Bildung eines Bohr-Debyeschen H_2-Moleküls den beiden Elektronen die Phasendifferenz 180° geben soll und die allgemein bei der Aufnahme eines $p$ten Elektrons in einen Ring von $p - 1$-Elektronen aus einem regulären $p - 1$-Eck ein reguläres p-Eck herstellen soll.



wird als ein großes Molekül aufgefaßt in dem Sinne, daß die inneren Bewegungen dieses Moleküls dauernd regelmäßig ineinandergreifen, und zwar so, daß nicht nur die Atomkerne, sondern auch die einander entsprechenden Elektronen aller gleichen Atome in jedem Augenblick ein Gitter bilden, welches um das ruhende Gitter der Atomkerne umläuft.

Bei der Verfolgung dieses „Gittersynchronismus" findet man als Gitterpotential eine Funktion mit einem ersten und zweiten Differentialquotienten, d. h. die Bindungsenergie einer $C-C$-Bindung, den Gitterabstand und die Kompressibilität des Diamanten angenähert im Einklang mit der Erfahrung, unter alleiniger Benutzung universeller Konstanten und der beiden Quantenzahlen $n = 1$, $n' = 1$, wobei besonders berücksichtigt werden muß, daß die C-Atome durch die Wirkung ihrer Nachbarn in bestimmter Weise komprimiert werden.

Diskussion.

Nernst: Ich befürchte, daß sich Schwierigkeiten ergeben, wenn man Atome mit sehr wenigen Elektronen betrachtet (Lithiumion mit zwei Elektronen, Kristallisation von einatomigem Wasserstoff, Lithiumhydrit).

Born: Die Frage von Herrn Nernst möchte ich dadurch beantworten, daß ich ein Modell des festen Wasserstoffs angebe, das wenigstens theoretisch möglich ist. Man denke sich die Kerne in einem kubischen Gitter angeordnet; nun lege man ein Elektron in einen Kubus und spiegle dieses an den Wänden der Kuben so lange, bis in jedem Kubus ein Elektron liegt. Dann sind durch die Bewegung eines Elektrons die Bewegungen aller übrigen zwangsläufig bestimmt. Man hat also ein Einkörperproblem, das nach den Methoden der Quantentheorie gelöst werden kann. Dieser Ansatz, den Herr Landé früher auch auf Atommodelle angewandt hat, zeigt die prinzipielle Möglichkeit aus Atomen mit ganz wenig Elektronen kubische Gitter aufzubauen.

Bennewitz: Die von Herrn Landé vertretene Ansicht bevorzugter Orientierungen der Elementarteile im Kristall führt bei der Durchrechnung des Wasserstoffs unter Benutzung des Bohrschen Modells zur richtigen Verdampfungswärme, wenn man einen Aufbau im Sinne des soeben von Herrn Born angegebenen zugrunde legt. Die Heranziehung bevorzugter Orientierungen (Synchronismus) zur Erklärung der Kohäsionskräfte bietet gegenüber den von Herrn Debye geforderten Polarisationen durch Verschiebung den Vorteil, daß der Temperaturkoeffizient verständlich wird und man somit diese nur für den absoluten Nullpunkt gültigen Betrachtungen auf endliche Temperaturen ausdehnen kann.

Debye: Ich habe versucht, die Dimensionen der Elektronenwürfel sowie sie von Fajans und Herzfeld angegeben werden, zu benutzen, um die Intensitäten im Röntgenbild des NaF zu erklären. Es zeigte sich, daß keine Übereinstimmung zwischen Theorie und Experiment besteht.

Landé: Die großen Ionenradien sind nach meiner obigen These nur als Aphelwerte von Elipsenbahnen aufzufassen, wodurch vielleicht Vereinbarung mit Herrn Debyes Röntgenergebnissen möglich ist.

Born: Zu der Diskrepanz zwischen den Ergebnissen von Fajans und Herzfeld einerseits, Debye andrerseits, möchte ich bemerken, daß die ersteren die Methode der Gitterrechnung etwas auf die Spitze treiben, indem sie rein elektrostatisch rechnen. Man muß dagegen einwenden, daß auf diese Weise nicht die einfachsten elastischen Eigenschaften, wie die Verschiebungselastizität, abgeleitet werden können. Gegen seitliche Verzerrungen sind elektrostatische Gitter labil. Die Methode von Herrn Debye und Herrn Scherrer ist vorläufig vertrauenswürdiger.

R. Pohl (Göttingen), Über lichtelektrische Leitfähigkeit in Kristallen.

M. H.! Im Anschluß an frühere Arbeiten über den selektiven Photoeffekt haben Dr. Gudden und ich im letzten Semester die Einwirkung des Lichtes auf die elektrische Leitfähigkeit von Kristallen untersucht. Wir haben dabei festgestellt, daß man zahlreichen Kristallen, die im gewöhnlichen Sinne Isolatoren sind, — d. h. auch elektrostatisch isolieren — durch Bestrahlung mit Licht ein sehr erhebliches elektrisches Leitvermögen erteilen kann, falls man hinreichend hohe elektrische Felder anwendet.

Es war ursprünglich meine Absicht, zusammenfassend über diese Versuche und die an sie anknüpfenden Fragen zu berichten. Da aber die Zeit nicht reicht, will ich mich auf ein einzelnes Beispiel beschränken und kurz das bringen, was wir über die Leitfähigkeit des Diamanten im Licht bisher gefunden haben[1]).

Ein kleiner Diamant von 1 mm Dicke und

1) Die ausführlichen Arbeiten finden sich in der Zeitschrift für Physik 2 u. 3, 1920.

2 parallelen Endflächen wurde so zwischen zwei Metallbacken eingeklemmt, daß das Licht durch eine Fläche von etwa 4 mm² eintreten konnte. Dieser Kristall wurde mit einem Drehspulgalvanometer und einer Batterie von 1600 Volt in Reihe geschaltet. Der Diamant war optisch ganz besonders klar und erwies sich bis zu 230 $\mu\mu$, d. h. soweit man mittels einer Uranglasplatte im *Hg* Licht beobachten konnte, als durchlässig.

Daß der Kristall im hohen elektrischen Feld (16000 Volt/cm) lichtempfindlich war, konnte man sofort mit einer Glühbirne feststellen; aber die Vorversuche zeigten schon, daß der lichtelektrische Strom zeitliche Änderungen aufwies, offenbar weil irgendwelche Umlagerungen im Kristall stattfanden. Diese Umlagerungen mußten ausgeschaltet werden, bevor man daran denken konnte, die spektrale Verteilung der Leitfähigkeit im Lichte aufzunehmen.

Das Nächstliegende war Beschränkung der Belichtungszeit auf kurze Zeiten, z. B. eine Sekunde. Das half, jedoch im Verlauf längerer Meßreihen zeigten sich doch noch Abweichungen, die sich zwar im Mittel heraushoben, aber doch erkennen ließen, daß starke lichtelektrische Ströme auch noch bei 1 Sekunde Belichtungsdauer zu merklichen Umlagerungen führen. Wir sagten uns dann, daß man nach bekannten Analogien diese Umlagerungen durch langwelliges Licht wieder rückgängig machen könne und in der Tat erhielten wir vollständig reproduzierbare Werte, sobald wir zwischen die einzelnen Messungen je eine Ultrarotbelichtung einschalteten.

Ich muß noch angeben, warum wir von Umlagerungen und nicht von chemischen Änderungen sprechen: Hat man einen Phosphor durch Belichtung erregt, so wird wohl die Lenardsche Vorstellung allgemein angenommen, daß ein Teil der lichtelektrisch ausgelösten Elektronen mehr oder weniger lang außerhalb ihrer normalen Lage in der Umgebung festgehalten wird, und weiter ist wohl sicher, daß die Lichtemission des Phosphors erfolgt, wenn Elektronen in die normale Lage zurückkehren, wie das Lenard schon 1910 ausgeführt hat. Dr. Gudden und ich haben nun versucht, diese Rückkehr der Elektronen unmittelbar nachzuweisen. Wir sagten uns, entsprechend unserer Vorstellung über den Mechanismus der Leitfähigkeit im Licht, es müsse gelingen durch hohe elektrische Felder aus dem Schwarm der rückkehrenden Elektronen ebenso wie vorher aus dem der vom erregenden Licht ausgelösten eine genügende Zahl herauszugreifen, um sie als Leitungsstrom nachzuweisen. Leuchtet ein Phosphor unter gewöhnlichen Bedingungen langsam aus, so ist die Zahl der in jeder Sekunde heimkehrenden Elektronen zu gering, beschleunigt man aber die Rückkehr durch Ultrarotbelichtung, so daß der Phosphor intensiv, aber nur kurz aufleuchtet, so kann man in dem aufleuchtenden Phosphor leicht einen Leitungsstromstoß nachweisen. Im unerregten Phosphor ruft Ultrarot keine Leitfähigkeit hervor.

Genau das Gleiche gilt für den Diamanten im hohen elektrischen Feld. Ist durch die lichtelektrischen Ströme das eingetreten, was wir die Umlagerung nennen, so isolierte der Diamant ohne Belichtung zwar nach wie vor. Bestrahlt man ihn aber jetzt mit dem vorher auf ihn wirkungslosen Ultrarot, so zeigt der Kristall eine vorübergehende Leitfähigkeit; darin sehen wir einen Beweis, daß beim Diamanten genau wie bei den Phosphoren durch langwelliges Licht Elektronen zurückverlagert werden. — Macht man die Umlagerung auf diese Weise stets wieder rückgängig, so ist es ein Leichtes, die spektrale Verteilung der lichtelektrischen Leitfähigkeit aufzusuchen, und wir finden für den wasserklaren Diamanten das erste Bild, das hier

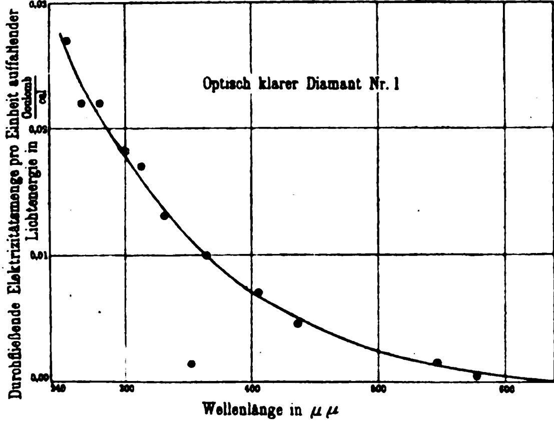


Fig. 1.

projiziert wird. Man sieht zunächst das kaum erwartete Ergebnis, daß der Diamant im Felde von 16000 Volt/cm noch im gelben Licht einen galvanometrisch meßbaren Strom durchläßt. Man findet weiterhin zu kürzeren Wellen formal den gleichen Anstieg, den wir beim normalen Oberflächeneffekt der Metalle kennen. Der Ordinatenmaßstab zeigt zudem, daß für eine Kalorie Lichtenergie durch den Diamanten etwa die gleiche Elektrizitätsmenge hindurchfließt, wie sie beim selektiven Photoeffekt einer festen (nicht kolloidalen) *K*-Fläche beobachtet wird.

Zwei weitere Diamanten in einer zur Untersuchung geeigneten Form enthielten nachweisbare Beimengungen: Sie schnitten das Spektrum unterhalb 300 $\mu\mu$ ab und ließen im Phosphoroskop deutliche Phosphoreszenz erkennen. Diese Beimengungen machten sich im Bilde der spek-

tralen Verteilung durch eine Lücke des „normalen" Anstieges bemerkbar (Fig. 2), auf deren Deutung ich hier nicht näher eingehen will.

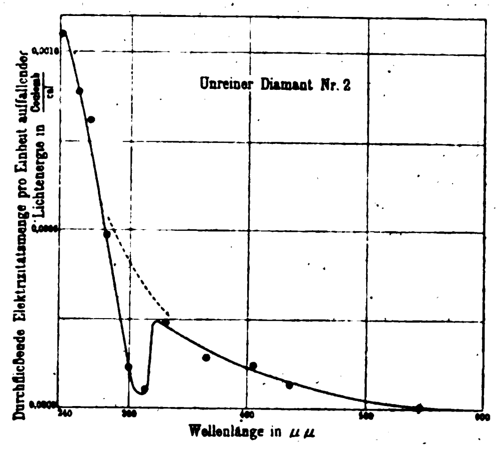


Fig. 2.

Bei anderen Kristallen, z. B. regulärer Zinkblende (ZnS), Zinnober (HgS), Wulfenit (Pb_2CrO_3), überlagert sich bei entsprechenden Versuchen dem „normalen" Anstieg ein „selektives" Maximum, und zwar um so ausgeprägter, je höher das elektrische Feld ist, in dem der Kristall bestrahlt wird. Wir sind zurzeit damit beschäftigt, den Einfluß der kristallographischen Orientierung im polarisierten Lichte zu untersuchen und hoffen, allmählich einiges über die Lage der Bohrschen Elektronenbahnen im Kristallgefüge zu finden. Am Diamanten haben wir noch keine „selektiven" Maxima erhalten. Wir sind dabei, weiter ins Ultraviolett zu gehen und die elektrischen Feldstärken zu erhöhen, ohne störende Gasentladungen zu erhalten. Das Wichtigste aber ist, die Versuche auf eine größere Anzahl verschiedener Diamante auszudehnen, denn die in natürlichen Mineralien stets spurenweise enthaltenen Beimengungen können die Erscheinungen wesentlich beeinflussen. Es ist schwierig, geeignete Diamantstücke zu erhalten, die wenigstens angenähert Kistenform haben. Für leihweise Überlassung einzelner Stücke wären wir sehr dankbar. Unser bisheriges Versuchsmaterial stammt von den Herren Geh.-Rat Mügge-Göttingen und Prof. Koch-Hamburg, und mit dem Dank an diese Herren möchte ich meine kurzen Ausführungen schließen.

Diskussion.

Kangro: Der wasserklare Diamant hat natürlich auch eine Absorption. Die gezeigte Kurve muß daher in diesem Sinne korrigiert werden. Würde sich dann nicht vielleicht ein selektiver Effekt ergeben?

Pohl: Das glaube ich nicht.

Dember: Ich wollte Herrn Pohl fragen, wie lange sich eine Leitfähigkeit, die so im Diamanten erregt worden ist, aufrecht erhält?

Pohl: Kürzer als die Galvanometer-Schwingungsdauer.

G. Hertz (Berlin), Über Absorptionslinien im Röntgenspektrum.

Im Gegensatz zum optischen Spektrum, wo im allgemeinen jeder Emissionslinie auch eine Absorptionslinie entspricht, ist dies bekanntlich im Röntgenspektrum nicht der Fall. Wenn diese Tatsache auch nicht als das unmittelbare Ergebnis des Experiments angesehen werden kann, da die den Emissionslinien entsprechenden Absorptionslinien viel zu schmal sein müßten, um mit den bisherigen Methoden der Röntgenspektroskopie nachgewiesen zu werden, so ist doch aus den Bedingungen für die Anregung der Röntgenspektra durch Röntgenstrahlabsorption und Elektronenstoß auf das Fehlen dieser Absorptionslinien zu schließen. Die Erscheinung der selektiven Absorption macht sich bei den bisherigen Versuchen nur durch das Auftreten der Absorptionsbandkanten, also eines Sprunges in der kontinuierlichen Absorption am kurzwelligen Ende einer Serie bzw. einer der die höheren Serien zusammensetzenden Liniengruppen bemerkbar. Nach Kossel ist dieses Verhalten auf Grund der Bohrschen Vorstellungen über den Bau des Atoms so zu verstehen, daß mit Absorption verbundene Sprünge eines Elektrons von einem der innersten Ringe [K-, L- usw. Ring] auf besetzte Ringe im Inneren des Atoms nicht möglich sind. Von den außerhalb der Atomoberfläche liegenden unbesetzten optischen Bahnen aber muß man annehmen, daß sie als Endbahnen für mit Absorption verbundene Elektronensprünge in Frage kommen, und auf Grund dieser Annahme hat Kossel[1]) schon die Erwartung ausgesprochen, daß jede Absorptionsgrenze eine Feinstruktur zeigen müsse, bestehend aus einer auf einen sehr engen Wellenlängenbereich zusammengedrängten Serie von Absorptionslinien. In der Tat haben Messungen von Stenström an den Absorptionsgrenzen der M-Serie eine Andeutung von einem derartigen Verlauf der Absorption in unmittelbarer Nähe der Grenzen ergeben. Bei Versuchen über die Absorptionsgrenzen in der L-Serie der Elemente von Cs bis Nd konnte ich eine entsprechende Feinstruktur in der L-Serie nachweisen[2]). Hier

1) W. Kossel, Verh. d. D. Phys. Ges. **18**, 339, 1916 und Zeitschr. f. Phys. **1**, 119, 1920.

2) Über diese Versuche, insbesondere auch über die im Nauheimer Vortrage ebenfalls besprochenen Folgerungen bezüglich der L- und M-Grenzen ist in der Zeitschr. f. Phys. **3**, 19, 1920 bereits ausführlich berichtet worden.

erschienen vor allem die stärkeren Grenzen nicht nur als Sprung in der kontinuierlichen Absorption, sondern als Absorptionslinien, neben denen sich auf den mit stärker absorbierenden Schichten und genügend langen Belichtungszeiten gemachten Aufnahmen noch eine zweite Absorptionslinie angedeutet fand. Um diese Verhältnisse näher zu untersuchen, habe ich weitere Aufnahmen von Absorptionsgrenzen mit wesentlich engerem Spalt (etwa 0,002 Å.-E.) entsprechend) gemacht. Die Versuchsanordnung war im wesentlichen dieselbe wie bei den früheren Versuchen, nur wurde zur Gewinnung der für die Aufnahmen mit dem engen Spalt nötigen Energie das Röntgenrohr mit einer anderen Glühkathode versehen, welche einen Brennfleck von etwa 4 mm seitlicher Ausdehnung an Stelle des früheren etwa 30 mm langen Brennflecks ergab, so daß nun mit feststehendem Spektrographen ein enger Spektralbereich in unmittelbarer Umgebung der zu untersuchenden Absorptionsgrenze trotz der geringen Spaltbreite in etwa 3 Stunden aufgenommen werden konnte. Wenn es sich tatsächlich um Absorptionslinien handelte, so war von vornherein zu erwarten, daß sie schon mit wesentlich dünneren absorbierenden Schichten zu erhalten sein würden, als zur Untersuchung der Sprünge in der kontinuierlichen Absorption nötig waren, und es wurden daher im Interesse kurzer Belichtungszeiten Absorptionsschichten von nur geringer kontinuierlicher Absorption benutzt. Das Resultat entsprach durchaus diesen Erwartungen[1]). Eine Aufnahme der langwelligsten Absorptionsgrenze der L-Serie des Neodyms ergab eine regelrechte scharfe Absorptionslinie, in welcher die Absorption total ist, während auf dieser Aufnahme der Sprung in der kontinuierlichen Absorption kaum mehr zu erkennen ist. Da die hier betrachteten Erscheinungen von den Verhältnissen an der Atomoberfläche abhängen, so konnte man in der K-Serie entsprechende Verhältnisse erwarten. Aufnahmen der Absorptionsgrenze der K-Serie des Mangans ergaben in der Tat völlig das gleiche Bild: eine scharfe Absorptionslinie schon bei so dünnen absorbierenden Schichten, daß der Sprung in der kontinuierlichen Absorption kaum zu erkennen ist.

Als bisheriges Ergebnis dieser Versuche kann man also aussprechen: Auch im Röntgenspektrum prägt sich die selektive Absorption aus durch das Auftreten von scharfen Absorptionslinien, also von engen Spektralbezirken, in welchen die Absorption ein Vielfaches der kontinuierlichen Absorption im benachbarten Spektrum beträgt. In Übereinstimmung mit den Kosselschen Vorstellungen fallen diese Absorptionslinien nicht mit Emissionslinien zusammen, sondern sie liegen an der Stelle, an welcher man bei geringerer Auflösung nur den Sprung der kontinuierlichen Absorption beobachtet. Im Sinne der Kosselschen Vorstellungen entspricht die hier gefundene Absorptionslinie offenbar dem Übergang von der K- bzw. L-Bahn auf die erste unbesetzte Bahn an der Atomoberfläche. Die Größenordnung der Breite der Absorptionslinie ergibt sich aus den bisherigen Aufnahmen in der Skala der Frequenzen zu wenigen Zehnteln der Rydbergkonstante, durchaus in Übereinstimmung mit der Kosselschen Erwartung entsprechend der Beeinflussung der ersten optischen Bahn durch die Wirkung der Nachbaratome im festen Zustande. Daß bei Aufnahmen mit dünnen absorbierenden Schichten überhaupt nur die eine Absorptionslinie gefunden wird, erklärt sich aus der viel stärkeren Beeinflussung der weiter außen liegenden optischen Bahnen durch die Nachbaratome, durch welche die weiteren Absorptionslinien verbreitert werden müssen, so daß man mit absorbierenden Substanzen in festem oder flüssigem Zustande wahrscheinlich überhaupt nur die eine scharfe Absorptionslinie wird erhalten können. Das voll ausgebildete Absorptionsspektrum wird man nur bei einatomigen Gasen erwarten dürfen. (Mehratomige müssen genau wie im optischen Gebiet ein eng zusammengedrängtes Bandenspektrum ergeben.) Freilich wird die hier zu erwartende Schärfe der Linien ihren Nachweis mit den bisherigen Mitteln wahrscheinlich noch unmöglich machen. Von wesentlichem Interesse ist vor allem der Einfluß der Wertigkeit und der chemischen Bindung, welcher durch weitere Versuche untersucht werden soll.

Diskussion.

Sommerfeld: Es ist sehr erfreulich, daß die von mir sogenannte Δ-Grenze als etwas ganz anderes entlarvt ist, wie die beiden L-Grenzen. Die Behauptung, daß die Δ-Grenze mit dem Dublett der Linien $v\varphi$, $\chi\psi$ organisch zusammenhängt, ist also fallen zu lassen. Wir dürfen nunmehr sagen: Es gibt eine K-Grenze, zwei regelrechte L-Grenzen, drei M-Grenzen usw.

Kossel: Mit diesen Beobachtungen an L ist die Erscheinung nunmehr an allen drei Serienfamilien festgestellt. Da Herr Hertz sofort eine kräftige Auflösung erzielt hat, dürfen wir hoffen, bald auch weitere Konsequenzen der Theorie prüfen zu können, vor allem die Unterschiede zwischen Atomen in verschiedener äußerer Situation. In Gas z. B. sollten sich die Ab-

1) Reproduktionen der erhaltenen Aufnahmen werden in der Zeitschrift für Physik veröffentlicht werden.

sorptionslinien klarer ausbilden als im festen Körper. — Herr Siegbahn hat nach einer freundlichen persönlichen Mitteilung bereits bei $\Delta\nu$ in der K-Reihe Anzeichen hiervon beobachtet. Ebenso sollte die chemische Bindung von Einfluß sein.

Wagner: Im Gegensatz zu den wahren Absorptionslinien in der Nähe der Grenzen wurde von mir eine scheinbare Absorptionslinie im Röntgenspektrum gefunden, die bei Steinsalzkristall mit Würfelebene als Gitter bei einem glanzierenden Winkel φ liegt, der entspricht $\operatorname{tg}\varphi = {}^1/_7$, wenn die Einfallsebene eine Würfelebene enthält. Nach einem Vorschlag Herrn Ewalds tritt die Absorptionslinie dann auf, wenn gleichzeitig mehrere Kristallebenen eine Strahlung gleicher Frequenz reflektieren. Diese Ansicht ergibt neben andern den beobachteten Winkel. Solche scheinbare Absorptionslinien sind demnach Folge der Kristallstruktur. Bei Drehung des Kristalles in der Würfelebene müßten die Absorptionslinien sprungweise neue Lagen einnehmen.

H. Busch (Göttingen), Widerstände mit rückfallender Charakteristik. (Vorläufige Mitteilung[1])).

Die Stromspannungskurve oder Charakteristik eines elektrischen Leiters, dessen Widerstandswert von der Temperatur unabhängig ist, ist, dem Ohmschen Gesetz entsprechend, eine durch den Nullpunkt gehende Gerade (1 in Fig. 1).

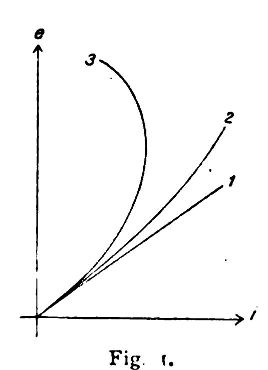


Fig. 1.

Ändert sich der Widerstand dagegen mit der Temperatur, so ist die Kurve gekrümmt, und zwar konvex gegen die Abszissenachse, wenn der Temperaturkoeffizient positiv ist (Kurve 2). Es kann nun vorkommen, daß die Krümmung der Kurve so stark wird, daß sie schließlich senkrecht ansteigt und bei noch höheren Spannungen nach rückwärts umbiegt (Kurve 3), daß also der Strom bei einer gewissen Spannung ein Maximum erreicht und nachher wieder abnimmt. Derartige Stromspannungskurven habe ich als rückfallende Charakteristiken bezeichnet.

Die Bedingungen für solch anormales Verhalten erkennt man aus der Gleichung der Wärmebilanz: Ist i die Stromstärke, R der Widerstand des Leiters und A die von seiner Oberfläche an die Umgebung abgegebene Wärmemenge, so muß die zugeführte Wärmemenge $i^2 R$ gleich der fortgeführten A, also

$$i^2 = \frac{A(T)}{R(T)}$$

sein, wodurch, da A und R nur von der Temperatur T abhängen, der Strom i als Funktion der Temperatur bestimmt ist. Die rückfallende Charakteristik tritt auf, wenn i mit zunehmendem T abnimmt, und das ist dann der Fall, wenn R prozentual schneller mit der Temperatur ansteigt als A, d. h. wenn

$$\frac{1}{R}\frac{dR}{dT} > \frac{1}{A}\frac{dA}{dT}$$

ist, oder wenn man, um bequemere Zahlenwerte zu erhalten, beiderseits mit der absoluten Temperatur T multipliziert, wenn

$$\varrho = \frac{T}{R}\frac{dR}{dT} > \frac{T}{A}\frac{dA}{dT} = \alpha$$

ist.

Dies kann nun in der Tat vorkommen, nämlich dann, wenn einerseits der Temperaturkoeffizient des Widerstandes besonders groß ist, wie es bei Eisen- und Nickelwiderständen in der Nähe des Umwandlungspunktes der Fall ist, und andererseits α besonders klein ist; letzteres ist dann der Fall, wenn die Wärmeabgabe durch Wärmeleitung in Wasserstoff von so niedrigem Druck geschieht, daß der dann an der Grenze zwischen heißem Draht und Gas auftretende Temperatursprung bestimmenden Einfluß auf die Wärmeabgabe gewinnt; ich habe die Wärmeabgabe von Platindrähten unter dieser Bedingung bestimmt und Werte von α gefunden, welche im günstigsten Falle nur wenig größer als 1 waren, während ϱ bei Eisen und Nickel größer als 2 werden kann. Hier ist also in der Tat obige Ungleichung erfüllt, so daß eine rückfallende Charakteristik auftreten muß. Fig. 2 zeigt z. B. die aus beobachteten Widerstands- und Wärmeableitungswerten für einen Eisendraht von 0,05 mm Durchmesser in Wasserstoff von etwa 9 mm Druck konstruierte Stromspannungskurve.

Solche Widerstände zeigen nun ein eigentümliches Verhalten, das sich theoretisch voraussagen läßt. Eine einfache Stabilitätsunter-

1) Die ausführliche Arbeit erscheint in den Ann. d. Phys.



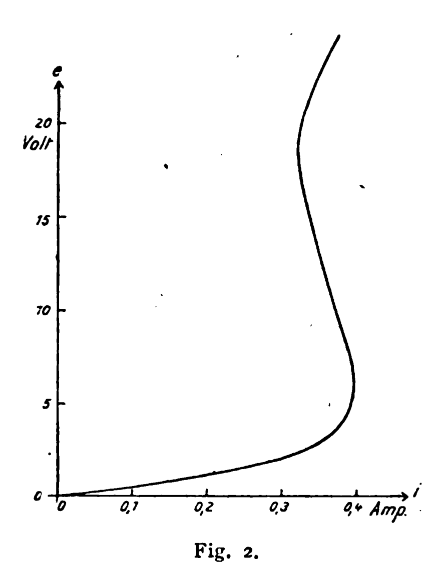


Fig. 2.

suchung zeigt nämlich, daß in dem Gebiete rückfallender Charakteristik der Zustand gleichmäßiger Temperaturverteilung labil ist; die geringsten, zufällig vorhandenen Temperaturunterschiede müssen von selber immer weiter zunehmen, so lange, bis ein Teil des Drahtes die dem oberen, der andere die dem unteren Aste der Charakteristik entsprechende Temperatur angenommen hat. Der Draht teilt sich also sozusagen in einen heißeren und einen kälteren Teil. Die strenge Berechnung der eintretenden Temperaturverteilung ist nicht ganz einfach, und zwar deshalb, weil wegen des starken Temperaturgefälles an der Grenze zwischen heißem und kaltem Drahtteil die innere Wärmeleitung im Drahte berücksichtigt werden muß. Die Berechnung der Temperaturverteilung kommt also auf die Integration der Differentialgleichung der Wärmeleitung hinaus. Diese habe ich nach einer Art graphischen Methode durchgeführt und folgendes Ergebnis erhalten:

Auch jetzt findet man, daß der Draht sich in zwei Strecken von verschiedener Temperatur teilt; innerhalb jeder der beiden Strecken ist die Temperatur praktisch konstant. Der Übergang von der einen zur anderen Temperatur erfolgt auf einer relativ kurzen Strecke, deren Länge von der gleichen Größenordnung ist wie die der Übergangsstrecken an den Drahtenden. Weiter findet man, daß dieses Verhalten nicht, wie man zunächst erwarten sollte, bei jedem beliebigen Strome innerhalb des „Rückfallgebietes" eintritt, sondern nur ein ganz bestimmter, von der Länge der beiden Teile unabhängiger Stromwert möglich ist; für diesen „Normalwert" des Stromes ergibt sich eine Bedingung, die ungefähr darauf hinauskommt, daß die beiden von der Charakteristik und der dem

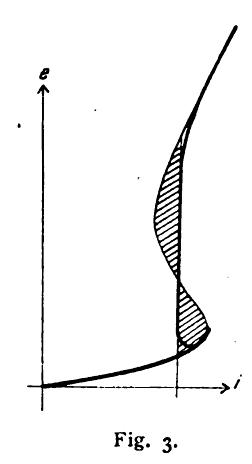


Fig. 3.

Strome entsprechenden senkrechten Geraden begrenzten Flächenstücke (in Fig. 3 schraffiert) inhaltsgleich sein müssen.

So ergibt sich statt der rückfallenden Charakteristik, auf welche wir zuerst geführt wurden, eine wesentlich andere Kurve: sie besteht einmal aus dem unteren Aste der konstruierten Kurve bis zum Strommaximum, dann einem, dem „Normalstrom" entsprechenden, genau senkrechten Stück und endlich dem oberen Aste der ursprünglichen Kurve vom Normalstrom aufwärts; diese 3 Teile sind, wie eine besondere Überlegung zeigt, durch stetig gekrümmte Kurvenstücke verbunden, wie es die stark ausgezogene Kurve in Fig. 3 zeigt.

Soweit die Theorie. Das Ergebnis der Versuche zeigt in einigen Beispielen Fig. 4 (Pro-

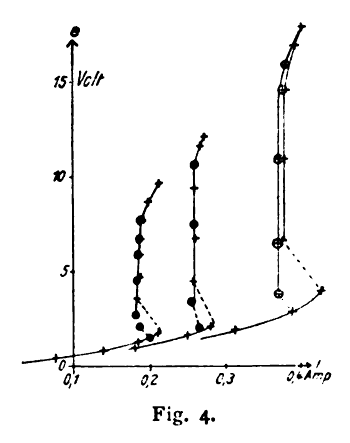


Fig. 4.

jektion), in welcher die beobachteten Stromspannungskurven gezeichnet sind für den gleichen Eisendraht, für welchen ich vorhin die konstruierte Stromspannungskurve (Fig. 2) angezeichnet hatte, und zwar bei verschiedenen Wasserstoffdrucken. Man sieht, daß der Verlauf der Kurven genau dem Ergebnis der Über-

legung, wie es in Fig. 3 dargestellt ist, entspricht: das deutliche Strommaximum am Ende des unteren ansteigenden Astes, dann der senkrechte Anstieg, entsprechend einer Konstanz des Stromes über einen weiten Spannungsbereich, und das schließliche Wiederansteigen des Stromes.

Eine viel sinnfälligere Bestätigung erhält man aber durch den bloßen Augenschein: bei diesen Eisendrähten liegt nämlich die Temperatur des heißen Teiles ungefähr bei 800°, entspricht also heller Glut, während der kalte Teil noch nicht 300° warm, also dunkel ist. Man kann so die Temperaturverteilung unmittelbar mit dem Auge beobachten, und man sieht in der Tat, daß in dem betreffenden Spannungsbereich ein ganz scharf abgegrenztes Stück des Drahtes hell glüht, während der Rest dunkel ist. Die Länge des heißen Stückes ließ sich bis auf etwa $^1/_2$ mm genau messen, und erwies sich als genau linear abhängig von der Spannung, so wie es nach der Überlegung zu erwarten ist. Diese lineare Abhängigkeit ist so genau erfüllt, daß sich ein solcher Draht ohne weiteres als Spannungsmesser, als Hitzdrahtvoltmeter, mit einer Ablesegenauigkeit von einigen Promillen des Ausschlages, verwenden läßt.

Damit kommen wir zu den technischen Anwendungsmöglichkeiten solcher Widerstände. Die Verwendung als Voltmeter kommt praktisch kaum in Frage; dagegen scheinen die Widerstände wegen der genauen Konstanz des Stromes in einem weiten Spannungsbereich besonders geeignet zur Verwendung als Vorschaltwiderstände, um den Strom in irgendeinem Apparat unabhängig von der Spannung der Stromquelle konstant zu halten. Ein solcher Widerstand wirkt ja wie ein automatischer Stromregler; wenn die Spannung z. B. steigt, schaltet er durch Verlängerung des heißen Teiles gewissermaßen selbsttätig soviel Widerstand zu, bis der Strom wieder seinen alten Wert erreicht hat. Widerstände ähnlicher Bauart werden auch in der Technik vielfach als Schutzwiderstände benutzt, um empfindliche Apparate, z. B. Nernstlampen oder die Glühfäden von Glühkathodenröhren vor Überlastung zu schützen. Für solche Zwecke sind aber die Widerstände in der Form, wie ich sie hier beschrieben habe, weniger geeignet, und zwar einmal wegen des Strommaximums der Charakteristik, weil dieses beim Einschalten eine beträchtliche Überlastung des zu schützenden Apparates zur Folge hat, und dann auch wegen der außerordentlich langen Einstellungsdauer, die nach Minuten rechnet, so daß der Widerstand schnellen Spannungsschwankungen nicht zu folgen vermag. Die technischen Eisenwiderstände sind deshalb offenbar so dimensioniert, daß eine rückfallende Charakteristik gerade eben noch vermieden wird. Immerhin wird, glaube ich, durch die vorstehend mitgeteilten Überlegungen auch das Verhalten dieser technischen Widerstände dem Verständnis näher gebracht.

(Eingegangen 26. September 1920.)

E. Gehrcke u. E. Lau (Charlottenburg), Über die Struktur der Balmerserie. (Mitteilung aus der Physikalisch-Technischen Reichsanstalt.) (Mit Tafel IV.)

Die bekannte Balmerserie des Wasserstoffs besteht nach neueren Anschauungen aus Doppellinien. Michelson hat H_α als Doppellinie beobachtet und den Abstand der Komponenten gemessen. Über die Doppelheit von H_β liegen bisher nur zwei, voneinander abweichende Beobachtungen vor, nämlich von Michelson und Merton und Nicholson (s. unten). Die beiden Komponenten der höheren Glieder der Serie sind offenbar noch nicht beobachtet worden[1]), Den Grund hierfür glauben wir gefunden zu haben, er liegt in der Verwendung der Lichtquelle in Form einer mit Wasserstoff gefüllten, elektrisch erregten Kapillare. In einer solchen erhält man zwar H_α meistens als Doppellinie, die folgenden Glieder der Serie jedoch nicht. Verwendet man aber, wie wir dies taten, keine Kapillare, sondern ein weites Rohr, so treten die Doppellinien auch bei H_β, H_γ, H_δ deutlich hervor und auch H_α wird schärfer.

Wir verwandten zur Beobachtung ein Interferenzspektroskop nach Lummer-Gehrcke; die planparallele Platte (von Hilger-London) hatte eine Dicke $d = 4{,}63$ mm, eine Länge $l = 13$ cm, einen Brechungsexponenten $n_{H\alpha} = 1{,}506$. Es betrug $\left(\frac{dn}{d\lambda}\right)$ für H_α: — 200, für H_β: — 710, für H_γ: — 1000, für H_δ: — 1000 [cm^{-1}]; diese Werte brauchen nur näherungsweise bekannt zu sein. Als Lichtquelle diente eine Geißlersche mit Wasserstoff gefüllte Röhre; der Wasserstoff war aus Schwefelsäure und chemisch reinem Zink bereitet. Die leuchtende positive Säule zwischen den Elektroden hatte eine Länge von 80 cm und befand sich in einem Glasrohr von 1 cm lichte Weite; das in Richtung dieser Glasröhre ausgesandte Licht fiel auf den Spalt des Spektralapparats. Zum Betriebe der Geißlerröhre wurde ein technischer Transformator

1) Die in der Literatur, z. B. in Kaysers Spektroskopie Bd. II, S. 346 und in Sommerfelds Atombau und Spektrallinien 1919, S. 345 gemachte Angabe, Michelson habe H_γ gemessen, beruht auf einer Verwechslung: Michelson hat H_β gemessen, nicht H_γ.



120 : 4800 Volt verwendet, der primär mit 120 Volt, 50 ∼ pro Sekunde (städt. Zentrale) und 0,9 Amp. Effektivstrom bei 60 Ω Vorschaltwiderstand betrieben wurde. Bei einem Teil der Beobachtungen strömte dauernd frischer Wasserstoff in die Röhre, der wieder abgepumpt wurde. Auf Tafel IV sind einige der mit dieser Anordnung erhaltenen Photographien in ca. 3facher linearer Vergrößerung der Originale wiedergegeben.

Fig. 1 und 2 zeigt die Linie H_α, und zwar Fig. 1 bei Erzeugung in einer Kapillare von 0,8 mm lichter Weite. Man erkennt eine sehr breite Linie, kaum die Verdoppelung. Fig. 2 zeigt H_α in weitem Rohr von 10 mm lichter Weite; hier ist die Verdoppelung augenfällig. Der Druck in dem weiten Rohr war der gleiche wie in dem Kapillarrohr.

Fig. 3 und 4 zeigt entsprechend dasselbe für H_β. In Fig. 3 (Kapillarrohr) ist H_β eine sehr verwaschene Linie, die Verdoppelung ist nicht mehr erkennbar. Die übrigen, schärferen Linien gehören dem zweiten Wasserstoffspektrum an. Fig. 4 (weites Rohr) zeigt H_β deutlich als Doppellinie.

Fig. 5 (weites Rohr) zeigt H_γ deutlich als Doppellinie, die übrigen, schärferen Linien gehören dem zweiten Wasserstoffspektrum an.

Fig. 6 (weites Rohr) zeigt H_δ schon nicht mehr so deutlich, aber noch erkennbar als Doppellinie.

Die Abstände der Komponenten von H_α, H_β, H_γ, H_δ wurden gemessen. Die erhaltenen Zahlenwerte sind in folgenden Tabellen zugleich mit den Werten früherer Beobachter zusammengestellt.

H_α

	$\Delta\lambda$ (Å.-E.)	$\Delta\nu\,10^{-9}$ sec^{-1}
Michelson u. Morley[1]	0,11	7,6
Ebert[2]	0,132	9,19
Michelson[3]	0,14	9,7
Houstoun[4]	0,065	4,6
Fabry u. Buisson[5]	0,132	9,19
Meißner[6]	0,124	8,64
Merton u. Nicholson[7]	0,132	9,19
Gehrcke u. Lau	0,126	8,78

1) Michelson u. Morley, Phil. Mag. (5) **24**. 46, 1887.
2) Ebert, Wied. Ann. (N. F.) **43**, 800, 1891.
3) Michelson, Bur. intern. des poids et mesures 11, 139, 1895.
4) Houstoun, Phil. Mag. **7**, 460, 1904.
5) Fabry u. Buisson, C. R. **154**, 1501, 1912.
6) Vgl. Paschen, Ann. d. Phys. **50**, 933, 1916.
7) Merton u. Nicholson, Proc. Roy. Soc. London (A) **93**, 28, 1917.

H_β

	$\Delta\lambda$ (Å.-E.)	$\Delta\nu\,10^{-9}$ sec^{-1}
Michelson	0,08	10
Merton u. Nicholson	0,033	4,1
Gehrcke u. Lau	0,0695	8,82

H_γ

Gehrcke u. Lau	0,058	9,2

H_δ

Gehrcke u. Lau	0,0432	7,7

Wir finden also innerhalb der Beobachtungsfehler eine Konstanz der Größe $\Delta\nu$, wie sie mit den Atommodellen der verschiedenen Autoren in Einklang steht. Hierbei ist die Messung für H_δ wegen der geringeren Schärfe der Komponenten die unsicherste.

Die Verbreiterung der Balmerserie bei Erzeugung im Kapillarrohr erklärt sich ungezwungen durch den Starkeffekt der bei großer Stromdichte hervortretenden elektrischen Kraftfelder zwischen den einzelnen Ionen; im ungeordneten Kraftfeld dieser Ionen befinden sich die neutralen Träger, welche die Balmerserie aussenden. In einer weiten Röhre, wie wir sie verwandten, muß dieser Starkeffekt, im Einklang mit der Beobachtung, um so mehr zurücktreten, je geringer die Ordnungszahl der Linie ist, er muß also für H_δ und die höheren Glieder am stärksten sein. Die Annahme, daß das längs der positiven Lichtsäule vorhandene elektrische Kraftfeld als Potentialgradient für die Verbreiterung der Balmerserie in Frage käme, ist nicht zutreffend, wie schon Merton und Nicholson gezeigt haben.

Chr. Füchtbauer (Tübingen), Über eine neue Art der Erzeugung von Spektrallinien durch Einstrahlung (Fluoreszenz). (Nach gemeinsam mit A. Kröner und G. Joos ausgeführten Versuchen.)

Bisher erhielt man durch Bestrahlung von sehr verdünntem Quecksilberdampf mit Quecksilberlicht nur die 2 sog. Resonanzlinien 2537 und 1849 in Emission. Es sind die ersten Glieder[1]) der Serien 1,5 $S - mp_2$ und 1,5 $S - mP$. Jetzt gelang uns der Nachweis, daß auch die andern starken Quecksilberlinien, die der unerregte Dampf nicht absorbiert, in Absorption und Emission auftreten, wenn Quecksilberdampf mit sehr star-

1) Bezeichnungen der Serien nach Paschen, der die Quecksilberlinien zum großen Teil erforscht und eingeordnet hat.

kem Quecksilberlicht bestrahlt wird. Wesentlich war dabei, daß in der erregenden Strahlung stets eine der vom unerregten Dampf absorbierbaren Linien, und zwar bei unserm Versuch 2537, zugegen sein mußte, damit eine andere Linie erzeugt werden konnte.

Die Versuchsanordnung war folgende: Die Quecksilberlampe aus Quarzglas (Fig. 1) be-

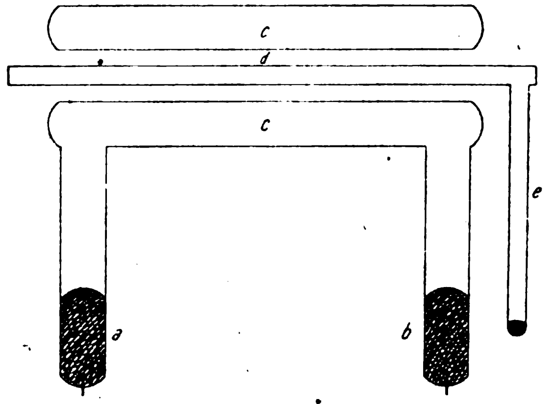


Fig. 1.

stand aus den Zuleitungsschenkeln *a* und *b* und dem ringförmig ausgebildeten, 150 mm langen Leuchtrohr *c*. Das innere Begrenzungsrohr des leuchtenden ringförmigen Raumes hatte eine lichte Weite von 14 mm. In diesem Raum steckte das durch 2 aufgeschmolzene Planplatten geschlossene, 250 mm lange evakuierte Quarzrohr *d*. Es war mit einem Ansatz *e* versehen, in dem sich etwas Quecksilber befand. Durch Einsenken des Ansatzes in Temperaturbäder konnte jeder gewünschte Dampfdruck des *Hg* erzeugt werden. Bei Temperaturen über Zimmertemperatur wurde der nicht im Wasserbad steckende Teil von *d*, soweit er nicht durch die Lampe geheizt wurde, mit einem Brenner so warm gehalten, daß dort keine Kondensation eintrat. Zur Verstärkung der radialen Einstrahlung war das Leuchtrohr der Lampe mit einem wie beim Liebigkühler angeschmolzenen (in der Figur weggelassen) Quarzmantel umgeben, der mit *Hg* gefüllt, das ausgestrahlte Licht nach innen reflektierte.

Die Linien des innern ausgepumpten Rohrs sind natürlich sehr scharf. Deshalb muß das Lampenlicht, wenn es im innern Rohr gut absorbiert werden soll, ebenfalls sehr scharfe Linien haben. Daher wurde die Lampe beständig in Eis gehalten. Um die Kühlung besonders wirksam zu machen, waren die Schenkel recht lang, so daß nicht nur die mit flüssigem *Hg* gefüllten Teile, sondern auch ein Stück des Dampfraums im Eisbad steckte.

Die Wände des innern Rohrs strahlen natürlich etwas diffuses Lampenlicht aus. Um die Strahlung des im innern Rohr befindlichen Dampfes möglichst rein zu erhalten, war an dem Quarzrohr ein Messingrohr befestigt, das im Abstand von 150 mm 2 Blenden von 1 mm Durchmesser trug. Darauf folgte ein Quarzspektrograph. Der Spalt wurde meist so weit gemacht, daß der kreisförmige aus der Blende kommende Lichtfleck die Stelle des leuchtenden Spaltes vertrat. Infolge der Schiefstellung der Platte erscheinen die Spektrallinien daher als kleine Ellipsen mit horizontaler großer Achse. Natürlich kann die Intensität dieser Flecke bequemer verglichen werden als die von Linien.

Ausführung der Versuche.

Durch die Lampe wurde ein Strom von 10—12 Amp. geschickt, und nun wurde bei konstant brennender Lampe der Ansatz des innern Rohrs einmal in ein Wasserbad von 35° (auch bei Zimmertemperatur erhält man schon einen deutlichen Effekt), das andre Mal zur Entziehung des Quecksilberdampfes in feste Kohlensäure getaucht. Im ersten Fall kam aus den Blenden sehr helles Licht, im zweiten Fall sehr wenig Licht heraus, sicher nicht mehr als etwa $^1/_{20}$ bis $^1/_{30}$ des ersten Betrags. Dieses Restlicht wird als diffuses Lampenlicht, von den 2 Abschlußplatten kommend, angesehen. Es hat in der Tat ganz andere Intensitätsverhältnisse als das innere vom Dampf ausgesandte Licht. Von der Stärke des Effektes gibt der Umstand einen Begriff, daß die reproduzierte Aufnahme nur 15 Sek. Belichtungszeit erforderte.

Der Versuch ist ein schlagender Beweis des Serienzusammenhanges im Sinne der Bohrschen Theorie, die mich bei Anstellung des Versuches leitete. Wir deuten ihn also folgendermaßen: Die Linie 1849, die der normale *Hg*-Dampf ebenfalls absorbiert, wird absichtlich durch 2 Quarzglaswände soweit weggenommen, daß sie den Effekt nicht bedingen kann. Dann ist die einzige Linie, die der innere Dampf zunächst absorbiert, die Linie 2537, Symbol $1{,}5\ S - 2\ p_2$. Die Bahn $1{,}5\ S$ ist die natürliche Bahn des Elektrons. Durch das absorbierte Licht der Linie werden Bahnen $2\ p_2$ geschaffen. Da ihr Zurückgehen auf die Bahn $1{,}5\ S$ (unter Ausstrahlung von Resonanzlicht) endliche Zeit erfordert, haben die Atome mit Bahnen $2\ p_2$ eine endliche Konzentration. Diese (energiereicheren) Atome vermögen nun aus der Lampenstrahlung das Licht aller derjenigen Linien zu absorbieren, für welche die Bahn $2\ p_2$ Ausgangsbahn des

Absorptionsprozesses ist, also alle Linien $2p_2 - X$. (Dabei sollten aber hier, wo kein elektrisches Feld besteht, nur Linien möglich sein, für welche der Übergang $2p_2 - X$ ein erlaubter im Sinne des Bohrschen Auswahlprinzips ist.) Von der Bahn X springt nun das Elektron bei einem Teil der Atome zurück auf die Ausgangsbahn $2p_2$, d. h. die Linie $2p_2 - X$ erscheint in „Resonanz". Aber ein anderer Bruchteil der auf Bahnen X umlaufenden Elektronen, welcher von der Entstehung der Bahnen X aus $2p_2$ ganz unabhängig ist, springt auf andere stabilere Bahnen, vor allem auf $2p_1$ und $2p_3$, sowie auf die Bahn $2P$ des Seriensystems einfacher Linien. Hier haben wir einen bisher nicht beobachteten, von der „Resonanz" verschiedenen Fall der Erregung von Linien durch Bestrahlung mit Licht anderer Linien realisiert. Bemerkenswert ist, daß wir auf diesem Umweg, obwohl wir die gleichfalls vom unerregten Dampf absorbierte Linie $1{,}5\,S - 2P$ des Einfachlinienspektrums nicht aus der Lampe einstrahlen, doch zur Bahn $2P$ und damit zum System einfacher Linien gelangen. In der Tat zeigen unsere Aufnahmen des Lichts des inneren Rohres nicht nur alle starken Linien des Tripletsystems, sondern auch die des Systems einfacher Linien, für die die benutzte Viridinplatte empfindlich ist. Wir betrachten die projizierte, nur 15 Sek. belichtete Aufnahme (Fig. 2). Sie zeigt außer-

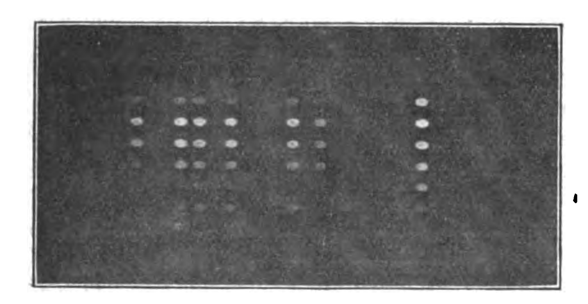


Fig. 2.

ordentlich stark vom Grün an alle ersten Glieder von Serien des Einfachlinien- und des Tripletsystems (zweite Serienglieder) haben wir mit etwa $^1/_{10}$ mm breitem Spalt, der zur Trennung von den stärksten Linien nötig war, und etwas längerer Exposition im Licht des inneren Rohrs erhalten, wenn auch erheblich schwächer als die 1. Glieder.

Im einzelnen übersehen wir die Vorgänge am schnellsten durch einen Blick auf die mir von Herrn Dr. Grotrian freundlichst überlassene schematische Darstellung der Quecksilberlinien (Fig. 3). Zum Beispiel kommt man

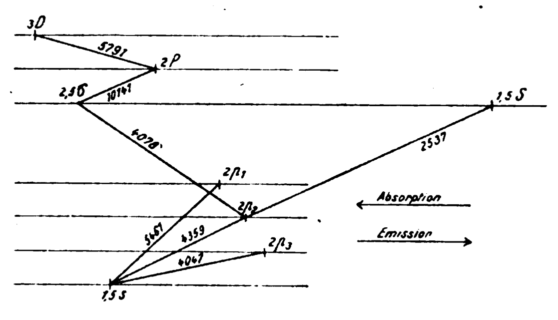


Fig. 3.

durch Absorption von $2p_2 - 1{,}5\,s$, nämlich 4359, auf die Bahn $1{,}5\,s$. Aus dieser springt das Elektron auf die stabileren Bahnen $2p_1$, $2p_2$, $2p_3$, d. h. der Dampf emittiert nicht nur wieder 4359 („Resonanz"), sondern auch die Linien 5461, Symbol $2p_1 - 1{,}5\,s$, sowie 4047, Symbol $2p_3 - 1{,}5\,s$, also das 1. Triplet der 2. Nebenserie. Die auf diese Weise geschaffenen Atome mit Bahnen $2p_1$ und $2p_3$ absorbieren jetzt aus dem Lampenlicht alle Linien $2p_1 - Y$ und $2p_3 - Y$. Man sieht, daß man in unserer Röhre so das Triplet- und das Einfachliniensystem erhält. (In Fig. 3 sind nur wenige Beispiele gezeichnet.)

Die „Funkenlinie" 2848 bot besonderes Interesse, weil sie von den im Lampenlicht genügend stark vorhandenen und mit unserer Anordnung photographierbaren Linien allein mit Sicherheit dem Dublettsystem angehört, das von Sommerfeld und Kossel einem andern Träger, dem einwertig positiven Ion, zugeschrieben wird. Diese Linie wurde erst durch etwa 100fache Aufnahmezeit schwach im Licht des inneren Rohrs erhalten, und zwar war kein Unterschied erkennbar bei Kohlensäurekühlung und bei Erwärmung des Ansatzes. Das heißt also, sie ist, wie zu erwarten, in der neuen Strahlung nicht nachweisbar, sondern muß dem diffusen Lampenlicht zugewiesen werden. Das nämliche Verhalten zeigte die gleichfalls als „Funkenlinie" bekannte Linie 3984.

Die außerordentliche Stärke des neuen Effektes wird folgendermaßen verständlich: Bei einer Überschlagsrechnung war für die Rückbildungszeit der W. Wiensche experimentelle Wert oder auch die Zeit angesetzt worden, in der nach der klassischen Theorie die nämliche Energie ausgestrahlt wird, was immer angenähert richtige Resultate gibt. Diese Rechnung hatte bereits eine Konzentration der Atome mit Bahnen $2p_2$ ergeben, die den Versuch aussichtsvoll erscheinen ließ. Natürlich war aber die wirkliche Sachlage für die Beobachtung des gesuchten Effekts viel

günstiger. Denn das nach Absorption wieder ausgestrahlte Licht geht ja nicht ganz verloren, sondern es wird zum sehr großen Teil neuerdings absorbiert, und von dem schließlich ausgestrahlten wird ein großer Teil vom Reflexionsmantel zurückgeworfen. Vielmehr herrscht im Innern des Rohrs ein Zustand, der mit demjenigen einer Hohlraumstrahlung einigermaßen verwandt ist, und zwar bildet er, mit seinen Übergängen zwischen den verschiedenen Bohrschen Bahnen, etwa eine angenäherte Veranschaulichung der Vorgänge, die Einstein[1]) in seiner Ableitung des Planckschen Strahlungsgesetzes benutzt.

Auf der Aufnahme sehen Sie noch folgende Erscheinung, die im Einklang mit unserer Deutung des Experimentes steht: Bei von 5 zu 5 Amp. gesteigerter Stromstärke erscheint ein Maximum der Stärke aller Linien bei etwa 10 Amp. Die Erklärung für die starke Abnahme der Helligkeit des inneren Rohrs bei Zunahme des Stroms von 10 auf 20 Amp. gibt ein Blick auf die diffuse Lampenstrahlung (Aufnahme des aus den Blenden kommenden Lichts bei Kohlensäurekühlung). Sie wächst nämlich für alle anderen Linien bei Steigerung des Stroms von 10 auf 20 Amp., jedoch für die Resonanzlinie 2537 nimmt sie stark ab, wodurch die Abnahme aller Linien im inneren Rohr bedingt wird, da dieselben dort nach unserer Theorie nur durch Mitwirkung von 2537 zustande kommen können. Die Abnahme der Linie 2537 in der Lampenstrahlung erklärt sich aus der mit zunehmender Stromstärke (Temperatur) gesteigerten Dichte des *Hg*-Dampfes in der schwächer leuchtenden, der Gefäßwand anliegenden Schicht. Diese Zunahme muß gerade diejenige Linie schwächen, die vom unerregten Dampf absorbiert wird.

Die neue Methode dürfte sich vielleicht eignen zum Ordnen noch nicht entwirrter Spektren, in denen verschiedene Träger vorkommen. Denn sie ermöglicht z. B. beim Quecksilber, Funkenlinien von Linien des einfachen und Triplet-Systems zu unterscheiden. Ferner kann man mit Hilfe unserer Methode im inneren Rohr sehr scharfe Linien erzeugen, auch wenn das Lampenlicht ein wenig Verbreiterung aufweist. Zur Beobachtung von Starkeffekten könnte die Röhre vielleicht auch geeignet sein.

Für die wertvolle Unterstützung, ohne welche die Arbeit nicht ausführbar gewesen wäre, bin ich Herrn Dr. A. Kröner von der Firma Heraeus zum größten Dank verpflichtet, ebenso der Firma Heraeus für die Anfertigung der Lampen, deren zweite mir leihweise überlassen wurde. Herrn Dr. Back möchte ich für seine wertvolle Hilfe bei den ersten Versuchen auch hier verbindlichst danken; ebenso Herrn Prof. Paschen für die freundliche Überlassung der Mittel des Tübinger Instituts. Die 1. Lampe beschaffte ich aus Mitteln der Württembergischen Gesellschaft der Wissenschaften, der ich meinen ergebensten Dank ausspreche.

1) A. Einstein, diese Zeitschr. **18**, 121, 1917.

Diskussion.

Rohn schlägt vor, mit Funken anzuregen. Ist das nicht vorteilhaft?

Füchtbauer: Ich glaube das nicht. Mit dem Funkeninduktor sind keine Versuche gemacht worden.

Franck: Resonanzlinien nennt man nur die ersten Glieder der Absorptionshauptserien, bei Anregung aller anderen Linien wird das Licht nicht nur mit derselben Wellenlänge reemittiert, sondern es ergeben sich verschiedene Möglichkeiten für das Zurückfallen des Elektrons und damit verschiedene Wellenlängen. Man muß dann von Fluoreszenz sprechen.

Anmerkung bei der Korrektur. Inzwischen haben wir[1]) noch durch folgenden Versuch unsere oben entwickelte Auffassung erheblich gestützt: Wir brachten in den engen Raum zwischen Lampenrohr und Fluoreszenzrohr eine dünne Glasröhre, welche alle Hauptlinien des Quecksilbers oberhalb 2537 gut durchläßt, dagegen nur ganz wenig vom Licht der Linie 2537. In der Tat verschwand jetzt der Effekt vollkommen, d. h. die Linien hatten beim Entwickeln von Quecksilberdampf im inneren Rohr keine größere Intensität als bei Wegnahme des Dampfes durch Kühlung mit fester Kohlensäure. Es liegt also wirklich eine Form von Resonanz bzw. Fluoreszenz vor, deren Vorhandensein im Gegensatz zu früher bekannten Erscheinungen an die gleichzeitige Einstrahlung einer ganz anderen Wellenlänge, nämlich 2537, geknüpft ist.

1) Chr. Füchtbauer und G. Joos.

W. Grotrian (Berlin-Dahlem), Gesetzmäßigkeiten im Spektrum des Neons.

In einer bedeutsamen Arbeit hat F. Paschen[1]) auf Vorarbeiten von Watson und K. W. Meißner fußend fast sämtliche im Geißlerrohr beobachtbaren Linien (ca. 800—900)

1) F. Paschen, Ann. d. Phys. **60**, 405, 1919.

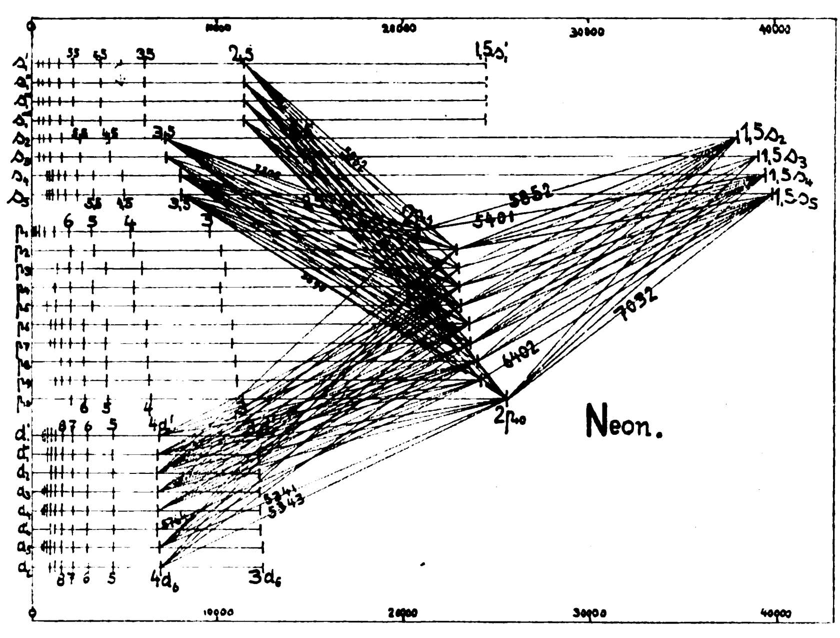


Fig. 1.

des Neonspektrums in ein System von Haupt- und Nebenserien eingeordnet. Dabei ergaben sich gegenüber den bisher bekannten Serienspektren interessante Neuigkeiten. Die wichtigste ist wohl die, daß die Vielfachheit der Termfolgen erheblich gewachsen ist. Paschens Analyse ergab im ganzen acht s-Termfolgen, zehn p-Termfolgen und acht d-Termfolgen. Da der mit dem Planckschen Wirkungsquantum h multiplizierte Wert eines Termes im Sinne der Bohrschen Atomtheorie gleich der Energie einer quantentheoretisch möglichen Anordnung der Elektronenbahnen der äußeren Elektronenschale ist, so gibt die Vielfachheit der Terme zugleich einen Überblick über die außerordentlich große Zahl möglicher Elektronenbahnen. Da beim Neon sich acht Elektronen in der äußeren Schale bewegen, ist diese große Zahl nicht weiter erstaunlich.

Um nun einen Überblick zu gewinnen über die Größe der Terme und die Entstehung der einzelnen Spektrallinien durch Kombination zweier Terme (Übergang zwischen zwei möglichen Elektronenanordnungen), wollen wir eine graphische Darstellung benutzen, wie sie auch von Bohr[1]) in seinem am 27. April 1920 in der Sitzung der deutschen physikalischen Gesellschaft in Berlin gehaltenen Vortrage zur Darstellung des *Na*-Spektrums benutzt worden ist.

Wir tragen dazu in Fig. 1 auf horizontalen Skalen der Wellenzahlen die aus den Tabellen der Paschenschen Arbeit entnommenen Werte der Terme auf und markieren diese durch einen kurzen vertikalen Strich dergestalt, daß also z. B. der Abstand des vertikalen Striches, bei dem die Bezeichnung $1,5\,s_1'$ steht, von der links befindlichen vertikalen Nullinie der Wellenzahlenskala gleich dem Wert des Termes $1,5\,s_1' = 24413,05$ ist. Dabei ist zu bemerken, daß die Genauigkeit der graphischen Darstellung natürlich in keiner Weise an die der Berechnung in Zahlwerten heranreicht, so daß Terme, die in Wirklichkeit ein wenig voneinander verschieden sind, in der Figur als völlig gleich erscheinen. Dafür gibt aber die Figur eine Übersicht, die aus Tabellen nur schwer zu gewinnen ist.

Wir sehen nun zunächst die acht s-Termfolgen, die untereinander aufgetragen sind. Diese acht zerfallen wieder in zwei Gruppen von je vier Termfolgen. Bei den ersten vier Folgen, die Paschen mit s_1', s_1'', s_1''' und s_1'''' bezeichnet, unterscheiden sich die Werte der Terme der gleichen Laufzahl (Quantenzahl) in den verschiedenen Folgen so wenig voneinander, daß die Unterschiede in der Figur nicht hervortreten, dagegen sind die Unterschiede in den vier Folgen der zweiten Gruppe, die Paschen mit s_2, s_3, s_4 und s_5 bezeichnet, erheblich größer. Es folgen darunter die zehn Folgen der p-Terme, die Paschen in der Reihenfolge, die durch die Größe des Termes $2p_i$ bestimmt ist, mit den Indizes $i = 1$ bis 10 versehen hat. Schließlich sind unter den p-Termen die beobachteten acht d-Termfolgen aufgetragen, deren Bezeichnung aus der Figur leicht zu ersehen ist.

Die Gesamtheit der kurzen vertikalen Striche

1) N. Bohr, Zeitschr. f. Phys. 2, 423, 1920.

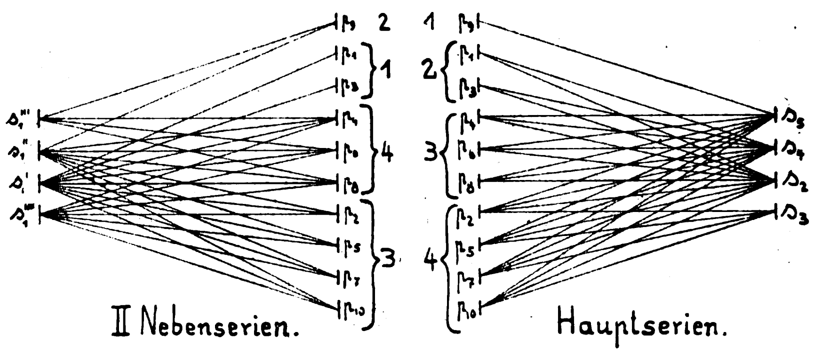


Fig. 2.

gibt im Sinne Bohrs auch ein Bild für die Energien der möglichen Quantenbahnen.

Die eigentlichen Spektrallinien entstehen nun durch Kombination zweier Terme, d. h. durch Übergang des Elektronensystems aus einer möglichen Anordnung in eine andere. Einen solchen Übergang deuten wir in der Figur an durch eine Verbindungslinie zwischen den beiden Termpunkten. Die Gesamtheit der Verbindungslinien gibt dann erstens einen Überblick über die auftretenden Spektrallinien, zweitens ist die Horizontalprojektion jeder Verbindungslinie ein Maß für die Wellenzahl der betreffenden Spektrallinie.

Die beobachteten Linien ordnen sich nun wie bei anderen Spektren in ein System von Haupt- und Nebenserien ein, nur mit dem Unterschiede, daß wir hier nicht eine oder zwei Hauptserien, sondern 30 haben. Die Wellenzahl einer Hauptserienlinie ist in der Paschenschen Terminologie gegeben durch

$$\nu = 1{,}5\, s_i - m p_j, \qquad m = 2, 3, 4, 5, 6 \ldots .$$

Jedem möglichen Wert der Indizes i und j' entspricht eine mögliche Hauptserie, da es für i vier mögliche Werte ($i = 2, 3, 4$ und 5) gibt[1]) und für j' zehn mögliche Werte, so wären im ganzen 40 Hauptserien möglich, von denen aber nur 30 beobachtet sind. Die ersten Linien dieser Hauptserien, mit den Frequenzen

$$\nu = 1{,}5\, s_i - 2 p_j'$$

sind in der Fig. 1 eingezeichnet.

Diesen Hauptserien vollkommen analog sind II. Nebenserien gegeben durch die Formel

$$\nu = 2 p_j' - m s_i, \qquad m = 2{,}5,\ 3{,}5\ 4{,}5 \ldots .$$

wo j' wieder die Werte 1 bis 10 und i die vier Werte 2, 3, 4 und 5 annehmen kann. Von den möglichen 40 Serien sind 29 beobachtet, und zwar dieselben Kombinationen von i und j' wie bei den Hauptserien mit Ausnahme der Serie

$$\nu = 2 p_4 - m s_4.$$

Von diesen Serien sind die Linien

$$\nu = 2 p_j' - 3{,}5\, s_i$$

eingezeichnet. Die Übergänge von $2{,}5\, s_i$ aus würden sehr ultrarote Linien ergeben, die bisher nicht beobachtet sind. Diese Terme sind daher auch nur aus den Serienformeln berechnet.

Bei den II. Nebenserien sind nun auch die Übergänge von den s_1-Termen aus beobachtet. Es wären wieder 40 weitere II. Nebenserien möglich, deren Frequenzen

$$\nu = 2 p_j' - m s_1{}^i, \qquad m = 1{,}5,\ 2{,}5,\ 3{,}5,\ 4{,}5 \ldots .$$

Von diesen sind 28 beobachtet. Die ersten Linien dieser Serien

$$\nu = 2 p_j' - 2{,}5\, s_1'$$

sind in der Figur eingetragen.

Die I. Nebenserien entstehen durch Übergänge von den d-Termen nach Termen $2 p_i$. Von 80 möglichen Serien sind 44 beobachtet. Die Linien

$$\nu = 2 p_j' - 4 d_i$$

sind eingetragen.

Die Figur gibt so einen Überblick über den erstaunlichen Reichtum von Linien im Neonspektrum. Aber auch hier ist es so wie bei den meisten anderen Spektren. Von der ungeheuer großen Zahl möglicher Kombinationen oder möglicher Übergänge zwischen Quantenbahnen tritt bei normalen Anregungsbedingungen nur eine beschränkte Anzahl auf. Auch hier waltet ein Auswahlprinzip oder ein Übergangsverbot, und es ist interessant nachzusehen, ob irgendwelche Gesetzmäßigkeiten diese Auswahl bestimmen. Das ist nun tatsächlich der Fall und tritt deutlich hervor, wenn wir die Terme nicht wie bei Paschen nach der Größe, sondern nach der Zahl der von ihnen ausgehenden Übergänge anordnen und, ohne die Größe der Terme zu berücksichtigen, die Mannigfaltigkeit der Terme durch vertikal übereinanderstehende

1) Die Übergänge nach den Termen $1{,}5\, s_1'$, $1{,}5\, s_1''$ .... würden außerordentlich weit im Ultraroten gelegenen Linien entsprechen, die nicht beobachtet werden können. Die Werte der Terme $1{,}5\, s_1'$, $1{,}5\, s_1''$ .... sind auch nur aus den Serienformeln durch Extrapolation gewonnen.

Striche markieren, wie es in Fig. 2 geschehen ist. Tragen wir dann die tatsächlich beobachteten Kombinationen wieder als Verbindungslinien ein, so entsteht das Bild der Fig. 2, aus der nun die Gesetzmäßigkeit in der Auswahl der Übergänge in die Augen springt. Die rechte Hälfte der Figur stellt den Komplex der 30 Hauptserien, der linke Teil den Komplex der 28 II. Nebenserien dar. Man sieht zunächst, daß die zehn p-Terme in vier Untergruppen zerfallen, je nach der Zahl der von ihnen ausgehenden Übergänge. Diese Gruppen sind durch Klammern zusammengefaßt. Die erste Gruppe bildet p_9, die zweite p_1 und p_3, die dritte p_4, p_6 und p_8, die vierte schließlich p_2, p_5, p_7 und p_{10}. Im Komplex der Hauptserien geht von p_9 nur ein Übergang nach s_5, von p_1 und p_3 gehen je zwei Übergänge nach s_4 und s_2, von p_4, p_6 und p_8 gehen je drei Übergänge nach s_5, s_4 und s_2, von p_2, p_5, p_7 und p_{10} gehen Übergänge nach allen vier Termen s_2, s_3, s_4, s_5. Bei den II. Nebenserien bleiben dieselben Untergruppen bestehen, doch ist die Zahl der Übergänge von den einzelnen Untergruppen aus eine andere als bei den Hauptserien und durch die Zahlen 2, 1, 4, 3 gekennzeichnet. Da in das vorliegende Bild sämtliche beobachtete Serien eingetragen und keine hinzugefügt oder weggelassen ist, so kann man wohl nicht daran zweifeln, daß wir es hier mit einer gesetzmäßigen Auswahl der Übergänge zu tun haben.

Für den Komplex der II. Nebenserien

$$\nu = 2p_i' - ms_i \qquad i = 2, 3, 4, 5$$

gilt dasselbe Schema wie für die Hauptserien, jedoch fehlt, wie schon erwähnt, die Serie

$$\nu = 2p_4 - ms_4,$$

wodurch natürlich die Symmetrie des Bildes gestört wird. Ich möchte vermuten, daß diese Serie doch vorhanden ist. Aus welchem Grunde sie sich der Beobachtung entzieht, weiß ich nicht.

Es liegt nun nahe, auch die den I. Nebenserien entsprechenden Übergänge zwischen d- und p-Termbahnen in ein ähnliches Schema einzuordnen, wobei man natürlich verlangen muß, daß die Einteilung der p-Terme in vier Untergruppen auch hier erhalten bleibt. Ohne weiteres gelingt eine solche Einteilung nicht, jedoch glaube ich, daß das durch Fig. 3 wiedergegebene Bild wohl das Richtige treffen wird. Von den acht d-Termen ordnen sich zwanglos die Übergänge von d_4', d_1', d_3, d_2 und d_6 in ein Schema ein, bei dem die einmal erkannten Untergruppen der p-Terme erhalten bleiben. Auch bei p_4 entsteht keine erhebliche Schwierigkeit. Hier sind von der Serie

$$\nu = 2p_7 - md_4$$

nur zwei Linien mit den Intensitäten 4 und 0,5

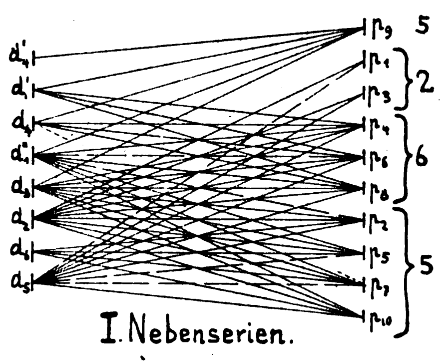


Fig. 3.

von Paschen vermerkt. Diese passen nicht in das Schema. Wenn wir sie bei der Einordnung weglassen, so läßt sich das wohl rechtfertigen. Erheblichere Unannehmlichkeiten bereiten die Übergänge von d_1'' und d_5 aus. Bei d_1'' verlangt die Einordnung in das Schema das Vorhandensein der beiden Serien

$$\nu = 2p_8 - md_1'',$$
$$\nu = 2p_2 - md_1''.$$

Die Linien der ersteren Serie würden dicht neben denen der Serie

$$\nu = 2p_6 - md_1'$$

und zum Teil zwischen zwei starken Linien liegen, so daß es wohl möglich wäre, daß aus diesem Grunde diese Serie bisher der Beobachtung entgangen ist, für das Fehlen der Serie

$$\nu = 2p_2 - md_1''$$

vermögen wir aber zunächst keine plausiblen Gründe anzugeben. Ähnliches gilt für die von d_5 aus zu erwartenden Übergänge nach p_1, p_5 und p_7.

Für die erste Linie der Serie

$$\nu = 2p_1 - md_5$$

ergäbe sich nach Paschens Berechnungen die Wellenzahl

$$\nu = 14004{,}594,$$

während in den Tabellen der Wert

$$\nu = 14004{,}29$$

für eine mit der Intensität 3 beobachtete, aber nicht in das Serienschema eingeordnete Linie enthalten ist. Ob diese Zuordnung richtig ist, muß vorläufig offen bleiben, um so mehr, da die Identifizierung höherer Glieder dieser Serie mit beobachteten, aber nicht eingeordneten Linien nicht gelingt.

Für das Fehlen der Serien

$$\nu = 2p_5 - md_5$$
$$\nu = 2p_7 - md_5$$

vermag ich keine Gründe anzugeben, es wäre aber wohl wünschenswert, nach diesen und den oben erwähnten Serien noch einmal besonders zu suchen. Dabei ist zu bemerken, daß sie bei

normalen Anregungsbedingungen beobachtet werden müßten, denn wir wissen vor allem aus den Beobachtungen von Stark und seinen Schülern[1]) am Helium, daß bei Anwendung sehr starker elektrischer Felder auch Serien auftreten können, bei denen die gewöhnlichen Auswahlprinzipien durchbrochen sind.

Fügen wir zu den von Paschen gefundenen die vier oben erwähnten Serien hinzu (in der Fig. 3 sind diese Übergänge gestrichelt eingezeichnet), so entsteht ein Schema, bei dem die Anzahl der Übergänge zu den vier Untergruppen der p-Terme durch die Zahlen 5, 2, 6 und 5 gekennzeichnet ist.

Nachdem sich aus diesen Überlegungen eine Einteilung der p-Terme in vier Untergruppen ergeben hat, wird man sich nach weiteren Prüfsteinen für dies Resultat umsehen. Dazu kann nun die von Paschen gemachte Entdeckung herangezogen werden, daß zur formelmäßigen Darstellung der Termfolgen die Ritzsche Formel nicht immer ausreicht, sondern durch andere Formeln zu ersetzen ist. Eine Folge von Termen läßt sich stets darstellen durch

$$T_m = \frac{N}{[f(m)]^2} \qquad m = 1, 2, 3, 4 \ldots$$

wo N die Rydbergkonstante und $f(m)$ eine Funktion des ganzzahligen Parameters m ist. Für $f(m)$ ergeben sich bei den zehn p-Termfolgen folgende Funktionen

$$p_9 \quad f_9(m) = m + p_9 + \frac{\pi_9}{m^2}$$

$$\begin{cases} p_1 \quad f_1(m) = m + p_1 + \frac{\pi_1}{m} + c\sqrt{me^m} \\ p_3 \quad f_3(m) = m + p_3 + \frac{\pi_3}{m} + c\sqrt{me^m} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_4 \quad f_4(m) = m + p_4 + \frac{\pi_4}{m} + ce^{m/2} \\ p_6 \quad f_6(m) = m + p_6 + \frac{\pi_6}{m^2} \\ p_8 \quad f_8(m) = m + p_8 + \frac{\pi_8}{m^2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_2 \quad f_2(m) = m + p_2 + \frac{\pi_2}{m} + ce^{m/2} \\ p_5 \quad f_5(m) = m + p_5 + \frac{\pi_5}{m} + ce^{m/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} p_7 \quad f_7(m) = m + p_7 + \pi_7 \cdot e^{4/m^2} + c \cdot c^{m/2} \\ p_{10} \quad f_{10}(m) = m + p_{10} + \frac{\pi_{10}}{m^2} + ce^{m/2} \text{ oder } m + \\ \qquad + p_{10} + \pi_{10} c^{2/m} + c \cdot e^{m/2}. \end{cases}$$

Wie man sieht, zeigt $f(m)$ für die einzelnen Untergruppen im allgemeinen denselben Charakter, eine Ausnahme macht dabei allerdings die Termfolge p_4.

Entscheidende Aufschlüsse über die Zusammengehörigkeit der einzelnen Terme wären aus Beobachtungen über den Zeeman- und Stark-Effekt an Neonlinien zu erwarten. Über letzteren liegt eine Arbeit von Nyquist[1]) vor, die dem Verfasser aber nicht zugänglich ist. Der Zeeman-Effekt an Neonlinien ist von Lohmann[2]) untersucht worden, dessen Dissertation dem Verfasser zur Zeit der Niederschrift dieser Arbeit nicht zur Verfügung steht. Soviel sich aus den Angaben Paschens über diese Arbeit ersehen läßt, ist das bisher vorliegende Material noch nicht sehr ergiebig.

Schlüsse über die Gleichartigkeit von Termen kann man wohl nur dann ziehen, wenn Kombinationen desselben Termes mit verschiedenen anderen denselben Typ, und zwar einen anormalen ergeben. Als Bestätigung für die Gleichartigkeit der Terme p_1 und p_3 kann man die Tatsache betrachten, daß die Linien

$$\nu = 1{,}5\, s_4 - 2p_3$$

und

$$\nu = 1{,}5\, s_4 - 2p_1$$

denselben Zeeman-Typ und zwar ein $^3/_2$ normales Triplet ergeben. Weiter kann man aus der Verschiedenheit des Zeeman-Typs für die Linien

$$\nu = 1{,}5\, s_5 - 2p_9$$
$$\nu = 1{,}5\, s_5 - 2p_8$$
$$\nu = 1{,}5\, s_5 - 2p_5$$

schließen, daß die Terme p_9, p_8 und p_5 nicht zu derselben Gruppe gehören, was mit unserer Einteilung im Einklang ist. Denselben Schluß kann man aus der Verschiedenheit der Zeeman-Typen von

$$\nu = 1{,}5\, s_4 - 2p_8$$

und

$$\nu = 1{,}5\, s_4 - 2p_3$$

für die Termfolgen p_8 und p_3 ziehen.

Weitere Schlüsse, die sich gegebenenfalls auch auf die Zusammengehörigkeit verschiedener s- und d-Termfolgen erstrecken könnten, haben, wie gesagt, ein genaueres Studium des Zeeman-Effektes der Neonlinien zur Voraussetzung.

Anmerkung bei der Korrektur: Inzwischen ist von Paschen[3]) ein Nachtrag zu seiner Arbeit über das Spektrum des Neons erschienen. Dieselbe bedingt folgende Berichtigungen bzw. Ergänzungen der vorstehenden Arbeit:

1) J. Koch, Ann. d. Phys. **48**, 98, 1915; J. Stark, Ann. d. Phys. **48**, 210, 1915; G. Liebert, Ann. d. Phys. **56**, 599 u. 610, 1918.

1) Nyquist, Phys. Rev. (II), 1917, S. 226.
2) W. Lohmann, Diss. Halle 1907, S. 54—58.
3) F. Paschen, Ann. d. Phys. **63**, 201, 1920.

Die bisher als II. Nebenserien bezeichneten Serien

$$\nu = 2p_j - ms_1^{\,i} \qquad m = 3{,}5,\ 4{,}5,\ 5{,}5 \ldots$$

sind als I. Nebenserien anzusehen.

Die vermutete Einordnung der Linie

$$\nu = 2p_1 - 4d_5 = 14004{,}29$$

wird durch Paschen bestätigt.

Die in der vorstehenden Arbeit dargelegten Gesetzmäßigkeiten in der Auswahl der Kombinationen sind auch in Paschens Tabellen IIa, IIIb und IV enthalten; es wird dort auch ein ähnlicher Rückschluß auf die Zusammengehörigkeit verschiedener p-Termfolgen gezogen, der aber nicht soweit geht wie der des Verfassers, ohne mit diesem in Widerspruch zu stehen. Durch die Neuberechnung der Termfolgen verliert der aus dem Charakter der Funktionen $f(m)$ gezogene Rückschluß auf Zusammengehörigkeit von p-Termfolgen an Beweiskraft; bleibt immerhin bemerkenswert.

Von besonderem Interesse erscheinen in diesem Zusammenhange die Überlegungen, die Sommerfeld[1]) in seiner inzwischen erschienenen Arbeit über die Rungeschen Nenner der Termfolgen ausstellt. Die dort wiedergegebene Tabelle VIII scheint mit den Überlegungen der vorstehenden Arbeit vereinbar, wenn man annimmt, daß die Gruppe der vier Terme p_2, p_5, p_7 und p_{10} in zwei weitere Untergruppen p_2, p_7 einerseits und p_5, p_{10} andrerseits zerfällt.

1) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. **63**, 221, 1920.

BESPRECHUNGEN.

L. Rougier, Die Materialisierung der Energie. Abhandlung über Relativitätstheorie und Quantentheorie. 148 S. Paris 1919.

Die kleine Schrift entwickelt von einem systematischen philosophischen Gesichtspunkt aus in übersichtlicher, weiteren Kreisen zugänglichen Form die Ergebnisse der neuesten physikalischen Entwicklung. Die mitgeteilten Tatsachen sind dem Physiker bekannt; es genügt zu berichten, in welchen Zusammenhang sie gestellt werden.

Man unterscheidet — bemerkt der Verfasser einleitend — seit Comte zwei Gattungen von Problemen: die durch die exakten Wissenschaften prinzipiell lösbaren und die unlösbaren metaphysischen. Manche metaphysischen Probleme erweisen sich als falsch gestellte Fragen und verschwinden bei fortschreitender Entwicklung; so, wenn man ausgehend von einem Dualismus zwischen wägbarer Materie nnd unwägbarer Energie deren Wechselwirkung verstehen will. Alle damit zusammenhängenden Schwierigkeiten lassen sich durch die Relativitätstheorie und Quantentheorie beseitigen, wonach die Energie Trägheit, Gewicht und Struktur besitzt. Man kann diese Wandlung unserer Auffassung als Materialisierung der Energie bezeichnen. (Vorrede.)

Im ersten Kapitel werden die Postulate des Dualismus formuliert:

1. Die Energie ist nur in der Materie lokalisiert.
2. Anwesenheit der Energie in einem Körper vermehrt nicht seine Trägheit.
3. Insbesondere Anwesenheit der kinetischen Energie nicht seine Masse.
4. Energieabsorption und -emission durch Strahlung ändert nicht seine Masse.
5. Die Masse eines Körpers ist unzerstörbar; das Prinzip der Erhaltung der Masse ist verschieden vom Prinzip der Erhaltung der Energie.

Diese Ansicht führt zu großen Schwierigkeiten; um sie zu beheben, hat man versucht, eines der letzten Elemente auf das andere zurückzuführen (Atomistik, Kraftzentrentheorie), aber diese Bemühungen sind gescheitert (1. Kapitel). Die Schwierigkeiten verschwinden in der neuen Auffassung. Nachdem der Verfasser einen kurzen Abriß der speziellen Relativitätstheorie gegeben hat (2. Kapitel), zeigt er, wie in der elektromagnetischen Feldtheorie die Postulate des Dualismus zerstört werden; das erste durch Faraday, das zweite durch J. J. Thomson und M. Abraham (3. Kapitel). Aus diesen Bestrebungen erwuchs die Elektronentheorie, die zur „Dematerialisierung der Materie“ führte; die Materie löst sich auf in Elektronen oder Löcher im Äther (4. Kapitel). Das 5. Kapitel handelt im Gegensatz dazu von der „Materialisierung der Energie“: Aus der Elektronentheorie wird der Satz abgeleitet, daß die Masse eines Elektrons seiner Energie gleich ist (Lichtgeschwindigkeit = 1) und aus der Relativitätstheorie ergibt sich die Verallgemeinerung dieser Gleichung auf alle Körper. Aus dem Vorhandensein des Strahlungsdruckes folgt ferner die Trägheit auch der Strahlungsenergie, im Widerspruch mit den Postulaten 3—5 des Dualismus (5. Kapitel). Weil Trägheit, besitzt die Energie auch Schwere. Das folgt aus der Äquivalenz von träger und schwerer Masse, die durch die Eotvösschen Versuche und nach J. Langevin durch die Abweichung der Atomgewichte von der Ganzzahligkeit bewiesen wird. Im Anschluß hieran bespricht der Verfasser die allgemeine Relativitätstheorie, die Gravitationstheorie und deren astronomische Bestätigung (6. Kapitel). Die bisherigen Ausführungen haben gezeigt, daß der Begriff der Masse in den der Energie aufgeht. Aber es gibt zwei Energieformen: Elektronenenergie und Strahlungsenergie; beide haben Trägheit und Gewicht; das Problem aber, ihre Wechselwirkung zu verstehen, tritt an Stelle des Pseudoproblems von der Wirkung des Unwägbaren auf das Wägbare. Eine erste Antwort gibt die klassische Elektronentheorie, die annimmt, daß Beschleunigungen der Elektronen Wellen im Äther hervorrufen. Sie versagt bei der Erklärung der schwarzen Strahlung, was Anlaß zur Aufstellung der Quantentheorie wurde. Deren Grundsätze werden entwickelt (7. Kapitel).

Aus den neuen Forschungen gehen also zwei verschiedene Weltanschauungen hervor: 1. die Dematerialisierung der Materie, wonach Materie nur in den singulären Punkten das Faraday-Maxwellschen Dielektrikums besteht. 2. die Materialisation der Energie, wonach die Energie Trägheit, Gewicht und Struktur erhält und in zwei Formen erscheint:

Materie und Strahlung. Die Gemeinsamkeit der Eigenschaften dieser beiden Formen erklärt ihre Wechselwirkung und das alte metaphysische Problem von der Wirkung des Unwägbaren auf das Wägbare verschwindet als ein Pseudoproblem (8. Kapitel). Hertz.

W. Ostwald, Die Farbenlehre. II. Buch: Physikalische Farbenlehre. XII u. 259 S. m. 64 Fig. im Text. Leipzig, Verlag Unesma. 1919. Geheftet M. 13.—, geb. M. 15.60.

—, **Die Harmonie der Farben.** VI u. 48 S. m. 22 Fig. im Text. Leipzig, Verlag Unesma. 1918. Geheftet M. 2.60.

—, **Die Farbschule.** Eine Anleitung zur praktischen Erlernung der wissenschaftlichen Farbenlehre. VI u. 48 S. mit 6 Tafeln u. 11 Fig. im Text. Leipzig, Verlag Unesma. 1919. Gebunden M. 9.75.

—, **Der Farbkörper und seine Anwendung zur Herstellung farbiger Harmonien.** 12 Tafeln m. Text von 24 S. u. 9 Fig. Leipzig, Verlag Unesma. 1919. Ausgabe A auf gelblichem Karton: M. 100.—, Ausgabe B auf weißem Karton: M. 125.—

Unermüdlich ist W. Ostwald tätig, um sein neues System der Farben und der Farbenlehre in Wissenschaft, Kunst, Technik und Kunstgewerbe zur Geltung zu bringen. Ich habe seine ersten, grundlegenden Veröffentlichungen im 20. Jahrgang dieser Zeitschrift S. 357 angezeigt. Jetzt liegen wieder vier Bücher von ihm über den gleichen Gegenstand vor. Das Wichtigste von ihnen — wenigstens für uns an dieser Stelle — ist das oben zuerst genannte, das zweite Buch der großen, auf fünf Bände berechneten Farbenlehre. In ihm behandelt Ostwald die Beziehungen seiner Farbenlehre zu den Ergebnissen der physikalischen Forschung über die Natur der Farben. Dementsprechend werden in den ersten sieben Kapiteln die Grundlagen der Optik in kurzen Zügen dargestellt. Das 8. Kapitel behandelt die Photometrie der unbunten Farben und die Herstellung der Grauleiter nach dem Fechnerschen Gesetz. Das 9. Kapitel erörtert die Beziehungen der Farben des Spektrums zu denen des Farbenkreises. Daß in der von ihm durchgeführten Anordnung der Farben auf seinem Farbenkreise in der Tat ein Fortschreiten in gleichen Stufen verwirklicht ist, beweist Ostwald, indem er die Beziehung seiner Stufen zur Wellenlänge in einer Kurve darstellt und diese mit der Kurve der Unterschiedsempfindlichkeit im Spektrum, wie sie A. Köster und Dieterici festgestellt haben, vergleicht. Kapitel 10 behandelt ausführlich einen der Hauptpunkte der Ostwaldschen Farbenlehre, die Lehre vom „Farbenhalb" (vgl. die frühere Besprechung). Ostwald hat sich bemüht, diesen ganz besonders umstrittenen Teil seiner Lehre einer möglichst objektiven Prüfung zu unterziehen. Während er im 8. Kapitel die Farben seines Farbenkreises mit reinen Spektralfarben verglichen und auf diese Weise die Zuordnung der Wellenlängen zu den Nummern seines Farbenkreises festgestellt hatte, beschreibt er nunmehr einen einfachen Apparat, der ihm gestattet, die Mischfarbe eines beliebig begrenzten Teiles des Spektrums mit den Farben seines Farbenkreises zu vergleichen. Diese Beobachtungen werden ausführlich dargestellt und besonders der Einfluß der Farbenlücke im Spektrum, d. h. das Fehlen der Purpurtöne bei den homogenen Farben, eingehend erörtert. Als Ergebnis stellt Ostwald die vollständige Bestätigung der Lehre vom Farbenhalb hin. So bestechend diese Darlegungen sind, ist mir der Beweis doch offen gestanden nicht ganz einleuchtend, weil sich die Messungen nur auf die Feststellung von Farbtönen beziehen, während die Lehre vom Farbenhalb doch eine Definition der „reinen Farben" geben will. Mir scheinen diese Messungen nur eine Kontrolle für die Richtigkeit der auf anderem Wege hergestellten Zuordnung der Farben und der Wellenlängen zu sein. Interessanter sind die Messungen über die Helligkeit der Farben des Farbenkreises mit Hilfe der Grauleiter und der Vergleich dieser Messungen mit denen von Fraunhofer über die Helligkeit der Spektralfarben. Hier ergibt sich, daß die Helligkeiten von Gegenfarben, in Prozenten ausgedrückt, sich in der Tat sehr nahe zu 100 ergänzen, wie es nach der Lehre vom Farbenhalb der Fall sein muß, und die Übereinstimmung der Helligkeiten der Ostwaldschen Messungen mit denen aus Fraunhofers Messungen berechneten Helligkeiten für die unvollständigen oder vollständigen Farbenhalbe des Spektrums ist ebenfalls gut und spricht in gewissem Sinne für die Richtigkeit der ganzen Überlegungen. Das 11. Kapitel behandelt die Messungen des Farbtones mit Lambertschem Spiegel, mit Polarisationsmischapparat und mit Kreisel und die technische Herstellung der Farbtonleiter, das 12. die Messung des Weiß- und Schwarzgehalts. Hier setzt sich Ostwald eingehend mit seinen Vorgängern, besonders mit Hering, auseinander, der die Bedeutung des Schwarzgehaltes als dritten Bestimmungsstückes einer Farbe an Stelle der Helligkeit ganz richtig erkannt und doch den entscheidenden letzten Schritt zur quantitativen Farbenlehre entschieden abgelehnt habe. Ausführlich wird sodann die Ostwaldsche Methode der Messung des Schwarz- und Weißgehaltes, einerseits im Spektrum, andererseits mit Filtern besprochen. Ostwald versichert, daß die Ergebnisse beider Methoden befriedigend übereinstimmten, und führt als weiteren Beweis für die Richtigkeit des ganzen Verfahrens die vollständige Übereinstimmung des auf diesem Wege ermittelten Reinheitsverhältnisses mit dem durch unmittelbare Messung im Polarisationsmischapparat festgestellten Sättigungsverhältnisse von Gegenfarben an. Das 13. Kapitel bringt das Ostwaldsche System der Farbenbezeichnung. Das 14. behandelt unter dem Namen „Metamere Farben" solche Farben, die trotz verschiedener Zusammensetzung gleiches Aussehen haben. Im 15. Kapitel endlich wird der Gedanke ausgeführt, daß es zweckmäßig wäre, auf allen Gebieten der Anwendung der Farben nicht unbeschränkt aus der etwa eine Million betragenden Anzahl aller unterscheidbaren Farben jede beliebige zu benutzen, sondern sich auf eine endliche und übersehbare Anzahl unter ihnen zu beschränken und alle übrigen vom Gebrauche auszuschließen, gerade so wie man in der Musik auch nicht jeden beliebigen Ton benutzt, sondern nur eine endliche Auswahl, die durch die musikalische Skala und die Festlegung des Kammertones bestimmt sind. Die vollständige Ausführung des Ostwaldschen Farbensystems mit einem Farbkreise von 24 Farbentönen, mit 15 Graustufen und je 104 Abstufungen von jeder Farbe zu Weiß, Schwarz und Grau würde 2535 Farbnormen geben. Ostwald meint, daß eine Beschränkung auf 8 Graustufen und auf je 27 Stufen von der Farbe zum Weiß, Schwarz oder Grau für das praktische Bedürfnis zunächst genügen würde; das würde 680 Farbnormen ausmachen.

Diese kurze Inhaltsangabe mag die Vielseitigkeit des Ostwaldschen Buches und den Reichtum an anregenden Gedanken charakterisieren. In bezug auf die Darstellung soll das Bestreben Ostwalds, alle Fremdwörter zu vermeiden und durch zuweilen recht

kühne Verdeutschungen zu ersetzen, nicht unerwähnt bleiben. Er sagt „kreß“ für orange, „veil“ für violett, „Fächerung“ für Dispersion, „Schluckung“ für Absorption; ein „Schluckzug“ ist eine Absorptionskurve. Aber wo er neue Begriffe bildet, führt er neue Fremdwörter ein! Es ist mir unverständlich, warum er es anderen überläßt, für den überhaupt recht unglücklich gewählten Ausdruck „metamere Farben“ ein gutes deutsches Wort zu erfinden. Mancherlei Flüchtigkeiten sind mir beim Lesen des Buches aufgefallen: einige seien hier zu Nutz und Frommen der Leser verbessert: S. 73 muß es heißen $\sin^2 w$ statt $\tang^2 w$, Fig. 34 auf S. 109 müßte um 90 Grad gedreht sein, um eine dem Text entsprechende Betrachtung zu ermöglichen; in der Tabelle auf S. 110 ist die zum Farbton 94 gehörende Wellenlänge mit 560,0 sicherlich falsch angegeben; vielleicht soll es 562,0 lauten; auf S. 112 oben müssen die Worte „empfindlich“ und „unempfindlich“ vertauscht werden.

Das Studium der Farben hat Ostwald schließlich auch auf die Probleme der Farbenharmonie geführt. Er behandelt sie in dem zu zweit genannten Büchlein, das den Anspruch erhebt, zum erstenmal die Gesetze einer wissenschaftlichen Farbenharmonik darzustellen. Ihren Hauptsatz spricht Ostwald folgendermaßen aus: Harmonisch oder zusammengehörig können nur solche Farben erscheinen, deren Eigenschaften in bestimmten einfachen Beziehungen stehen. Die Darlegung aller denkbaren einfachen Beziehungen, wie sie sich aus dem Bau des Ostwaldschen Farbkörpers (s. unten) ableiten lassen, bildet den Inhalt des Büchleins. Zum Studium dieser Verhältnisse bringt Ostwald durch den Verlag Unesma 15 Farbplatten in den Handel, jede gewissermaßen eine kleine Aluminiumpalette mit 5 bunten und 2 unbunten Farben von gleichem Weiß- und Schwarzgehalte; der ganze Satz kostet 75 Mark.

Das an dritter Stelle genannte Werk, die Farbschule, schließt sich an die im vorigen Jahre besprochene Farbfibel an und bildet gewissermaßen deren nächsthöhere Stufe. Es enthält vor allem die genauen Anweisungen zur Herstellung der sämtlichen Farbenstufen und gibt als Muster zum Einstellen der Farben eine große Anzahl von Farbproben mit den Bezeichnungen des Ostwaldschen Systems, je 24 Proben auf 6 Tafeln.

Eine vollständige Darstellung des gesamten Ostwaldschen Farbsystems in seiner oben angeführten Beschränkung auf 680 Farbnormen stellt schließlich der zuletzt angeführte „Farbkörper“ dar. Der Farbkörper ist die räumliche Anordnung aller bunten und unbunten Farben in einem Doppelkegel, dessen eine Spitze der Ort des reinsten Weiß, die andere der Ort des tiefsten Schwarz ist; die reinen Farben sind auf dem Umfange des äquatorialen Kreises angeordnet, die Abstufungen nach Weiß und nach Schwarz auf den Kegelmänteln, die nach Grau im Innern des Kegels. Die in den Handel gebrachten 12 Tafeln sind die den 24 Farben des Farbenkreises entsprechenden 12 Haupt- oder Achsenschnitte durch diesen Doppelkegel. Jede Tafel enthält also einen Farbenrhombus mit Weiß und Schwarz an der oberen und unteren Ecke, zwei Gegenfarben an den beiden anderen Ecken und 27 Übergängen von der reinen Farbe zu Weiß, Schwarz und Grau, oder anders ausdrückt, jede Tafel enthält zwei farbgleiche Dreiecke in Gegenfarben, die mit ihren Weiß-Schwarz-Seiten aneinander gelegt sind. Der beigegebene Text bringt eine allgemeine Beschreibung des Farbkörpers, erläutert sodann dessen Anwendung zur Bestimmung einzelner Farben und behandelt schließlich wieder an der Hand der Tafeln die Lehre von den harmonischen Farben.

W. König.

H. Diels, Antike Technik. 2. erw. Aufl. 232 S. Leipzig und Berlin, B. G. Teubner. 1920. Geh. M. 9.—.

Der bekannte Berliner Philologe hat in diesem Buche sieben Vorträge vereinigt über ein Gebiet des Geisteslebens der Griechen, das in der klassischen Bildung unserer Schulen in der Regel arg zu kurz kommt, die wissenschaftliche Naturerkenntnis und ihre Anwendung zur Naturbeherrschung in der Technik.

Der erste der Vorträge: „Wissenschaft und Technik bei den Hellenen“ unterrichtet allgemein über die Ziele des Buches. Anknüpfend an die Anfänge wissenschaftlichen Denkens in der altjonischen Schule glaubt der Verfasser zeigen zu können, daß diese Anfänge astronomisch-mathematischer Theorien verbunden mit genauer Naturbeobachtung solche technischen Leistungen ermöglichten, wie z. B. die Kriegsbrückenbauten, von denen die Geschichtsschreiber bewundernd erzählen. Ja, er geht so weit, daß er in Männern wie Thales, Anaximander und Pythagoras nicht nur theoretische Forscher, sondern gleichzeitig bedeutende Techniker sieht. Mag mancher glauben, daß er damit zu weit gegangen sei, so wird man ihm doch gern folgen, wenn er zeigt, wie die Fortschritte der theoretischen Einsichten immer eine Steigerung der technischen Leistungen nach sich ziehen, und man lernt verstehen, wie unter Einfluß der wachsenden Erfolge der Gedanke, die Natur mathematisch zu beherrschen, überspannt werden konnte, wenn man ihn auf die Architektur oder gar die bildende Kunst anwenden wollte. In dem Genius des Archimedes, dem der Schluß des Vortrages gewidmet ist, sehen wir, solchen Verirrungen gegenüber, das Idealbild einer Vereinigung einzigartiger mathematischer Leistung mit sicherer Erkenntnis der praktischen Möglichkeiten.

Die sechs folgenden Vorträge geben Einzelausführungen. So behandelt der zweite Vortrag die antiken Türen und ihre Verschlüsse. Der dritte Vortrag: „Dampfmaschine, Automat, Taxameter“ wird seinem Titel zum Trotz mehr noch für den Physiker als den eigentlichen Techniker seinen Reiz haben. Der Techniker dürfte die hier nach Heron beschriebenen Instrumente mehr als Spielereien ansehen, während der Physiker aus ihnen ein Bild der Kenntnisse zusammensetzen kann, die uns die antike Physik überliefert hat. Denn vornehmlich durch die Beschäftigung mit Dingen dieser Art, hat sich die Bekanntschaft mit den einfachsten physikalischen Gesetzen durch das Mittelalter hindurch lebendig erhalten.

Mehr kulturhistorische Bedeutung als wissenschaftlich-technische hat der vierte Vortrag über die „antike Telegraphie“, d. h. die Eilübermittlung von Nachrichten durch Lichtsignale und dergleichen.

Bei den Ausführungen des fünften Vortrags über die „antike Artillerie“ tritt, vielleicht mehr als der Verfasser glauben möchte, hervor, daß nicht jede theoretisch erdachte Versuchskonstruktion auch praktische Brauchbarkeit besitzt. Die großen leistungsfähigen Wurfgeschütze sind übersichtlich durchkonstruierte Maschinen[1]). So komplizierte Apparate, wie das „antike Maschinengewehr“ oder die Windbüchse, bei denen leider auch die Beschreibung des Verf. nicht sehr durchsichtig ist, dürften sich in der Praxis kaum bewährt haben. Das gleiche gilt von der Dampfkanone, die dem Archimedes zugeschrieben wird. Ihre Zeit kam erst mit dem Schießpulver.

Der sechste Vortrag über die antike Chemie

1) Die Maße der Pfeile werden vom Verf. auf $^1/_{100}$ mm genau angegeben! Eine solche Präzisionsarbeit wird auch der Verf. wohl nicht für erforderlich halten.

zeigt den Verf. als Philologen. Er beginnt mit der Erklärung des Namens „Chemie" und schließt daran eine ausführliche Besprechung der antiken Quellenschriften über Chemie und Alchemie.

Neu hinzugefügt ist in dieser zweiten Auflage der siebente Vortrag über die antiken Uhren. Er ist ziemlich umfangreich, nimmt er doch fast ein Drittel des ganzen Buches ein. Die rohe Zeitbestimmung nach der Länge des Schattens des menschlichen Körpers, mit der man sich zur Not im bürgerlichen Leben behalf, sehen wir verfeinert durch die Einführung des auf horizontaler Ebene senkrechten Gnomons, der einfachsten Form der Sonnenuhr. Ihre theoretische Durchbildung erfordert aber Hilfsmittel, über die man in jener Frühzeit nicht verfügte. Bereits die Babylonier hatten daher gelehrt, den Schatten nicht auf einer Ebene, sondern auf einer Halbkugel aufzufangen, die gewissermaßen ein Abbild der Halbkugel des Himmels vorstellt. Auch hier blieb die Einrichtung für den praktischen Gebrauch noch schwierig genug, da die Alten die beiden durch Sonnenaufgang und -untergang getrennten Zeiträume des Tages je für sich in zwölf gleiche Teile teilten, so daß die Länge der Tages- und Nachtstunden mit der Jahreszeit wechselte. Der Verf. führt die mannigfachen Konstruktionen dieser Uhren vor. Die Modelle der in späterer Zeit benutzten „ebenen" Sonnenuhren würden leichter verständlich werden, wenn ihnen einige Worte über das mathematische Prinzip beigefügt wären.

Weiter schildert der Vortrag die Entwicklung der Wasseruhr. Dabei berichtet der Verf. auch über seinen Versuch, die von Plato im Garten der Akademie aufgestellte Werkuhr zu rekonstruieren[1]). Die Schilderung der hohen Vervollkommnung der Wasseruhren, deren Genauigkeit bis zur Brauchbarkeit für astronomische Zwecke gesteigert werden konnte, und ihre Ausgestaltung mit Zeigerwerken und Automaten leitet über zum Schluß des Vortrags, wo die astronomische Stadtuhr von Salzburg und die Heraklesuhr von Gaza, ein Vorbild der Kunstuhren des Mittelalters, besprochen werden.

Der reiche Inhalt des Buches wird im anspruchslosen Plauderton vorgetragen. Gewiß wird jeder, der Sinn für die geschichtliche Entwicklung hat, an dem Buche seine Freude haben, zumal es vorzüglich ausgestattet und mit zahlreichen Abbildungen und einer Anzahl Tafeln geschmückt ist. G. Prange.

1) Leider ist ihm bei der Beschreibung ein kleines Versehen untergelaufen. Der durch den Kapselheber bewirkte dauernde Wasserzufluß erzeugt nicht einen hohen Überdruck, wie er meint, sondern treibt nur einen dauernden Luftstrom durch die Pfeife. Auch der Vergleich mit der Werkuhr des Leonardo da Vinci scheint nicht richtig, da bei dieser wohl das Prinzip der hydraulischen Presse verwendet ist.

A. March, Theorie der Strahlung und der Quanten. gr. 8°. V u. 182 Seiten. Mit 36 Figuren. 1. Auflage. Leipzig, J. A. Barth. 1919. M. 12.—, geb. M. 14.—, dazu Teuerungszuschläge des Verlags.

Trotzdem die Entwicklung der Planckschen Quantentheorie noch nicht vollendet ist, hat sie doch zu ungeheuer vielen Entdeckungen Veranlassung gegeben, so daß der Versuch einer zusammenfassenden Darstellung seitens des Verfassers gerechtfertigt erscheint.

In einem ersten Abschnitt werden die Hauptresultate der thermodynamischen und elektrodynamischen Theorie der Temperaturstrahlung, die in den Gesetzen von Kirchhoff, Stefan-Boltzmann, Wien und Rayleigh-Jeans ihren Inhalt finden, abgeleitet. Es ergibt sich jedoch, um die Ultraviolettkatastrophe zu verhindern, die Notwendigkeit einer neuen Theorie.

Damit gelangen wir im zweiten Abschnitt zur Einführung der Quanten- in die Strahlungstheorie und somit zum Planckschen Strahlungsgesetz (1. und 2. Theorie).

Der dritte Abschnitt behandelt in Kürze einige Anwendungen der Quantentheorie, nämlich die Theorien der spezifischen Wärme isotroper Medien von Einstein und Debye und die Theorie der Rotationsbanden an H_2O, die inzwischen eine weitere Ausarbeitung durch A. Kratzer z. B. erfahren hat; auch gibt Verf. eine Andeutung der Theorie der spezifischen Wärme des H_2 nach Ehrenfest. Auch hier sind inzwischen die Schwierigkeiten überwunden.

Im vierten Abschnitt entwickelt Verf. die Quantentheorie der Spektrallinien, beschränkt sich dabei auf die Bohrsche Theorie der Wasserstoffserie, der Röntgenspektra, die Sommerfeldsche Theorie der Feinstruktur und den Starkeffekt, ohne allgemeinere Seriengesetze, den Zeemaneffekt und wichtige Fragen der Intensitätsverhältnisse und Leuchtdauer von Spektrallinien zu berühren. Auch fehlt das Bohrsche Analogieprinzip.

Im letzten Abschnitt geht Verf. näher ein auf die Beziehungen zwischen der Quantentheorie und Thermodynamik indessen auch ohne tiefere Fragen, wie z. B. die der chemischen Konstante der Gase, zu erledigen.

Alles in allem können wir behaupten, daß es Verf. gelungen ist, in allgemein verständlicher Weise den Studierenden in die Fragen der Strahlungstheorie und in das Wesen der Quanten einzuführen.

H. Falkenhagen.

Vorlesungsverzeichnis für das Wintersemester 1920/21.

Technische Hochschule Berlin. Cranz: Ausgewählte Kapitel aus der angewandten Physik. — **Grunmach**: Magnetische und elektrische Maßeinheiten und Meßmethoden; Physikalische Maßbestimmungen und Meßinstrumente; Physikalische Übungen; Ausgewählte physikalische Aufgaben. — **Kalischer**: Die physikalischen Grundlagen der Elektrotechnik; Grundzüge der Potentialtheorie und ihre Anwendung in der Elektrizitätslehre; Elektrische Schwingungen und drahtlose Telegraphie. — **Korn**: Ausgewählte Kapitel der Elastizitätstheorie. — **Krigar-Menzel**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus; Theorie der Wärme: Thermodynamik. — **Kurlbaum**: Experimentalphysik; Physikalische Übungen; Ausgewählte physikalische Aufgaben. — **Berndt**: Radioaktivität. — **Felgentraeger**: Die Konstruktion der Spiegel- und Linseninstrumente. — **Fuchs**: Über das Gleichgewicht und die allgemeine Bewegung des Flugzeugs. — **Gehlhoff**: Physikalische Grundlagen der Beleuchtungstechnik. — **Kassner**: Wetterkunde. — **Kock**: Hochspannungserscheinungen und Messungen; Drahtlose Telegraphie und Hochfrequenztechnik. — **Lichtenstein**: Funktionentheorie I: Einführung in die Theorie, Zusammenhang mit den technischen und physikalischen Problemen. — **Luyken**: Der Erdmagnetismus und seine Anwendung. — **Möller**: Schwingungsprobleme unter besonderer Berücksichtigung der Fernsprechtechnik und drahtlosen Telegraphie. — **Petzoldt**: Die Relativitätstheorie nach ihrer erkenntnistheoretischen Seite. — **Pirani**: Einführung in die theoretische Behandlung chemischer und physikalischer Probleme mit besonderer Berücksichtigung



graphischer Verfahren. — **Weidert**: Die optischen Instrumente und deren theoretische Grundlagen. —

Universität Breslau. Lummer: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme; Physikalisches Kolloquium; Physikalisches Praktikum. — **Schaefer**: Mechanik der Kontinua: Elastizität und Hydrodynamik, mit Übungen; Ausgewählte Kapitel der höheren Dynamik; Theoretisch-physikalisches Kolloquium über Tagesfragen. — **Waetzmann**: Drahtlose Telegraphie. — **Ladenburg**: Physik der Röntgenstrahlen und Bau der Atome. — **Buchwald**: Grundlagen der elektromagnetischen Lichttheorie. —

Technische Hochschule Breslau. Lummer: Experimentalphysik I: Mechanik, Akustik, Wärme; Physikalisches Praktikum. —

Technische Hochschule Darmstadt. Schering: Allgemeine Physik; Physikalische Übungen; Selbständige Arbeiten aus dem Gebiete der Physik; Mechanische Wärmetheorie; Elektrische Schwingungen und elektrische Wellen: Maxwells Theorie der Elektrizität, mit Versuchen; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten. — **Zeißig**: Allgemeine Physik; Physikalische Meß- und Instrumentenkunde; Seismometrie und Anwendungen; Ausgewählte Kapitel aus der allgemeinen Physik. — **Baerwald**: Allgemeine Elektrotechnik II: Der Aufbau des Atoms und der Materie. — **Limmer**: Photographische Übungen; Photographisches Kolloquium; Grundlagen der Photographie. —

Universität Innsbruck. Schweidler: Experimentalphysik I; Einführung in die messende Physik I; Atmosphärische Elektrizität; Physikalisches Praktikum für Lehramtskandidaten; Wissenschaftliche Arbeiten für Vorgeschrittene. — **Lerch**: Physik für Pharmazeuten. — **Tumlirz**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus; Übungen im mathematisch-physikalischen Seminar. — **Defant**: Allgemeine Meteorologie; Sonnen- und atmosphärische Strahlung. — **March**: Der Bau des Atoms; Röntgenphysik. — **Hammerl**: Elektronentechnik II. —

Technische Hochschule Karlsruhe. Gaede: Physik I; Physikalisches Laboratorium; Anleitung zu selbständigen Arbeiten. — **Peppler**: Praktische Witterungskunde. — **Schachenmeier**: Mathematische Physik; Repetitorium der Physik; Optik. — **Thomälen**: Theorie der Wechselströme, Übungen. —

Bergakademie Clausthal. Valentiner: Physikalisches Praktikum. — **Wallot**: Physikalisches Repetitorium; Physikalische Grundlagen der Wärmetechnik. —

Universität Leipzig. Wiener: Experimentalphysik II: Licht, Magnetismus, Elektrizität; Höhere Physik; Physikalische Übungen; Selbständige physikalische Arbeiten; Physikalisches Kolloquium. — **Des Coudres**: Elektrizität und Magnetismus: Maxwellsche Theorie; Selbständige physikalische Arbeiten für Vorgeschrittene. — **Wenger**: Physik der festen Erde; Methoden und Ergebnisse der modernen synoptischen Meteorologie; Besprechung der jeweiligen Wetterlage; Selbständige Arbeiten; Anleitung zu synoptisch-meteorologischen Arbeiten. — **Scholl**: Elektrotechnisches Starkstrompraktikum, Messungen an Gleich- und Wechselstrommaschinen; Einführung in die Elektrotechnik, zugleich Einführung in das Starkstrompraktikum. — **Marx**: Ionisation durch Radium und Röntgenstrahlen. — **Lilienfeld**: Hochvakuumentladung und Röntgenstrahlerzeugung. — **Jaffé**: Relativitätstheorie. — **Möbius**: Physikalische Schulversuche: Übungen. —

Technische Hochschule Prag. Tuma: Experimentalphysik; Physikalisches Praktikum. — **Koerner**: Thermodynamik. —

Universität Rostock. Heydweiller: Experimentalphysik: Magnetismus, Elektrizität, Wärme; Physikalische Übungen; Physikalisches Seminar; Wissenschaftliche Arbeiten. — **N. N.**: Einführung in die theoretische Physik; Kapillarität; Physikalische Übungen; Wissenschaftlich-physikalische Arbeiten; Physikalisches Seminar. — **Falckenberg**: Elektromagnetische Schwingungen. —

Universität Tübingen. Paschen: Experimentalphysik: Akustik, Wärme, Magnetismus, Elektrizität; Physikalische Anfängerübungen. — **Füchtbauer**: Theorie der Elektrizität und des Magnetismus, mit Übungen. —

Universität Wien. Lecher: Experimentalphysik, Demonstrationsergänzung; Mittelschul-Eperimentier-Praktikum; Anleitung für wissenschaftliche Arbeiten. — **Jäger**: Elektrizitätslehre; Besprechung neuerer physikalischer Arbeiten. — **Meyer**: Radioaktivität. — **Ehrenhaft**: Grundzüge der elektromagnetischen Theorien. — **Haschek**: Experimentalphysik I: Die Materie. — **Przibram**: Formbildende Kräfte in der anorganischen und organischen Natur. — **Kohlrausch**: Physikalisches Praktikum. — **Thirring**: Allgemeine Relativitätstheorie. — **Mache**: Moderne Probleme der Physik. — **Kohl**: Theorie der Wärmeleitung. — **Sirk**: Quantentheorie. — **Flamm**: Spezielle und verallgemeinerte Relativitätstheorie. — **Kottler**: Neuere Gravitationstheorien. — **Smekal**: Statische Mechanik in moderner Behandlung. — **Exner**: Allgemeine Meteorologie und Klimatologie; Meteorologische und geophysikalische Arbeiten, Besprechung neuerer Arbeiten aus Meteorologie und Geophysik. — **Schmidt**: Die Bewegungserscheinungen in der Luft- und Wasserhülle der Erde. — **Wagner**: Erdmagnetismus. — **Conrad**: Einführung in die physikalische Erdbebenkunde.

Technische Hochschule Wien. Mache: Physik; Ausgewählte Kapitel der Physik; Optik; Moderne Probleme der Physik. — **Flamm**: Physik. — **Aigner**: Physik; Submarine Akustik in Theorie und Praxis. — **Schmidt**: Meteorologie und die wichtigsten Lehren der Klimatologie. —

Tagesereignisse.

Emil Cohnstaedt-Stiftung. Preisausschreiben aus dem Gebiete der Physik. Die Naturwissenschaftliche Fakultät der Universität Frankfurt a. M. stellt folgende Preisaufgabe. „Gefordert werden Untersuchungen über die Dicke der absorbierten Schicht von Gasen an der Oberfläche fester Körper und ihr Einfluß auf physikalische Erscheinungen". Der ausgesetzte Preis beträgt eintausend Mark. Die Bewerbungsschreiben sind bis zum 30. Juni 1921 bei der Dekanatskanzlei der Universität einzuliefern. Die Verkündigung des Urteils erfolgt bei Gelegenheit des Rektoratwechsels desselben Jahres. Die Fakultät ist nicht verpflichtet, Arbeiten nachzuprüfen, die nicht in einem Institut der Universität Frankfurt entstanden sind. Interessenten erhalten die näheren Bestimmungen in der Dekanatskanzlei.

Der Dekan der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Frankfurt a. M.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Universität Leipzig Dr. Felix Kaempf für Physik, an der Universität Berlin Dr. Peter Pringsheim für Physik, an der Universität Heidelberg Dr. Wolfgang Sternberg für Mathematik.

Ernannt: Der Professor der Biochemie an der Universität Toronto A. B. Macallum in gleicher Eigenschaft an die Mc Gill Universität Montreal, Professor Arthur M. Pardee in Washington zum Professor der Chemie an der Universität Vermillion in South Dakota, Dr. Farrington Daniels zum a. o. Professor der physikalischen Chemie der Universität Wisconsin, Dr. J. Kenyon von der Universität Oxford zum Leiter der chemischen Abteilung am Battersea Polytechnikum; der Privatdozent der

Chemie an der Universität Basel Dr. Julius Obermüller zum Leiter der chemischen Abteilung am Forschungsinstitut für Textilindustrie in München-Gladbach, Dr. R. M. Carven in Darlington zum Professor der anorganischen und analytischen Chemie am Royal Technical College in Glasgow, Dr. Victor Henri zum Professor für physikalische Chemie an der Universität Zürich, der Privatdozent an der Universität München Dr. Wilhelm Lenz zum a. a. Professor für theoretische Physik an der Universität Rostock, Dr. G. Howard Cartledge zum Professor der Chemie an der Johns Hopkins Universität, der Privatdozent Dr. Franz Strunz zum a. o. Professor für Geschichte der Naturwissenschaften an der Technischen Hochschule Wien, der Privatdozent an der Universität Berlin Dr. Otto v. Baeyer zum ord. Professor der Physik an der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin, Professor Dr. Karl Thomas vom Kaiser-Wilhelm-Institut für Arbeitsphysiologie und Privatdozent an der Universität Berlin zum ord. Professor für physiologische Chemie an der Universität Leipzig, der Oberingenieur Franklin Punga in Mülheim/Ruhr zum ord. Professor der Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Darmstadt, der ord. Professor der Experimentalphysik an der Technischen Hochschule Danzig Dr. Friedrich Krüger in gleicher Eigenschaft an der Universität Greifswald, der Professor der Chemie an der Mc Gill Universität Dr. Verron K. Krieble zum Professor der Chemie am Trinity College Hartford Conn., der frühere ord. Professor an der Technischen Hochschule in Aachen, Geh. Regierungsrat Dr. Gustav Rasch zum ord. Honorarprofessor für das Grenzgebiet der Physik und Technik an der Universität Heidelberg, der Privatdozent an der Universität tit. a. o. Professor Dr. Victor F. Hess zum a. o. Professor an der Universität Graz, der Privatdozent an der Universität Wien tit. a. o. Professor Dr. K. W. Fritz Kohlrausch zum ord. Professor der Physik an der Technischen Hochschule in Graz, der tit. ord. Professor Dr. Stefan Meyer zum ord. Professor der Physik an der Universität Wien und zum Leiter des Instituts für Radiumforschung, der a. o. Professor an der Universität Wien Dr. Felix Ehrenhaft zum ord. Professor der Physik an der gleichen Hochschule, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Berlin Dr.-Ing. Leon Lichtenstein zum ord. Honorarprofessor für Mathematik ebenda, der Generalsekretär des Verbandes deutscher Elektrotechniker Dr.-Ing. Georg Dettmar zum ord. Professor für Elektrotechnik an der Technischen Hochschule Hannover, der ord. Honorarprofessor an der Technischen Hochschule Darmstadt Dr. Viktor Blaeß zum ord. Professor für Mechanik ebenda, der Privatdozent an der Technischen Hochschule Darmstadt Dipl.-Ing. Dr. Johann Baerwald zum a.o. Professor der Physik an derselben Hochschule, T. George Madgwick zum Professor für Technologie des Erdöls an der Universität Birmingham, Erling Schreiner zum Dozenten für physikalische und Elektrochemie an der Universität Kristiania, Dr. G. S. Whitey und Dr. R. M. Mc Lean zu Professoren der Chemie an der Mc Gill Universität Montreal.

Berufen: Der ord. Professor der Physik Dr. Erwin Madelung in gleicher Eigenschaft an die Universität Münster i. W.

Verliehen: Dem Privatdozenten für Chemie an der Technischen Hochschule Graz Dr. Viktor Cordier der Titel Professor, den Privatdozenten an der Universität München Dr. Hugo Dingler (Methodik, Unterricht und Geschichte der mathematischen Wissenschaften), Dr. Artur Rosenthal (Mathematik), Dr. Wilhelm Lenz (theoretische Physik) Titel und Rang als a. o. Professor.

Neuer Lehrauftrag: Der a. o. Professor an der Universität Halle Dr. Albert Wigand für Physik der Atmosphäre.

Vom Lehramt zurück: Der Professor der Physik an der Princeton Universität Dr. Edwin F. Northrup wegen Übertritt zur Ajax Electrochimic Coperation in Trenton, N. J., der a. o. Professor der anorganischen Chemie an der Universität von Illinois Dr. Oliver Kamm.

Nobelpreise 1920: Für Physik dem Direktor des internationalen Bureaus für Maße und Gewichte in Breteuil Charles Edouard Guilleaume, für Chemie dem ord. Professor der Chemie an der Universität Helsingfors Adolf Ossian Aschan.

Gestorben: Der ord. Professor der Chemie an der Universität Paris Dr. Armand Chautier, Mitglied der Académie des sciences, der Meteorologe Dr. Max Margulis in Wien, der Professor für anorganische und analytische Chemie an der John Hopkins Universität Harmon N. Morse, der Professor für Agrikulturchemie an der Universität Pisa Dr. Italo Giglioli, der ord. Professor der Physiologischen Chemie an der Universität Basel Dr. Gustav v. Bunge, der Direktor des Hauptlaboratoriums für Radiographie in Paris Dr. Charles Infroid, der frühere Professor der Chemie an der Universität Genf Dr. Emil Ador.

Angebote.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.



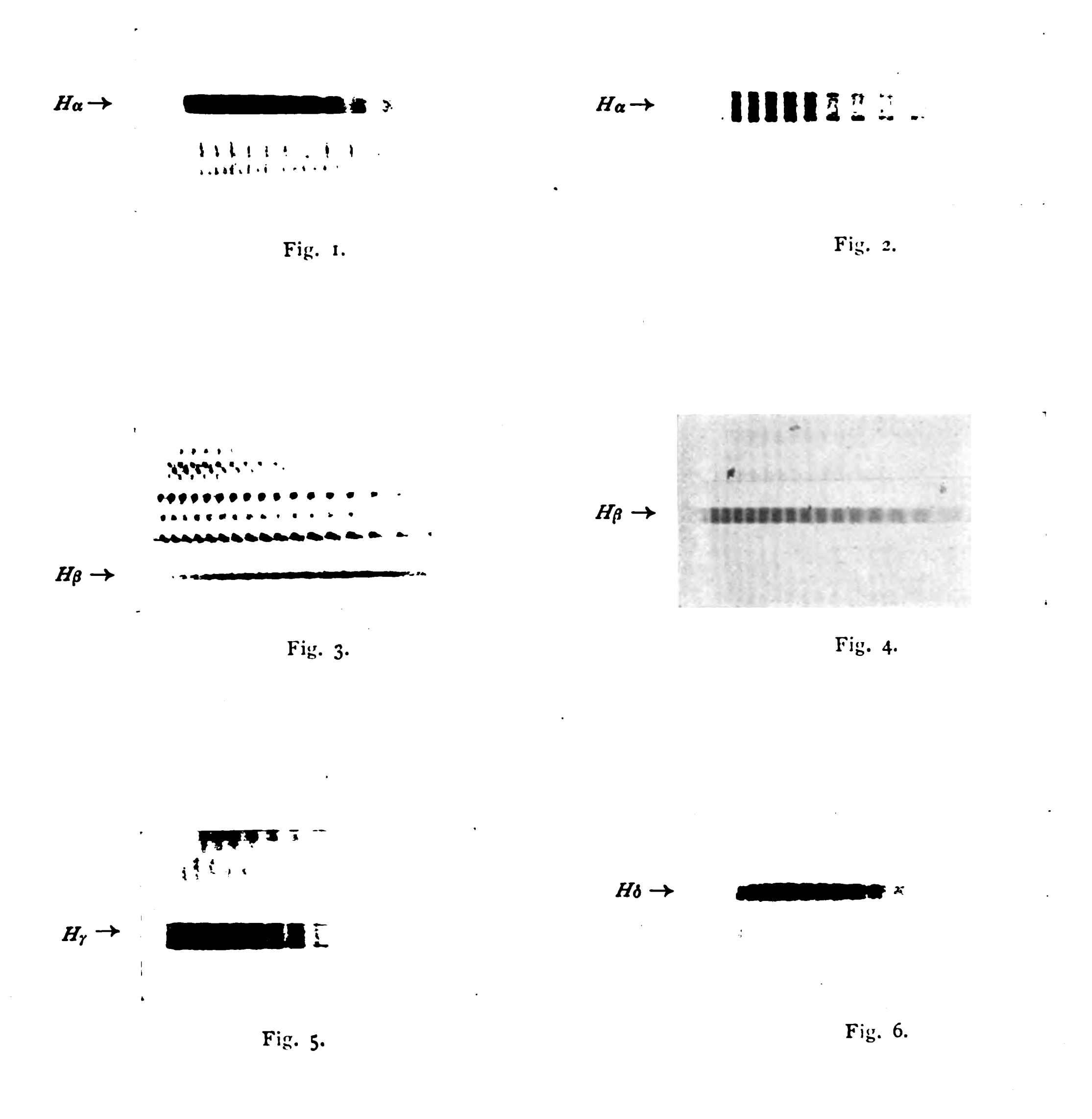


Fig. 1. Fig. 2.

Fig. 3. Fig. 4.

Fig. 5. Fig. 6.

E. Gehrcke u. E. Lau, Über die Struktur der Balmerserie.

Verlag von S. Hirzel in Leipzig.

PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 23/24. 1./15. Dezember 1920. 21. Jahrgang.

Redaktionsschluß für No. 1 am 20. Dezember 1920.

INHALT:

VORTRÄGE UND DISKUSSIONEN VON DER 86. NATURFORSCHERVERSAMMLUNG IN NAUHEIM VOM 19.—25. SEPTEMBER 1920.

H. Weyl (Zürich), Elektrizität und Gravitation.

Weniger ein Referat über die vom Vortragenden herrührende „erweiterte Relativitätstheorie", welche nicht nur die Gravitations-, sondern auch die elektromagnetischen Erscheinungen weltgeometrisch deutet, ist beabsichtigt, als: einige Punkte dieser Theorie zur Diskussion zu bringen, welche am meisten der Aufklärung zu bedürfen scheinen.

I. Die Einsteinsche Gravitationstheorie löste das Dilemma zwischen dem evidenten Prinzip von der Relativität der Bewegung und der Existenz der Trägheitskräfte dadurch, daß sie an dem Begriff der Parallelverschiebung eines Vektors im Unendlichkleinen festhielt. Die Welt ist eine vierdimensionale „affin zusammenhängende" Mannigfaltigkeit; der affine Zusammenhang ein Kraftfeld von physikalischer Realität. Die Gleichheit von schwerer und träger Masse zeigt, daß die Gravitationswirkungen auf Rechnung dieses Kraftfeldes kommen. Die Übertragung eines Vektors längs eines Weges durch Parallelverschiebung von Punkt zu Punkt ist abhängig vom Wege („nicht-integrabel").

II. Die Tatsache der Wirkungs-, insbesondere der Lichtausbreitung führt dazu, den affinen Standpunkt auf den tiefer liegenden metrischen zu fundieren. In der Nachbarschaft eines Weltpunktes scheidet der Kegel

$$\sum g_{ik}\, dx_i\, dx_k = 0 \qquad (*)$$

voneinander Vergangenheit und Zukunft; daher die Maßbestimmung: zwei Vektoren ξ^i bestimmen dann und nur dann dieselbe Strecke, wenn für sie die Maßzahl $l = g_{ik}\xi^i\xi^k$ den gleichen Wert besitzt. Erst nach Festlegung des in der Form (*) willkürlich bleibenden Zahlfaktors (Eichung) kommt jeder Strecke eine bestimmte Maßzahl zu. Im Gegensatz zu Riemann und Einstein, welche annehmen, daß eine Strecke in O unmittelbar in die Ferne und an sich eine ihr „kongruente" Strecke an der endlich entfernten Stelle O' eindeutig determiniert, erlaubt das Prinzip von der Relativität der Größe nur eine kontinuierliche Übertragung von Punkt zu Punkt längs eines Weges, die a priori nicht integrabel zu sein braucht. Dieser metrische Zusammenhang wird charakterisiert durch eine lineare Differentialform $\sum \varphi_i\, dx_i$; neben die Koordinaten- tritt die Eichinvarianz. Die Metrik („der Zustand des Feldäthers") bestimmt eindeutig den affinen Zusammenhang (das „Gravitationsfeld").

III. Wenn die Weltstrecken, welche eine Uhr während je einer (sehr klein zu wählenden) Periode zurücklegt, auseinander durch kongruente

Verpflanzung hervorgehen, so müßte ihre Ganggeschwindigkeit von der Vorgeschichte abhängen; die Frequenzen des von den Atomen ausgestrahlten Lichtes zeigen das Gegenteil. Ebensowenig erfährt ein ruhender Maßstab in einem statischen Feld eine kongruente Verpflanzung. Dies ist jedoch kein Einwand gegen die Theorie; denn sie behauptet nichts über das Verhalten wirklicher Maßstäbe, Uhren und Atome. Eine Größe in der Natur kann sich bestimmen durch Beharrung oder durch Einstellung. Beispiel: Der Achse eines rotierenden Kreisels kann man eine willkürliche Anfangsrichtung erteilen, diese überträgt sich dann aber, wenn der Kreisel sich selbst überlassen, durch eine von Moment zu Moment wirksame Beharrungstendenz (Parallelverschiebung); hingegen bestimmt sich die Richtung einer Magnetnadel im Magnetfeld durch Einstellung. Während affiner und metrischer Zusammenhang a priori festlegen, wie Vektoren und Strecken sich ändern, wenn sie rein der Beharrungstendenz folgen, bestimmen sich Ladung des Elektrons, Atomfrequenzen und Länge eines Maßstabs durch Einstellung. Die theoretische Möglichkeit einer Längenbestimmung durch Einstellung ist gegeben durch jene natürliche, ausgezeichnete, einheitliche Eichung über die ganze Welt hin, für welche die Weltkrümmung $R = \text{const}$ wird.

IV. Die φ_i sind nichts anderes als die elektromagnetischen Potentiale. Wie die Koordinateninvarianz aufs engste zusammenhängt mit den Erhaltungssätzen für Energie und Impuls, so der 5. Erhaltungssatz, der der Elektrizität, mit der Eichinvarianz.

V. Das erkenntnistheoretische Prinzip von der Relativität der Größe führt mit zwingender Notwendigkeit zu der hier vertretenen Theorie. Die unter IV. erwähnten Zusammenhänge sind eine starke Stütze dafür von formal-mathematischem Charakter. Wie steht es nun endlich mit der physikalischen Bewährung? — Jedes Naturgesetz läßt sich sowohl koordinaten- als eichinvariant formulieren; zu einem Führer für die Aufstellung der Naturgesetze werden die Prinzipien der Koordinaten- und Eichinvarianz erst durch die Annahme, daß die Gesetze in beliebigen Koordinaten und bei beliebiger Eichung eine einfache mathematische Form haben. Die einzig mögliche, aber auch völlig zureichende Bewährung der Theorie ist also die, daß sich die Konsequenzen eines in einfacher rationaler Weise aus den Zustandspotentialen g_{ik}, φ_i koordinaten- und eichinvariant aufgebauten Wirkungsprinzips mit der Erfahrung in Übereinstimmung befinden. — Die Wirkungsgröße der Maxwellschen Theorie ist eichinvariant. Das mittels der natürlichen Eichung ($R = \text{const}$) gemessene Volumen führt, wenn es als Wirkungsgröße benutzt wird, zu der Einsteinschen Gravitationstheorie. Es kommt aber hinzu: 1. Einsteins kosmologisches Glied; es ergibt sich zwangsläufig, während es bei Einstein eine ad hoc gemachte Annahme ist; und während Einstein eine prästabilierte Harmonie zwischen seiner kosmologischen Konstanten und der Weltmasse annehmen muß, wird hier durch die zufällig vorhandene Gesamtmasse der Radius des Weltraums bestimmt; 2. im Falle der Wirksamkeit eines elektrischen Potentials ein weiteres kosmologisches Glied, das für das Problem der Materie von Bedeutung ist.

Geringfügig ist der physikalische Ertrag der Theorie, da die Abweichungen von dem längst Bekannten und Bestätigten von „kosmologischer“ Kleinheit sind; bedeutend der philosophische, der Gewinn an Einsicht in das Wesen der Naturkräfte. Die Notwendigkeit des ganzen Aufbaus, insbesondere der Gültigkeit des „Pythagoras“, kann auf gruppentheoretischem Wege noch wesentlich tiefer begründet werden, als es hier geschah.

Diskussion.

Pauli: Keiner der bisherigen Theorien des Elektrons, auch nicht der Einsteinschen (Berl. Ber. 1919) ist es bisher gelungen, das Problem der elektrischen Elementarquante befriedigend zu lösen; und es liegt nahe, nach einem tieferen Grund dieses Mißerfolges zu suchen. Ich möchte nun diesen Grund darin suchen, daß es überhaupt unstatthaft ist, das elektrische Feld im Innern des Elektrons noch als stetige Raumfunktion zu beschreiben. Die elektrische Feldstärke ist definiert als die Kraft auf einen geladenen Probekörper und, wenn es keine kleineren Probekörper gibt, als das Elektron (bzw. den N-Kern), scheint der Begriff der elektrischen Feldstärke in einem bestimmten Punkt im Innern des Elektrons, mit welchem alle Kontinuumstheorien operieren, eine leere, inhaltlose Fiktion zu sein, der nichts Wirkliches entspricht. Ähnliches könnte man von der Raummessung sagen, da es keine beliebig kleinen Maßstäbe gibt. Ich möchte deshalb Herrn Prof. Einstein fragen, ob er der Auffassung zustimmt, daß man die Lösung des Problems der Materie nur von einer Modifikation unserer Vorstellungen vom Raum (vielleicht auch von der Zeit) und vom elektrischen Feld im Sinne des Atomismus erwarten darf, oder ob er die angeführten Bedenken nicht für stichhaltig hält und die Ansicht vertritt, daß man an den Grundlagen der Kontinuumstheorien festhalten muß.

Einstein: Mit fortschreitender Verfeinerung des wissenschaftlichen Begriffssystems

wird die Art und Weise der Zuordnung der Begriffe von den Erlebnissen immer komplizierter. Hat man in einem gewissen Studium der Wissenschaft gesehen, daß einem Begriff ein bestimmtes Erlebnis nicht mehr zugeordnet werden kann, so hat man die Wahl, ob man den Begriff fallen lassen oder ihn beibehalten will; in letzterem Falle ist man aber gezwungen, das System der Zuordnung der Begriffe zu den Erlebnissen durch ein komplizierteres zu ersetzen. Vor diese Alternative sind wir auch hinsichtlich der Begriffe der zeitlichen und räumlichen Entfernung gestellt. Die Antwort kann nach meiner Ansicht nur nach Zweckmäßigkeitsgründen gegeben werden; wie sie ausfallen wird, erscheint mir zweifelhaft.

Reichenbächer hebt hervor, daß 1. die Eichinvarianz an die Seite der Koordinateninvarianz getreten ist und daß 2. der Krümmungsradius R konstant gesetzt wird, nachdem er bereits ins Wirkungsprinzip eingegangen ist. Ist es möglich, die natürliche Eichung an späterer Stelle einzuführen, so daß die Feldgleichungen auch eichinvariant sind? Er stellt ferner zur Diskussion die Einführung des dualen Vektors.

Weyl: In gewissem Sinne ist es zweckmäßig, in beliebiger Eichung zu operieren. Nur um den Anschluß an die bisherige Theorie zu gewinnen, ist es gut, jene besondere Eichung vorzunehmen. Was den zweiten Punkt betrifft, so halte ich die Einführung eines dualen Feldvektors für bedenklich, weil dadurch die Auszeichnung eines Schraubensinnes eingeht, wofür mir keine Tatsache zu sprechen scheint.

Einstein: Bei der Aufstellung meines Begriffssystems ist es für mich maßgebend gewesen, elementare Erfahrungen in Zeichensprache zu bringen. Die zeit-räumlichen Abstände sind mit Hilfe von Maßstäben und Uhren physikalisch definiert. Betrachte ich zwei Gebilde (Maßstäbe bzw. Uhren), so ist ihre Gleichheit erfahrungsgemäß unabhängig von ihrer Vorgeschichte. Hierauf beruht die Möglichkeit, zwei benachbarten Weltpunkten eine Zahl ds zuzuordnen, welche physikalische Bedeutung besitzt. Indem die Weylsche Theorie auf diese empirisch begründete Zuordnung verzichtet, beraubt sie die Theorie einer ihrer solidesten empirischen Stützen und Prüfungsmöglichkeiten. Da ich vorläufig keinen plausiblen Grund dafür sehe, daß jene Fundamentaleigenschaft der Naturobjekte in der Grundlage des Weylschen Gedankensystems steckt, stehe ich der Weylschen Theorie als Physiker skeptisch gegenüber.

Mie weist auf einen wesentlichen Unterschied zwischen Weylscher und Einsteinscher Theorie hin, indem er die Anschaulichkeit betont, welche die Einsteinsche Theorie durch die Anwendung der Riemannschen Geometrie bekommt, welche aber der Weylschen Theorie, soviel man sehen kann, fehlt. Man könnte vielleicht denken, daß sich die Einsteinsche Theorie auch in anschaulicher Weise verallgemeinern ließe dadurch, daß man dem symmetrischen Tensor des Gravitationspotentials einen antisymmetrischen Tensor hinzufügte, der den Sechservektor des elektromagnetischen Feldes repräsentierte. Aber eine genauere Überlegung zeigt, daß man so zu keiner vernünftigen Weltfunktion kommt.

Weyl: Ich kann mir den Riemannschen Raum eingebettet denken in einen euklidischen Raum; das geht bei einem allgemeineren metrischen Raume natürlich nicht. Aber die „Projektion“ auf einer vierdimensionalen euklidischen ist bei mir ebensogut möglich wie bei Riemann.

Gustav Mie (Halle), Das elektrische Feld eines um ein Gravitationszentrum rotierenden geladenen Partikelchens.

Um zu einer Klärung der Ansichten über die Einsteinsche Gravitationstheorie etwas beizutragen, will ich versuchen an einem bestimmten einfachen Problem die wesentlichen Züge der Theorie möglichst deutlich aufzudecken. Es ist noch vielfach, sogar bei Theoretikern, die Ansicht vertreten, daß die Einsteinsche Gravitationstheorie, welche ihr Urheber selber als die Theorie der allgemeinen Relativität bezeichnet, Aufschluß gebe über das Verhalten eines beschleunigt bewegten Körpers, in ähnlicher Weise wie die sogenannte spezielle Relativitätstheorie über das Verhalten eines Körpers Aufschluß gibt, der sich mit konstanter Geschwindigkeit bewegt. Kennt man die Struktur eines materiellen Systems und die von ihm ausgehenden Felder für den Fall, daß es in Ruhe ist, so bekommt man bekanntlich Struktur und Felder des mit konstanter Geschwindigkeit bewegten Systems einfach durch die Anwendung einer linearen Transformation, welche man als Lorentz-Transformation bezeichnet. Etwas ganz anderes ist es aber, wenn man nach dem sogenannten allgemeinen Relativitätsprinzip eine Transformation höheren Grades anwendet, um Struktur und Felder des materiellen Systems bei einer beschleunigten Bewegung herauszubekommen. Dann treten nämlich in alle Gleichungen zu den Größen, welche Struktur und Felder des materiellen Systems kennzeichnen, noch die von Einstein

mit $g_{\mu\nu}$ bezeichneten Größen und ihre Ableitungen nach den Koordinaten hinzu. Diese Größen bedeuten nach Einstein Potential und Feldstärke des Gravitationsfeldes, unter dessen Einfluß das materielle System seine beschleunigte Bewegung annimmt. Man darf nämlich nicht vergessen, daß eine Beschleunigung der Bewegung nur dann eintreten kann, wenn das materielle System irgendeine Kraftwirkung erfährt. Nach der Einsteinschen Theorie kann man das Verhalten eines beschleunigt bewegten materiellen Systems aus dem des ruhenden Systems also nur dann berechnen, wenn diese Kraftwirkung die eines Gravitationsfeldes ist. Dagegen sagt die Theorie nichts darüber aus, wie sich das materielle System verhält, wenn es beispielsweise durch die Wirkung elektrischer oder magnetischer Kräfte beschleunigt bewegt wird, oder wenn sein Trägheitswiderstand durch materielle Kraftwirkungen, beispielsweise die Kohäsionskräfte eines Zugseils oder auch, wie bei einem um eine in ihm liegende Achse rotierenden festen Körper, durch die eigenen Kohäsionskräfte im Gleichgewicht gehalten wird. So hat denn auch Sommerfeld ganz mit Recht auf die elliptischen Bahnen der Elektronen im Atommodell nicht etwa die Einsteinsche allgemeine Relativitätstheorie angewendet, ja man kann sagen, daß das von vornherein unmöglich war, weil diese Elektronen nicht in einem Gravitationsfeld, sondern in einem elektrischen Feld kreisen. Hier herrschen sicherlich andere Gesetze, und Sommerfeld hat darüber bestimmte Annahmen gemacht, die mit der sogenannten allgemeinen Relativität nichts zu tun haben. Es scheint, daß er mit seinen Annahmen das Richtige getroffen hat. Um Irrtümer über das Wesen des der Einsteinschen Theorie zugrunde liegenden Prinzips auszuschließen, ziehe ich persönlich immer vor, nicht von „allgemeiner Relativität", sondern nur von einer „Relativität der Gravitationswirkungen" zu sprechen.

Aber auch der Satz von der Relativität der Gravitationswirkungen muß noch mit einiger Vorsicht behandelt werden. Er bezieht sich nämlich nur auf unendlich kleine Gebiete im Gravitationsfeld, auf solche Gebiete, in welchen man die Feldstärke der Gravitation noch als gleichförmig ansehen darf. Denn man kann ein wirkliches Gravitationsfeld immer nur in einem unendlich kleinen Gebiet hinweg transformieren, in einem ausgedehnten Gebiet ist das unmöglich. Könnte man ein Feld in einem endlichen ausgedehnten Gebiet durch eine Koordinatentransformation wegschaffen, so würde das bedeuten, daß dieses Feld seine Existenz nur der „unvernünftigen" Wahl der Koordinaten verdankte, daß es keinem objektiven Tatbestand entspricht. Ein solches Feld pflege ich „willkürlich fingiert" zu nennen und von den „wirklich vorhandenen" Feldern, die man nicht durch eine Transformation aus der Natur heraus eskamotieren kann, streng zu unterscheiden.

Um zu verstehen, wieso man das Feld aus einem unendlich kleinen Gebiet hinweg transformieren kann, aus einem endlichen Gebiet aber nicht, muß man auf den von Einstein eingeführten wichtigen Begriff der „natürlichen Geraden" und der „natürlichen Teilung" der Geraden zurückgehen. Darunter versteht man diejenigen räumlichen und zeitlichen Geraden, sowie ihre Teilungen, die man nach den in einem völlig gravitationsfreien Raum richtig geltenden Methoden der praktischen Geometrie konstruiert hat, ohne auf das in Wirklichkeit vorhandene Gravitationsfeld Rücksicht zu nehmen. Diese „natürlichen Geraden" und die „natürlichen Teilungen" muß man von den nach dem allgemeinen Übereinkommen im Gravitationsfeld als Gerade geltenden Linien mit ihren Teilungen unterscheiden. Ich will die letzteren als die „vernünftigen Geraden" und ihre „vernünftigen Teilungen"[1]) bezeichnen. In einem unendlich kleinen Gebiet kann man nun aus lauter natürlichen Geraden ein Koordinatennetz konstruieren, diese natürlichen Geraden schließen sich hier, wenigstens mit sehr großer Annäherung, zu einem Netz zusammen. Setzt man aber dieselben natürlichen Geraden über das unendlich kleine Gebiet hinaus fort und versucht, sie in einem größeren Gebiet der Konstruktion eines Koordinatennetzes zugrunde zu legen, so schlägt dieser Versuch in einem wirklichen Gravitationsfeld fehl, die Linien klaffen an den Stellen, wo Netzknoten sein sollten, auseinander und zwar um so mehr, je weiter man von der Ausgangsstelle weg geht. In einem weit ausgedehnten Gebiet sind also die natürlichen Geraden für ein Koordinatensystem nicht zu gebrauchen. Man kommt zu der Relativität des Gravitationsfeldes, wenn man von einem „vernünftigen Koordinatensystem" auf das Koordinatensystem der „natürlichen Geraden" in dem betrachteten unendlich kleinen Gebiet transformiert. Diese Transformation läßt sich aber, wie man aus dem eben geschilderten Verhalten der natürlichen Geraden erkennt, nicht über ein ausgedehntes Gebiet fortsetzen. Will man die Felder, die ein im Gravitationsfeld beschleunigt bewegtes materielles System hervorruft, bis in große Entfernungen vom System berechnen, so versagt das eigentliche Prinzip der Relativität

1) Man könnte sie auch die „konventionellen Geraden" und die „konventionellen Teilungen" nennen.

der Gravitationswirkungen, und das Problem ist nun sehr schwer zu lösen. Aber für dieses schwierige Problem gibt die Einsteinsche Theorie immerhin eine bestimmte Anweisung, die man etwa folgendermaßen formulieren kann: „Wenn sich in einem Gravitationsfeld ein im Vergleich zum Gravitationszentrum unendlich leichter Körper bewegt, so kann man die Struktur des Körpers und die von ihm erregten Felder bis zu beliebigen Entfernungen so berechnen, als ob der Körper in einem gravitationsfreien Weltgebiet ruhte, in welchem eine nichtminkowskische Geometrie herrscht. Die nichtminkowskische Geometrie, durch welche das Gravitationsfeld nach der Einsteinschen Theorie ersetzt werden kann, ist dadurch charakterisiert, daß sich in ihr die Geraden nicht zu Koordinatennetzen zusammenschließen".

Diesen Satz darf man vielleicht als das verallgemeinerte Prinzip von der Relativität der Gravitationswirkungen bezeichnen. Nur wer ihn völlig versteht, der durchschaut wirklich die wunderbare, vollendet schöne mathematische Struktur der Einsteinschen Theorie. Ich will nun nach diesem verallgemeinerten Prinzip das Problem behandeln, das elektrische Feld eines im Gravitationsfeld rotierenden geladenen Teilchens zu berechnen. Dieses Problem bietet ein besonderes Interesse schon allein aus dem Grunde, weil man nach dem Prinzip der Relativität der Gravitationswirkungen erwarten könnte, daß das Teilchen nicht strahlt. Die Weltlinie des Mittelpunktes eines ruhenden Teilchens ist eine Zeitgerade. Da nun durch die Transformation des Relativitätsprinzips die „vernünftigen Geraden" in „natürliche Gerade" übergeführt werden, so muß die Weltlinie des Teilchenzentrums im Gravitationsfeld eine zeitartige „natürliche Gerade", oder, wie man auch sagt, eine zeitartige „geodätische Linie" sein. Innerhalb einer unendlich engen Weltröhre, deren Achse diese vom Teilchenmittelpunkt beschriebene geodätische Linie ist, hat das Teilchen, wenn man mit natürlich konstruierten Geraden und überhaupt mit lauter natürlich gemessenen Größen rechnet, genau dasselbe elektrische Feld wie ein ruhendes Teilchen. Da nun eine geodätische Linie im Gravitationsfeld, wie man weiß, eine gewisse Periodizität hat, so kommt das Teilchen bei seinem Umlauf um das Gravitationszentrum nach jeder Periode immer wieder in genau dieselbe Stellung relativ zum Gravitationszentrum und sein Feld wiederholt sich dann jedesmal genau, abgesehen von einer kleinen Drehung im Raum. Ganz besonders einfach wird die Sache, wenn sich das Teilchen auf einer Kreisbahn bewegt. Dann hat es relativ zum Gravitationszentrum immer dieselbe Lage und sein elektromagnetisches Feld bleibt andauernd ungeändert, abgesehen davon, daß es sich, entsprechend der Bewegung des Teilchens auf einem Kreise, fortwährend dreht. Wenn nun aber nach Ablauf einer gewissen Zeit die Lage und Bewegung des Teilchens sowie sein Feld immer wieder die gleichen sind, so kann das Teilchen keine Energie ausgestrahlt haben. Somit scheint aus dem Prinzip der Relativität der Gravitationsfelder der erstaunliche Satz zu folgen, daß das elektrisch geladene Teilchen bei seiner Rotationsbewegung nicht strahlt. Dieser Satz wäre deswegen so erstaunlich, weil in dem Ansatz der Einsteinschen Gravitationstheorie nichts von den Quantenbedingungen steckt, welche beispielsweise das Bohrsche Atommodell beherrschen. Das Hauptziel der folgenden Untersuchungen ist, das eben geschilderte Dilemma zu lösen. Um die Untersuchung nicht mit überflüssigen Komplikationen zu beschweren, habe ich mich auf den einfachsten Fall beschränkt, daß das Teilchen eine Kreisbahn beschreibt. Die Resultate, die man für diesen Fall bekommt, werden sich leicht auf den Fall einer elliptischen Bahn übertragen lassen.

Über die Natur des geladenen Teilchens brauchen wir gar keine Annahmen zu machen. Es kann ebensogut ein geladener Planet sein, der eine ungeladene Sonne umkreist, oder ein Elektron, welches um ein ungeladenes Atom lediglich unter dem Einfluß der von dem Atom ausgehenden Gravitationswirkungen herumläuft. Die räumliche Entfernung irgendeines Punktes vom Gravitationszentrum O, „vernünftig" gemessen, sei mit r bezeichnet, der Radius des Kreises, den der Teilchenmittelpunkt beschreibt, sei gleich a, die Geschwindigkeit, mit welcher der Teilchenmittelpunkt auf seiner Bahn läuft, sei q, dabei ist die Lichtgeschwindigkeit im absoluten Vakuum als Einheit anzusehen. Wir nehmen an, daß q im Vergleich zu 1 sehr klein sei. Weiter ist $\alpha = 2a \cdot q^2$ eine Konstante, welche der schweren Masse des Gravitationszentrums proportional ist, und mit Hilfe dieser Konstanten α läßt sich das Gravitationspotential nach Schwarzschild berechnen. Der Tensor $g_{\mu\nu}$ ist durch folgendes Schema dargestellt:

$$\begin{matrix} \frac{r}{r-\alpha} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{r-\alpha}{r} \end{matrix}.$$

Wir wollen mit r, ϑ, φ die Koordinaten in einem „vernünftig" definierten Polarkoordinatensystem bezeichnen, dessen Nullpunkt das Gravitationszentrum O sei, und mit t die „vernünftig"

gemessene Zeit, dann ist die „natürliche" Länge ds eines Streckenelements in Raum und Zeit durch die Formel gegeben:

$$ds^2 = \frac{r}{r-a} dr^2 + r^2 \cdot d\vartheta^2 + r^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot d\varphi^2 - \frac{r-a}{r} \cdot dt^2.$$

Die Abweichungen, die sich nach dieser Formel von der minkowskischen Geometrie ergeben (in welcher

$$ds^2 = dr^2 + r^2 \cdot d\vartheta^2 + r^2 \cdot \sin^2\vartheta \cdot d\varphi^2 - dt^2$$

wäre), lassen sich nach Potenzen von a/r entwickeln. Da a eine sehr kleine Größe ist, so ist a/r bis auf einen kleinen Bereich in der Umgebung des Gravitationszentrums, den man ohne Schaden außer Betracht lassen darf, überall sehr klein. Beachten wir die oben angegebene Formel für a, so können wir auch sagen, daß man die Abweichungen von der minkowskischen Geometrie nach Potenzen von $q^2 \cdot a/r$ entwickeln kann. Wir werden die Glieder mit der Potenz q^2 als die Glieder erster Ordnung, diejenigen mit höheren Potenzen von q^2 als die Glieder höherer Ordnung bezeichnen.

Wir wollen ferner von dem Teilchenmittelpunkt C aus raumartige Radien-Vektoren ziehen, diese wollen wir mit ϱ bezeichnen. Der Winkel, den ϱ mit der Geraden OC bildet, heiße β.

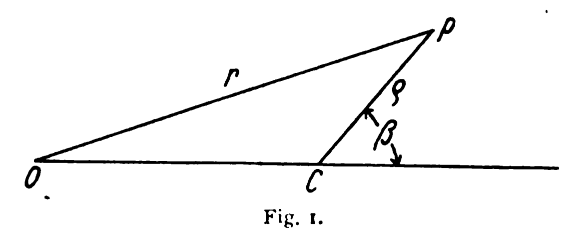


Fig. 1.

Und zwar bedeute ϱ die natürlich gemessene Länge einer natürlich konstruierten raumartigen Geraden CP, ferner β den natürlich gemessenen Winkel zwischen den Richtungen OC und CP. Die entsprechenden Größen in einem vernünftigen System von Geraden und Einheiten will ich durch ϱ' und β' kennzeichnen.

Das zu lösende Problem zerfällt naturgemäß ähnlich wie alle derartigen Probleme in drei Teile:

Erstens ist die Lösung zu suchen in einem Gebiet, in welchem ϱ'/a klein gegen 1 ist. Dieses Gebiet nenne ich die „nächste Umgebung" des geladenen Teilchens.

Zweitens ist das Gebiet zu betrachten, in welchem ϱ'/a nicht mehr klein gegen 1 ist, in welchem dies aber noch für $q \cdot \varrho'/a$ gilt. Ist beispielsweise $q = 10^{-4}$, so kann $\varrho'/a = 100$ werden, ohne daß $q \cdot \varrho'/a$ den Wert 10^{-2} (1 Proz.) überschreitet. Dieses zweite Gebiet nenne ich die „weitere Umgebung" des geladenen Teilchens.

Drittens kommen wir dann zu dem Gebiet, wo auch $q \cdot \varrho'/a$ schon im Vergleich mit 1 beträchtliche Größen erreicht, und schließlich über alle Grenzen wächst. Dies Gebiet nenne ich die „unendliche Ferne".

Für das erste und das dritte Gebiet ist das Problem leicht zu lösen, erhebliche Schwierigkeiten bietet, wie bei allen derartigen Problemen, nur das mittlere zweite Gebiet. Zur Berechnung des Feldes im ersten Gebiet reicht nämlich der gewöhnliche Satz von der Relativität der Gravitationsfelder aus. Im dritten Gebiet ist das Gravitationsfeld so schwach, daß wir das Gravitationspotential hier konstant gleich 1 setzen dürfen. Das elektromagnetische Feld des Teilchens genügt hier den gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen, und man kann es nach bekannten Methoden berechnen. Im zweiten Gebiet kann man den gewöhnlichen Relativitätssatz nicht gebrauchen, weil hier die natürlichen Geraden, welche sich im ersten Gebiet zu einem Koordinatennetz zusammenschließen, schon auseinanderklaffen. Andererseits darf man aber, wenn man den Übergang vom Gebiet 1 zum Gebiet 3 finden will, auch nicht etwa das Gravitationsfeld vernachlässigen und mit den gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen rechnen.

Es kommt also alles darauf an, die Lösung des Problems im zweiten Gebiet, in der weiteren Umgebung des geladenen Teilchens, zu finden. Setzt man dann in dieser Lösung ϱ'/a unendlich klein, so muß sich die Lösung für das erste Gebiet ergeben, setzt man dagegen ϱ'/a sehr groß, so wird man einen Wert bekommen, der die gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen erfüllt, und den man in das unendlich ferne Gebiet fortsetzen kann.

Man kann das Problem in dem zweiten Gebiet ganz außerordentlich vereinfachen, indem man sich auf die Glieder erster Ordnung in q^2 beschränkt und die Glieder höherer Ordnung von vornherein wegläßt. Zur Diskussion des Problems reicht diese Näherung völlig aus, da die Glieder höherer Ordnung nur geringfügige Korrekturen geben, die das Bild im ganzen nicht ändern können. Man hat dann den großen Vorteil, daß man auch in der nichtminkowskischen Geometrie, durch welche sich das Gravitationsfeld in der weiteren Umgebung des geladenen Teilchens ersetzen läßt, ein sehr einfaches orthogonales Zylinderkoordinatensystem konstruieren kann. Man bekommt dies Koordinatensystem auf einem Wege, den auch Herr Reichenbächer kürzlich in einer seiner Arbeiten eingeschlagen hat. Als Zylinderachse nimmt man die Weltlinie des Teilchenmittel-

punktes, welche, wie wir wissen, eine zeitartige natürliche Gerade ist. Ich nenne sie die Weltachse des Systems und bezeichne sie mit dem Buchstaben A. Konstruiert man in irgendeinem Punkt C der Weltachse A alle die raumartigen natürlichen Geraden, welche, natürlich gemessen auf A senkrecht stehen, so bilden diese zusammen ein zu A senkrechtes dreidimensionales Kontinuum, das ich R nennen will. Schneide ich von den sämtlichen senkrecht zu A konstruierten Geraden, von C aus natürlich gemessen gleiche Stücke ab, deren Länge ich ϱ nenne, so bilden die Endpunkte insgesamt eine im Raume R enthaltene Kugelfläche. Gehe ich nun an der Achse A entlang und konstruiere um jeden ihrer Punkte eine Kugel von gleichem Radius ϱ, so bilden alle diese Kugeln zusammen einen dreidimensionalen Zylinder. Jeder zur Zylinderachse A senkrechte Querschnitt R schneidet aus dem Zylinder eine Kugel vom Radius ϱ aus, es ist also ein Kugelzylinder vom Radius ϱ. Konstruieren wir so die sämtlichen Kugelzylinder um die Weltachse A, so bekommen wir in ihnen eine Schar von Koordinatenräumen eines vierdimensionalen Zylinderkoordinatensystems. Wir konstruieren nun weiter auf den Kugelzylindern die zu den Kugeln überall senkrechten Trajektorien, welche wir nach Analogie der euklidischen oder minkowskischen Geometrie die Leitlinien des Zylinders nennen können. Es ist dabei aber zu bemerken, daß in unserer nichtminkowskischen Geometrie diese Leitlinien keine Geraden sind, obwohl der Zylinder, wenigstens im Falle der Kreisbahn, überall in sich kongruent ist. Eine viel unangenehmere Eigenschaft der Leitlinien ist aber die folgende: Konstruiert man in einem bestimmten Punkt C einen einzigen zu A senkrechten Radius-Vektor, schneidet auf ihm zwei Strecken ϱ_1 und ϱ_2 ab, zieht in den Endpunkten der Strecken P und Q die beiden Zylinder-Leitlinien, so schneidet ein durch einen anderen Punkt C' der Weltachse gelegter senkrechter Querschnitt diese Leitlinien in den Punkten P' und Q', welche von C' selbstverständlich wieder genau die Entfernungen ϱ_1 und ϱ_2 haben. Aber die drei Punkte C', P', Q', liegen nicht in einer natürlichen Geraden, sondern die Radien-Vektoren $C'P'$ und $C'Q'$ bilden einen kleinen Winkel miteinander, einen Winkel, der um so größer wird, je weiter C' von C wegrückt, und je größer man ϱ_2 wählt. Wenn man nun zunächst in der die Achse A umgebenden unendlich dünnen Weltröhre ein gewöhnliches orthogonales Zylinderkoordinatensystem konstruiert, und darauf auf jedem größeren Zylinder durch die Endpunkte aller Radien-Vektoren, welche in der Nähe der Achse A eine Meridianebene bilden, eine Linie

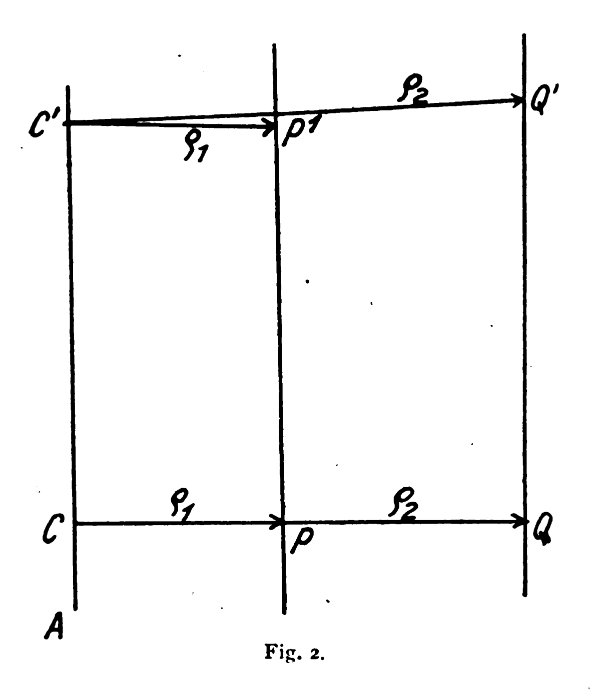


Fig. 2.

legt, so schneiden diese Linien die Kugelquerschnitte der Zylinder im allgemeinen schief, und zwar um so schiefer, je größer der Radius des betreffenden Zylinders ist. Man bekommt auf diese Weise also kein genau orthogonales Koordinatensystem. Die genauere Rechnung führt nun aber zu dem bemerkenswerten Resultat, daß der kleine Winkel, welchen die den senkrechten Trajektorien der Kugelschnitte zugeordneten Radien-Vektoren $C'P'$ und $C'Q'$ miteinander bilden, stets nur von der Größenordnung q^4 ist. Vernachlässigen wir also alle Größen von der Ordnung q^4 an und rechnen wir nur bis zu den Größen von der Ordnung q^2, so sind die Zeitlinien des eben konstruierten Koordinatensystems von den senkrechten Trajektorien der Kugelquerschnitte der Zylinder nicht zu unterscheiden. Wesentlich unterscheidet sich unser Koordinatensystem von dem Zylinderkoordinatensystem der minkowskischen Geometrie jetzt nur dadurch, daß die senkrechten Trajektorien der Kugelquerschnitte, also die Leitlinien der Zylinder, die zeitartigen Koordinatenlinien, keine Geraden sind. Infolgedessen sind die Abschnitte, welche zwei senkrechte Querschnitte eines Zylinders aus verschiedenen Leitlinien ausschneiden, im allgemeinen unter sich und von dem entsprechenden Abschnitt auf der Zylinderachse A verschieden. Dadurch wird die Geometrie des Zylinderkoordinatensystems natürlich ziemlich kompliziert. Ein weiterer Unterschied gegen die minkowskische Geometrie, der aber speziell bei unserem Problem keine Bedeutung gewinnt, ist der, daß die Polarkoordinatensysteme in den verschiedenen

senkrechten Querschnittsräumen unseres Zylinderkoordinatensystems, abgesehen von einer regelmäßigen periodischen Wiederholung, alle untereinander etwas verschieden und im allgemeinen in größeren Entfernungen von der Achse A nicht mehr orthogonal sind.

Mit der Konstruktion dieses vierdimensionalen Zylinder-Koordinatensystems ist unser elektrisches Problem der Hauptsache nach gelöst. In der Relativitätstheorie ist bekanntlich das elektrostatische Potential nichts anderes als die zeitliche Komponente eines Vierervektors, des „Viererpotentials". Im elektrostatischen Fall laufen die Linien dieses Vierervektors also alle parallel zu der Weltlinie des Teilchenmittelpunktes, weil beim ruhenden Teilchen diese Weltlinie die Zeitachse selber ist. Man kann beweisen, daß in der näheren und ferneren Umgebung des um das Gravitationszentrum kreisenden geladenen Teilchens eine Lösung möglich ist, bei welcher in der Annäherung, mit welcher wir rechnen, die Linien des Viererpotentials identisch sind mit den Leitlinien auf den Zylindermänteln, also den zeitartigen Koordinatenlinien des eben von uns konstruierten Zylinderkoordinatensystems. Man erkennt sofort die Analogie zu dem minkowskischen Fall der Elektrostatik und sieht ohne weiteren Beweis unmittelbar ein, daß in der unendlich nahen Umgebung des Teilchens unsere Lösung in diejenige übergeht, die man aus dem elektrostatischen Fall durch Anwendung des Prinzips von der Relativität der Gravitationswirkungen gewinnt. An die Stelle der einfachen Laplaceschen Differentialgleichung für den Wert des Potentials tritt allerdings entsprechend der komplizierteren nichtminkowskischen Geometrie eine kompliziertere Gleichung, die sich aber doch ohne Schwierigkeit integrieren läßt. So ergibt sich das elektrostatische Potential des Teilchens in der nichtminkowskischen Geometrie als:

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varrho}\cdot\left(1 - q^2\cdot\left[1 + \frac{\varrho}{r} - \frac{a}{\varrho}\cdot ln\frac{r+\varrho+a\cdot\cos\beta}{a\cdot(1+\cos\beta)} - \frac{1}{2}\frac{\varrho}{a}\cdot\cos\beta\right]\right)$$

wo e die elektrische Ladung des Teilchens ist. Entwickelt man für kleine Werte von ϱ den Faktor von q^2 in eine Potenzreihe und beschränkt sich auf die ersten Glieder, so bekommt man:

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varrho}\cdot\left(1 - q^2\cdot\left[\frac{\varrho}{a} - \frac{\varrho^2}{a^2}\cdot\left(\cos\beta + \frac{1}{2}\cos^2\beta - \frac{1}{6}\right)\right]\right).$$

Für sehr kleine Werte von ϱ kann man also das Glied q^2 weglassen, man bekommt dann den nach dem Prinzip der Relativität des Gravitationsfeldes zu erwartenden Coulombschen Wert: $e/4\pi\varrho$. Bei sehr großen Werten von ϱ tritt das Glied mit dem Faktor ϱ/a immer stärker hervor, man kann bei genügend großen Werten von ϱ schließlich rechnen:

$$\varphi = \frac{e}{4\pi\varrho}\cdot\left(1 + q^2\cdot\frac{1}{2}\frac{\varrho}{a}\cdot\cos\beta\right).$$

Je größer ϱ wird, um so stärker tritt das Glied mit q^2 in den Vordergrund, um so größer wird die Abweichung vom Coulombschen Wert. Wächst ϱ immer weiter, so kann man schließlich den eben hingeschriebenen Ausdruck nicht mehr als Näherungsformel gebrauchen. Für die unendliche Ferne muß man eine andere Entwickelung für φ suchen, die auch die Glieder mit höheren Potenzen von q^2 enthält.

Bevor wir das ausführen können, müssen wir von der durch die „natürliche" Konstruktion der Geraden erhaltenen nicht minkowskischen Geometrie und dem eigentümlichen Zylinderkoordinatensystem in ihr übergehen auf die gewöhnliche, „konventionelle" oder „vernunftgemäße" Geometrie, in welcher das elektrisch geladene schwere Teilchen nicht ruht, sondern in dem vom Zentrum O ausgehenden Gravitationsfeld kreist. Bei der Umformung des gewonnenen Ausdrucks von φ für das „vernunftgemäße" Koordinatensystem werden wir nicht nur ein skalares Potential, sondern auch ein magnetisches Vektorpotential bekommen, weil das bewegte Teilchen natürlich auch ein magnetisches Feld mit sich führt. Ich will die vier Komponenten des Potentials in dem vernunftgemäßen Koordinatensystem mit f_1, f_2, f_3, f_4 bezeichnen. Das benutzte Koordinatensystem sei im Raum ein Polarkoordinatensystem, dessen Anfangspunkt im Gravitationszentrum O liege. Der Radiusvektor heiße r, der Winkel zwischen r und der zur Bahnebene des Teilchens senkrecht stehenden Polarachse heiße ϑ, der Winkel zwischen der durch r gehenden Meridianebene mit einem Anfangsmeridian sei φ. Es sei ferner $\omega = q/a$ die Winkelgeschwindigkeit des Teilchens, und der Anfangsmeridian sei so gewählt, daß der Teilchenmittelpunkt C zurzeit $t = 0$ in ihm liegt. Der Winkel der Meridianebene durch r mit dem durch OC gehenden Meridian ist dann $\varphi - \omega t$, f_1, f_2, f_3 seien die drei Komponenten des magnetischen Vektorpotentials in bezug auf die drei durch r, ϑ, φ bestimmten Koordinatenrichtungen. Der Abstand eines Punktes P im Raume $t = \text{const}$ von C sei, wie schon oben (S. 654) mit ϱ' bezeichnet, der Winkel zwischen ϱ' und der Richtung OC heiße β' (S. 654). ϱ' und β' sind von den mit ϱ und β bezeichneten Größen

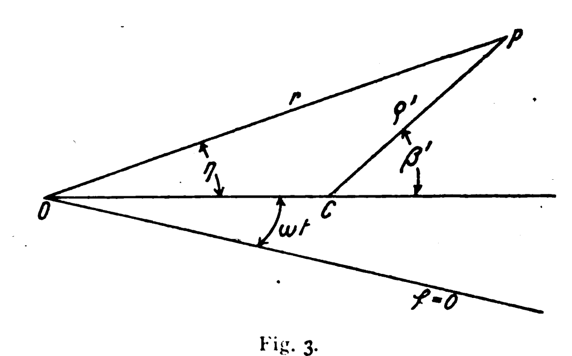


Fig. 3.

nur um kleine Beträge von der Ordnung q^2 verschieden. Endlich sei der Winkel, den die Ebene OCP mit der Meridianebene $\varphi = \omega t$ bildet, durch ψ' bezeichnet. Die drei Größen ϱ', β', ψ' bilden alsdann ein Polarkoordinatensystem, dessen Anfangspunkt C sich mit dem Teilchen auf einem Kreise um O bewegt. Es ist leicht ϱ', β', ψ' aus den drei Größen r, ϑ, $\varphi - \omega t$ zu berechnen. Die Umformung des berechneten Viererpotentials für das neue Koordinatensystem r, ϑ, φ, t ergibt:

$$f_1 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin(\varphi - \omega t),$$

$$f_2 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \cos\vartheta \cdot \sin(\varphi - \omega t),$$

$$f_3 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \cos(\varphi - \omega t),$$

$$f_4 = \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(1 + q^2 \cdot \left[\frac{\varrho'}{r} - \frac{1}{2}(1 + \sin^2\beta' \cdot \sin^2\psi') - \frac{a}{\varrho'} \cdot \left(1 - \frac{a}{r}\right)\cos\beta' + \frac{1}{2}\frac{\varrho'}{a} \cdot \cos\beta'\right]\right).$$

Aus diesen Ausdrücken kann man leicht nach den bekannten Formeln das elektrische und das magnetische Feld des kreisenden geladenen Teilchens ausrechnen. Speziell für sehr große Werte von ϱ' kommt in dem Glied des Ausdrucks für f_4 mit q^2 nur der letzte Summand in Betracht:

$$f_4 = \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{\varrho'}{a} \cdot \cos\beta'\right).$$

In der unendlichen Ferne muß sich an diese Formeln eine Lösung der gewöhnlichen Maxwellschen Gleichungen anschließen, da in sehr großer Entfernung vom Gravitationszentrum schließlich der Einfluß des Gravitationspotentials auf die elektrischen und magnetischen Eigenschaften des Äthers vernachlässigt werden darf. Eine solche Lösung bekommen wir, indem wir das bekannte Wiechert-Liénardsche Potential[1]) einer auf einem Kreise bewegten Punktladung berechnen. Ich will der Einfachheit halber nur die Ausdrücke hinschreiben, die man bekommt, wenn man nach a/ϱ' entwickelt und bei dem Glied erster Ordnung abbricht, ebenso auch alle Glieder, die von höherer Ordnung als q unendlich klein sind, wegläßt. Man bekommt dann:

$$f'_1 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin(\varphi - \omega t + \omega \cdot \varrho'),$$

$$f'_2 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \cos\vartheta \cdot \sin(\varphi - \omega t + \omega\varrho'),$$

$$f'_3 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \cos(\varphi - \omega t + \omega\varrho'),$$

$$f'_4 = \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(1 - \frac{a}{\varrho'} \cdot \sin\vartheta \cdot (\cos(\varphi - \omega t) - \cos(\varphi - \omega t + \omega\varrho')) + q \cdot \sin\vartheta \cdot \sin(\varphi - \omega t + \omega\varrho')\right).$$

Das gibt das Feld eines strahlenden Teilchens. Die Ausdrücke sind mit denen, die wir nach dem Prinzip von der Relativität des Gravitationsfeldes gewonnen haben, gar nicht zu vergleichen. Nun sind aber bekanntlich die elektromagnetischen Vorgänge umkehrbar. Wir wollen in den f' das Vorzeichen von t und ω umkehren, in f'_4 auch das von q, während der Faktor q in f'_1, f'_2, f'_3 sein Vorzeichen behalten soll. Die so gewonnenen Ausdrücke wollen wir mit f_1'', f_2'', f_3'', f_4'', bezeichnen. Auch diese f'' stellen dann eine Lösung der Maxwellschen Gleichungen dar. Sie liefern aber nicht das Feld eines strahlenden Teilchens, sondern das eines umlaufenden Teilchens, welches fortwährend eine Wellenstrahlung absorbiert, die, aus dem Unendlichen kommend, konzentrisch auf es zueilt. Das Feld eines Teilchens, welches weder strahlt noch absorbiert, bekommen wir, wenn wir bilden

$$f = \frac{1}{2}(f' + f'').$$

Eine leichte Rechnung gibt:

$$f_1 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \sin\vartheta \cdot \sin(\varphi - \omega t) \cdot \cos\omega\varrho',$$

$$f_2 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \cos\vartheta \cdot \sin(\varphi - \omega t) \cdot \cos\omega\varrho',$$

$$f_3 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \cos(\varphi - \omega t) \cdot \cos\omega\varrho',$$

$$f_4 = \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(1 - \frac{a}{\varrho'} \cdot \cos\beta' \cdot (1 - \cos\omega\varrho') + q \cdot \cos\beta' \cdot \sin\omega\varrho'\right).$$

Hierin ist gesetzt (vgl. Fig. 3)

$$\sin\vartheta \cdot \cos(\varphi - \omega t) = \cos\eta$$

1) M. Abraham. Theorie der Elektrizität. II, 1905, S. 84.

und
$$r \cdot \cos\eta = a + \varrho' \cdot \cos\beta'$$
oder in der von uns benutzten Näherung
$$\cos\eta = \cos\beta'.$$
Diese Ausdrücke f_1, f_2, f_3, f_4 liefern das Feld eines umlaufenden Teilchens, welches von einer stehenden elektromagnetischen Kugelwelle umgeben ist, welches also weder strahlt noch absorbiert. Etwa das Feld eines umlaufenden Teilchens, welches von einer sehr großen vollkommen reflektierenden Kugelschale umgeben ist, so daß die vom Teilchen emittierte Strahlung immer zu ihm zurückkehrt.

Setzt man ein $\omega \cdot \varrho' = q \cdot \varrho' : a$ und berechnet $\cos\omega\varrho'$ und $\sin\omega\varrho'$ für unendlich kleine Argumente also:
$$\cos\omega\varrho = 1, \qquad \sin\omega\varrho' = q \cdot \frac{\varrho'}{a},$$
$$1 - \cos\omega\varrho' = \frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{\varrho'^2}{a^2},$$
so bekommt man genau dieselben Werte, welche das Prinzip der Relativität des Gravitationspotentials für die äußere Grenze der weiteren Umgebung des Teilchens geliefert hat. Unsere Lösung f_1, f_2, f_3, f_4 ist also in der Tat die Fortsetzung des Integrals in das dritte Gebiet, das der unendlichen Ferne.

Wir sehen also, daß uns das Prinzip der Relativität des Gravitationsfeldes eine einwandfreie Lösung des Problems geliefert hat, nur ist das nicht diejenige Lösung, die das in einem sonst vollkommen leeren Raum um das Gravitationszentrum umlaufende elektrisch geladene Teilchen darstellt. Denn unter dieser Bedingung muß das Teilchen strahlen. Wie bekommen wir die Lösung des strahlenden Teilchens? Zu dem Zweck bilden wir zunächst einmal die Differenz der beiden Lösungen f' und f'' und setzen:
$$f^0 = \frac{1}{2}(f' - f'').$$
Offenbar ist dann die Lösung der Differentialgleichungen, welche das Feld des strahlenden Teilchens angibt, wenigstens in der unendlichen Ferne: $f + f^0$.

Es ergibt sich nun:
$$f_1{}^0 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \sin\vartheta \cdot \cos(\varphi - \omega t) \cdot \sin\omega\varrho',$$
$$f_2{}^0 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \cos\vartheta \cdot \cos(\varphi - \omega t) \cdot \sin\omega\varrho',$$
$$f_3{}^0 = q \cdot \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \sin(\varphi - \omega t) \cdot \sin\omega\varrho',$$
$$f_4{}^0 = \frac{e}{4\pi\varrho'} \cdot \left(q \cdot \cos\omega\varrho' - \frac{a}{\varrho'} \cdot \sin\omega\varrho'\right) \cdot \sin\vartheta \cdot \sin(\varphi - \omega t).$$

Auch diese Lösung stellt eine stehende Schwingung dar; aber eine Schwingung, welche existiert, ohne daß irgendwo eine bewegte Ladung wäre. Denn derjenige Term des elektrischen Feldes, der an der Stelle des rotierenden Teilchens ein Quellgebiet hat, ist bei der Subtraktion der beiden Integrale gerade weggehoben. Um zu untersuchen, wie das durch f^0 angegebene Feld in der Umgebung der Bahn des Teilchens aussieht, berechnen wir f^0 für kleine Werte von ϱ', indem wir setzen:
$$\sin\omega\varrho' = q \cdot \frac{\varrho'}{a} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} \cdot q^2 \cdot \frac{\varrho'^2}{a^2}\right),$$
$$\cos\omega\varrho' = 1 - \frac{1}{2} q^2 \cdot \frac{\varrho'^2}{a^2}.$$
Wir bekommen:
$$f_1{}^0 = q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} q^2 \cdot \frac{\varrho'^2}{a^2}\right) \sin\vartheta \cdot \cos(\varphi - \omega t),$$
$$f_2{}^0 = q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} q^2 \cdot \frac{\varrho'^2}{a^2}\right) \cdot \cos\vartheta \cdot \cos(\varphi - \omega t),$$
$$f_3{}^0 = q^2 \cdot \frac{e}{4\pi a} \cdot \left(1 - \frac{1}{6} q^2 \cdot \frac{\varrho'^2}{a^2}\right) \cdot \sin(\varphi - \omega t),$$
$$f_4{}^0 = -q^3 \cdot \frac{e}{12\pi a^2} \cdot \varrho' \cdot \sin\vartheta \cdot \sin(\varphi - \omega t).$$

Rechnet man hieraus nach den bekannten Formeln das elektrische Feld aus, so ergibt sich folgendes: In der Umgebung der Bahn des Teilchens hat das elektrische Feld $\mathfrak{e}$ die konstante Feldstärke:
$$\mathfrak{e} = \frac{2}{3} \cdot q^3 \cdot \frac{e}{4\pi a^2},$$
seine Richtung ändert sich fortwährend so, daß sie der Bewegungsrichtung des umlaufenden Teilchens stets genau entgegengesetzt ist. Mit andern Worten: Die Lösung f^0 liefert ein der Bewegung des Teilchens stets entgegenwirkendes elektrisches Drehfeld, welches aber nicht etwa durch umlaufende Ladungen hervorgerufen ist, sondern frei im Raume existiert und sich nach außen in einer stehenden elektromagnetischen Schwingung fortsetzt. Berechnet man auch das magnetische Feld in der Umgebung der Bahn des Teilchens, so findet man es von der Größenordnung q^4 und ganz so, wie man es nach den elementaren Vorstellungen von dem ein wechselndes elektrisches Feld oder, wie man zu sagen pflegt, einen elektrischen Verschiebungsstrom begleitenden Magnetfeld schon vorhersagen kann. Da die Feldstärke des elektrischen Drehfeldes von der Größenordnung q^3 ist, so genügt es auch im Gravitationsfeld den Differentialgleichungen, wenn wir wie in dieser ganzen Untersuchung die Glieder höherer Ordnung außer acht lassen. Wir können also sagen: „Die Lösung, welche

das Feld eines strahlenden Teilchens darstellt, ist gegeben durch $f+f^0$."

M. a. W.: Um die Lösung für das in einem sonst ganz leeren Raum um ein Gravitationszentrum umlaufende Teilchen zu gewinnen, muß man bei der Anwendung des Prinzips der Relativität der Gravitationswirkungen nicht von dem im leeren Raum ruhenden elektrisch geladenen Teilchen ausgehen, sondern von einem Teilchen, das sich in einem elektrischen Drehfeld befindet.

Was dieses Drehfeld bedeutet, ist leicht zu verstehen. Es bringt in das elektrische Feld des Teilchens die Unsymmetrie hervor, die notwendigerweise vorhanden sein muß, wenn die Bewegung entsprechend der Abgabe der Strahlungsenergie gebremst wird. In der Tat: Wenn das der Bewegung entgegenwirkende Feld die Stärke hat:

$$\frac{2}{3}\cdot q^3\cdot\frac{e}{4\pi a^2},$$

so erfährt das Teilchen bei seiner Bewegung die Gegenkraft

$$\frac{2}{3}\cdot q^3\cdot\frac{e^2}{4\pi a^2}.$$

Nun berechnet sich der Effektverlust des bewegten Teilchens als das Produkt Kraft mal Geschwindigkeit, also zu:

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{e^2}{4\pi a^2}\cdot q^4.$$

Berechnet man in der bekannten Weise den Effekt, der in der unendlichen Ferne fortwährend nach außen weggestrahlt wird, so ergibt sich genau derselbe Wert. Der weggestrahlte Effekt wird also durch die Verminderung der Bewegungsenergie des Teilchens geliefert.

Zum Schluß will ich die gefundenen Resultate noch etwas anschaulich zu machen versuchen. Ich denke mir ein Einsteinsches Coupé, welches mit der Geschwindigkeit q auf einer Kreisbahn vom Radius a um das Gravitationszentrum herumfährt. Die Beobachter in dem Coupé stellen an einem mitgeführten elektrisch geladenen Teilchen Beobachtungen an. Werden sie aus dem Verhalten des Teilchens irgendwelche Schlüsse auf die Bewegung des Coupés ziehen können oder nicht?

Man muß zwei Fälle streng unterscheiden. Im ersten Fall will ich annehmen, daß die Wandungen des Einsteinschen Coupés aus Metall bestehen. Dann endigt das von dem Teilchen ausgehende elektrische Feld auf der Wandung, es dringt nicht nach außen, und es können sich daher auch keine elektrischen Wellen entwickeln. In diesem Fall hat man zur Berechnung des elektrischen Feldes die erste Lösung, die ich mit f bezeichnet habe, zu nehmen. Nach dem Prinzip von der Relativität des Gravitationsfeldes verhält sich das Teilchen und das elektrische Feld in seiner nächsten Umgebung, wenn man die Geraden „natürlich" konstruiert und alles „natürlich" mißt, genau so, wie wenn es im gravitationsfreien Raum ruhte. Die Beobachter können dem Teilchen also nichts anmerken.

Im zweiten Fall nehme ich an, daß die Wandung des Einsteinschen Coupés aus vollkommen isolierendem Material besteht. Dann dringt das Feld des Teilchens hindurch bis in unendliche Fernen. Nun muß es strahlen, das elektrische Feld berechnet sich also nach der zweiten Lösung, die ich mit $f+f^0$ bezeichnet habe. Das Teilchen im Coupé verhält sich jetzt so, als ob es sich in einem elektrischen Drehfeld befinde, es wird diesem Drehfeld folgend relativ zu den mit dem Coupé festverbundenen Gegenständen eine mehr und mehr anwachsende Bewegung auf einer Spirale annehmen, und die Beobachter können daran merken, daß das Coupé nicht im gravitationsfreien Raum ruht, sondern sich auf einer Kreisbahn bewegt. Die Bewegung des Coupés bleibt den Beobachtern nur so lange verborgen, als sie mit ihren Beobachtungen ganz auf den kleinen Innenraum beschränkt sind. Sobald sie in den weiten Außenraum hinausblicken können, läßt sich die Bewegung an fernen Objekten im Raum, beispielsweise durch Beobachtung der Aberration der Fixsterne, feststellen. Wie unser Beispiel zeigt, braucht man nicht einmal aus dem Coupé hinauszusehen, sondern es genügt, die Feldlinien eines geladenen Teilchens gewissermaßen als Fühler bis in weite Fernen hinauszustrecken. An diesen Fühlern, an ihrer Rückwirkung auf das Teilchen, das sie aussendet, kann man die Bewegung im Gravitationsfeld bemerken, weil sich auf weite Entfernungen hin das Gravitationsfeld nicht mehr aus der Welt heraustransformieren läßt.

Diskussion.

Mie: Auf eine Anfrage (Stintzing), wie sich die Bemerkungen Mies über die Undenkbarkeit eines rotierenden, nicht strahlenden Elektrons mit der Bohrschen Theorie vereinigen ließen, weist Mie darauf hin, daß die Einsteinsche Gravitationstheorie noch nichts von Quantentheorie enthalte.

M. v. Laue (Berlin), Theoretisches über neuere optische Beobachtungen zur Relativitätstheorie.

1. Die Berechnung der Lichtablenkung an der Sonne beruht auf dem Satz,

daß die Lichtausbreitung nach der allgemeinen Relativitätstheorie durch die geodätischen Nulllinien der „Welt" dargestellt ist. Dieser Satz ist bisher nicht bewiesen, sondern nur nach Analogie aus der beschränkten Relativitätstheorie übertragen worden. In dieser ist er allerdings wohl bekannt. Die invariante Gleichung der „Lichtkugel"

$$x^{1^2} + x^{2^2} + x^{3^2} - x^{4^2} = 0$$

stellt ja in der Welt den Vor- und Nachkegel des Nullpunkts dar, also die Gesamtheit der von ihm ausgehenden geodätischen, d. h. hier geraden Linien, auf denen jede Strecke den Betrag Null hat.

Natürlich muß sich dieser Satz, wie in der beschränkten, so in der allgemeinen Relativitätstheorie aus der Elektrodynamik des leeren Raums beweisen lassen. Und tatsächlich kann man den altbekannten Weg dazu vollständig übertragen.

Das eine Quadrupel der Maxwellschen Gleichungen in der vierdimensionalen Schreibweise

$$\frac{\partial \mathfrak{M}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\beta\gamma}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial \mathfrak{M}_{\gamma\alpha}}{\partial x^{\beta}} = 0 \quad \text{oder} \quad \Delta iv\, \mathfrak{M}^* = 0 \qquad (1)$$

fordert nämlich dazu heraus, den Sechservektor $\mathfrak{M}$ des Feldes durch die Gleichungen

$$\mathfrak{M}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Phi_\beta}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x^\beta} \quad \text{oder} \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{Rot}\,\Phi \qquad (2)$$

auf das Viererpotential Φ zurückzuführen, denn (1) geht aus (2) ohne weiteres hervor. Damit ist aber das Potential noch nicht vollständig definiert, vielmehr kann man, wie aus der alten Theorie bekannt, noch die Bedingung[1])

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, \Phi^k) \quad \text{oder} \quad \mathrm{Div}\,\Phi = 0 \qquad (3)$$

hinzufügen.

Mit dem Ansatz (2) gehen wir nun in das andere Quadrupel der Maxwellschen Gleichungen hinein, welches lautet:

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, \mathfrak{M}^{hk})}{\partial x^k} = P^h \quad \text{oder} \quad \Delta iv\, \mathfrak{M} = P \ (P \text{ Viererstrom}). \qquad (3a)$$

Statt der kontravarianten Komponenten von $\mathfrak{M}$ führen wir hier zunächst die kovarianten ein, und gehen sodann von den links stehenden kontravarianten Komponenten der vektoriellen Divergenz zu den kovarianten über. Dann finden wir:

$$\Delta iv^h \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_k \frac{\partial (\sqrt{-g}\, \mathfrak{M}^{hk})}{\partial x^k} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{jkl} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, g^{hj} g^{kl} \mathfrak{M}_{jl})$$

$$\Delta iv_i \mathfrak{M} = \sum_h g_{ih}\, \Delta iv^h \mathfrak{M} = \sum_{hjkl} \left[\frac{g_{ih}\, g^{hj}}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, g^{kl} \mathfrak{M}_{jl}) + g_{ih}\, g^{kl} \mathfrak{M}_{jl} \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^k} \right].$$

In der ersten Hälfte der rechts auftretenden Summe können wir die Summation nach h vollziehen:

$$P_i = \Delta iv_i \mathfrak{M} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{kl} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, g^{kl} \mathfrak{M}_{il}) + \sum_{hjkl} g_{ih}\, g^{kl} \mathfrak{M}_{jl} \frac{\partial g^{hj}}{\partial x^k}.$$

Jetzt führen wir nach (2) Φ ein und subtrahieren die aus (3) hervorgehende Gleichung

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^i} (\mathrm{Div}\,\Phi) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{kl} \left[\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} (\sqrt{-g}\, g^{kl} \Phi_l) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g}\, g^{kl} \Phi_l) \right].$$

Dann bekommen wir, wenn wir mit F_i einen Ausdruck bezeichnen, der Φ und seine ersten Ableitungen linear, außerdem noch die g_{ik} und ihre ersten Ableitungen enthält und auf dessen Form es des weiteren nicht ankommt:

$$P_i = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \sum_{kl} \frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^k \partial x^l} g^{kl} + F_i. \qquad (4)$$

Damit haben wir die Übertragung der Wellengleichung; wir setzen im folgenden $P = 0$, beschränken uns somit auf ladungsfreie Räume.

Den Übergang von der Wellengleichung zur geometrischen Optik vollziehen wir nun nach demselben Verfahren, das Debye[2]) für die klassische Elektrodynamik vorgeschlagen hat. Wir setzen nämlich

1) Alle Summationen sind, sofern nichts anderes gesagt wird, von 1 bis 4 auszuführen.

2) A. Sommerfeld u. J. Runge, Ann. d. Phys. 35, 277, 1911.

$$\Phi_i = A_i e^{\sqrt{-1}\, kE} \qquad (5)$$

und verstehen darin unter E eine skalare Funktion der 4 Koordinaten, unter k eine Konstante, die wir hinterher unendlich groß werden lassen, und unter den A_i die Komponenten eines gegen die Exponentialfunktion langsam veränderlichen Vektors. Bei dem Grenzübergang kommen wir zu unendlich kurzen Wellen, also zur geometrischen Optik. Die Einsetzung der Werte

$$\frac{\partial \Phi_i}{\partial x^l} = e^{\sqrt{-1}\, kE}\left\{\frac{\partial A_i}{\partial x^l} + \sqrt{-1}\, k A_i \frac{\partial E}{\partial x^l}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_i}{\partial x^j \partial x^l} = e^{\sqrt{-1}\, kE}\left\{\frac{\partial^2 A_i}{\partial x^j \partial x^l} + \right.$$

$$+ \sqrt{-1}\, k\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^j}\frac{\partial E}{\partial x^l} + \frac{\partial A_i}{\partial x^l}\frac{\partial E}{\partial x^j} + \right.$$

$$\left.\left. + A_i \frac{\partial^2 E}{\partial x^j \partial x^l}\right) - k^2 A_i \frac{\partial E}{\partial x^j}\frac{\partial E}{\partial x^l}\right\}$$

in (4) zeigt aber, daß die in F_i zusammengefaßten Glieder teils k gar nicht als Faktor erhalten, teils nur k selbst. Mit k^2 ist nur ein Term multipliziert, der sich aus der in (4) hingeschriebenen Summe ergibt. Behalten wir ihn allein bei, so kommen wir zu der Gleichung

$$\sum_{il} g^{il}\frac{\partial E}{\partial x^i}\frac{\partial E}{\partial x^l} = 0, \qquad (6)$$

welche als Ersatz für die Gleichung

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$$

der Eikonalfunktion ε zu betrachten ist. Sie sagt aus, daß der Gradient von E eine Nullrichtung hat.

Die Divergenzbedingung (3) fügt nur noch eine Aussage über den Vektor A hinzu, die beim Grenzübergang zu $k = \infty$ die Gestalt

$$\sum_i A^i \frac{\partial E}{\partial x^i} = 0$$

erhält.

Gleichung (6) differentieren wir nun nach x^m

$$\sum_{il} g^{il}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x^i \partial x^m}\frac{\partial E}{\partial x^l} + \frac{\partial E}{\partial x^i}\frac{\partial^2 E}{\partial x^l \partial x^m}\right) +$$

$$+ \sum_{il}\frac{\partial g^{il}}{\partial x^m}\frac{\partial E}{\partial x^h}\frac{\partial E}{\partial x^l} = 0.$$

Sodann machen wir Gebrauch von der Formel[1])

$$\frac{\partial g^{il}}{\partial x^m} = -\sum_j\left(\begin{Bmatrix} jm \\ i \end{Bmatrix} g^{jl} + \begin{Bmatrix} jm \\ l \end{Bmatrix} g^{ji}\right)$$

und finden

$$\sum_{il} g^{il}\left(\frac{\partial^2 E}{\partial x_i \partial x^m}\frac{\partial E}{\partial x^l} + \frac{\partial E}{\partial x^i}\frac{\partial^2 E}{\partial x^l \partial x^m}\right) =$$

$$= \sum_{jil}\left(\begin{Bmatrix} jm \\ i \end{Bmatrix} g^{jl} + \begin{Bmatrix} jm \\ l \end{Bmatrix} g^{ji}\right)\frac{\partial E}{\partial x^i}\frac{\partial E}{\partial x^l}.$$

In beiden Summen geht die zweite Hälfte in die erste über, sowie wir die Summationszeiger i und l vertauschen, also:

$$\sum_{il} g^{il}\frac{\partial E}{\partial x^l}\frac{\partial^2 E}{\partial x^i \partial x_m} = \sum_{jil}\begin{Bmatrix} jm \\ i \end{Bmatrix} g^{jl}\frac{\partial E}{\partial x^i}\frac{\partial E}{\partial x^l}. \qquad (7)$$

Jetzt verfolgen wir eine der „Kraftlinien“ des vierdimensionalen Vektorfeldes des Gradienten von E auf die Strecke $d\tau$, deren kontravariante Komponenten die dx^i sein mögen. Dann besteht zwischen den Quotienten $\partial x^i / d\tau$ und den kontravarianten Komponenten des Gradienten, den Summen

$$\sum_l g^{il}\frac{\partial \xi}{\partial x^l}$$

Proportionalität. Wir dürfen diese Summen daher in (7) durch jene Quotienten ersetzen:

$$\sum_i \frac{\partial^2 E}{\partial x^m \partial x^i}\frac{\partial x^i}{d\tau} = \sum_{ji}\begin{Bmatrix} jm \\ i \end{Bmatrix}\frac{\partial E}{\partial x^i}\frac{\partial x}{dT}$$

und finden dann unmittelbar

$$\frac{d}{d\tau}\left(\frac{\partial E}{\partial x^m}\right) = \sum_{ji}\begin{Bmatrix} jm \\ i \end{Bmatrix}\frac{\partial E}{\partial x^i}\frac{dx^j}{dT}.$$

Dies aber ist die bekannte Formel für die Veränderung einer kovarianten Vektorkomponente bei der Parallelverschiebung[1]). Verrücken wir den Gradienten längs der „Kraftlinie“, so behält er also seine Richtung bei. Nun ist aber seine Richtung die der Kraftlinie selbst, also behält letztere ebenfalls im Fortschreiten ihre Richtung bei; sie also eine geodätische Linie, und nach (6) eine geodätische Nullinie.

Überlegen wir schließlich, daß der Gradient von E die Fortpflanzung der durch den Ansatz (5) gegebenen Schwingung darstellt, so haben wir den gewünschten Satz bewiesen.

2. **Die Theorie der Rotverschiebung** wird gewöhnlich so gegeben: Nach der Maßbestimmung

$$d\tau^2 = \sum_{ik} g_{ik}\, dx^i dx^k \qquad (x^4 = t)$$

ist das Verhältnis zwischen der Eigenzeit $d\vartheta$ einer in dem gewählten System ruhenden Uhr und der Zeit t gleich $\sqrt{g_{44}}$. Auf der Sonne ist g_{44} kleiner, als auf der Erde, also ist die Eigenzeit $d\vartheta_1$ einer Uhr auf der Sonne kleiner als die Eigenzeit $d\vartheta_2$ einer auf der Erde, wenn

1) H. Weyl, Raum, Zeit, Materie. 1. Aufl., S. 105, Gl. 41.

1) Ebenda S. 101, Gl. 36.

man beide $d\vartheta$ auf dasselbe dt bezieht. Die Schwingungszahlen aber, bezogen auf t, verhalten sich wie die Eigenzeiten.

Man kann dagegen einwenden, daß bei der vollkommenen Willkür in der Wahl der Zeitveränderlichen nicht einzusehen ist, was diese Beziehung auf dasselbe dt für eine physikalische Bedeutung haben soll. Oder anders ausgedrückt: Kommt die Lichtwelle auf der Erde mit derselben auf t bezogenen Schwingungszahl an, mit der sie die Sonne verläßt? Wenn sie bei der Fortpflanzung ihre Schwingungszahl ändert, so läßt die obige Überlegung überhaupt keinen Schluß auf einen physikalisch nachweisbaren Effekt zu.

Und zunächst scheint es nun in der Tat so zu sein. Denn es kann unmöglich in jedem Bezugssystem der Satz von der Erhaltung der Schwingungszahl einer Lichtwelle gelten. Gibt es nämlich ein System, in welchem er richtig ist, so brauchen wir nur die Transformation $t' = \varphi(t)$ auszuführen, wobei φ nicht gerade eine lineare Funktion mit konstanten, d. h. von x^1, x^2, x^3 unabhängigen Koeffizienten ist, und haben dann ein System, in dem er falsch ist.

Nun aber bezieht sich die übliche Theorie der Rotverschiebung gar nicht auf ein beliebiges, sondern auf ein ganz besonderes System mit der Maßbestimmung

$$d\tau^2 = V^2 dx^{4^2} - \sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik}\, dx^i\, dx^k,$$

in welcher alle Koeffizienten von $x^4 = t$ unabhängig sind.

Ergänzen wir nun, um zu Sinusschwingungen zu gelangen, den Ansatz (5) durch die Festsetzung

$$E = \alpha x^4 + f(x^1, x^2, x^3),$$

wobei wir aber unter α zunächst eine Funktion von x^1, x^2, x^3 verstehen, so liefert die Gleichung (6):

$$V^2\alpha^2 - \sum_{ik=1}^{3} \gamma_{ik} \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial f}{\partial x^k} - x^4 \sum_{ik} \gamma_{ik} \frac{\partial \alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \alpha}{\partial x^k} = 0.$$

Diese in t lineare Funktion kann nur dann identisch verschwinden, wenn die positiv definitive Quadratform, mit der t multipliziert ist, Null ist. D. h. α und ebenso die Schwingungszahl $2\pi k\alpha$ der Welle ist in diesem Koordinatensystem konstant.

Diskussion.

Hamel: Herr v. Laue hat uns 1. gezeigt, daß aus der Einsteinschen Theorie folgt, daß für lichtschnelle Schwingungen eine vollkommene Analogie zur geometrischen Optik besteht, 2., daß eine auf der Sonne eventuell stattfindende Rotverschiebung auch wirklich zu uns kommt. Ich möchte mir folgende Frage erlauben: Gibt es einen exakten Nachweis dafür, daß die Rotverschiebung wirklich eintritt. Nach der Auffassung der Theorie ist auf der Sonne die Uhr eine andere wie auf der Erde und es wird ohne weiteres angenommen, daß sich die Licht aussendenden schwingenden Atome nach dieser Uhr richten, wodurch die Rotverschiebung zustande kommen würde. Ist im Sinne des Herrn v. Laue ein Ansatz dafür vorhanden, dieses streng zu beweisen?

Einstein: Es ist eine logische Schwäche der Relativitätstheorie in ihrem heutigen Zustande, daß sie Maßstäbe und Uhren gesondert einführen muß, statt sie als Lösungen von Differentialgleichungen konstruieren zu können. Was aber die Zuverlässigkeit der Konsequenzen hinsichtlich der Beziehung auf das empirische Fundament der Theorie anbelangt, so sind die Konsequenzen, welche das Verhalten der starren Körper und Uhren betreffen, die am besten gesicherten. Da die emittierenden Atome als „Uhren" im Sinne der Theorie anzusehen sind, so gehört die Rotverschiebung zu den sichersten Ergebnissen der Theorie.

L. Grebe (Bonn), Über die Gravitationsverschiebung der Fraunhoferschen Linien.

Nachdem außer der Perihelbewegung des Merkur auch die aus der Einsteinschen Gravitationstheorie folgende Strahlenkrümmung im Sonnenfelde durch die Untersuchungen von Dyson, Eddington und Davidson ihre vorläufige Bestätigung gefunden hat, ist noch die Rotverschiebung der Spektrallinien, die für das Gravitationsfeld der Sonne einen Wert

$$\frac{\triangle\lambda}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-6}$$

haben soll, Gegenstand der Diskussion der letzten Jahre gewesen.

Scheint es auf den ersten Blick, als ob die Konstatierung eines solchen Verschiebungseffektes bei der Feinheit unserer spektroskopischen Hilfsmittel, für die an sich eine Linienverschiebung von 0,008 Å. E. im violetten Spektralbezirk bei 4000 Å. E. leicht meßbar ist, keine Schwierigkeit haben könnte, so ergibt doch die Prüfung, daß es sich hier, wo das Sonnenspektrum in Frage kommt, um eine experimentell sehr schwierige Aufgabe handelt.

Das liegt einmal daran, daß der Vergleich eines Emissionsspektrums wie es unsere irdischen Lichtquellen liefern, mit einem Absorptionsspektrum schon an sich schwieriger ist, als etwa die Vergleichung zweier Emissionsspektren, dann

aber kommt hinzu, daß auf der Sonne auch anderweitige Verschiebungseffekte auftreten können, über die wir nicht hinreichend unterrichtet sind, um sie in allen Fällen mit genügender Sicherheit ausschließen zu können.

Solche möglichen Verschiebungseffekte sind zunächst Doppelverschiebungen, bedingt durch Bewegungen im Visionsradius der die Linien erzeugenden Gase; ferner Druckverschiebungen, die sich nach den Erfahrungen im Laboratorium bei vielen Spektrallinien zeigen; weiter können Verschiebungen durch anomale Dispersion in Betracht gezogen werden, wenn man mit Julius die Sonnenlinien nicht nur durch Absorption, sondern zum Teil auch durch Strahlenablenkung infolge anomaler Dispersion entstanden annimmt und schließlich können durch Ineinanderlagerung nicht trennbarer Fraunhoferscher Linien Störungen auftreten, die eine Veränderung der wahren Lage der beobachteten Linien hervorrufen. Beachtet man endlich noch, daß auch im irdischen Vergleichsspektrum nahe benachbarte Linien sich gegenseitig stören können, ohne daß im Absorptionsspektrum diese Störung die gleiche zu sein braucht, so sieht man, daß sehr mannigfaltige Einflüsse die Verschiebungsmessungen fälschen können; die Aufgabe des Experimentators muß also sein, diese Einflüsse auszuschalten, um zu reinen Resultaten zu kommen.

Die systematischen Dopplereffekte, wie sie durch die Rotation der Sonne für Randbeobachtungen und durch die radiale Bewegung der Erde relativ zur Sonne auftreten sind natürlich leicht durch Rechnung zu eliminieren. Ebenso lassen sich verhältnismäßig leicht Dopplereffekte infolge der Bewegung des die Linien erzeugenden Gases durch vergleichende Beobachtungen der Sonnenmitte und der Sonnenränder eliminieren.

Schwieriger ist es mit den Druckeffekten. Linien, die überhaupt Druckeffekte zeigen, dürfen deshalb für die Untersuchung überhaupt nicht verwendet werden; aber wir haben in den Linien der Bandenspektra Objekte zur Verfügung, die nach den uns bekannten Untersuchungen keine Druckverschiebung zeigen. Auf der Sonne zeigen sich um die Banden des Stickstoffs, die früher dem Cyan zugeschrieben wurden und da diese nach Untersuchungen z. B. von Geißler auch frei von Erscheinungen der anomalen Dispersion sein sollen, sind sie zur Untersuchung der in Rede stehenden Effekte besonders geeignet.

Zuerst von Schwarzschild, dann von Evershed und Royds, später von St. John und schließlich von Bachem und mir sind deshalb die Banden zur Untersuchung des Einsteinschen Gravitationseffektes herangezogen worden.

Ich will zunächst über die Versuche von Bachem und mir berichten, um dann mit einigen Worten auf die der anderen Autoren einzugehen.

Wir benutzten folgende Versuchsanordnung: Das Sonnenlicht wurde mittels eines Fueßschen Heliostaten zu der im Keller des Bonner Physikalischen Instituts aufgebauten Konkavgitteraufstellung geleitet. Durch einen guten Hohlspiegel wurde ein Sonnenbild von 1,2 cm Größe entworfen und dieses durch ein Steinheilsches Spektrographenobjektiv auf etwa 5 cm vergrößert. Durch eine mit konzentrischen Kreisen versehene Spaltblende konnte die Mitte des Sonnenbildes bis auf Bruchteile des Millimeters genau auf den Spalt des Gitterspektrographen geworfen werden. Das Gitter selbst war ein sehr gutes Rowlandsches Konkavgitter, das durch jahrzehntelange Untersuchung als vollständig fehlerfrei bekannt ist. Wir haben fast alle Aufnahmen in der zweiten Ordnung gemacht, weil sich bei Probeaufnahmen und -messungen ergab, daß eine weitere Vergrößerung, wie sie etwa in dritter Ordnung erreicht wird, keinen Vorteil für die Messung mehr bietet, im Gegenteil wegen der Verbreiterung der Absorptionslinien in der Sonne, wodurch die Ränder verwaschen werden, die Sicherheit der Einstellung des Meßmikroskops beeinträchtigt. Es ist dies übrigens eine bei der Messung von Absorptionsspektren durchaus bekannte Erscheinung. Die Dispersion bei unsern Aufnahmen betrug etwas über 1 mm pro Ångströmeinheit, die auflösende Kraft des Spektralapparates ist für die zu erwartenden Effekte weitaus genügend.

Eine besondere Untersuchung galt dem Vergleichsspektrum. Es wurde im Kohlebogen erzeugt und immer zu beiden Seiten des Sonnenspektrums zur Hälfte vor, zur Hälfte nach der Sonnenaufnahme belichtet, um etwaige Einflüsse von Temperaturänderungen auszuschließen. Die Temperatur war übrigens so konstant — sie änderte sich tagelang überhaupt nicht meßbar —, daß Änderungen während der Aufnahme nicht wahrscheinlich waren.

Da wir aber bei Metallspektren Einflüsse der Bogengröße und Stromstärke auf die Metalllinien oder Teile derselben kennen, wurden Vergleichsaufnahmen der Stickstoffbanden bei verschiedenen Bogenbedingungen gemacht. Dabei wurde auch der Bogen verschiedenen Drucken ausgesetzt von 70 mm Druck bis 3 Atmosphären ohne daß eine meßbare Beeinflussung der Linien erfolgt wäre. Es ist also der Kohlebogen ein durchaus einwandfreies Mittel zur Erzeugung des Vergleichsspektrums.

Die Messungen wurden in der Weise ausgeführt, daß immer direkt die Differenz Sonnenlinie —Bandenlinie durch Messung an einem Töpferschen Meßapparat und einer Wolzschen Teilmaschine bestimmt wurde. Die angeschriebene Tabelle gibt die Mittelwerte für die von uns gemessenen 36 Linien[1]). Jede Zahl ist das Mittel aus Messungen an meist 5—6 Platten, die je 4 mal gemessen wurden, also ist meist aus 20—24 Beobachtungen, von denen die Hälfte Bachem, die andere Hälfte ich ausgeführt habe, gebildet. Die Zahlen bedeuten äquivalente Dopplergeschwindigkeiten — der Einsteinsche Effekt sollte etwa 0,6 km/sec entsprechen.

Man sieht, daß die Verschiebungen im Mittel den Einsteinwert nicht erreichen, sondern etwa die Hälfte desselben ergeben; aber man sieht auch, daß die Zahlen eine Mittelbildung überhaupt nicht gestatten; denn die Verschiedenheiten der Zahlen sind nicht etwa zufällige durch Versuchs- oder Meßfehler bedingte, sondern sie entsprechen einem wirklich verschiedenen Verhalten der Linien. Das tritt insbesondere dann zutage, wenn Sie die Messungen anderer Beobachter an den gleichen Linien vergleichen. Sie sehen dann, daß die Linien mit starker Verschiebung bei allen Beobachtern die am stärksten verschobenen sind und umgekehrt. Und damit erscheint es zunächst aussichtslos, diese Messungen überhaupt zur Kritik des in Rede stehenden Effektes zu verwenden, wenn es nicht gelingt, diejenigen Linien herauszuschälen, deren Verschiebung als die richtige angesprochen werden kann bzw. festzustellen, warum diese verschiedenen Linien verschiedene Verschiebungen zeigen.

Und das ist der Kernpunkt unserer weiteren Bemühungen gewesen: Welches ist der Grund dafür, daß die verschiedenen Sonnenlinien verschieden starke Verschiebung zeigen, obwohl es sich um Linien derselben Bande handelt, die also von demselben Zentrum erzeugt sein müssen.

Ehe ich aber auf die Resultate dieser Untersuchungen eingehe, will ich kurz die schon erwähnten Arbeiten der andern Autoren besprechen.

Die erste hier in Betracht kommende Arbeit ist die von Schwarzschild aus dem Jahre 1914. Sie wurde im Potsdamer Astrophysikalischen Institut mit einem Plangitter und Kollimatorrohr mit etwa der gleichen Dispersion, wie wir sie zu unseren Messungen verwendet haben, angestellt. Das auf den Spalt projizierte Sonnenbild war 2,6 cm groß. Die Resultate zeigen mit der unseren eine bemerkenswert gute Übereinstimmung. Schwarzschild hat ferner das Verhalten am Sonnenrande gegen die Sonnenmitte untersucht und findet einen kleinen Randeffekt im Sinne einer schwachen Rotverschiebung am äußersten Sonnenrande gegen die Sonnenmitte. Wie bei uns tritt deutlich das verschiedene Verhalten der verschiedenen Linien hervor, ohne daß indes daraus der Schluß gezogen wird, daß eine einfache Mittelbildung aus den gemessenen Linien nicht erlaubt ist.

Eine weitere wichtige Untersuchung stammt von St. John. Sie ist ebenfalls mit einem Plangitter ausgeführt und benutzt 43 Linien des Cyanbandenspektrums. Die Aufnahmen sind in 3. und 4. Ordnung des Gitters gemacht und haben daher größere Dispersion wie die von Schwarzschild und uns. Etwa 0,56 Å. E. pro mm in der dritten und 0,36 Å. E. in der vierten Ordnung. Ich habe schon oben erwähnt, daß für die Messung eines Absorptionsspektrums, sobald nur die nötige auflösende Kraft einmal erreicht ist, die Benutzung größerer Dispersion keinen Vorteil mehr bietet, wie wir selbst durch Vergleich der Aufnahmen in 2. und 3. Ordnung festgestellt haben. Sie spielt nur noch die Rolle einer Vergrößerung, wie man sie auch mit dem Meßmikroskop erreichen kann, und jeder, der einmal Platten ausgemessen hat, weiß, daß man die Vergrößerung nicht zu weit steigern darf. Außerdem benutzt St. John zur Erzeugung des Sonnenbildes ein 60 Fuß Turmteleskop, wodurch ein etwa 18 cm großes Sonnenbild erzielt wird. Das ist von hoher Bedeutung für die Beobachtungen am Sonnenrande, wo es gilt, sehr genau die Stelle der Sonnenscheibe festzustellen, an der man sich befindet. Für die Messungen in der Sonnenmitte hat es keine Bedeutung, da sich auch bei kleinem Sonnenbild die Mitte des Kreises mit vollkommen ausreichender Genauigkeit bestimmen läßt. Dementsprechend halte ich die Messungen am Sonnenrande für besser als die von Schwarzschild und uns, während die in der Sonnenmitte meiner Meinung nach keineswegs mit günstigeren Versuchsanordnungen gegen Schwarzschild und uns angestellt erscheinen. Merkwürdig ist es, daß die Resultate der Rotverschiebung in der Sonnenmitte bei St. John etwas kleiner ausfallen wie bei Schwarzschild und uns. Sie ergeben im Mittel der von St. John benutzten Linie nur 0,1 km/sec während sie bei Schwarzschild 0,22 und bei uns 0,3 km für die benutzten Linien betragen. Aber auch hier bei St. John kommt wieder deutlich zum Vorschein, daß die verschiedenen Linien sich verschieden verhalten und daß

[1]) Grebe u. Bachem, Verb. d. D. Phys. Ges. 21, 457, 1919.

eigentlich eine Mittelbildung nicht erlaubt ist. Der Randeffekt bei St. John beträgt 0,0019 Å. E. = 0,14 km.

Es liegen schließlich noch Messungen an 12 Linien der Cyanbande von Evershed und Royds vor, die ebenfalls mit Gitter ausgeführt sind, und die anscheinend mit kleinerer Dispersion gemacht sind. Dabei sind zum Teil Liniengruppen benutzt, was wohl mit Recht von St. John beanstandet wird. Aber die 4 einzelnen Linien zeigen bei den Messungen von Evershed und Royds auch wieder größere Werte als bei St. John, so daß die Messungen des letzteren gegen alle andern vorliegenden Werte kleiner sind, ohne daß ich für diese systematische Abweichung eine Erklärung angeben könnte. Zum Teil liegt es allerdings daran, daß Linien, die etwas größere Verschiebung ergeben, nicht mit benutzt sind, also an der getroffenen Auswahl.

Alle die erwähnten Arbeiten stimmen also in dem Ergebnis überein, daß verschiedene Linien verschiedene Verschiebungen ergeben und es tritt also die Frage auf, wie diese Verschiedenheiten zu erklären sind. Wir hatten zuerst geglaubt, daß es Unsymmetrien im Bau der Cyanbandenlinien seien, die die verschiedenen Verschiebungen bewirkten und hatten aus einem Versuch, der ergab, daß eine sehr lang exponierte gegen eine sehr kurz exponierte Cyanbandenaufnahme eine Verschiebung bei der Messung von 2 bis 3 Tausendstel Å. E. ergab, eine Stütze dieser Annahme gefolgert. Die späteren Untersuchungen haben nun das Vorhandensein solcher Unsymmetrien durchaus bestätigt, aber gezeigt, daß sie nur zum Teil in dem Bau der Cyanbande begründet liegen und auch da nicht in einer Unsymmetrie der Linien selbst, sondern in einer Störung durch Nachbarlinien ihre Ursache haben: solche Störungen sind aber in dem Sonnenspektrum noch viel häufiger als im irdischen Vergleichsspektrum.

Dieses Ergebnis gründet sich auf mikrophotometrische Aufnahmen, die wir mit Hilfe eines Kochschen selbstregistrierenden Mikrophotometers von allen von uns vermessenen Linien im Sonnenspektrum und im Vergleichsspektrum hergestellt haben. Dabei ergab sich, wie Sie in dem Projektionsbild der Originalaufnahmen sehen[1]), daß nur wenige von den von uns benutzten 36 Linien wirklich störungsfrei sind, so daß die gemessene Verschiebung zur Kritik des in Rede stehenden Effektes benutzt werden darf. Von den 36 Linien bleiben nur 11 übrig, deren Verschiebung Sie in der angeschriebenen Tabelle aufgezeichnet finden. Dann aber ist die Verschiebung erheblich größer als der Mittelwert aus allen. Die kleinen und die negativen Verschiebungen sind herausgefallen und es bleibt eine Rotverschiebung bestehen, die dem Einsteineffekt ungefähr entspricht, nämlich im Mittel aus allen Beobachtern

0,51 km/sec.

Berücksichtigen Sie noch den von Schwarzschild und St. John gefundenen Randeffekt von 0,14 km, so erhalten Sie einen Verschiebungseffekt von 0,65 km/sec, der mit aller wünschenswerten Genauigkeit dem Einsteinwert entspricht. Wir haben deshalb aus unseren Untersuchungen den Schluß gezogen, daß der durch die Einsteinsche Theorie geforderte Gravitationseffekt der Linienverschiebung wirklich vorhanden ist.

Immerhin gründet sich dieses Resultat nur auf Messungen an wenigen Linien, erscheint also einer Bestätigung auf anderem Wege bedürftig; und nach einer solchen anderweitigen Bestätigung habe ich deshalb gesucht.

Die bisherigen zu kleinen Verschiebungswerte haben Bachem und ich durch die getroffene Auswahl der Linien erklärt, bei der man leicht dazu geführt wird, die Linien mit zu großer Verschiebung als unbrauchbar anzunehmen, während man die zu kleinen als besser anzusehen geneigt ist. So nimmt Rowland in dem für unsere Messungen benutzten Bereich 24 mal einen Begleiter nach Rot an, während er nur 6 mal einen solchen nach Violett vermutet. Zu große Verschiebungen gegen die irdische Lichtquelle werden eben nach Rot infolge des hinzukommenden Einsteineffektes immer auffälliger werden als solche nach Violett, wo sich der Gravitationseffekt von der Verschiebung abzieht.

Sind aber wirklich die Unsymmetrien durch zufällige Störungen durch Nachbarlinien verursacht, so müssen sie herausfallen, sobald man nur eine genügend große Zahl von Linien benutzt, bei denen überhaupt auf jede Auswahl verzichtet ist; d. h. man muß in einem Intervall der Cyanbande etwa alle auftretenden Linien für die Verschiebungsuntersuchung benutzen.

Eine solche vollständige Messung liegt nun für die Cyanbande im Sonnenspektrum in den von Jewell vermessenen Rowlandschen Aufnahmen vor, während sie für das Kohlebogenspektrum in ausgezeichneten Messungen von Uhler und Patterson vorhanden ist. Diese Messungen sind in verschiedenen Normalen-

1) Grebe u. Bachem, Zeitschr. f. Phys. 2, 415ff. Durch ein Versehen fehlen in der Tabelle S. 421 zwei von uns als gut angesehene Linien. Das Verschiebungsmittel ändert sich dadurch im Mittel aller Beobachter auf 0,51 gegen den dort angegebenen Wert 0,54 km/sec.

systemen ausgeführt; aber man kann sie leicht aufeinander beziehen. Man braucht bloß die Differenzen von beiden für diejenigen Linien zu bilden, für die die Sonnenverschiebung vorliegt und diese um den Betrag der Verschiebung zu korrigieren, die sich zwischen Sonne und Vergleichslichtquelle ergeben hat. Dann bekommt man für diese Linien den Unterschied, den das Vergleichsspektrum bei Rowlands Normalsystem gegen das bei Uhler und Patterson hat. Das habe ich für diejenigen Linien ausgeführt, die von Bachem und mir, Schwarzschild und St. John gemessen sind, und die keine größere Differenz als 0,2 km/sec ergeben haben, bei denen also alle drei Beobachter innerhalb der Versuchsfehler sich in Übereinstimmung befinden. Diese Linien wurden dann graphisch aufgetragen und eine Kurve gezeichnet, die als Grundwert für die Verschiebungen bei Rowland anzunehmen ist. Und nun habe ich für 100 aufeinanderfolgende Cyanbandenlinien des Rowlandatlas ohne jede Auswahl die Verschiebungen Sonne — Erde ausgerechnet. Das Resultat ist im Mittel — denn hier ist jetzt Mittelbildung erlaubt — 0,0063 Å. E. = 0,46 km und fügen Sie wieder den St. Johnschen Randeffekt von 0,14 km hinzu, so erhalten Sie 0,6 km Verschiebung nach Rot, also wieder den Einsteinwert. Sie sehen, daß beide voneinander völlig unabhängigen Methoden die von der Einsteinschen Theorie geforderte Verschiebung ergeben. Und wenn auch ganz zweifellos weitere Experimente zur Prüfung dieses Effektes angestellt werden müssen, so haben wir doch guten Grund schon jetzt zu der Annahme, daß die Rotverschiebung in dem geforderten Betrage wirklich vorhanden ist.

Allgemeine Diskussion über Relativitätstheorie.

Lenard: Ich habe mich gefreut, heute in einer Gravitationstheorie vom Äther sprechen gehört zu haben. Ich muß aber sagen, daß, sobald man von der Gravitationstheorie auf andere als massenproportionale Kräfte übergeht, sich der einfache Verstand eines Naturforschers an der Theorie stößt. Ich verweise auf das Beispiel vom gebremsten Eisenbahnzug. Damit das Relativitätsprinzip gilt, werden bei Benutzung nicht massenproportionaler Kräfte die Gravitationsfelder hinzugedacht. Ich möchte sagen, daß man sich im physikalischen Denken zweier Bilder bedienen kann, die ich als Bilder erster und zweiter Art bezeichnet habe. In den Bildern erster Art sprach z. B. Herr Weyl, indem er alle Vorgänge durch Gleichungen ausdrückt. Die Bilder zweiter Art deuten die Gleichungen als Vorgänge im Raume. Ich möchte lieber die Bilder zweiter Art bevorzugen, während Herr Einstein bei der ersten Art stehen bleibt. Bei den Bildern zweiter Art ist der Äther unentbehrlich. Er war stets eines der wichtigsten Hilfsmittel beim Fortschritt in der Naturforschung, und seine Abschaffung bedeutet das Abschaffen des Denkens aller Naturforscher mittels des Bildes zweiter Art. Ich möchte zuerst die Frage stellen: Wie kommt es, daß es nach der Relativitätstheorie nicht unterscheidbar sein soll, ob im Falle des gebremsten Eisenbahnzuges der Zug gebremst oder die umgebende Welt gebremst wird?

Einstein: Es ist sicher, daß wir relativ zum Zug Wirkungen beobachten und wenn wir wollen, diese als Trägheitswirkungen deuten können. Die Relativitätstheorie kann sie ebensogut als Wirkungen eines Gravitationsfeldes deuten. Woher kommt nun das Feld? Sie meinen, daß es die Erfindung des Herrn Relativitätstheoretikers ist. Es ist aber keine freie Erfindung, weil es dieselben Differentialgesetze erfüllt wie diejenigen Felder, die wir als Wirkungen von Massen aufzufassen gewohnt sind. Es ist richtig, daß etwas von der Lösung willkürlich bleibt, wenn man einen begrenzten Teil der Welt ins Auge faßt. Das relativ zum gebremsten Zug herrschende Gravitationsfeld entspricht einer Induktionswirkung, die durch die entfernten Massen hervorgerufen wird. Ich möchte also kurz zusammenfassend sagen: Das Feld ist nicht willkürlich erfunden, weil es die allgemeinen Differentialgleichungen erfüllt und weil es zurückgeführt werden kann auf die Wirkung aller fernen Massen.

Lenard: Herrn Einsteins Ausführungen haben mir nichts Neues gesagt; sie sind auch nicht über die Kluft von den Bildern erster Art zu den anschaulichen Bildern zweiter Art hinweggekommen. Ich meine, die hinzugedachten Gravitationsfelder müssen Vorgängen entsprechen und diese Vorgänge haben sich in der Erfahrung nicht gemeldet.

Einstein: Ich möchte sagen, daß das, was der Mensch als anschaulich ansieht, und was nicht, gewechselt hat. Die Ansicht über Anschaulichkeit ist gewissermaßen eine Funktion der Zeit. Ich meine, die Physik ist begrifflich und nicht anschaulich. Als Beispiel über die wechselnde Ansicht über Anschaulichkeit erinnere ich Sie an die Auffassung über die Anschaulichkeit der galileischen Mechanik zu den verschiedenen Zeiten.

Lenard: Ich habe meine Meinung in der

Druckschrift „Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation" zum Ausdruck gebracht, daß der Äther in gewissen Beziehungen versagt hat, weil man ihn noch nicht in der rechten Weise behandelt hat. Das Relativitätsprinzip arbeitet mit einem nichteuklidischen Raum, der von Stelle zu Stelle und zeitlich nacheinander verschiedene Eigenschaften annimmt; dann kann nun eben in dem Raum ein Etwas sein, dessen Zustände diese verschiedenen Eigenschaften bedingen, und dieses Etwas ist eben der Äther. Ich sehe die Nützlichkeit des Relativitätsprinzips ein, solange es nur auf Gravitationskräfte angewandt wird. Für nicht massenproportionale Kräfte halte ich es für ungültig.

Einstein: Es liegt in der Natur der Sache, daß von einer Gültigkeit des Relativitätsprinzips nur dann gesprochen werden kann, wenn es bezüglich aller Naturgesetze gilt.

Lenard: Nur wenn man geeignete Felder hinzudichtet. Ich meine, das Relativitätsprinzip kann auch nur über Gravitation neue Aussagen machen, weil die im Falle der nichtmassenproportionalen Kräfte hinzugenommenen Gravitationsfelder gar keinen neuen Gesichtspunkt hinzufügen, als nur eben den, das Prinzip gültig erscheinen zu lassen. Auch macht die Gleichwertigkeit aller Bezugssysteme dem Prinzip Schwierigkeiten.

Einstein: Es gibt kein durch seine Einfachheit prinzipiell bevorzugtes Koordinatensystem; deshalb gibt es auch keine Methode, um zwischen „wirklichen" und „nichtwirklichen" Gravitationsfeldern zu unterscheiden. Meine zweite Frage lautet: Was sagt das Relativitätsprinzip zu dem unerlaubten Gedankenexperiment, welches darin besteht, daß man z. B. die Erde ruhen und die übrige Welt um die Erdachse sich drehen läßt, wobei Überlichtgeschwindigkeiten aufheben?

Der erste Satz ist keine Behauptung, sondern eine neuartige Definition für den Begriff „Äther".

Ein Gedankenexperiment ist ein prinzipiell, wenn auch nicht faktisch ausführbares Experiment. Es dient dazu, wirkliche Erfahrungen übersichtlich zusammenzufassen, um aus ihnen theoretische Folgerungen zu ziehen. Unerlaubt ist ein Gedankenexperiment nur dann, wenn eine Realisierung prinzipiell unmöglich ist.

Lenard: Ich glaube zusammenzufassen zu können: 1. Daß man doch besser unterläßt, die „Abschaffung des Äthers" zu verkünden. 2. Daß ich die Einschränkung des Relativitätsprinzips zu einem Gravitationsprinzip immer noch für angezeigt halte, und 3., daß die Überlichtgeschwindigkeiten dem Relativitätsprinzip doch eine Schwierigkeit zu bereiten scheinen; denn sie heben bei der Relation jedes beliebigen Körpers auf, sobald man dieselbe nicht diesem, sondern der Gesamtwelt zuschreiben will, was aber das Relativitätsprinzip in seiner einfachsten und bisherigen Form als gleichwertig zuläßt.

Rudolph: Daß sich die allgemeine Relativitätstheorie glänzend bewährt hat, ist kein Beweis gegen den Äther. Die Einsteinsche Theorie ist richtig, nur ihre Ansicht über den Äther ist nicht richtig. Auch wird sie erst annehmbar mit der Weylschen Ergänzung, geht dann aber sogar aus der Ätherhypothese hervor, wenn zwischen den beim Fließen verschobenen Ätherwänden Lücken bleiben, die durch Schleuderkraft infolge Richtungsänderung der Sternfäden leer gehalten werden.

Palagyi: Die Diskussion zwischen Einstein und Lenard hat auf mich einen tiefen Eindruck gemacht. Man begegnet hier wieder den alten historischen Gegensätzen zwischen experimentaler und mathematischer Physik, wie sie schon z. B. zwischen Faraday und Maxwell bestanden. Herr Einstein sagt, daß es kein ausgezeichnetes Koordinatensystem gibt. Es gibt eins. Lassen Sie mich biologisch denken. Dann trägt jeder Mensch sein Koordinatensystem in sich. In der Verfolgung dieses Gedankens ist eine Widerlegung der Relativitätstheorie enthalten.

Einstein weist darauf hin, daß kein Gegensatz zwischen Theorie und Experiment besteht.

Born: Die Relativitätstheorie bevorzugt sogar die Bilder zweiter Art. Ich betrachte als Beispiel die Erde und die Sonne. Wäre die Anziehung nicht, liefe die Erde geradlinig davon usw.

Mie: Daß die Ansicht, der Äther sei der greifbaren Materie wesensgleich, erst durch die Relativitätstheorie als unmöglich erkannt sein solle, habe ich nie verstehen können. Das war doch schon lange vorher durch Lorentz in seinem Buch „Elektrische und optische Erscheinungen in bewegten Körpern" geschehen. Auch Abraham hat in seinem Lehrbuch schon damals, als er der Relativitätstheorie noch ablehnend gegenüberstand, gesagt: „Der Äther ist der leere Raum."

Ich bin der Ansicht, daß man auch bei Annahme der Einsteinschen Gravitationstheorie doch ganz scharf unterscheiden muß zwischen den bloß fingierten Gravitationsfeldern, die man nur durch die Wahl des Koordinatensystems in das Weltbild hineinbringt, und den wirklichen Gravitationsfeldern, die durch den objektiven Tatbestand gegeben sind. Ich

habe kürzlich einen Weg gezeigt, wie man zu einem „bevorzugten" Koordinatensystem kommen kann, in welchem von vornherein alle bloß fingierten Felder ausgeschlossen sind.

Einstein: Ich kann nicht einsehen, wieso es ein bevorzugtes Koordinatensystem geben soll. Höchstens könnte man daran denken, solche Koordinatensysteme zu bevorzugen, in bezug auf welche der Minkowskische Ausdruck für ds^2 annähernd gilt. Aber abgesehen davon, daß es für große Räume solche Systeme gar nicht geben dürfte, sind diese Koordinatensysteme sicherlich nicht exakt, sondern nur approximater definierbar.

Kraus weist auf eine erkenntnistheoretische Differenz zwischen den Bildern erster und zweiter Art hin, indem er die Bilder erster Art für höherwertig als die Bilder zweiter Art hält.

Lenard: Es ist soeben das Schwerpunktsprinzip hineingebracht worden; ich glaube jedoch, daß das auf prinzipielle Fragen keinen Einfluß haben kann.

Hugo Dingler (München), Kritische Bemerkungen zu den Grundlagen der Relativitätstheorie.

Ich werde mich im folgenden mit einer Kritik der Grundlagen der Relativitätstheorie beschäftigen. Zuvor aber möchte ich nach alter ritterlicher Sitte vor dem Gegner den Degen senken und folgendes zum Ausdruck bringen.

Man mag zu der Relativitätstheorie stehen wie man will, das eine ungeheure Verdienst wird ihr, neben ihrer heuristischen Bedeutung, vor der Geschichte der Physik nicht genommen werden können: es ist ihr in kürzester Zeit, was noch vor 20 Jahren kaum jemand für möglich gehalten hätte, gelungen, fast die Gesamtheit der Gebildeten für die Grundlagen der exakten Wissenschaften aufs intensivste zu interessieren. Und ein weiteres hohes Verdienst, das man erst in einiger Zeit wird völlig würdigen können, ist das: Indem der ausgezeichnete und verdiente Schöpfer dieser Theorie mit rücksichtsloser Konsequenz aus den bestehenden völlig unbewiesenen Tagesmeinungen über die Grundlagen der Physik die Folgerungen zog und auf ihnen mit fabelhafter mathematischer Kunst eine große Theorie errichtete, hat er auf eine überaus eindrucksvolle Weise auf das verhängnisvolle Durcheinander hingewiesen, das in diesen Fragen noch herrscht, und wird auf diese Weise der Anstoß dazu sein, daß auch breiteren Kreisen dieses Durcheinander zum Bewußtsein kommt, und daß man sich nach einer Ordnung desselben umsieht.

Diese historischen Wirkungen der Relativitätstheorie werden alle Beweise ihrer Unhaltbarkeit ihr nicht zu rauben vermögen, und wenn diese Theorie, wie ich sicher bin, fällt, wird dies nicht aus Fehlern geschehen, die der Schöpfer der Theorie als solcher machte, sondern aus Fehlern, die in der herrschenden Anschauung über die Grundlagen der Physik liegen.

Ich komme zur Sache.

Es gibt am Anfang der Mechanik gewisse Schwierigkeiten, welche sich auf die Festlegung irgendwelcher Bewegungen im Raum beziehen und ferner besteht die Frage nach der Definition der Zeit. Wir wollen die Gesamtgruppe dieser Probleme als „die Orientierungsprobleme" bezeichnen, und uns mit ihnen beschäftigen. Die mangelnde Gelöstheit dieser Probleme hat in der Relativitätstheorie ihren sozusagen klassischen Ausdruck gefunden.

Lassen Sie uns vorerst einige Überlegungen anstellen.

Zunächst ist eine scharfe Scheidung festzuhalten zwischen Bewegungen geometrischer Figuren und von wirklichen Körpern. Die ersteren gehören zur Kinematik, die anderen zur Mechanik. In der Relativitätstheorie wird beides fortwährend vermengt zum großen Schaden der Klarheit. Ein Koordinatensystem ist eine geometrische Figur und kein wirklicher Körper. Ein Koordinatensystem braucht nicht fest an einem wirklichen Körper verankert zu sein, und es ist für jeden wirklichen Vorgang vollkommen gleichgültig, wie sich das Koordinatensystem, auf das ich ihn beziehe, bewegt. Denn, und dieses Prinzip liegt hier zugrunde, eine rein mathematisch-geometrische Bestimmung, die ja nur ein gedachtes Ding ist, kann keine reale Wirkung ausüben. (Diese Festsetzung ist die einfachere gegenüber der, daß eine solche Wirkung möglich sei. Denn dadurch wäre die Trennung zwischen Innen- und Außenwelt aufgehoben und ein noch vollkommeneres Durcheinander wäre die Folge. Sie sehen aber, schon hier liegen Festsetzungen zugrunde. Und genaues Zusehen zeigt, daß diese Festsetzungen durch Erfahrung weder bewiesen, noch widerlegt werden können.) Ich kann Sie also wie Sie hier sitzen in Gedanken auf ein beliebig beschleunigtes Koordinatensystem beziehen, ohne daß Sie das Geringste davon merken.

Wenn also die Relativitätstheorie davon spricht, daß durch bewegte Koordinatensysteme in der Wirklichkeit Wirkungen erzeugt werden, so ist das eine etwas unglückliche Ausdrucksweise dafür, daß gewisse Körper bewegt werden, mit denen sie sich ein Koordinatensystem verbunden denkt.

Ein zweiter wichtiger Satz ist der, daß rein



kinematisch zu jedem bewegten Körper ein Koordinatensystem so bestimmt werden kann, daß der Körper in bezug auf dieses System eine beliebige Bewegung beschreibt.

Nun erhebt sich die Frage: Wie machen wir die Bestimmungen der Bewegungen in der Wirklichkeit eindeutig? Denn dies ist zur widerspruchslosen Beschreibung der Wirklichkeit anzustreben.

Ich werde diese Probleme hier nach meinen Grundsätzen betrachten und man wird erstaunt sein, wie einfach und klar dabei alles wird. Nehmen wir also einen wirklichen Körper. Man spricht nun immer davon, ob man „an einem bewegten Körper durch mechanische Experimente seine Bewegung feststellen könne". Diese Ausdrucksweise ist in der Mechanik völlig irreführend. Ich kann fragen: gehöre ich zu dem bewegten Körper, gehören die Körper, mit denen ich Experimente mache, zu ihm, und wenn, auf welche Weise gehören diese dazu? Alle diese unnötigen Komplikationen liegen in dieser scheinbar so einfachen Ausdrucksweise, die aus der Theorie des Lichtes stammt. Wir werden gleich sehen, wie sie die Veranlassung zu den seltsamsten Mißverständnissen gewesen ist.

Es ist nämlich in der Mechanik nicht die Frage: wie ich an einem bewegten Körper durch mechanische Experimente seine Bewegung feststellen kann, nicht dieses irreführende Scheinproblem ist die Frage, sondern einfach: Wann nenne ich einen Körper bewegt, und wie ist seine Bewegung festzustellen? Ist die letztere Frage gelöst, dann ist es die erste von selbst.

Ein überaus charakteristisches Beispiel für das Gesagte ist der in der Relativitätstheorie so viel gebrauchte Eisenbahnwagen.

Man beginnt damit, zu sagen: Wenn ein Eisenbahnwagen eine Translation erfährt, kann dies der Ballspieler im Zuge nicht feststellen. Erfährt er eine Beschleunigung, so wird das Ballspielen unmöglich. Daraus hat man geschlossen, daß in dieser Hinsicht eine prinzipielle Verschiedenheit zwischen geradliniger gleichförmiger und ungleichförmiger Bewegung sei. Und doch ist dieses Beispiel völlig falsch. Bei dem transferierten Eisenbahnwagen setzt man voraus, daß der Ballspieler diese Translation einfach mitmache. Bei dem beschleunigten Zug aber setzen wir voraus, daß nur der Wagen beschleunigt wird, worauf der Ballspieler natürlich umfällt. Die beiden Fälle der transferierten und beschleunigten Eisenbahnwagen sind also so überhaupt nicht vergleichbar. Denn entweder muß in beiden der Ballspieler unabhängig vom Wagen sein, oder in beiden abhängig. Im ersten Falle wird er ohne Schwierigkeit die Bewegung des Zuges relativ zu sich feststellen können, und zwar in beiden Fällen. Im zweiten Fall, wenn angenommen wird, daß der Ballspieler (und seine Bälle natürlich) dauernd die gleiche Bewegung haben und erleiden, wie der Zug, wird es unmöglich, die Bewegung durch seine Bälle festzustellen, und zwar in beiden Fällen, wenn die Bewegung geradlinig verläuft. Den beschleunigten Fall kann man sich etwa realisiert denken dadurch, daß der Waggon unter Verschwinden der Reibung von einer großen Masse plötzlich stark nach dem Newtonschen Gesetz längs der Schienen angezogen wird, wobei dann alle Körper in ihm die gleiche Beschleunigung erhalten wie er selbst.

Damit ist das sogenannte Relativitätsprinzip der Newtonschen Mechanik von dieser Seite her erledigt. Die Rotation werden wir noch betrachten.

Daß der geschilderte Irrtum nicht nur in populären Schriften vorkommt, dafür hier nur ein Beispiel. In einem verdienstlichen Schriftchen über „Physikalisches über Raum und Zeit" gibt der Verfasser sogar ein objektives Experiment für den obigen falschen Satz. Er verbindet zwei Holzscheiben durch eine vertikale Spiralfeder. Läßt er das Ganze frei fallen, so zieht sich die Feder zusammen. Erzeugt er durch Reibung der tragenden Schnur eine gleichförmige Bewegung, so bleibt die Feder gespannt. Es ist klar, daß, wenn er dem horizontal gestellten System eine horizontale gleichförmige freie Bewegung geben würde, die Feder ebenfalls entspannt sein würde.

Ich bitte um Entschuldigung, wenn ich so elementare Dinge hier behandeln muß, aber diese befinden sich in unserer Wissenschaft im Zustande einer völligen Ungeklärtheit und Desorganisation.

Nun ein kurzes Wort über den Terminus „sich bewegen". Dieser wird im täglichen Leben trotz aller kinematischen Relativität ganz absolut gebraucht (oft ohne Angabe des Bezugskörpers). Sieht man genauer zu, so findet man, daß stets nur dann dieser scheinbar absolute Gebrauch stattfindet, wenn die Bewegung relativ zu einem vielfach größeren Körper erfolgt. Nehmen wir einmal diesen Gebrauch an, so ist die Phrase, daß sich der Eisenbahnzug bewegt, in dieser Hinsicht sinnvoll. Und ebenso die, daß sich die Erde bewegt, oder daß sich das Sonnensystem bewegt. Es ist klar, daß diese Stufenleiter nicht unendlich sein kann, und wir gelangen schließlich zu der Gesamtheit der mit unseren Sinnen irgendwie erreichbaren Welt. Dies ist im Groben das, was ich den „Festraum" genannt habe.

Schon Hugo v. Seeliger, sowie Ernst Mach und andere haben als letzten Bezugskörper, auf den alles bezogen wird, das Fixsternsystem bezeichnet. Die Astronomen benützen dies gewohnheitsmäßig, indem sie es auf hier nicht näher darzulegende Art von allen Bewegungen der Teile gegeneinander nach und nach befreien, was ein Prozeß von stetig steigender Genauigkeit ist. Sieht man genauer zu, dann erkennt man, daß dieser Prozeß nichts anderes bedeutet, als die allmählich immer genauere Konstruktion, oder Einbauung eines idealen starren Körpers in den uns zugänglichen Weltraum, dem gegenüber dann alle Bewegungen von Teilen des zugänglichen Universums stattfinden. Ich habe diese Verhältnisse in meinen „Grundlagen der Physik" genauer dargelegt, wo ich diesen idealen starren Körper den Festraum genannt habe. Man kann ihn als den Neumannschen Bezugskörper Alpha betrachten, welcher für Neumann das absolute Bezugssystem definierte[1]). Es bedarf aber der genauen Überlegung über die Bewegungen des Festraumes. Da zeigen uns unsere obigen Betrachtungen, daß Gesamttranslationen oder Gesamtbeschleunigungen desselben in gerader Linie nach dem Newtonschen Gesetz in dem Festraume nicht bemerkt werden können. Anders steht es jedoch mit Drehungen. Und hier kommen wir zum vielleicht bedeutungsvollsten Punkt in der Betrachtung der Orientierungsprobleme. Hier besteht eine äußerst folgenreiche Schwierigkeit.

Aus den Newtonschen Axiomen der Mechanik kann man ableiten, daß an einem sich drehenden Körper Kräfte auftreten, Zentrifugalkräfte, die etwa einen hinreichend plastischen Körper deformieren. Nun entstand folgendes Dilemma: Rein phoronomisch war es ganz gleichgültig, ob ich sagte, der Körper dreht sich gegen die Umgebung, oder ob ich sagte, die Umgebung dreht sich gegen den Körper. Zeigt nun aber ein Körper durch die Drehung objektive Veränderungen oder sonstige Wirkungen, so liegt es offenbar nicht mehr in meinem Belieben, ob ich ihm selbst eine Drehung zuschreibe oder nicht. Diese Schwierigkeit hat bekanntlich schon Newton nicht zu lösen vermocht.

Betrachten wir insbesondere die Drehung eines Körpers gegen das Fixsternsystem, und denken uns jetzt einmal mit Ernst Mach letzteres hinweg, so würde kein Bezugskörper mehr da sein, trotzdem aber die Drehung objektiv, wir hätten eine absolute Drehung. Diese Folgerung ist Ernst Mach so unsympathisch, daß er schließlich sich, wenn auch höchst widerwillig, zu dem Ausweg getrieben sieht, die Ursache für die Zentrifugalerscheinungen in der Anwesenheit des Fixsternsystems zu finden. Sie wissen, daß dieser Gedanke in der neueren Relativitätstheorie seinen systematischen Ausbau gefunden hat. Wenn man die Sache so betrachtet, wie sie gewöhnlich betrachtet wird, muß man zugeben, daß tatsächlich kein anderer Ausweg bleibt[1]).

Um so überzeugender zeigt sich daher die Kraft einer Art von Überlegungen, wie ich sie selbst seit über 15 Jahren anstelle, wenn man von ihnen aus das Problem betrachtet.

Aus den Newtonschen Prinzipien kann man den Satz ableiten, daß ein sonst unbeeinflußtes Pendel dauernd seine Schwingungsebene beibehält. Damit haben wir die Definition einer absolut orientierten Ebene. Wir sahen nun oben, daß geradlinige Gesamtbewegungen des Festraumes innerhalb desselben nicht konstatierbar sind. Fügen wir nun das Foucaultsche Pendel als Definition der absolut orientierten Ebene hinzu, dann können wir auch jede Drehung des Festraumes feststellen und damit eliminieren. Dann ist der für unsere momentane Genauigkeit und Reichweite einschlägige absolute Raum definiert, auf den nun sämtliche von uns wahrnehmbare Bewegungen bezogen werden können. Die zu ihm ruhenden (und transferierten) Koordinatensysteme sind die einzigen Inertialsysteme, die einzigen Systeme, gegenüber denen eine Translation wirkliche Kräftefreiheit bedeutet.

Der Vorgang bei der Feststellung der Drehung ist der. Wir machen den Versuch mit dem Foucaultschen Pendel. Daraus entnehmen wir die absolute Drehung der Erde überhaupt. Wollen wir dann wissen, ob diese Drehung schon durch die tägliche und jährliche Drehung der Erde geleistet wird, dann ziehen wir deren Beträge, die wir relativ zur Sonne auf anderem Wege feststellten, von der Foucaultschen Drehung ab. Läßt sich der Rest durch die Drehung des ganzen Sonnensystems gegenüber dem Fixsternsystem erklären, bzw. sind beide Beträge innerhalb der Genauigkeit gleich, dann sehen wir, daß sich unser Festraum nicht dreht. Sind diese Beträge ungleich, so würde eine Gesamtdrehung unseres Festraumes folgen.

1) Ich möchte hier auf die ausgezeichneten klaren Ausführungen von G. Hamel hinweisen („Über Raum, Zeit und Kraft als apriorische Formen der Mechanik", Jahresber. d. d. Math. Vergg. XVIII, 1909, besonders S. 359 u. 361), welche diese Auffassung schon fast völlig enthalten.

1) Was Ernst Mach eigentlich vor Augen hatte bei seiner Bekämpfung der absoluten Bewegung, war stets die absolute Bewegung eines Körpers in bezug auf den leeren Raum. Und darin hatte er völlig recht.



Stimmt z. B. die Abplattungsgröße einer plastischen Kugel nicht mit der auf diese Weise festgestellten Rotationsstärke, dann müssen bei der Abplattung noch andere Umstände mitgewirkt haben[1]).

Auf diese Weise fallen alle Relativitätsschwierigkeiten in nichts zusammen. Man sieht aber, man muß sich klar sein über die Reihenfolge der Voraussetzungen, mit denen man an die Wirklichkeit herantritt. Ohne diese Vorsicht gerät man in jenes hoffnungslose Durcheinander, in dem wir uns zurzeit befinden.

Gehen wir auf diese Weise vor, so erkennt man, daß für jenes sogenannte Relativitätsprinzip der klassischen Mechanik nichts übrigbleibt als etwas rein Mathematisches. Und auch das erkennen wir sofort als von denkbar harmlosester Art.

Das zweite Newtonsche Grundgesetz der Mechanik spricht die Definition der Kraft als Masse mal Beschleunigung aus. Daraus ist klar, daß die Gleichung des 2. Newtonschen Gesetzes, die nichts anderes bedeutet, als die sogenannten Grundgleichungen der Mechanik, gegen Translationen unempfindlich sein wird. Transformieren wir also

$$m \cdot \frac{d^2 x}{d t^2} = P_x \text{ usw.}$$

auf ein beschleunigtes Koordinatensystem, so heißt das, daß, wenn wir die resultierende Bewegung kausal erklären wollen, wir auch eine veränderte Kraft brauchen. Da aber sowohl die Beziehung auf ein anderes Koordinatensystem als die Erklärung durch eine geänderte Kraft rein geistige Operationen sind, so ändert das gar nichts an dem Vorgang selbst und diese Änderung ist nichts anderes als eine selbstverständliche Folge unserer Kraftdefinition.

Übrigens sind neuerdings da und dort Bemerkungen aufgetreten, welche sich der oben gegebenen Lösung des Orientierungsproblems der Rotation nähern, nur daß unsere Lösung aus ganz allgemeinen genau bekannten Prinzipien fließt. Es hat Herr Lenard in seinem tiefschürfenden Schriftchen „Über Relativitätsprinzip, Äther, Gravitation" einen Vorschlag gemacht für eine eindeutige (d. h. absolute) Definition der beschleunigten Bewegung. Wenigstens kann man seinen Einwand so auffassen. Er würde sagen: Ich nenne dasjenige System in beschleunigter Bewegung, an dem Trägheitswirkungen auftreten. Für die Rotationsbewegung wäre diese Definition mit unserer Lösung in gewisser Hinsicht zu vereinigen. Nur daß wir wissen, daß man sich in der Interpretation vermeintlicher Zentrifugalwirkungen täuschen kann, so daß eine Definition der Rotation aus solchen Wirkungen allgemein nicht möglich ist. Die einzige wirkliche Definition der Rotation ist eben die der Drehung einer absolut orientierten Ebene gegenüber.

Betrachten wir die geradlinige beschleunigte Bewegung, so sieht Herr Lenard die Definition dafür, daß der Waggon sich absolut bewegte, darin, daß in ihm die Dinge umfielen und nicht der daneben stehende Kirchturm. Nach unseren obigen Überlegungen können wir in der Tat dies sagen: diese Tatsachen zeigen, daß tatsächlich der starre Waggonkasten gegenüber den mit ihm lose verbundenen Gegenständen eine Beschleunigung erhalten hat. Diese Gegenstände tun aber nichts anderes, als es die Erde auch tut, sie bleiben zurück. Daß sie gegebenenfalls zerbrechen, hängt daran, daß sie in unmittelbarer Berührung mit dem Waggonkasten standen. Auch wenn z. B. das System der Erde und die im Waggon befindlichen Gegenstände allein eine entgegengesetzte Beschleunigung erhalten hätten, würde alles ebenso bleiben. Wenn nämlich der Kirchturm die beschleunigte Bewegung selbst mitmacht, fällt er nicht um. In Wirklichkeit liegt eine absolute Unterscheidbarkeit nicht vor. Es lassen sich solche Vorgänge eben nicht so isolieren, wie man das immer beliebt. Sie sind dann immer vieldeutig. Sie werden aber eindeutig innerhalb des Gesamtaufbaues unserer kausalen Erklärung der Außenwelt in der Weise, wie ich es oben gezeigt habe.

So zeigt sich, daß die Relativitätsprobleme der elementaren Mechanik von unserem Standpunkte aus keinerlei Schwierigkeiten mehr bieten. Nun hat man die Grundlagen der Einsteinschen Relativitätstheorie sehr intensiv mit diesen Fragen in Verbindung gebracht. Beide haben aber sehr wenig Wesentliches miteinander zu tun, und es hat nur die Aufmerksamkeit von den eigentlichen Grundlagen der Einsteinschen Theorie abgelenkt, daß man glaubte, hauptsächlich auf diese sogenannte Relativität achten zu müssen.

Das Wesen der Einsteinschen Theorie wird einem klarer, wenn man sich erinnert, daß sie ihrer Entstehungsursache nach eine Lichttheorie sein sollte, insofern als sie die bekannten, so widerspruchsvoll erscheinenden Erfahrungen am Lichte erklären möchte. Das Licht aber kommt bei Einstein herein durch seine Definition der

1) Darum kann man auch hier nicht sagen, daß die Drehung „an" einem Körper objektiv konstatierbar sei. Denn der Foucaultsche Versuch zeigt uns die Drehung der Erde relativ zu der absolut orientierten Ebene. Irgendwelche sonstige Erscheinungen, wie Abplattungen usw. können nur dann und soweit mit Sicherheit auf Rotation zurückgeführt werden, wenn letztere durch einen Foucaultschen Versuch (oder ähnlichen) nach Vorhandensein und Stärke bestimmt wurde.

Gleichzeitigkeit. Wir werden uns mit der Betrachtung der Abhandlung von 1905 begnügen. Denn sie ist die Grundlage von allem weiteren. Zunächst aber sei bedacht, was sonst unter „gleichzeitig" zu verstehen sei. Es gibt hier ein Prinzip, das wir folgendermaßen aussprechen können: Unterscheiden sich zwei Vorgänge in gar keiner bemerkbaren Weise, so unterscheiden sie sich auch nicht in bezug auf die Zeitdauer. Dieses Prinzip ist nichts anderes als ein spezieller Fall des Prinzips von zureichendem Grunde; denn wäre die Zeitdauer zweier gleicher Vorgänge verschieden, so würden aus den gleichen unabhängigen Bedingungen ungleiche Folgen kommen. Das Prinzip vom zureichenden Grunde kann man selbst wieder aus dem Prinzip der Eindeutigkeit oder aus dem Zweckprinzip ableiten, wie ich es genannt habe. Natürlich könnte man die Zeit auch anders definieren, nämlich ganz beliebig. Hier aber haben wir die einzige aus den grundlegenden Prinzipien der gewohnten Wissenschaft folgende und von jeher befolgte Zeitdefinition. Ohne weiteres ergibt sich aus dieser natürlichen Zeitdefinition auch die natürliche Definition der Gleichzeitigkeit. Es ist klar, daß ich also zur Zeitmessung Apparate gebrauchen werde, welche eine fortwährende Wiederholung des gleichen Vorganges darbieten.

Stellen wir nun mehrere solche Apparate her, die sich innerhalb der Genauigkeit nicht unterscheiden lassen, dann müssen diese auch stets für eine gewisse Zeitspanne die gleichen Zeitabschnitte angeben nach dem gleichen Prinzip. Stellt man also diese Apparate (Uhren) auf den gleichen Anfangspunkt der Skala und bringt sie dann an verschiedene Orte, dann definieren sie dort zu gleichen Skalenpunkten die gleiche Zeit innerhalb der momentanen Genauigkeit. Dabei werden natürlich Einflüsse, welche den Gang der Uhren zu ändern vermögen, tatsächlich experimentell oder rechnerisch ferngehalten. Auf dieser Art der Definition von Gleichzeitigkeit beruht z. B. zu einem großen Teil unsere Navigation. Sie wird jedoch in der Literatur zur Relativitätstheorie fast nicht besprochen.

Natürlich beruht auch diese Definition auf gewissen Grundsätzen. So liegt ihr z. B. der zugrunde, daß, wenn ich alle bemerkbaren ändernden Einflüsse von zwei gleichen Uhren fernhalte, ich sie als gleichgehend betrachte. Nun findet man da und dort den Einwurf, diese Definition mache die unbewiesene Voraussetzung, daß sich durch eine bloße Bewegung der Uhr ihr Gang nicht ändere. Diese Voraussetzung steckt tatsächlich in dem genannten Prinzip. Aber wer sagt mir, ob die Uhr „am gleichen Ort" nicht auch in Bewegung ist. (Sie ist es sicher.) Wenn nicht, hätten wir ja dadurch schon einen absoluten Ort definiert. Und für den gleichen Ort nimmt die Relativitätstheorie diese Definition der Gleichzeitigkeit sogar an. Also muß sie entweder einen absolut festen Ort oder eine andere Inkonsequenz zugeben.

Einstein ignoriert nun diese Definition der Gleichzeitigkeit und gibt seine bekannte mit Hilfe des Lichtes. Da diese nun verschieden ist von der obigen, natürlichen, so haben wir einen Widerspruch zum Prinzip vom zureichenden Grunde, indem zwei Vorgänge, die in allen unabhängig gegebenen Bestimmungen gleich sind, sich doch in einer abgeleiteten Bestimmung unterscheiden. Nimmt man nämlich alle die Uhren-Vorgänge als solche bestimmenden Umstände, so sind diese Vorgänge völlig bestimmt, und sie müßten daher, auch wenn die Umstände alle gleich sind, in allen übrigen ebenfalls gleich sein. Dem widerspricht die Annahme, daß ihre Ablaufzeit verschieden ist.

Nimmt man aber zu den die Vorgänge bestimmenden Umständen auch ihre Lage in Raum und Zeit dazu, dann kann man so nicht schließen, dann kann eine Verschiedenheit in diesen beiden Bestimmungen auch eine Verschiedenheit in der Zeitdauer in der Folge haben. Dann aber ist der Grundsatz aufgegeben, daß die Vorgänge unabhängig von Raum und Zeit sich abspielen. Entweder verletzt also die Einsteinsche Definition das Prinzip vom zureichenden Grunde, oder aber das Prinzip der Unabhängigkeit der Vorgänge von Raum und Zeit. Die Verletzung des letzteren Prinzips ist also nicht etwa erst eine weitere Folge der Einsteinschen Annahmen, sondern wird mit seinen ersten Voraussetzungen schon vorausgesetzt[1]). Dabei ist das Nichtgelten dieses Prinzips nicht etwa irgendwie bewiesen, sondern eine ganz freiwillige Annahme. Die Relativitätstheorie behauptet, es müsse nachträglich durch die experimentellen Folgen bewiesen werden. Dies ist aber selbst ein völlig unbewiesenes Prinzip. Dabei zeigt aber, wie ich hier nebenbei bemerken möchte, eine genaue Überlegung, daß für dieses grundlegende Prinzip der Unabhängigkeit vom Raum weder für noch gegen durch das Experiment etwas entschieden werden kann, weil alle Versuche dazu es selbst schon benützen müssen. Daraus ergibt sich, daß die Einsteinsche Annahme nicht etwa eine physikalische Hypothese ist wie jede andere, sondern daß sie von vornherein und ganz willkürlich diejenige Grundannahme beseitigt, auf der alle

1) Nämlich durch die Ignorierung der natürlichen Zeitdefinition.



sonstigen Hypothesen beruhen, nämlich die von der Unabhängigkeit allen Geschehens von Zeit und Raum. Daher können auch die gewöhnlichen Hypothesen meist durch Experimente geprüft oder widerlegt werden. Die Relativitätstheorie jedoch kann das nicht und damit fallen die Grundlagen aller der so viel besprochenen experimentellen Beweise für dieselbe.

Aber abgesehen von diesem Verlassen sonst angenommener Grundsätze, über das noch zu reden sein wird, ist die Relativitätstheorie auch nicht konsequent in der Anwendung der von ihr angenommenen Grundsätze auf die Wirklichkeit. Durch die Einsteinsche Definition der Gleichzeitigkeit ist nämlich auch der Begriff der Gleichheit zweier Apparate infiziert. Will die Relativitätstheorie den Satz vom Grunde und damit eine gewisse Eindeutigkeit beibehalten, so wird sie zuletzt nicht umhin können, zwei Uhren nur dann als völlig gleich zu bezeichnen, wenn sie in ihrem Gange genau der Einsteinschen Definition der Gleichzeitigkeit gehorchen. Man kann zeigen, daß sich auf Grund der Einsteinschen Definition eine völlig konsequente Realwissenschaft aufbauen ließe, die von der unserigen allerdings verschieden wäre. Dann dürfte aber nicht der unsrige als starrer Körper genommen werden, sondern ein solcher, daß nach ihm gemessen stets die Lichtgeschwindigkeit die gleiche ist und die Einsteinsche Definition erfüllt ist. Dann aber würden die Einsteinschen Forderungen von selbst erfüllt sein, und die Uhren würden nicht mehr die dort verlangten Abweichungen aufweisen.

Solange aber unser starrer Körper beibehalten wird, kann nicht unabhängig von ihm etwas festgesetzt werden, das auf seine Definition einen Einfluß hat. Das Analoge gilt für die Definition von Gleichheiten usw. (Einstein benutzt 1905 im gewöhnlichen Sinne ganz gleiche Uhren.) Nur diese Inkonsequenz, d. h. die Verbindung von euklidischem (unserem) starren Körper mit der Einsteinschen Zeitdefinition, ermöglicht letzten Endes den Anschein, als ob die Relativitätstheorie (d. h. eine Abweichung von der Newtonschen Mechanik) durch Experimente prüfbar sei.

Ich hoffe mit dem Vorstehenden einige von Ihnen schon überzeugt zu haben, daß in den Grundlagen der Relativitätstheorie die Dinge keineswegs so einfach liegen wie man vielfach meinte. Wenn Sie meinen Ausführungen aber denkend gefolgt sind, so werden Sie bemerkt haben, daß der eigentliche Kern noch eine Etage tiefer liegt und folgender ist: Ich weise nach, daß die Relativitätstheorie gewisse Voraussetzungen, Grundsätze fallen läßt, die sonst stets befolgt werden, daß sie andererseits wieder andere Grundsätze heranzieht. Rein logisch genommen heißt dies, wir haben in der Relativitätstheorie (was ihren logisch-mathematischen Teil anbelangt) einfach den ersten wirklich durchgeführten Fall einer nicht-Galileischen oder nicht-Newtonschen Mechanik vor uns. Damit ist sich der Mathematiker klar über die Situation. Er weiß, mit der nötigen Sorgfalt kann diese völlig widerspruchslos aufgebaut werden, darüber ist nicht viel zu sagen. Von daher ist die Relativitätstheorie stets unangreifbar. Das ist nach den Forschungen des letzten Jahrhunderts gesichert. Fragt man aber nach der Geltung der Theorie in der Wirklichkeit, so kann es sich nur um die der Axiome handeln, d. h. um die Voraussetzungen, die Prinzipien, auf denen die Theorie aufgebaut ist. Da hat man bisher der Voraussetzung gehuldigt, die Gestalt eines Körpers wird durch die Bewegung als solche nicht beeinflußt. Die Relativitätstheorie befolgt die gegenteilige Voraussetzung. Dafür benützt sie das Prinzip, daß die Geometrie des Raumes nur durch das Experiment, durch Messung festzustellen sei, daß überhaupt alle Gesetze und Prinzipien nur dadurch festzustellen seien. Wer hat da recht? Offenbar steht hier zunächst Meinung gegen Meinung. Beide Teile nennen gewisse Prinzipien, auf denen sie bauen, und wenn nur logisch streng konsequent gebaut wird, kann vom mathematischen Gesichtspunkt gegen keines etwas eingewendet werden. Nun macht aber die Relativitätstheorie folgendes Raisonnement für sich geltend: Die Relativitätstheorie wird angeblich durch einige empirische Konsequenzen bestätigt. Darauf ist zu erwidern: Diese Behauptung beruht, so seltsam dies zunächst manchem klingen mag, selbst wieder auf Prinzipien der obigen Art, nämlich der Voraussetzung, daß jede Theorie empirisch bestätigt oder widerlegt werden könne, oder daß die Relativitätstheorie eine solche Theorie sei. Dieses Prinzip hat aber die Relativitätstheorie offenbar nicht bewiesen. Ebensowenig wie sie ihre sonstigen Prinzipien bewiesen hat, ebensowenig wie die Newtonsche Mechanik ihre Prinzipien bewiesen hat. Es folgt also die wichtige Erkenntnis:

Es können beide Theorien nichts gegeneinander ausrichten, weder für noch gegen, und es kann auch keine als empirisch bewiesen oder widerlegt gelten, ehe wir nicht Klarheit über die Geltung und Auswahl der dabei benutzten Prinzipien erhalten haben, auch derjenigen Prinzipien, welche der sogenannten experimentellen Prüfung zugrunde liegen.

Zieht man diejenigen Gesichtspunkte in Betracht, die heute in die öffentliche Meinung der



Wissenschaft übergegangen sind, dann ist dieser Satz der getreue Ausdruck des momentanen Zustandes, wie ihn ein wirklich kritisches und objektives Auge sehen muß. Alle Weiterarbeit kann in der einen oder andern Richtung zwecklos sein, solange nicht die Frage der Prinzipien geregelt ist. Aus diesem Satze folgt aber noch weiter: Da jenes völlige Chaos der Prinzipien besteht, so ist es kühnen, jugendlichen Stürmern unbenommen, noch ganz andere Mechaniken und Physiken aufzustellen. Es ist da gar keine Grenze. Und es ist sogar wünschenswert, daß um den derzeitigen Zustand der völligen Desorganisation der Grundlagen der Physik[1]) der wissenschaftlichen Öffentlichkeit recht vor Augen zu führen, recht viele unternehmende Köpfe von dieser Möglichkeit Gebrauch machen möchten. Wenn man die Technik der Herstellung solcher nicht-Newtonscher Mechaniken einmal erfaßt hat, dann dürfte es nicht sehr schwer sein, ihrer beliebig viele zu machen. Es werden sich dabei immer wieder da und dort auch empirische Bestätigungen, die an der Grenze der momentanen Meßgenauigkeit liegen, finden lassen.

Wer die Geschichte der Mathematik im vorigen Jahrhundert mit ihrer Entdeckung der nichteuklidischen Geometrien kennt und bedenkt, der weiß, daß einmal so etwas hat kommen müssen. Solange die Frage der Prinzipien nicht geklärt war, war das Ausweichen vor einer momentanen physikalischen Schwierigkeit in das Gebiet des Nichteuklidischen allzu verführerisch. Aber das eine hat unsere Zeit vergessen: etwas anderes ist die Mathematik, etwas anderes die Physik. In der Mathematik, welche Bereitstellung von Formen ist, ist es ein Verdienst, alle logischen Möglichkeiten durchzuführen. In der Physik aber besteht eine Einschränkung, die in der Verbindung mit der Wirklichkeit gegeben ist, insofern, als von allen verschiedenen logischen Möglichkeiten immer nur eine wirklich zur Anwendung kommen kann, wobei ich hier nicht erörtere, auf welchem Wege jeweils die Entscheidung getroffen werden muß. Und dieses Problem der Verbindung mit der Wirklichkeit ist es, dessen Bedeutung aus all diesen Kämpfen heraus sich dem allgemeinen Bewußtsein offenbaren muß. Hier liegt der Angelpunkt der Situation. Dieses Problem muß gelöst werden, wenn wieder einige Sicherheit in die Grundlagen der Physik kommen soll. Die Relativitätstheorie hat diesem Problem gegenüber genau wie die bisherige Physik nur ungeprüfte, dogmatische Voraussetzungen. Kann überhaupt über Geometrisches mit Experimenten etwas entschieden werden? In einer soeben erscheinenden Abhandlung[1]) weise ich nochmals am Konkreten genau nach, daß das unmöglich ist. Dann aber fallen alle jenen ungeprüften, unbewiesenen Voraussetzungen hierüber, auf denen die Relativitätstheorie ruht.

Wir sehen, der Streit um die Relativitätstheorie kann nur entschieden werden, wenn die Entscheidung über die Prinzipien getroffen ist, die ihr und der Newtonschen Physik zugrunde liegen. Es muß eine Physik hergestellt werden, deren Prinzipien klar aufgewiesen, in ihrer Herkunft genau begründet, in ihrer Wirkungsweise genau bewiesen, in ihrer gegenseitigen Folge und Abhängigkeit genau geprüft sind, und zwar nicht nur die mathematischen Prinzipien, sondern auch diejenigen, welche sich auf die Anwendung auf die Wirklichkeit beziehen. So genau, daß es nichts mehr darüber zu fragen gibt. Es handelt sich also darum, diese „Wissenschaft von den Prinzipien" aufzustellen. Dies ist nach allem jetzt die dringendste Aufgabe aller spekulativen Physik, und, bei der herrschenden Unsicherheit, der Physik überhaupt.

Mit dem Aufbau dieser Wissenschaft von den Prinzipien bin ich nun seit über 15 Jahren beschäftigt. Und ich spreche das Resultat dieser Beschäftigung in kurzen Worten aus, wenn ich sage: es läßt sich eine Physik aufbauen, deren Prinzipien vollständig in ihrer Begründung und Tragweite bekannt sind. Meine obige Lösung der Orientierungsprobleme in den Grundlagen der Mechanik ist nach ihren Prinzipien erfolgt. Es lassen sich genau die Prinzipien angeben und bis ins Letzte begründen, welche festlegen, wie der Zusammenhang zwischen einer Theorie und der Erfahrung sich gestaltet. Es läßt sich dort eine eindeutige und endgültige Entscheidung treffen darüber, welche von den jeweils verschiedenen möglichen der oben genannten Prinzipien wirklich gewählt werden müssen. Es zeigt sich dabei vor allem, daß die Erfahrung über diese Prinzipien nichts Endgültiges ausmachen kann, sowie, daß die oben genannten Prinzipien der Relativitätstheorie nicht diejenigen sind, welche für die Physik zu wählen sind. Doch dies kann ich hier nicht näher begründen und muß dafür auf meine Schriften, insbesondere meine Grundlagen der angewandten Geometrie[2]), meine Grundlagen der Physik[3]) und ein hoffentlich in Bälde erscheinendes Buch über die Hypothese in der Physik verweisen.

Es ist vielleicht manchem Physiker unsympathisch, sich mit diesen Grundlagenfragen zu

1) Dies soll kein Tadel sein. Denn sie ist nichts anderes als die Folge des allmählichen Bewußtwerdens eines Mangels, der bei dem naiveren Zustande der Wissenschaft bisher stets bestand.

1) Diese Zeitschr. 21, 487, 1920.

2) Leipzig, Akad. Verlagsges. 1911.

3) Berlin u. Leipzig, Vereinigung wiss. Verleger.

beschäftigen, aber das hilft nun nichts mehr. Auch der Standpunkt der Resignation auf die reine Empirie hilft nichts mehr, denn ob er es will oder nicht, auch hier muß der Physiker Prinzipien verwenden. Er war früher in der glücklichen Lage, dies nicht zu bemerken. Seitdem er aber wissend geworden, sind Zweifel aufgetaucht über die Art und Berechtigung dieser Prinzipien. Und diese werden solange nicht verstummen, solange wird hier eine immer steigende Unsicherheit eintreten, ganz besonders natürlich im Gebiete der erklärenden, der theoretischen Physik, bis jeder Physiker das Problem der Prinzipien klar durchschaut. Glücklicherweise ist die Möglichkeit dazu vorhanden, denn das Problem ist gelöst.

F. Paul Liesegang (Düsseldorf), Ein Schaubild zur Darstellung der Zeit-Raum-Verhältnisse in der speziellen Relativitätstheorie.

Dem Schaubild liegt der Minkowskische Gedanke zugrunde, die Lorentztransformation durch die Transformation eines rechtwinkligen auf ein schiefwinkliges Koordinatensystem geometrisch darzustellen. Es werden hier nun aber die Koordinaten des schiefwinkligen Systems mittels solcher Maßeinheiten geteilt, daß sie sogleich die richtigen, für den bewegten Körper geltenden Werte anzeigen; ferner werden parallel zur x- und x'-Achse in den Abständen der Zeiteinheiten Linien t_0, t_1, t_2 bzw. t'_0, t'_1, t'_2 usw. gezogen (Zeitlinien oder Linien der Gleichzeitigkeit). Die so entstandene, aus wenigen Strichen bestehende Zeichnung gibt ein übersichtliches Bild der beiderseitigen Zeit-Raum-Verhältnisse und veranschaulicht, durch einige Zahlen oder Striche ergänzt, die verschiedenen bekannten Erscheinungen. Insbesondere übersieht man die Uhrenstellungen, wie z. B. jeder gegenüber dem Nullpunkt seines Systems beim andern eine mit zunehmender Zeit immer weiter vorgehende Uhr beobachtet, und erfaßt sogleich, daß Ereignisse, die in dem einen System gleichzeitig sind, in dem andern nicht gleichzeitig sein können. Die Längenmessung stellt sich in diesem Sinnbilde als ein der Wirkungsweise der Schlitzverschlußkamera vergleichbarer Vorgang dar, indem das verzerrte Bild, welches der Beobachter von einem Stabe des andern Systems wahrnimmt, gewissermaßen ein Schrägschnitt durch eine Schicht von Daseinsphasen des Stabes ist. Endlich veranschaulicht die Zeichnung die gleichmäßige Lichtausbreitung und das Ergebnis des Michelsonversuchs, das Additionstheorem, sowie das Widersinnige der Überlichtgeschwindigkeit. Das Schaubild läßt sich auch, wenn man von der Darstellungsweise der Absoluttheorie ausgeht, rein geometrisch herleiten aus den Forderungen der gleichmäßigen Lichtausbreitung und der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Die Zeichnungen wurden lichtbildlich vorgeführt.

Diskussion.

Sommerfeld: Ich glaube, daß Minkowski, wenn er noch unter uns wäre, seine Freude daran gehabt hätte, wie eingehend der Herr Vortragende das von Minkowski entwickelte geometrische Verfahren weiter verfolgt hat.

Felix Ehrenhaft (Wien), Über die Atomistik der Elektrizität und die Erscheinungen an einzelnen radioaktiven Probekörpern der Größenordnung 10^{-5} cm.

Gerade vor 10 Jahren habe ich auf dem Naturforschertage zu Königsberg darauf hingewiesen, daß alle bis zu diesem Zeitpunkte vorgenommenen Bestimmungen der Ladung des sogenannten Elementarquantums der Elektrizität (Elektrons) bloß Mittelwertsbildungen darstellen. Diese wichen nach dem damaligen Stande der Forschung voneinander so weit ab, daß, wie ich auseinandersetzte, „man dem Gedanken näher treten muß ob, wie dies bei fast allen Arbeiten geschah, man überhaupt berechtigt ist, Werte, die nicht selten um einige hundert Prozent in den einzelnen Messungen sich unterscheiden, zu einem Gesamtmittel zusammenzuziehen".

„Unter solchen Umständen, wenn man sich von weiteren Hypothesen und den Deutungen, die ein Autor gerade bei diesen Messungen sehr häufig an den Resultaten eines andern vornahm, fernhalten will, wäre der Gedanke nur zu naheliegend, diese Schwankungen der Elektronenladung in der Natur selbst begründet anzusehen und die Deutung der Experimente vielleicht zu modifizieren."

Die Methode, die ich damals auseinandersetzte, kann ich heute wohl als bekannt voraussetzen. Ich verglich das Gewicht, die Größe einzelner kugelförmiger mit Elektrizität geladener Probekörper der Größenordnung 10^{-5} cm mit der auf sie im homogenen elektrischen Felde wirkenden elektrischen Kraft und bestimmte so die Ladung des einzelnen Trägers. Dabei wurde ich zu dem Schlusse geführt, daß „es außer den bereits bekannten Ladungen um die als ein- und zweiwertige Ionen benannten Größen noch andere Ladungswerte zwischen diesen gibt und überdies Ladungswerte, welche nur einen

Bruchteil der bis dahin als unteilbar angenommenen Elektronenladung betragen". Ferner, „daß es den Anschein hat, daß im allgemeinen Probekörper mit einem Radius unter $3 \cdot 10^{-5}$ cm Ladungen tragen, die kleiner sind als das Elektron". Also gerade solche Körper kleiner Kapazität, deren Dimension unter der halben Wellenlänge des Lichtes liegt und die daher prinzipiell schwerer sichtbar gemacht werden können, zeigen diese auffallende Unterschreitung[1]). Besonders geeignet schienen mir Kugeln der Edelmetalle, da sie eben in dieser Größenordnung noch leichter sichtbar gemacht und da sie in chemischer Reinheit leicht erzeugt werden können.

Seither wurde die Ladung des Elementarquantums von den verschiedensten Forschern nur mehr an einzelnen kleinen Probekörpern gesucht. Das Gesamtbild hat sich aber auch heute nach 10 Jahren trotz der neuen, dadurch eingeleiteten Epoche dieser Untersuchungen, die sich in ca. 200 Abhandlungen widerspiegelt, nicht geändert. Wieder schwanken die Resultate der Ladungsbestimmungen an den einzelnen Probekörpern; die Schwankungen erfolgen aber ungeachtet der ganz wesentlich erhöhten Präzision bei den verschiedenen Beobachtern in noch viel weiteren Bereichen, als dies bei den Mittelwertsmethoden der Fall war.

Viele Physiker glauben aber die Schwankungen ihrer Resultate trotz steigender Präzision der Messungen nicht auf Schwankungen der Elektronenladung, sondern auf andere Ursachen (Abweichung der Probekörper von der Kugelgestalt, Variation der Dichte der Probekörper, Gasoberflächenschichten derselben usw. Ungültigkeit der Voraussetzungen der Berechnung) zurückführen zu sollen. Einzelne von ihnen verwiesen auf die quantenhafte Änderung der elektrischen Ladung des einzelnen Probekörpers, auf welche ich nach der Einengungsmethode im Jahre 1914 hinwies, und vertraten die Meinung, daß diese schon allein entscheidende Aussagen über die Natur der Elektrizität beinhalte. Im allgemeinen hat sich der Tatbestand seit 1910 nicht mehr geändert, so daß heute vielleicht die Berechtigung vorliegt, nachfolgende zwei Standpunkte einander gegenüberzustellen.

Der eine Standpunkt sagt: Es steht heute bereits fest, daß in allen Naturvorgängen, bei welchen die Elektrizität eine Rolle spielt, nur Elektronenladungen auftreten. Diese Ladungen sind einander alle gleich oder Vielfache der Grundladung, welche eine universelle Größe darstellt. Das Elektron ist demnach ein universeller Baustein, alle Beobachtungen und jede Naturerscheinung muß von diesem Gesichtspunkte so ausgedeutet werden, daß diese universelle Konstante als oberste Richtschnur erhalten bleibt.

Meine Versuche können nun ohne Zwang mit diesem Standpunkt nicht in Einklang gebracht werden. Daher läßt sich diesem Standpunkte nun ein zweiter gegenüberstellen: Auch wenn es in der Natur Erscheinungen gibt, die sich durch Annahme bevorzugter Ladungen gut ausdeuten lassen, auch wenn mehrere indirekte theoretische Argumente für das Elektron vorgebracht werden können, bleibt die Frage noch immer offen, ob das wirkliche oder scheinbare Auftreten bevorzugter Ladungen ausschließlich auf der Konstitution der Elektrizität beruht. Der gegenwärtige Stand der Forschung schließt eine Verneinung dieser Frage nicht aus. Dann kann man aber das Auftreten von Erscheinungen erwarten, die nicht durch das Elektron erklärbar sind. Gibt es solche Erscheinungen, so entsteht die Aufgabe, die von der Elektronentheorie für gewisse Bereiche der Physik geschaffenen Bilder mit der neuen Auffassung in Einklang zu bringen.

Dieser zweite Standpunkt gibt dazu Veranlassung, alle Gebiete, in welchen das Elektron nach den Auffassungen der heutigen Theorie eine Rolle spielt, versuchend abzutasten, um nachzusehen, ob die Elektronenladung tatsächlich universell ist.

Unter diesen ist das Problem der Entstehung der Elektrizität dasjenige, das mir im Vordergrunde zu stehen scheint und von dem wir vielleicht noch zu wenig wissen, wenn auch die Elektronentheorie für die Entstehung der Elektrizität heute in manchen Gebieten schon ziemlich detailliert ausgearbeitete Bilder, so z. B. auf dem Gebiete der Radioaktivität und der Photoelektrizität darbietet.

Bisher war es nämlich beispielsweise bei den Versuchen über die Elektronenladung nur möglich gewesen, die Ladung eines Probekörpers zu messen, diesen sodann umzuladen, und seine neue Ladung zu messen. Die Vorgänge während der Änderung der Ladung selbst entzogen sich unserer Kenntnis, da man die Änderung des Ladungszustandes des Körpers stets durch von außen auf diesen einwirkende Hilfsmittel herbeiführte. Konstantinowsky und der Vortragende haben daher im Folgenden einen Weg betreten, der es gestattet, die Vorgänge während der Ladungsänderung selbst zu verfolgen. Es gelang dies, indem der mit Elektrizität geladene Probekörper (Konduktor) nicht wie bisher durch Einwirkung von außen umgeladen wurde, sondern

1) Es sei bemerkt, daß sich aber auch an größeren Probekörpern (Millikans Größenordnung) gelegentlich Unterschreitungen vorfinden.

indem die Ladungen radioaktiver Probekörper, welche ihre Ladung also spontan ändern, im Zustande dieser Ladungsänderung untersucht wurden.

Wie liegt nun das Bild der Elektrizitätserzeugung in der Radioaktivität. Die Elektrizität ist nach den Bildern der Atommodelle im Atom selbst vorbereitet und die α- und β-Strahlen wären Ausschleuderungen solcher im Innern der Atome vorbereiteter Ladungen. Was wäre also zu erwarten, wenn ein Probekörper der Größenordnung 10^{-4} bis 10^{-5} cm ganz oder zum Teile aus solchen radioaktiven Atomen bestünde?

Wir wollen den Vorgang zunächst idealisieren und uns denken, daß der Probekörper, mit einer elektrischen Ladung e geladen, im absolut gasleeren Raume im elektrischen Felde zwischen den Platten eines Kondensators wäre. Die Feldstärke $\mathfrak{E}$ sei so abgeglichen, daß die nach aufwärts wirkende elektrische Kraft $e\mathfrak{E}$, dem Gewichte mg des Probekörpers das Gleichgewicht halte. Der Probekörper schwebe also im leeren Raume. Und nun emittiert er ein α-Partikel. Er müßte daher einen Ladungsverlust von $2 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. erleiden, wenn das Erhaltungsgesetz der Elektrizität gilt. Das Gleichgewicht ist also gestört worden, denn der Probekörper wird mit einer Kraft $2 \cdot 4{,}7 \cdot 10^{-10}\,\mathfrak{E}$ zur positiven Platte gezogen; wir kompensieren das Feld entsprechend und bringen den Probekörper so neuerdings in die Schwebelage. Der gleiche Vorgang würde sich wiederholen, so oft ein α-Partikel ausgeschleudert wird; dies würde sich jedesmal durch ein ruckweises Inbewegungsetzen des Probekörpers in der Richtung der positiven Platte kennzeichnen[1]). Dazu käme noch ein zweiter Effekt. Nach dem Impulssatz müßte nämlich das mit der großen Geschwindigkeit von etwa $1{,}5 \cdot 10^9$ cm/sec ausgeschleuderte α-Partikel, das bekanntlich aus einem Heliumatom bestehen soll, dem Probekörper der Größenordnung 10^{-5} cm einen Rückstoß vom Impulse der Größenordnung 10^{-14} Dyn/sec erteilen, d. h. der Probekörper müßte mit einer maximalen Geschwindigkeit von einigen Millimetern pro Sekunde in die entgegengesetzte Richtung gleichförmig fortlaufen.

Nun werden die Vorgänge in tatsächlichen Verhältnissen nur in mehr oder weniger gaserfüllten Räumen ausführbar. Dadurch treten weitere Folgeerscheinungen der Emission des α-Partikels ein. Zunächst macht dasselbe längs seiner Bahn pro cm durchschnittlich eine Ladungsmenge von der Größenordnung $2 \cdot 10^{-5}$ e. st. E. beiderlei Vorzeichens frei, was im Bilde der Elektronentheorie gesprochen, einer Anzahl von ca. $4 \cdot 10^4$ Ionenpaaren gleichkäme. Diese Ionen werden im elektrischen Felde von einer Stärke von 300 bis 3000 Volt/cm, wie sie für die gedachten Versuche notwendig ist, praktisch in unendlich kleiner Zeit nach ihrer Entstehung an die Platten des Kondensators geführt. Dabei können diese Ionen jedoch den Probekörper treffen und ihm eine andere Ladung erteilen. Weder über den Sinn der resultierenden Umladung, noch über die Größe derselben läßt sich daher eine bestimmte Aussage machen. Bloß so viel läßt sich aus dem heutigen Bilde der Elektronentheorie sagen, daß die Umladung des Probekörpers praktisch momentan erfolgen und die Ladungsänderung ein Vielfaches von $4{,}7 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. betragen muß. Wenn wir uns den tatsächlichen Versuchsbedingungen noch mehr nähern und die Ladung des Probekörpers aus seiner gleichförmigen Steiggeschwindigkeit oder Fallgeschwindigkeit im elektrischen Felde gemessen denken, so wird an Stelle der vorerwähnten Inbewegungsetzung des schwebenden Probekörpers eine spontane, ruckweise Geschwindigkeitsänderung des Probekörpers auf seiner vertikalen Bahn zu erwarten sein. Bezüglich des Rückstoßes zeigt eine Überschlagsrechnung, daß der Impuls 10^4 mal zu klein ist, um eine beobachtbare Lageänderung des Probekörpers hervorzurufen, da er durch die Reibung im Gase sofort abgedämpft würde.

Emittiert hingegen der Probekörper ein β-Partikel, dann sind im gaserfüllten Raume qualitativ dieselben Phänomene zu erwarten; nur ist der Rückstoßimpuls bestenfalls sogar noch hundertmal kleiner als beim α-Partikel, wenn die Masse des β-Partikels zu rund $^1/_{2000}$ des H-Atomes angenommen wird; denn bekanntlich ist es bisher nur gelungen den Mittelwert der spezifischen Ladung des β-Partikels zu messen, während die Masse des β-Partikels bisher nicht gemessen werden konnte; sie wurde nur aus der spezifischen Ladung unter Voraussetzung der Universalität des Elektrons berechnet.

Und nun gehe ich zu den tatsächlichen Versuchen über und will nur jene Abänderungen meiner Methode besprechen, die für das spätere von Interesse sind.

Der Kondensator[1]), in welchem der Probekörper beobachtet wird, ist an einem besonderen Universalsupport, den ich für diese Versuche konstruierte, befestigt. Die Mikrometerschrauben desselben gestatten zwei aufeinander senkrechte Drehbewegungen und zwei aufeinander senkrechte fortschreitende Bewegungen des Kondensators. Die Elektroden des Kondensators sind symmetrisch angeordnet, innen hohl; radiale

1) Bezüglich der δ-Partikel vgl. Ann. d. Phys.

1) Bezüglich genauerer Details hier und in anderen Punkten sei auf unsere Abhandlung in den Ann. d. Phys. verwiesen.



Bohrungen stellen die Verbindung der Höhlungen mit dem Kondensatorraume her, so daß das Gas um den Probekörper, wenn nötig, derartig symmetrisch abgesaugt werden kann, daß der in der Kondensatormitte befindliche Probekörper wegen Symmetrie der Gasabströmung bei der Evakuierung nahezu am Orte bleibt.

Beleuchtet wird durch 2 Strahlen, beobachtet durch ein senkrecht dazu justiertes Mikroskop. Das Okular enthält ein Raster mit äquidistanten Strichen. Die Versuche wurden bisher im Stickstoffgase, dessen Reinigung und Trocknung auf die größte Präzision getrieben war, ausgeführt.

Bevor wir zu den Versuchen mit radioaktiv gemachten Probekörpern übergehen, wollen wir uns noch über die Tragfähigkeit der Beobachtungsmethode, bzw. über den Grad, in welcher die Voraussetzungen derselben sichergestellt sind, kurz informieren. Wir führen dies z. B. mit Probekörpern reinen Selens, die durch Verdampfung hergestellt werden, aus. Ich zeige Ihnen hier im Bilde die Mikrophotographien solcher Probekörper, welche ich auf einer Glasplatte niedergeschlagen habe. Soweit dieselben durch das Mikroskop mit hoher Apertur (homogene Immersion 1. 3) noch auflösbar sind, zeigen die Probekörper ideale Kugelgestalt. Mit solch großen Probekörpern mit Radien von einigen 10^{-5} cm wurden also die Versuche ausgeführt, um außerhalb des Bereiches der Brownschen Bewegung zu sein.

1. Zunächst überzeugten wir uns von der Konstanz der Masse der Probekörper durch wiederholte Fallversuche. Die Fallzeit und demgemäß die Masse blieb auch noch nach Stunden dieselbe.

2. Ebenso ergaben, wie Sie aus den spätern Bildern ersehen werden, die Messungen der Steiggeschwindigkeiten der Probekörper im elektrischen Felde die Stabilität, d. h. das Konstantbleiben der Ladung der nichtradioaktiven Probekörper, sofern die Ladung derselben nicht willkürlich durch äußere Hilfsmittel (z. B. Ionisierung von außen) bei kurzgeschlossenem Kondensator geändert wird.

3. Für die folgenden Schlüsse wird es wichtig sein, sich davon zu überzeugen, daß das elektrische Feld in allen Teilen des Gesichtsfeldes die gleiche Stärke und Richtung hat. Als ideale Sonde zur Ausmessung des Feldes verwenden wir den Probekörper konstanter Ladung selbst, denn derselbe ist unendlich klein gegen die wahrnehmbaren Wegstrecken und gegen die Dimensionen des Kondensators. Es zeigt sich, daß der Probekörper an allen Stellen des Feldes mit gleicher Geschwindigkeit und in derselben Richtung im Felde fortgeführt wird. Man sieht, daß die Feldstärke an verschiedenen Punkten des Feldes derart konstant ist, daß die Abweichungen in der graphischen Darstellung gar nicht ersichtlich gemacht werden konnten und weiter, daß es dabei gelang $^{95}/_{100}$ der Plattendistanz des Kondensators so abzutasten[1]).

4. Wir werden im folgenden voraussetzen, daß die Geschwindigkeit mit der der einzelne Probekörper fortgetrieben wird, der auf ihn einwirkenden Kraft proportional ist. Die Proportionalitätskonstante B nennt man die Beweglichkeit, die Geschwindigkeit pro Kraft 1. Auch diese Voraussetzung wollen wir nun überprüfen. Wir nehmen wieder den Probekörper konstanter Ladung und messen dessen Steiggeschwindigkeit bei verschiedenen Feldstärken $\mathfrak{E}$. Offenbar ist die nach aufwärts treibende Kraft

$$e\mathfrak{E} - mg$$

und die Steiggeschwindigkeit v daher

$$(e\mathfrak{E} - mg)\,B = v\,.$$

Die gemessenen Geschwindigkeiten müssen also, wenn die Beweglichkeit tatsächlich eine konstante Größe ist, in linearer Beziehung zu den angelegten Feldstärken stehen. Das Bild erweist dies über große Spannungsbereiche[2]) als sehr gut erfüllt.

5. Und nun noch einige Worte bezüglich der Größe der Konstanten B. Bisher hatten wir 3 Methoden der Größenbestimmung der Probekörper, was gleichbedeutend ist mit der Bestimmung der Konstanten B: eine hydrodynamisch gastheoretische aus der Fallgeschwindigkeit, eine statistisch thermodynamische aus der Brownschen Molekularbewegung und eine optische aus der Farbe[3]) des vom Probekörper senkrecht zur Beleuchtung abgebeugten Lichtes und schließlich noch eine vierte aus dem photophoretischen Maximum der an Silberkügelchen angreifenden Kräfte des Lichtes, wofern die positiv photophoretischen Kräfte des Lichtes an Silber mit dem Lichtdruck identisch sind.

Über die genaue Bestimmung der Beweglichkeit gibt es heute gewiß noch Differenzen in den Anschauungen, wir werden aber auch diese kleinen Differenzen in der nächsten Zeit vollkommen aufzuklären versuchen. Im großen und ganzen kennt man aber die Größe B für die verschiedenen Gase und Probekörper heute schon.

Waren wir in den bisherigen Versuchen immerhin bis zu einem gewissen Grade von der genannten Größe B abhängig, so wird sich im folgenden deutlich zeigen, daß, wie es scheint, das Hauptresultat unserer Untersuchungen nunmehr in weiten Grenzen vom Zahlenwerte der Größe B unabhängig ist. Und gerade deshalb

1) Vgl. l. c. Ann. d. Phys. Fig. 1.
2) Überprüft von 0 bis 1000 Volt pro cm; vgl. die zit. Arb. in den Ann. d. Phys. Fig. 2.
3) Vgl. F. Ehrenhaft, diese Zeitschr. **15**, 952, 1914.

scheinen mir diese Versuche von besonderem Interesse zu sein. Zusammenfassend läßt sich also sagen, daß der Probekörper bei eingeschaltetem Felde in jedem Punkte des Kondensators eine Geschwindigkeit

$$v = B(e\mathfrak{E} - mg)$$

hat.

Und nun gehen wir zur Betrachtung radioaktiver Probekörper der Größenordnung 10^{-5} cm über.

Wir stehen zunächst vor der Frage, wie wir einen so kleinen Probekörper radioaktiv machen können. Wir haben dies so gelöst, daß wir das Ausgangsmaterial, durch dessen Verdampfung wir die Probekörper herstellen, mit radioaktiven Stoffen überzogen und dann durch Verdampfung dieses radioaktiven Materials ebenso wie bei den bisherigen Versuchen die im Gase kondensierenden Tröpfchen erzeugten. Hierzu wurde z. B. Radiumemanation mit Selenpulver oder mit Quecksilber auf einem Schüttelapparat untermischt, so daß die Zerfallsprodukte der Radiumemanation (*RaA* bis *RaD*) sich auf den Substanzen niederschlugen. Die überschüssige Emanation wurde entfernt und die beschlagenen Substanzen sodann in ein neues Gefäß (Kugelröhrchen) gebracht. Durch Erhitzen dieser Röhrchen mit der Füllung bei gleichzeitigem Darüberstreichen reinen Gases wurde sicherheitshalber noch eventuell okkludierte Emanation entfernt.

Von solchen Probekörpern müssen zufolge der entstandenen radioaktiven Substanzen sowohl α- wie β-Strahlen ausgestrahlt werden.

Um aber einen reinen α-Strahler zu erhalten, haben wir auf sensibilisiertem Selen Polonium elektrolytisch abgeschieden. Das sensibilisierte Selen erwies sich nach Messungen des Wiener Radium-Instituts, für welche wir den Herren St. Meyer u. V. K. Hess zu Dank verpflichtet sind, als rein α-strahlend.

Wir haben in unsern Überlegungen vorhin den Fall überdacht, daß zwischen den Platten des Kondensators im elektrischen Felde sich nur der eine radioaktive Probekörper befinde. Um dies zu erreichen, verwendeten wir zunächst einen Kondensator mit einem Vorratsgefäß[1]). Die Probekörper wurden durch einen Gasstrom zunächst in das Vorratsgefäß gebracht. Durch Vorversuche mit nichtradioaktiven Probekörpern hatten wir nämlich jenen Zeitpunkt ermittelt, nach welchem der Hahn, der über der oberen Platte des Kondensators eingekittet ist, geschlossen werden muß, damit der erste Probekörper aus dem Vorratsgefäße durch das Loch in der oberen Kondensatorplatte in den Kondensator gelange. Mit diesem ersten Probekörper führten wir sodann die Messungen aus. Da diese Versuche aber sehr zeitraubend und sehr kostspielig wurden, sind wir zu einem einfacheren Verfahren übergegangen. Wir haben die Suspension der Probekörper im Stickstoffgase durch Einleiten in ein großes Vorratsgefäß außerordentlich verdünnt und dieses sozusagen radioaktive disperse System der Probekörper im Gase in kleinen Partien durch einen Kondensator ohne Loch in der oberen Platte geführt; so gelang es die Zahl der in den Kondensator eingeführten Probekörper auf ein Minimum zu beschränken. Um uns nun zu überzeugen, daß der Kondensator durch die eingebrachten Probekörper, auch wenn dieselben nach den ausgeführten Versuchen sich auf die Platten des Probekörpers niedergeschlagen haben, seine Eigenschaften nicht geändert hat, haben wir verschiedene Beweise.

Zunächst darf ein nichtradioaktiver Probekörper sich in einem für radioaktive Messungen noch brauchbaren Kondensator nicht anders verhalten als in einem vollkommen neuen Kondensator, d. h. er darf insbesondere während langer Zeiten keine spontane Umladungen zeigen. Ein Weg, der aber präziser und rascher zum Ziele führt, ist der folgende:

Wir bringen in einem radioaktiv ungebrauchten Kondensator einen nichtradioaktiven geladenen Probekörper und regulieren die Feldstärke so ein, daß der Probekörper langsam ansteigt. Er steigt zunächst mit konstanter Geschwindigkeit an. Schalten wir nun plötzlich die Spannungsquelle ab, so wird die Steigbewegung des Probekörpers immer langsamer, er bleibt schließlich stehen, kehrt sodann seine Bewegungsrichtung um und beginnt immer rascher zu fallen. Dieser Vorgang läßt sich an demselben Probekörper natürlich beliebig oft wiederholen. Er ist vollkommen klar; bei abgeschalteter Spannungsquelle verliert der Kondensator seine Ladung durch den Isolationsstrom im Ebonitgehäuse, durch den Ladungsverlust an die Außenluft und schließlich durch den sogenannten Gaselektronenstrom zwischen den Platten. Dadurch ändert sich die Potentialdifferenz und mit ihr die Feldstärke zwischen den Platten. Die Größe der Feldstärke in jedem Zeitmomente gibt der Probekörper durch seine Geschwindigkeit an. Zunächst ist die auf ihn wirkende elektrische Kraft noch größer als das Gewicht des Probekörpers; der Probekörper steigt noch mit stetig abnehmender Geschwindigkeit. Schließlich werden sie gleich; der Probekörper steht still. Sodann wird die elektrische Kraft kleiner als das Gewicht des Probekörpers. Der Probekörper fällt mit zunehmender Geschwindigkeit. Sie sehen, der nichtradioaktive Probekörper spielt in

1) Vgl. die zit. Abb. in den Ann. d. Phys. Fig. 4 u. 5.

diesen Kondensator-Abladeversuchen die Rolle des Elektrometers der radioaktiven Methoden; denn die jeweils am Kondensator anliegende Spannung wird aus der Geschwindigkeit des Probekörpers durch einfache Methoden errechnet.

Ich nehme vorweg, daß die an und für sich ganz minimalen, die Ladung des Kondensators ausgleichenden Ströme anscheinend zur Gänze auf den Isolationsstrom des Ebonitgehäuses zurückgehen, da der berechnete Isolationswiderstand des Ebonits nämlich gerade in jene Größenordnung fällt, die beobachtet wird.

Solche Kondensatorabladeserien führten wir zunächst mit einem nichtradioaktiven Probekörper in dem radioaktiv ungebrauchten Kondensator aus. Sodann folgten Versuche mit den radioaktiven Probekörpern und schließlich folgten diesen Versuchen neuerliche Kondensatorabladeserien mit nichtradioaktiven Probekörpern nach. Solange der Kondensator radioaktiv unverseucht ist, muß der Isolationswiderstand des Kondensators stets der gleiche bleiben. Die Figuren 1 und 2 zeigen solche Abladeserien des Kondensators; die Beobachtungen vor und nach den radioaktiven Versuchen sind in den Bildern erkenntlich gemacht. Der Unterschied zwischen einem radioaktiv unverseuchten und verseuchten Kondensator ist daraus sehr deutlich zu entnehmen.

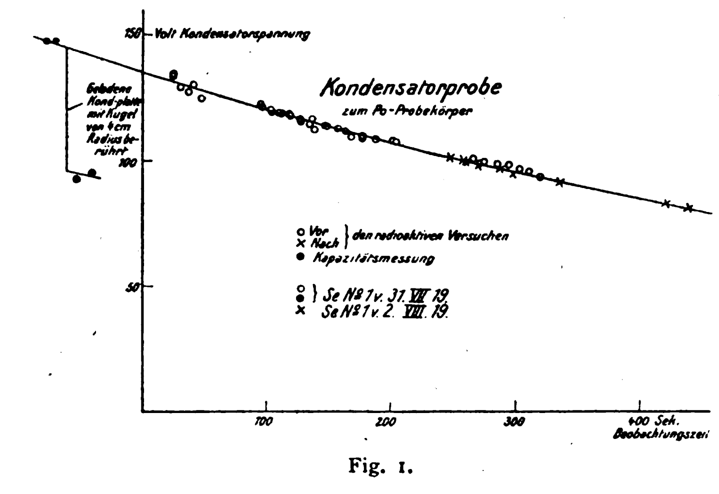


Fig. 1.

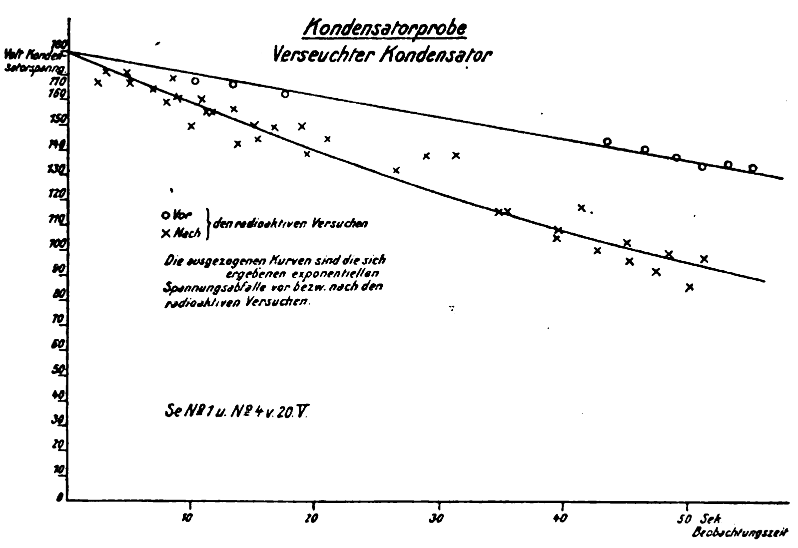


Fig. 2.

Um nun ein Bild über die Absolutwerte der Ladungsverluste bzw. der Isolationsströme zu bekommen, kann man die Kapazität des Kondensators entweder elektrostatisch berechnen oder auch durch ein sinnfälliges Experiment direkt ermitteln. Wir legen an die nichtgeerdete Platte

des **abgeschalteten** Kondensators eine Kugel geeigneter Kapazität (4 cm); die Ladung des Kondensators verteilt sich nun auch auf die Kugel und die Feldstärke im Kondensator sinkt sofort auf einen Betrag, der aus der momentan geänderten Geschwindigkeit des Probekörpers wieder ermittelt werden kann. Auf diese Weise ergibt sich die ungefähre Kapazität des Kondensators und damit auch die Größe der Isolationsströme. Durch diese Methode haben wir uns die Möglichkeit gesichert, den Kondensator unter steter Kontrolle zu halten.

Und nun gehen wir zu den Erscheinungen über, die an den radioaktiven Probekörpern zu beobachten sind. Bereits der erste Probekörper, den wir in den Kondensator einbrachten, zeigte ein von den nichtradioaktiven Probekörpern vollkommen abweichendes Verhalten, denn die Bewegung dieses Probekörpers im elektrischen Felde erfolgte zeitweise nicht gleichförmig, sondern mit **kontinuierlich** sich ändernder Geschwindigkeit von einem Bewegungszustand in den andern übergehend. Würde man die Ladungen berechnen, welche dem jeweiligen Bewegungszustande des Probekörpers entsprechen, so beinhaltet diese Beobachtung, daß der Probekörper von einem Ladungszustand kontinuierlich in einen andern Ladungszustand übergegangen ist. Es handelt sich nun darum, dieses **Phänomen** messend zu verfolgen und zahlenmäßig festzulegen. Am zweckmäßigsten wäre es, die Geschwindigkeit der Probekörper fortwährend oder in möglichst kurzen Zeitabschnitten zu registrieren. Eine solche Messung wäre eventuell nur durch eine kinematographische Aufnahme denkbar. Dazu sind aber die Probekörper viel zu lichtschwach. Wir sind also zu einem andern Verfahren genötigt worden. Die Zeiten, **in** welchen der Probekörper die aufeinanderfolgenden Partes eines Okularrasters z. B. steigend zurücklegte, wurden festgehalten, sodann wird die Feldstärke derart geändert, daß der Probekörper dieselben Partes an derselben Stelle des Kondensators fallend durcheilte. Dabei wurde die Änderung der Feldstärke derart bewerkstelligt, daß immer Spannung an den Platten des Kondensators verblieb, um eventuell auftretende Ionen sofort aus dem Felde zu räumen.

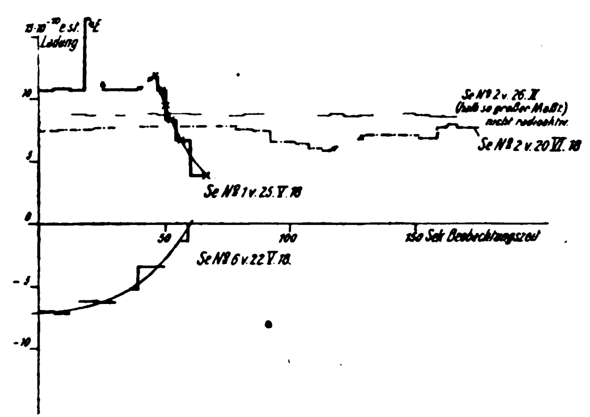


Fig. 3.

Wir sind uns bewußt, daß diese Methode die Vorgänge, die sich subjektiv darbieten, nur unvollständig wiedergeben kann, und ich betone deshalb, daß zu all diesen Messungen noch ergänzend der subjektive Befund der kontinuierlichen Geschwindigkeitsänderungen der Probekörper dazukommt. Immerhin geben auch diese Messungen die Beobachtungen sowohl an Kugeln von *Se* als auch *Hg* ganz treffend wieder. Sie können den Tatbestand aus nachfolgenden Bildern (Fig. 3—5) entnehmen. In diesen sieht man vergleichsweise auch die nichtradioaktiven Probekörper mit ihren zeitlich konstanten Ladungen eingetragen und ferner eine Zahl von radioaktiven Probekörpern, welche ihre Ladung kontinuierlich ändern. So zeigte beispielsweise der Selen-Probekörper Nr. 1 vom 25. Mai 1918 nach ca. 20 sec einen scheinbar diskontinuierlichen Ladungssprung von ca. $6 \cdot 10^{-10}$ e. st. E., um sofort darauf zu seiner ursprünglich positiven Ladung von etwas über $10 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. zurückzukehren. In dieser Ladung verblieb er ca. 20 sec, um sodann nach einer kleinen Aufladung im Verlaufe der nächsten halben Minute, seine Ladung kontinuierlich verlierend, auf ca. $3 \cdot 10^{-10}$ e. st. E. abzusinken. Ein anderer Probekörper (Selen Nr. 6

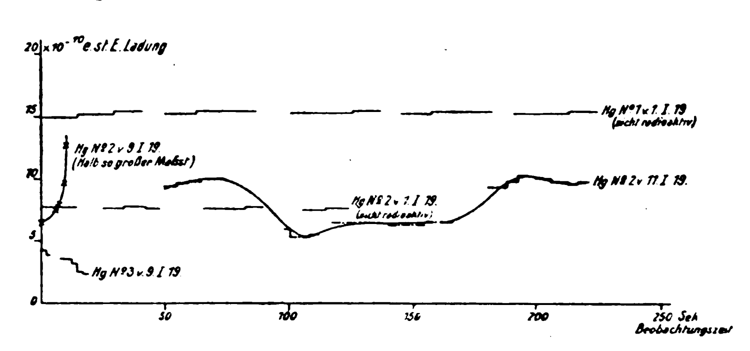


Fig. 4.

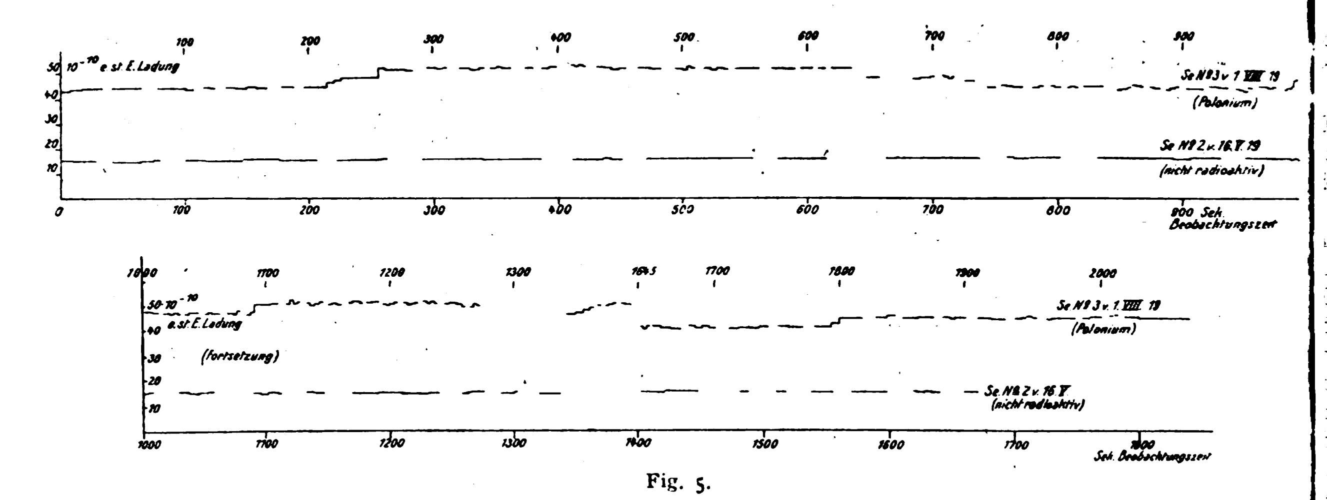


Fig. 5.

vom 22. Mai 1918) verlor z. B. seine Ladung von ca. $-7\cdot10^{-10}$ e.st.E. im Verlaufe von einer Minute usw. Diese Probekörper waren mit Emanation in Kontakt gewesen und können somit Ausstrahlungen aller Gattungen (α, β, γ, δ) zeigen.

Der Probekörper Selen Nr. 3 vom 1. August 1919 (Polonium) zeigte aber in ca. 2000 sec 7 mal kontinuierlich rascheres oder langsameres Wechseln seiner Ladung und nur einmal eine raschere, vielleicht sprungweise Ladungsänderung. Da dieser Probekörper aus mit reinem Polonium beschlagenem Ausgangsmaterial stammt, sind von ihm bloß α-Emissionen zu erwarten. Es konnte sonach eine beliebige Anzahl der beobachteten Vorgänge oder keiner derselben auf eine α-Emission zurückgehen.

Wir haben uns nun bemüht, verschiedene Erklärungsmöglichkeiten für die von uns beobachteten neuartigen Erscheinungen zu finden, ohne daß man bemüßigt wäre, die Annahme von kleinern Ladungen als die des Elektrons zu machen oder gar auch kontinuierliche Elektrizität, als ob sie existiere, zuzulassen. So haben wir beispielsweise den Impuls berechnet, den die durch den Stoß eines α-Partikels entstanden gedachten und im Felde fortgerissenen Ionen auf den Probekörper ausüben könnten und ihn 10^6 mal zu klein gefunden, als daß er überhaupt bemerkbar wäre.

Statische Raumladungen können im Kondensator keine verbleiben, da stets sehr hohe Spannung am Kondensator liegt und nur der einzelne Probekörper durch passende Feldregulierung im Kondensator verbleibt.

Die zufolge der Ergebnisse der Kondensatorabladeserien noch denkbaren maximalen stationären Raumladungen sind aber um viele Größenordnungen zu klein, als daß sie überhaupt bemerkbar wären. Außerdem müßte der Probekörper in diesem Falle Ladungsänderungen zeigen, die eine Funktion des Ortes im Kondensator wären. Auch müßte sich der Probekörper außerordentlich oft und stark sprungweise umladen, wenn solche Ströme im Gase vorhanden wären.

Wir sehen also bisher keine Möglichkeit, die gefundenen und Ihnen hier auseinandergesetzten Erscheinungen anders zu deuten, als durch Annahme eines kontinuierlichen Wechsels des Ladungszustandes radioaktiver Probekörper. Beachten wir, daß auch Probekörper, deren Ladung in der Größenordnung des Elementarquantums liegt, sich so umladen, als ob die Elektrizität kontinuierlich wäre oder aus Quanten viel kleinerer Größenordnung konstituiert wäre als die des universell gedachten Elektrons, so dürfen Sie wohl anzuerkennen geneigt sein, daß wir in diesem Phänomen der kontinuierlichen Entladung bzw. Ladungsschwankung radioaktiver Probekörper eine Stütze für jene Anschauung vermuten, nach welcher nicht jede elektrische Erscheinung auf ein universelles Elektron zurückgeführt werden kann.

Ein Fachgenosse hat mich jüngst gefragt, warum ich gerade diese Untersuchung geführt habe. Ich wollte auf diesem Wege zur Ladungsbestimmung des einzelnen α-Partikels gelangen bzw. den Vorgang bei der Emission eines α-Partikels näher erforschen.

Daß man auf Grund anderer Methoden bereits ziemlich konkrete Bilder für diese Vorgänge annimmt, kann mich in der weitern Verfolgung meiner Versuche nicht beirren.

Wenn Maxwell als Theoretiker in der Vorrede seines Lehrbuches der Elektrizität und des Magnetismus schrieb: „Ich habe mein Werk nicht als Richter, sondern wie ein Advokat ge-

schrieben", so soll ein Experimentalphysiker den entgegengesetzten Standpunkt vertreten.

Ich habe mich daher stets an den Ausspruch Duhems gehalten: „Niemand soll Versuche ausführen, um seine Gedanken zu bestätigen, sondern bloß, um sie zu kontrollieren".

Wir haben bereits jetzt alle zweckmäßigen konstruktiven Vorbereitungen getroffen, um unter Variation der Versuchsbedingungen, der Gase, des Gasdrucks usw. jene Phänomene, die an einzelnen mikroskopischen und submikroskopischen radioaktiven Probekörpern zu beobachten sind, gleichzeitig mit jenen wahrzunehmen, die für die radioaktiven Vorgänge bisher charakteristisch waren (Szintillation usw.) und die nach der radioaktiven Theorie zu erwarten wären. Es wird nun aber auch notwendig sein im Sinne der eingangs aufgeworfenen Hauptfragestellung, daran zu gehen, alle übrigen Gebiete der Physik auf die Frage der Universalität des Elektrons hin in Zukunft zu überprüfen.

Diskussion.

Edgar Meyer: Ich möchte den Herrn Vortragenden um eine Auskunft über das Methodische in seiner Arbeit bitten. Bekanntlich haben die Versuche des Herrn Bär im Physikalischen Institut der Universität Zürich zu dem Ergebnis geführt, daß die beliebig geänderten Ladungen eines Teilchens sich, innerhalb der jedesmal bestimmten Fehlergrenze, exakt verhalten wie die kleinen ganzen Zahlen, eine conditio sina qua non für die atomistische Struktur der Elektrizität. Da nach den älteren Versuchen von Herrn Ehrenhaft dieses ganzzahlige Verhältnis nicht vorhanden ist, so möchte ich fragen, wie sich der Herr Vortragende zu dieser Diskrepanz stellt, die ja auch für die vorliegenden Versuche von Bedeutung sein könnte.

Ehrenhaft: Diese Frage hat zwar für vorliegende Versuche meinem Ermessen nach zunächst keine Bedeutung, aber wenn die Versammlung es wünscht, will ich diese Frage gerne beantworten, obzwar es mir wichtiger schiene, zunächst über die neuen radioaktiven Erscheinungen zu diskutieren.

Bezüglich der sogenannten loi des multiples entiers ist der Tatbestand folgender: Herr Edgar Meyer und W. Gerlach haben durch Ausschweben von P. K. jene ganzen Zahlen bestimmt, die sich wie die Ladungen verhalten, die derselbe P. K. bei Umladungen hintereinander annimmt. Um diese Methode von der anhaftenden Willkür zu befreien, haben wir in Wien das sogenannte Einengungsverfahren, eine Gabelmethode angegeben, bei welcher durch Bestimmung von Feldstärken, bei der gerade Steigbewegung bzw. Fallbewegung des P. K. einsetzt, das größte gemeinschaftliche Maß der Ladungen, welche ein und derselbe P. K. hintereinander annimmt, bestimmt wird. Ich habe insbesondere darauf hingewiesen, daß sich diese Ladungen, wenigstens bei der damals erreichten Genauigkeit, wohl häufig als einfache Vielfache einer Ladung ansprechen lassen, daß sich ferner öfters dieselben stabilen Ladungen bei einem P. K. einstellen, doch fand ich, daß diese größten gemeinschaftlichen Maße der Ladungen bei den verschiedenen P. K. keineswegs einander gleich sind und daß sie mit dem Elektronenwerte nicht übereinstimmen. Auch Konstantinowsky ist im Prinzip zu ähnlichen Resultaten gelangt. Bei genauen Versuchen erhielten wir aber vielfach auch kompliziertere Verhältnisse, wobei ich bemerken möchte, daß es für die ganze Beurteilung der Frage mir stets relevant erschien, gleichzeitig bei jedem Probekörper auch seine Größe und damit auch den Absolutwert der Ladung mit zu bestimmen.

Um weiterhin auch diesbezüglich sicher zu gehen, also sicher kugelförmige P. K., bei welchen auch Massenänderungen der P. K. aller Erwartung nach keine die Versuche störende Rolle spielt, zu erhalten, haben wir durch Verdampfung hergestellte *Hg*-P. K. mit 1 pro Mille Bleizusatz in Verwendung genommen, während wir früher Quecksilber im elektrischen Lichtbogen zerteilten. Die durch exakt gemessene Einengungsgrenzen gewonnenen Verhältnisse der Ladungen eines solchen P. K. (Nr. 2. vom 1. I. 1919[1])) ergaben 14:7:43:28:20 bei einem Radius des P. K. von $3{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm, also bei einem P. K. der Millikanschen Größenordnung. An diesem P. K. ergäbe sich aber, selbst wenn man den Ladungen die den wiederholt gemessenen Grenzen widersprechenden einfacheren Vielfachheiten 2:1:6:4:3 zuschreiben wollte, und die komplizierteren auf hypothetische Massenänderungen des P. K. zurückführen wollte, trotzalledem als einfachste Grundladung bloß $3{,}8 \cdot 10^{-10}$ e.-st. E., also noch immer eine wesentliche Unterschreitung des elementaren Quantes der Elektrizität.

Prinzipiell scheint es mir aber von Bedeutung, daß man diese sogenannte loi des multiples entiers, falls sie allein auf Konstitution der Elektrizität zurückgeht und nicht auf das umgebende Gas, Kapazität der P. K., kapillare

1) Vgl. Ann. d. Phys. 1920, Elektrizität und Radioaktivität, von F. Ehrenhaft u. D. Konstantinowsky.



und thermodynamische Gleichgewichtszustände usw. erst dann als Aussage über die Atomistik der Elektrizität in Rücksicht ziehen könnte, wenn die an verschiedenen P. K. ausgeführten Versuche auch stets die gleichen größten gemeinschaftlichen Maße ergeben.

Mir persönlich, und da stimme ich wohl mit der Mehrzahl der Fachgenossen überein, scheint gerade diese Fragestellung nach der Rationalität der Verhältnisse der Ladungen eine der schwierigsten zu sein und kann vor allem, wenn überhaupt, so nicht eher zu einer weiteren Klärung gebracht werden, bis man nicht über die alte Streitfrage, ob die Elektrizität bei Massenänderungen der P. K. ebenfalls abverdampft oder nicht, Genaueres weiß.

Ich erinnere übrigens daran, daß eine nicht unähnliche Frage der Atomistik der Materie, die Frage, ob die Atomgewichte ganzzahlige Vielfache des H-Atoms (Polymere des Wasserstoffs) sind, seit Prout, also einem Jahrhundert, in Diskussion steht und daß es auch hier sehr lange gedauert hat, bis die Dezimalen der Messungsergebnisse der Atomgewichte allgemeine Anerkennung fanden und daß die Diskussion, die Deutung derselben von theoretischer Seite her, auch heute noch nicht zur Ruhe gekommen ist.

Konstantinowsky: Die diesbezüglichen Versuche, welche Herr Bär und ich in Wien gemeinsam durchgeführt haben, lassen noch keinen eindeutigen Schluß in bezug auf diese Frage zu; ohne die Annahme von Massenveränderlichkeiten usw. bekommen wir in allen Fällen keine einfachen ganzen Zahlen. Da die Versuche aber noch nicht abgeschlossen sind, kann man derzeit noch nichts Bindendes aussagen.

Bär (Nachtrag bei der Korektur): Die Annahme einer langsamen, dauernd in derselben Richtung verlaufenden Massenänderung von wenigen Prozenten innerhalb eines viele Stunden dauernden Versuches ist allerdings bei vielen P. K. notwendig, um Ganzzahligkeit zu erhalten. Eine solche Annahme scheint mir auf Grund aller vorliegenden Erfahrungen sehr plausibel, aber ich möchte erst urteilen, wenn wir mehr und bessere Versuche angestellt haben werden.

Regener: Ich möchte die Hauptfrage, nämlich die Frage nach der Existenz oder Nichtexistenz eines Subelektrons von einem allgemeinen Gesichtspunkte aus beleuchten. Ich glaube, man kommt in dieser Frage weiter, wenn man das Augenmerk auf die Größe der Probekörper lenkt und zusieht, wie die Abweichungen der gefundenen Ladungen von dem anerkannten Werte des Elementarquantums von der Größe der Probekörper abhängen. Diese Abweichungen sind nämlich bei den Messungen des Herrn Millikans mit relativ sehr großen Teilchen (r meist größer als 10^{-4} cm) sehr klein und meines Erachtens lediglich die etwa noch vorhandenen Versuchsfehler. Bei den Versuchen von Herrn Ehrenhaft mit sehr kleinen Probekörpern werden die Abweichungen, und zwar die Unterschreitungen um so größer, je kleinere Probekörper angewandt werden, so daß Herr Ehrenhaft bei ganz kleinen Körpern auf $^1/_{10}$, ja auf $^1/_{100}$ des normalen Wertes für das Elementarquantum kommt. Irgendwo muß, wenn man von größeren zu kleineren Probekörpern übergeht, meiner Ansicht nach der Übergang von dem Millikanschen zu den Ehrenhaftschen Werten auftreten. Ich glaube, daß man daraus zu einer Aufklärung für die Unterschreitungen gelangen kann. Messungen, die Herr E. Radel[1]) auf meine Veranlassung in Berlin ausgeführt hat, haben eine solche in der Tat bereits ergeben.

Herr Radel hat mit ein und derselben Apparatur Messungen nach der Steig- und Fallmethode an Probekörpern von sehr verschiedener Größe gemacht und gefunden, daß bei großen Teilchen innerhalb der Versuchsfehler stets der Millikansche Wert herauskommt. Er hat dabei noch besonders Jagd auf möglichst kleine Ladungen gemacht und bei großen Teilchen niemals eine Unterschreitung der einfachen Elementarladung nach Millikan bekommen.

Bei einem bestimmten Radius begann nun aber beim Übergange zu kleineren Teilchen auch die Ladung kleiner zu werden (immer nach Stokes-Cunningham aus Steig- und Fallbeobachtungen berechnet), und zwar ergab sich das Merkwürdige, daß der Radius der beginnenden Unterschreitung von der Substanz des Probekörpers abhängt. Bei Gold liegt er bei etwa $2{,}7 \cdot 10^{-5}$ cm Radius, bei Quecksilber bei etwa $1{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm Radius. Paraffinöl und Kolophonium gaben keine Unterschreitungen, konnten aber bei kleineren Teilchen wegen der großen Molekularbewegung nicht beobachtet werden.

Aus diesen Messungen Herrn Radels leite ich nun folgende Arbeitshypothese für die Unterschreitungen bei kleinen Teilchen ab.

Ich nehme an, daß die Teilchen umgeben sind von einer verdichteten Gasschicht von einer bestimmten Dicke. Die Verdichtung möge um so größer werden, je

1) E. Radel, Ladungsmessungen an Nebelteilchen Zeitschr. f. Physik 3, 63, 1920.



näher man an die Oberfläche des Teilchens kommt. Ist der Radius der Teilchen groß gegen die Dicke dieser Schicht, dann wird die Beweglichkeit des Teilchens durch die Schicht nicht beeinflußt. Wird dagegen der Radius so klein, daß die Dicke der Schicht eine merkliche Rolle spielt, dann wird auch die Beweglichkeit des Teilchens verkleinert und somit die Ladung zu klein gefunden. So erklären sich die Unterschreitungen; dieselben werden um so größer, je kleiner das Teilchen wird, da das Verhältnis der von der Oberfläche ausgehenden Kräfte zu den vom Volumen ausgehenden immer größer wird und damit auch der Einfluß der Oberflächenschicht auf die Unterschreitung. Natürlich kommt auch der Radius der Teilchen und ebenso die Dichte bei kleinen Teilchen falsch heraus.

Die Hauptfrage ist nun, ob die Dicke der Schicht zur Erklärung der gefundenen Wirkung ausreichend ist. Auf die Molekularkräfte allein kann die Schicht wohl nicht zurückgeführt werden, denn für die Wirkungsweise derselben ergeben sich viel kleinere Werte als die hier nötigen von einem oder mehreren Hunderten des Molekulardurchmessers. Wenn man also auch theoretisch der Sache nicht beikommen kann, so liegt aber, wie ich bei Durchsicht der Literatur fand, bereits umfangreiches experimentelles Material vor, nach welchem die verdichtete Gasschicht auf festen Körpern sehr viel mal größer als die theoretische Wirkungsweite der Moleküle ist. Es liegen da sehr viel Messungen von Quincke, Kayser, Mühlfarth u. a. über die von Glasflächen (auch von auf 500° erwärmten, wasserhautfreien) festgehaltenen Gasschichten vor. Die letzteren Messungen ergeben sogar Gasschichten von einigen Einheiten des 10^{-5} cm, also viel dicker, als wir sie brauchen. Auch alkalifreie Quarz- und Eisenflächen zeigen dieselbe Erscheinung. Zur Erklärung dieser dicken Schichten müssen sicher noch andere Kräfte angenommen werden als die reinen Molekularkräfte; vielleicht die „halbchemischen" Kräfte, von denen gestern Herr Hallwachs sprach und welche auch Herr H. Freundlich zur Erklärung von Anomalien in der Absorption heranzieht. Ich bemerke, daß auch die Herren Schidlof und Targonski in Genf zur Erklärung der Erscheinung des „Verdampfens" der Quecksilbertröpfchen bereits früher in ähnlicher Weise von Gashäuten gesprochen haben.

Für den vorliegenden Fall genügt es vollkommen, daß die Existenz solcher dicken Gasschichten experimentell nachgewiesen ist. Sie müssen also in der angeführten Weise die nach Stokes-Cunningham berechneten e-Werte beeinflussen, es muß also das Elementarquantum scheinbar um so kleiner werden, je kleinere Probekörper man nimmt, je mehr also die Gasschicht die Beweglichkeit verändert. Es liegt also meines Erachtens gar kein Anlaß vor, an einem Elementarquantum von der Größe des Herrn Millikan gemessenen zu zweifeln.

Dies ist meine Arbeitshypothese zur Erklärung der Unterschreitungen[1]). Ich zweifle nicht, daß weitere Messungen, die ich zur genaueren Erfassung der Schicht vorbereitet habe, die Sache bald weiter klären und zeigen werden, daß die Existenz von Subelektronen nicht reell ist.

Ehrenhaft: Abgesehen von vielen theoretischen Erwägungen, welche, wie Herr Regener selbst bemerkte, die Annahme solcher Gasschichten höchst unwahrscheinlich machen, will ich zunächst darauf aufmerksam machen, daß ich bereits 1911 in einer Statistik darauf hinwies (diese Zeitschr. **12**, 94, 1911), daß die Unterschreitungen des sogenannten Elementarquantums sich am P. K. von der Größenordnung $3 \cdot 10^{-5}$ cm abwärts, also mit abnehmender Kapazität der P. K. im allgemeinen häufiger vorfinden. Ich bezeichne es als Fortschritt, daß nunmehr die Unterschreitungen wenigstens an kleinen P. K. schon zugegeben werden. Nichtsdestoweniger findet man aber auch an größeren P. K. der Millikanschen Größenordnung eindeutige Unterschreitungen des Elementarquantums, so z. B. an *Hg*-Tröpfchen, bei *Hg*-P. K. vom Radius $3{,}2 \cdot 10^{-5}$ cm (*Hg* Nr. 1 vom 1. I. 1919), bei Selen vom Radius von $3{,}4 \cdot 10^{-5}$ cm (*Se* Nr. 1 vom 15. V. 1919 Ladung $2{,}1 \cdot 10^{-10}$ el.-st. E.). Ich zweifle nicht, daß sich Unterschreitungen an größeren P. K. gleichfalls bei den anderen vorfinden werden. Damit wird aber die ganze Argumentation des Herrn Regener hinfällig. Daß man im allgemeinen bei *Au* und anderen Körpern mit hoher Dichte noch an kleineren P. K. zu guten Messungen und damit auch leichter zu Unterschreitungen gelangt, liegt nach meiner Ansicht vor allem an dem viel größeren Kontraste dieser P. K. im Dunkelfelde, der ihre Sichtbarmachung auch noch in Größen ermöglicht, in der andere Substanzen geringer Dichte sich bereits der Beobachtung entziehen, sowie an der größeren Fallgeschwindigkeit dieser P. K. zufolge ihrer großen Dichte; daher auch die größere

1) Vgl. dazu: E. Regener, Über die Ursache, welche bei den Versuchen von Herrn Ehrenhaft die Existenz eines Subelektrons vortäuscht. Sitz. d. Preuß. Akad. **32**, 632, 1920.

Schwierigkeit, Unterschreitungen an P. K. von geringer Dichte zu messen.

In diesem Zusammenhange ist es von Interesse, wenn ich Ihnen mitteile, daß der Gedanke, Gasschichten zur Erklärung der Unterschreitungen des postulierten Elementarquantums heranzuziehen, nicht neu ist, sondern es hat bereits im Jahre 1913 Anton Lampa, damals in Prag, mir mitgeteilt, daß nach dem Stande der Versuche in Wien und Prag es ihm nicht gelungen sei, durch Annahme von Gasschichten die Ladungen der P. K. einheitlich auf das hypothetische Elementarquantum oder dessen Vielfache zurückzuführen.

Seither hat Herr J. Mattauch in meinem Institute neuerdings sehr schöne übereinstimmende Resultate an Selen-P. K. erhalten, einesteils unter Voraussetzung der Dichte des Selens aus der Fallgeschwindigkeit unter Verwendung der Widerstandsgesetze, andererseits durch Bestimmung der Größe der P. K. aus der Farbe. Hätte die Gasschicht wesentlichen Einfluß, dann wäre diese Übereinstimmung nicht möglich. Auch könnte das lichtpositive photophoretische Maximum des Silbers, vorausgesetzt, daß es sich dabei um Lichtdruck handelt, nicht mit den übrigen Größenbestimmungen der P. K. des Silbers in Übereinstimmung kommen.

Schließlich sei darauf hingewiesen, daß auch die Rechnung auf Grund der Beweglichkeit, welche nach der Theorie der Brownschen Bewegung ohne Voraussetzung über die Dichte der P. K. bestimmt werden, Abweichungen vom elementaren Quantum ergeben, was auch Herr R. Fürth fand. Aus wieviel Steig- und Fallwerten erschließen Sie aus Herrn Radels Beobachtungen nach der Brownschen Bewegung, für die Sie Übereinstimmung mit dem Elementarquantum behauptet haben, die Beweglichkeit.

Regener: Aus zehn Werten.

Ehrenhaft: Dies ist für Bestimmungen aus der Brownschen Bewegung, die auf statistischer Grundlage beruhen, viel zu wenig und ebenso, als würde eine Versicherungsgesellschaft ihre Sterblichkeitstafeln auf die Lebensdauer von 10 Individuen aufbauen. Bei uns wurden bis zu 1500 Messungen an einem P. K. beobachtet (bis zu 11 Stunden); wir getrauen uns bezüglich dieser Frage noch immer nichts Definitives auszusagen. Erst wenn der Vergleich der Beweglichkeit aus der Brownschen Bewegung und aus den übrigen Methoden auch noch bei P. K. ganz geringer Dichte, z. B. *Na* und *Li* in Argon und bei ausreichender Statistik auch bei spezifisch schweren Körpern (*Au*, *Pt*) ausgeführt sein wird, und wenn man auch hier über die Art der Berechnung Sicherheit hat, kann man weiter schließen.

Schließlich sei erwähnt, daß ich mich der Frage der experimentellen Untersuchung des Einflusses von Gasschichten keineswegs verschließe, sondern daß wir sie freudig aufnehmen werden, allerdings möchte ich da Verfahren, die unter Voraussetzung des Elektronenwertes aus den gemessenen Abweichungen von Elektronenwerten jene Dicke der Hülle rückschließen, welche die Ladung wieder zum Elektronenwert führt, keine Bedeutung beimessen, denn das wäre eine petitio principii. Der hypothetische Einfluß solcher Gasschichten, ich bin mir allerdings der Schwierigkeit solcher Versuche bewußt, müßte vielmehr durch eigene, von der Elektronenfrage unabhängige Verfahren ermittelt werden. Dies ist aber die Idee von Konstantinowsky, der vielleicht in seinem angekündigten Vortrag auch diese Frage berühren dürfte.

Konstantinowsky: Messungen über die Dicke der Oberflächengasschicht liegen, wie Herr Regener selbst erwähnte, an so kleinen Partikeln nicht vor; auch ist, soweit mir bekannt, in der Literatur nirgends eine Methode angegeben worden, nach welcher eine Abschätzung der Oberflächengasschicht zu bekommen ist. Ich brauche zu diesem Zwecke den in Betracht kommenden Probekörper nur nacheinander in die Atmosphäre von 2 Gasen zu bringen, welche, miteinander chemisch reagiegierend, z. B. einen festen Körper geben. Aus dem Massenzuwachs, den der Körper dabei erleidet, erhalte ich dann die Masse der ursprünglich ab- und adsorbierten Gasmenge. Dies wird also dann zugleich die erste Möglichkeit sein, auf einen Wert für die in Betracht kommende Gasmenge zu schließen. Um daher zu beurteilen, ob die Gasschicht für die gefundenen Abweichungen der Ladungen überhaupt in Betracht kommen, muß wohl erst der Ausgang dieser Versuche abgewartet werden.

Born: Man kann zur Erklärung der Unterschreitungen der Elektronenladung auf folgenden Gedanken kommen: Stellen wir uns den Probekörper als geladene Kugel von Radius R und der Ladung E vor, in dessen Umgebung sich Ionen von der Ladung e befinden. Der Probekörper wird die Ionen entgegengesetzter Ladung an sich ziehen mit einem Potential, dessen Grenzwert an der Kugeloberfläche eE/R ist. Wenn dieser Potentialwert von der Größenordnung der mittleren Energie einer Gasmolekel kT wird, so muß irgendetwas Neues in der Umgebung des Probe-

körpers geschehen; die Gültigkeit der Ehrenhaftschen Überlegungen wird aufhören, sobald $eE/R = kT$ wird. Daraus folgt:

$$R = eE/kT$$

und wenn man $K = ne$, $e = 4{,}8 \cdot 10^{-10} \cdot k = 1{,}4 \cdot 10^{-16} \cdot T = 300$ setzt, so erhält man:

$$R = 5{,}5 \cdot 10^{-6} n.$$

Das führt also gerade auf jene Größenordnung des Teilchenradius, bei der die Unterschreitungen des Elementarquantums einsetzen. Vielleicht steckt in dieser Größenordnung-Betrachtung ein richtiger Kern.

Konstantinowsky: Ich möchte nochmals darauf hinweisen, daß die Intervalle der Partikelgrößen in den Millikanschen und in den Ehrenhaftschen Versuchen einander übergreifen, so daß es auch ein Größengebiet gibt, in welchem beide gearbeitet haben. Auch in diesem Intervalle kommt Ehrenhaft nicht in Übereinstimmung mit den Millikanschen Resultaten, so daß der Erklärungsversuch, den Prof. Born gibt, meiner Ansicht nach hier nicht hinreicht. Im übrigen möchte ich bemerken, daß es bisher meines Wissens noch niemand gelungen ist, die Millikanschen Ergebnisse auch nur mit annähernd derselben Genauigkeit wiederzufinden.

Gerlach: Ich möchte mir eine Bemerkung gestatten zu den von Herrn Ehrenhaft vorgetragenen Erscheinungen an kleinen radioaktiven Teilchen. Die gezeigten Kurven können auf Änderung der Masse oder der Ladung oder auf beides zurückgeführt werden. Die von Herrn Born vermutete Möglichkeit von Ladungsänderungen durch Aufnahme von Ionen ist in ganz ähnlicher Weise von Edgar Meyer und mir vor einigen Jahren bei der Untersuchung des lichtelektrischen Effektes an kleinen Metallteilchen beschrieben und gedeutet worden. Die Ehrenhaftschen Versuche mußten also in gleicher Weise erweitert werden. Treten bei offensichtlichen Ladungsänderungen der radioaktiven Teilchen stets Aufladungen gleichen Vorzeichens auf, oder sowohl positive wie negative?

Konstantinowsky: Es treten Ladungsveränderungen beiderlei Vorzeichens auf. Um klarzustellen, worum es sich bei den beobachteten Erscheinungen handelt, möchte ich darauf hinweisen, daß der Vorgang des Übergehens von einem Ladungszustande des P. K. zu einem andern mitunter bis zu 80 Sekunden dauert. Während dieser Zeit konnten die Zwischenladungen, welche der P. K. annahm, wiederholt gemessen werden. Mit den Zeiten, welche vergingen[1], bis wieder eine Umladung des P. K. einsetzte, hat das also nichts zu tun. Bei den Umladungen selbst handelt es sich nicht um große Änderungen der Ladung des P. K., sondern um solche von der Größenordnung des Elektrons.

Edgar Meyer: Bei den beschriebenen Versuchen von Herrn Ehrenhaft scheint es mir noch nicht sicher gestellt, ob man es mit einer Änderung der Ladung oder eben mit einer wirklichen Massenänderung der Teilchen zu tun hat. Letztere könnte ich mir sehr gut dadurch hervorgerufen denken, daß z. B. ein α-Partikel durch die von Herrn Regener auf den Teilchen angenommene Gashaut hindurchgeht. Dabei könnte diese Gashaut zum Teil abgeschleudert werden, ganz analog etwa wie das in Lawson nachgewiesene Verspritzen von Gold durch den Aufprall von α-Partikeln (Lawson, Wien. Ber. **127**, 1315, 1918).

Konstantinowsky: Damit die beobachtete Erscheinung durch eine Massenänderung des Partikels erklärt werden könnte, müßten diese Änderungen mitunter 50 und mehr Proz. der Anfangsmasse des Partikels betragen. Daß solche Änderungen ausgeschlossen sind, ergibt der Vergleich aufeinander folgender Steig- und Fallbeobachtungen.

Fürth: Es kann sich bei den Ehrenhaftschen Geschwindigkeitsschwankungen seiner Probekörper nicht um radioaktive, sondern nur um Ladungs-Schwankungen im Sinne Smoluchowskis handeln, indem die Ionen des umgebenden Gasraums im dynamischen Gleichgewicht mit der Leitung des Probekörpers steht. Aus der Theorie dieser Schwankungen müßte es möglich sein, die Größe der Ladungen dieser Ionen zu bestimmen und zu entscheiden, ob diese kleiner sind als das Elektron oder nicht.

Konstantinowsky: Die auf den Probekörper niedergeschlagenen Aktivitäten sind sehr klein; um eine Orientierung zu geben, möchte ich erwähnen, daß auf dem mit *Po* beschlagenen Probekörper nur so wenig *Po* war, daß nach der Zerfallstheorie im Durchschnitt nur in etwa 1000 Sek. eine Emission zu erwarten wäre. Von Ladungsschwankungen im Sinne der Campbell-Schweidlerschen kann demnach nicht die Rede sein.

Ehrenhaft: Eine größere radioaktive Menge zeigt bekanntlich Ladungsschwankungen. So kleine radioaktive Mengen, wie sie auf unseren P. K. sind, zeigen nach unseren

1) E. Meyer u. W. Gerlach messen bei ihren Versuchen nur diese Zeiten, während sie vom Vorgange der Ladungsänderung selbst ausdrücklich bemerken, daß er so schnell vor sich geht, daß er sich der Beobachtung entzieht. Ann. d. Phys. **45**, 223, 1914 oder **47**, 230, 1915.

Versuchen ebenfalls Ladungsschwankungen. Im ersteren Falle deutet die Elektronentheorie die Ladungsschwankungen durch die durch die Zufallsgesetze bestimmten Streuungen in den Emissionen beim Atomzerfall. In unserem Falle reicht die Elektronentheorie meines Erachtens nach zur Deutung der Erscheinung nicht mehr hin, denn P. K., welche selbst nur mehr Ladungen von der Größenordnung des Elektrons tragen, zeigen diese Schwankungen auch

Weiss: Die Bestimmung der Teilchengröße erscheint immer noch unsicher, da die Berechnungen nach der Stokes-Cunninghamschen Formel einerseits und aus der Brownschen Bewegung andererseits nicht nur nicht übereinstimmen, sondern sogar ganz verschiedene Größenordnungen ergeben. Solange diese Diskrepanz nicht geklärt ist, sind auch die Ladungsbestimmungen nach der einen wie nach der andern Methode unbefriedigend, um so mehr, als auch die Struktur der Teilchen (Gashaut, schwammige Struktur, Hohlkörper) einer Prüfung bedürfte.

Fürth (Nachtrag bei der Korrektur, da in der Diskussion aus Zeitmangel nicht mehr zugelassen): Der Herr Vortragende hat die Größenbestimmung seiner Probekörper aus der Farbe des abgebeugten Lichtes erwähnt. Da in letzter Zeit gegen diese Methode sowie insbesondere gegen die von G. Laski eingeführte Verbesserung auf der Basis der Grundempfindungshypothese von E. Norst Bedenken erhoben worden sind, möchte ich erwähnen, daß ihre prinzipielle Anwendbarkeit außer Zweifel steht, wenn auch bisher ihre Übereinstimmung mit anderen Methoden in Gasen noch nicht sicher gestellt ist. Hingegen werde ich in einer demnächst erscheinenden Arbeit zeigen, daß bei kolloiden Metallpartikeln die Größenbestimmung aus der Farbe nach der Laskischen Methode zu guter Übereinstimmung mit der aus der Brownschen Bewegung führt.

Ehrenhaft: Alle Berechnungsarten führen jedenfalls zu Ladungsunterschreitungen. Wir haben die Versuche in Wien auch nach dieser Richtung hin fortgesetzt. Nach der Theorie der Brownschen Bewegung ergaben sich bekanntlich die Größen der P. K. kleiner Dichte verglichen mit den Größenbestimmungen aus dem Widerstandsgesetze zu klein, dagegen die Größen der P. K. hoher Dichte (*Au*) zu groß. Es schien mir daher die Vermutung naheliegend, daß die Übereinstimmung bei P. K. mittlerer Dichte besser ausfallen würde, deshalb ließ ich Selen verwenden. Der vorerwähnte Schluß hat sich nach den Untersuchungen von Herrn Erich Schmid einigermaßen gerechtfertigt, wenn auch hier noch selbst bei sehr großer Statistik (1500 Einzelmessungen) Abweichungen zwischen dem Resultate aus dem Widerstandsgesetz und aus der Brownschen Bewegung bestehen blieben.

Fürth: Die Beweglichkeitsbestimmung aus der Brownschen Bewegung kann nur dann exakt sein, wenn das statistische Material ungeheuer groß ist, was weder bei den Weißschen, noch bei meinen Messungen der Fall war. Auf eine Atomistik läßt sich so nicht schließen. Die Aussage Herrn Ehrenhafts, daß bei Teilchen großer Dichte die Brownsche Bewegung kleinere Beweglichkeit gibt als die Steig- und Fallbeobachtungen, bei kleinerer Dichte umgekehrt, kann ich aus meinen Beobachtungen bestätigen, jedoch glaube ich, daß diese Unstimmigkeiten nicht ihren Ursprung in ihrer Dichte haben. Bei den Körpern kleinerer Dichte dürfte die Abweichung doch wohl bloß sekundären Ursachen zuzuschreiben sein.

Ehrenhaft: Ich glaube, daß es sich auch hier um reelle Abweichungen handelt, wenigstens ist mir kein Gegengrund bekannt. Übrigens läßt sich diese Frage am P. K. von *Na* oder *Li* in Argon, für welche ich in Wien bereits die nötigen Vorkehrungen getroffen habe, zur weiteren Klärung bringen.

Gerlach: Wenn Herr Ehrenhaft Ladungsänderungen ausschließt, so bleiben nur Massenänderungen als Möglichkeit übrig, vielleicht im Sinne der Meyerschen Bemerkung auf Grund der Anschauung von Regener. Hierbei ist eben gerade die langsame Einstellung, wie sie die Versuche mit Poloniumteilchen zeigen, zu erwarten, wie sie Schidlof und Targonski zeigten. Hierbei möchte ich noch fragen, seit wann Herr Ehrenhaft dem *Hg* 1 Proz. Blei zusetzt, um „Verdampfung" zu vermeiden, während von ihm und seinen Schülern doch bisher immer die Verwendung chemisch reinen Quecksilbers als wesentlich für die Erreichung in Teilchen konstanter Masse betont wurde.

Ehrenhaft: Um keine Unklarheiten aufkommen zu lassen, bemerke ich, daß auch gelegentlich rasche Ladungsänderungen kontinuierlicher Art vorkommen. Die Schwankungen der Ladungen auf Schwankungen der Masse zurückzuführen, scheint völlig ausgeschlossen, worauf schon Konstantinowsky hinwies. Was schließlich das *Hg* betrifft, haben wir ursprünglich bei nicht radioaktivem P. K. mit elektrisch zerstäubten *Hg* gearbeitet. Dem in Quarzeprouvetten mit der Bunsenflamme verdampften *Hg* setzten wir *Pb* seit November 1919 (vgl. Zitat, S. 683) zu.

D. K. Konstantinowsky (Wien), Über eine Methode zur Ausführung und quantitativen Verfolgung chemischer Reaktionen an Massen bis zu 10^{-14} g.

Durch die geistreichen Konstruktionen und Verfeinerungen der Mikrowagen ist es heute bereits möglich, chemische Reaktionen bis zu einer staunenswerten Kleinheit der reagierenden Massen quantitativ zu verfolgen. So lassen sich auf der bekanntesten und gebräuchlichsten Mikrowage, der Nernstschen, noch Massen von 10^{-5} g mit einer Genauigkeit von etwa 1 Proz. d. i. 10^{-7} g messen[1]), auf der Ramsay-Wage noch Massen bis auf etwa $2{,}5 \cdot 10^{-8}$ g angeben[2]). Auf der Wage von Pettersson[3]) beträgt die absolute Empfindlichkeit sogar noch etwa $2{,}5 \cdot 10^{-10}$ g, so daß sich Massen von 10^{-8} g noch auf einige Proz. genau angeben lassen.

Verfolgen wir, um gleich mit dem Folgenden im Einklange zu bleiben, beispielsweise eine Additionsreaktion zwischen einem festen Körper A und einem Gase B zu einem festen Reaktionsprodukte C, so ließe sich das Gesetz der Verbindungsgewichte an dieser Reaktion mit der letztgenannten Wage bis auf einige Einheiten der 10^{-10} g-Stelle überprüfen; denn für das Verhältnis der Masse m des Ausgangsproduktes A und der Masse m' des Reaktionsproduktes C geben einerseits die stöchiometrischen Gesetze den Wert

$$\frac{m}{m'} = \frac{v_a}{v_a + v_b} \qquad (1)$$

(v_a, v_b die Verbindungsgewichte von A und B), andrerseits läßt sich dieses Verhältnis auf der Wage ermitteln und damit das Gesetz der Verbindungsgewichte bis auf eben etwa einige 10^{-10} g kontrollieren. Daß es zu dieser Überprüfung, wie bekanntlich zu jeder quantitativen Analyse, bloß notwendig ist Relativgewichte zu ermitteln, ist unmittelbar zu ersehen.

An der bekannten Ehrenhaftschen Versuchsanordnung werden nun die Massen von Körperchen ermittelt, die viel kleiner sind als diejenigen, mit welchen, wie eben auseinandergesetzt, Reaktionen auf der derzeit empfindlichsten Mikrowage quantitativ verfolgt werden können, ja die sogar verschwindend klein sind gegenüber dem kleinsten Massenunterschiede, auf welchen die empfindlichste Mikrowage eben noch reagiert. Über die absoluten Massenempfindlichkeiten selbst gibt die kleine Tabelle eine Übersicht[1]).

Instrument	Absolutempfindlichkeit in Gramm.
Nernst-Wage[2])	10^{-7}
Pettersson-Wage	$3{,}10^{-10}$
Ehrenhaft-Kondensator	10^{-15}

Und eben mit diesen Körperchen von so geringer Masse gelingt es mir, chemische Reaktionen auszuführen, ja selbst quantitativ zu verfolgen und das Gesetz der Verbindungsgewichte zu überprüfen.

Um dies zu erläutern, will ich von der Ehrenhaftschen Experimentiertechnik so viel in Erinnerung bringen, als für das Prinzip des Folgenden notwendig ist. Denken Sie sich ein Partikel des Stoffes A von der erwähnt kleinen Masse m zwischen die horizontalen Platten des Kondensators gebracht; dieses Partikel trage die Ladung e. Zwischen den Platten kann dann ein lotrechtes elektrisches Feld von einer solchen Stärke $\mathfrak{E}$ erregt werden, daß die nach oben ziehende elektrische Kraft $e\mathfrak{E}$ dem Gewichte mg des Partikels das Gleichgewicht hält[3])

$$e\mathfrak{E} = mg \qquad (2)$$

Da das zwischen den Platten hervorgerufene Feld der an die Platten angelegten Spannung V proportional ist, kann statt dessen auch

$$m = kV \qquad (3)$$

genommen werden; die Proportionalitätskonstante k hängt außer von der Wahl der Spannungs- und Masseneinheiten noch von den Dimensionen des Kondensators und der Ladung des Partikels ab. Die relative Genauigkeit, die erzielt werden kann, ist bei größeren Partikeln (bis herab zu etwa 10^{-13} g Masse) zirka 1 Proz., bei sehr kleinem Wägegut (bei einer mittleren Dichte des Partikels für etwa 10^{-14} g) um 10 Proz., die absolute Massenempfindlichkeit also, wie erwähnt etwa 10^{-15} g.

Die Spannung V sei ermittelt worden, während sich das Partikel in einem Gase befand, das ihm gegenüber chemisch indifferent war. Wird nun das umgebende Gas gegen jenes andere Gas B ausgewechselt, mit welchem das Partikel eine Additionsreaktion eingeht, so läßt

1) Emich, Lehrbuch der Mikrochemie, Wiesbaden 1911, S. 13. Wie mir Herr Geheimrat Nernst freundlichst mitteilte, gelingt es ohne weiteres, die Absolutempfindlichkeit um eine oder zwei Zehnerpotenzen zu steigern.

2) Proc. Roy. Soc. 84 A, 536, 1911.

3) H. Pettersson, Diss. Göteborg 1914.

1) Bezügl. des Begriffes „Empfindlichkeit" einer Reaktion vgl. F. Emich, Berl. Ber. 1910, S. 11. Im Sinne der dort eingeführten Definitionen ist hier immer nur von praktischen Empfindlichkeiten die Rede.

2) Vgl. Anm. 1, vorige Spalte.

3) Oder eigentlich eine Minimalfeldstärke $\mathfrak{E}_s$, bei der das Partikel in die Höhe gezogen wird und eine maximale $\mathfrak{E}_f$ bei der es noch fällt

$$e\mathfrak{E}_s > mg > e\mathfrak{E}_f.$$

Da dieser Umstand für das Prinzipielle nicht von Wichtigkeit ist, wurde er der Kürze halber übergangen.

sich nach Ablauf der Reaktion für die Masse des Reaktionsproduktes auf eben die gleiche Art eine anzulegende Spannung V' finden, bei der das Partikel nunmehr schwebt und mit welcher demnach das nunmehrige Gewicht des Partikels ausgedrückt werden kann

$$m' = kV' \qquad (4)$$

oder für das Verhältnis

$$\frac{m}{m'} = \frac{V}{V'}. \qquad (5)$$

Der Vergleich mit dem aus den stöchiometrischen Gesetzen errechneten Verhältnis (1) läßt also ganz analog der vorigen Betrachtung an der Pettersson-Wage das Gesetz der Verbindungsgewichte überprüfen, allerdings mit dem Unterschiede, daß es sich bei gleicher prozentueller Genauigkeit um etwa 100000 mal kleinere Massen handelt, die da an der Reaktion teilnehmen.

Bisher wurde der Einfachheit halber vorausgesetzt, daß die elektrische Ladung e des Wägegutes sich während der Reaktion nicht ändert, denn dann ist der Proportionalitätsfaktor k stets derselbe und, da es sich nur um Relativmessungen handelt, ohne Einfluß. Aber auch wenn dies nicht zutrifft, lassen sich die Versuche immer noch so durchführen, daß das Gesetz der Verbindungsgewichte dabei überprüft werden kann; ein gangbarer Weg wäre z. B. der, daß die Masse des Reagierenden und des Reaktionsproduktes aus den Widerständen ermittelt wird welche der fallende Körper im umgebenden Gase erfährt. Um die Berechnung für diesen Fall durchführen zu können ist es allerdings unerläßlich, daß sowohl Reaktionsprodukt als auch Ausgangskörper Kugelgestalt haben.

Um nun auch dafür vorzusorgen und solche Körper zu finden habe ich zunächst eine Reihe von Reaktionen an relativ großen Partikeln (etwa 10^{-3} cm Durchmesser) auf dem Objektträger ausmikroskopiert. Dabei konnte ich mich gleichzeitig davon überzeugen, daß die Reaktion vollständig, d. h. vollkommen bis ins Innere der kugelförmigen Probekörper vor sich ging und dies in Zeiten, welche — wenigstens in den von mir untersuchten Fällen — klein sind gegen jene, während welchen bei den vorliegenden Beobachtungsumständen dem Probekörper Gelegenheit geboten ist, mit dem ihm umgebenden Gase zu reagieren.

Die eigentlichen Versuche sind eben erst im Gange und ich möchte über die Ergebnisse derselben und die Schlüsse, die sich daraus ergeben, erst berichten, bis ich in genügender Menge definitives und einwandfreies Zahlenmaterial in Händen habe. Ich kann jedoch heute bereits mitteilen, daß es tatsächlich gelingt, chemische Reaktionen an so kleinen Massen auszuführen und auf die beschriebene Art quantitativ zu verfolgen, ferner daß, wenn Ladungsänderungen bei den chemischen Reaktionen überhaupt auftreten, diese zumindest sehr gering sein müssen.

Ist es aber einmal möglich, mit so kleinen Probekörpern Reaktionen auszuführen, dann lassen sich auch andere Fragen auf diesem Wege anschneiden und vielleicht der Lösung zuführen. Auf zwei derselben will ich kurz hinweisen.

Es müßte mir gelingen, auf diesem Wege eine direkte Bestimmung eines Maximalwertes für die von einem solchen Partikelchen ad- und absorbierte Gasmenge durchzuführen. Dies ist, soweit mir bekannt, heute auf eine andere Art nicht möglich, obwohl die Kenntnis dieser Größe für die Kennzeichnung einer Reihe von Eigenschaften der Körperchen dieser Größenordnung von Wichtigkeit wäre. Zu diesem Zwecke muß ich einen solchen Probekörper nur der Reihe nach mit zwei Gasen in Kontakt bringen, die, miteinander in einer Additionsreaktion reagierend, einen festen Körper liefern, und die Gewichtszunahme des Körperchens messen.

Auch werden sich auf diesem Wege Probekörper mit bestimmten Oberflächen überziehen lassen, was vor allem für die Überprüfung der Brownschen Bewegung von kleinen Körpern in Gasen von Interesse sein dürfte.

Vor allem scheint diese Methode eher wie die bisherigen geeignet zu sein, Antwort auf viele, bisher ungelöste Fragen der Physik und Chemie der Kolloide zu geben.

Diskussion.

Geitler: Ich möchte den Herrn Vortragenden fragen, mit welchen Substanzen er bisher gearbeitet hat.

Konstantinowsky: Die meisten Versuche mit Chlor als reagierendes Gas. Die Partikelchen waren aus *Se*, *Hg*, *Sb* usw.

Gerlach: Gestattet die Verfolgung solcher chemischen Prozesse an ultramikroskopischen Teilchen vielleicht ein Urteil über die Struktur der Teilchen, indem Gase bei kompakten Teilchen nur die Oberfläche, bei schwammigen Teilchen auch das Innere chemisch verändern?

Konstantinowsky: Darüber kann ich einstweilen noch nichts sagen. Bei Substanzen, welche als Reaktionsprodukt flüssige oder ölige Körperchen bilden, jedenfalls nicht.

W. Lenz (München), Über einige speziellere Fragen aus der Theorie der Bandenspektren. (Mit Tafel V.)

Meine Herren! Ein Hauptergebnis der von Bjerrum[1]), Schwarzschild[2]), Heurlinger und Anderen[3]) entwickelten Quantentheorie der Bandenspektren ist der Nachweis, daß diese Spektren ausnahmslos vom Molekül emittiert werden. Auf Grund dieser Theorie können wir die verschiedenen Rotationszustände des Moleküls und die verschiedenen Schwingungszustände seiner Atome gegeneinander aus dem Spektrum entnehmen. Hierzu bietet sich in den Woodschen Resonanz-Spektren des Joddampfes ein glänzendes Beispiel, das zugleich geeignet erscheint, den Inhalt des allgemeinen Bandengesetzes in besonders anschaulicher Weise verständlich zu machen, indem hier eine einzige Linie durch Variation der Versuchsbedingungen veranlaßt wird, sich allmählich zum komplizierten System der ganzen Bandenfolge zu entfalten. Dieser Umstand wurde von Herrn Franck in seinem vorgestrigen Vortrag schon kurz erörtert; ich möchte seine Ausführungen durch einige weitergehende Betrachtungen zur Jodfluoreszenz ergänzen. Im Anschluß daran sollen einige Bemerkungen allgemeinerer Art über den Einfluß der Temperatur auf die Linienintensität Platz finden. Zur Erleichterung des Verständnisses möchte eine hier vorangestellte kurze Skizze des theoretischen Aufbaus der Bandenformel dienen.

§ 1. Die allgemeine Bandenformel. Bei den sichtbaren Banden findet gleichzeitiger Quantenübergang der Rotation des Moleküls $(m \rightarrow m')$, der Schwingung der Atome $(p \rightarrow p')$ und des Elektronensystems der Molekel $(n \rightarrow n')$ statt. Nach Bohrs Frequenzbedingung ist die Energie des Anfangs- und Endzustandes der emittierenden Molekel zu bilden.

Die Rotationsenergie W_m eines zweiatomigen Moleküls vom Trägheitsmoment J ist nach der Quantentheorie von der Form:

$$\frac{W_m}{h} = A \cdot m^2; \quad A = \frac{h}{8\pi^2 J}. \qquad (1)$$

Da die Trägheitsmomente der Moleküle um 10^{-39} liegen, so ist A von der Größenordnung 10^{11} und also in Wellenzahlen von der Größenordnung 1. Bezeichnet man ferner die Grundfrequenz der Atomschwingung des zweiatomigen Moleküls mit a, so wäre bei rein harmonischer Schwingung ihre Energie nach Planck $W_p = pha$; in dem hier vorauszusetzenden Fall anharmonischer Bindung treten Glieder mit höheren Potenzen der Quantenzahl p hinzu, die wir beim quadratischen abbrechen:

$$\frac{W_p}{h} = ap + bp^2. \qquad (2)$$

Entsprechend der Wellenlänge einiger μ der ultraroten Absorptionsbanden bzw. auch nach Ausweis des Verhaltens der spezifischen Wärme zweiatomiger Gase bei hohen Temperaturen ergibt sich a von der Größenordnung 10^{13}, also in Wellenzahlen zu etwa 1000.

Hierzu tritt nun der in seiner Struktur hier nicht näher interessierende Term der Elektronenenergie W_n/h.

Bei Bildung der Differenz von Anfangs- und Endenergie ist indessen zu beachten, daß bei dem Elektronenübergang in den angeregten Zustand die ganze Konfiguration des Moleküls und daher sowohl die Grundfrequenz a der Atomschwingung wie auch das Trägheitsmoment J und damit A geändert wird. Die genannten Größen mögen dabei übergehen in a', J', A' und man erhält als allgemeines Bandengesetz:

$$\nu = \frac{W_{n}' - W_n}{h} + (a'p' + b'p'^2) - (ap + bp^2) + A'm'^2 - Am^2. \qquad (3)$$

Dabei ist die gegenseitige Beeinflussung von Elektronen-, Schwingungs- und Rotationszustand, weil hier unwesentlich, außer acht gelassen.

In (3) ist die auf den Elektronensprung bezügliche Termdifferenz, in Wellenzahlen gemessen, von der bei Linienspektren zu beobachtenden Größenordnung 10000. Da $a \sim 1000$ und $A \sim 1$, so erkennt man, daß die beiden letzten Terme in (3), also der Einfluß der Molekülrotation, die enge Linienfolge der Einzelbande liefern, während die beiden mittleren Terme, d. h. die Kernschwingung, die weit ausgreifenden Folgen der Bandkanten bedingen. Alles, was in einem Bandenspektrum zum gleichen Elektronenübergang gehört, faßt man zu einer Bandengruppe zusammen. Beim Stickstoff unterscheidet man z. B. — ursprünglich nach ihren Erregungsbedingungen, in quantentheoretischer Fassung jedoch nach den verschiedenen Elektronenübergängen, unter Beibehaltung der alten Bezeichnungsweise — drei positive, eine negative und zwei sogen. Cyan-Bandengruppen[1]).

Bei Wegfall des Elektronenübergangs stellt

1) Nernst-Festschrift 1912, S. 90.

2) Berl. Ber. 1916, S. 548.

3) Heurlinger, Diss. Lund 1918; diese Zeitschr. **19**, 316, 1918; **20**, 188, 1919; Zeitschr. f. Phys. **1**, 82, 1920; Lenz, Verh. d. D. Phys. Ges. **21**, 632, 1919.

1) Vgl. z. B. Heurlinger, Zeitschr. f. Phys. **1**, 82, 1920. Die sogen. „Cyan"-Banden sind bekanntlich echte Stickstoffbanden.

(3) die ultraroten Banden (Rubens, E. v. Bahr) dar; es wird dann übrigens $a' = a$, $A' = A$.

Es sollen nunmehr die Woodschen Spektren auf Grund von (3) diskutiert werden.

§ 2. Die Fluoreszenzemission des Joddampfes. Bei dem außerordentlichen Linienreichtum des Absorptionsspektrums von Jod — es treffen durchschnittlich 20 Linien auf 1 Å — wäre es hoffnungslos, hier Zusammengehöriges zu erkennen, wenn es Wood[1]) nicht durch Anregung einer einzigen Linie dieses Absorptionsspektrums gelungen wäre, diese bei der Reemission zur Enthüllung des ihr innewohnenden Bandengesetzes zu veranlassen. Was geschieht bei der Anregung einer einzigen Linie? Es wird ein Molekül von dem zu ganz bestimmten Quantenzahlen m, p, n gehörigen Zustand auf m', p', n' gebracht. Da infolge der Wärmebewegung alle möglichen Rotations- und Schwingungszustände auftreten, so findet also unter den Molekülen des absorbierenden Dampfes eine doppelte Auslese statt, indem nur solche Moleküle angeregt werden, die eine ganz bestimmte Quantenzahl m der Rotation besitzen und von diesen wiederum nur solche mit der Quantenzahl p der Schwingung.

Welches ist nun die nach (3) bei der Reemission zu erwartende Bandenstruktur? Vor allem verarmt der Linienreichtum der Einzelbande, der ja dem Einfluß der Molekülrotation zuzuschreiben ist. Denn nach dem Auswahlprinzip von Rubinowicz-Bohr kann m' nur übergehen in $m' + 1$ bzw. $m' - 1$, wenn man in Analogie zu den sogenannten Cyanbanden den Fall konstant bleibender Quantenzahl m' ausschließt[2]). Da nach obigem die angeregten Moleküle alle den gleichen Rotationszustand m' besitzen, so werden hiernach von der ganzen Linienfolge der Einzelbande nur 2 Linien — die von Wood beobachteten Dubletts (Tafel V, Fig. 1 a, b[3])) bei der Reemission zugelassen. Indem Wood — abgesehen von einigen experimentell nicht ganz geklärten Fällen — jeweils Dubletts erhält, bekundet sich demnach in seinen Versuchen in sehr reizvoller Weise das Walten des Auswahlprinzips.

1) Am ausführlichsten dargestellt in Phil. Mag. **35**, 236, 1918.
2) Vgl. W. Lenz, l. c. S. 636.
3) Da die Woodsche Arbeit gegenwärtig schwer zugänglich sein dürfte, so gebe ich in Fig. 1 den für uns wichtigen Ausschnitt aus den dortigen Tafeln. In Fig. 1a ist das Dublett auf das Jodemissionsspektrum (aus Gasentladung) kopiert, und zwar handelt es sich hier um das dritte aus der Serie von 27 Dubletts. Fig. 1b—1e sind reine Fluoreszenzemissionen bei verschiedener Belichtungszeit bzw. bei Zusatz fremder Gase. Die Anregung erfolgt durch die *Hg*-Linie 5462.

Bei den Zusammenstößen der Jodmoleküle untereinander bzw. mit denen eines zugesetzten fremden Gases gilt keinerlei den Quantenübergang der Rotation beschränkendes Auswahlprinzip. Sofern also solche Zusammenstöße zwischen Absorption und Reemission wirksam sind, können sie den Wert der Rotationsquantenzahl m' der angeregten Moleküle in beliebiger Weise verändern. Nach obigem entstehen aus jedem dieser neuen Quantenzustände zwei neue Linien, und diese Linienpaare setzen sich endlich zur gesamten Linienfolge der Einzelbande zusammen. Wegen der geringen Dichte des von Wood untersuchten Joddampfes von gewöhnlicher Temperatur erfahren nur verhältnismäßig sehr wenige der angeregten Moleküle während der kurzen Verweilzeit vor der Reemission Zusammenstöße. Hieraus ist es erklärlich, daß in Woods Versuchen nur bei äußerst langer Belichtungszeit statt des ursprünglich allein erkenntlichen Dubletts die gesamte dichtliegende Linienfolge der Einzelbande sichtbar wird, in die das (jetzt stark überbelichtete) ursprüngliche Dublett gesetzmäßig eingelagert erscheint (Fig. 1 b und 1 c). Bei Zusatz von Edelgasen (*He* 4 mm, *X* 1,25 mm Druck) ist infolge der größeren Häufigkeit der wirksamen Zusammenstöße der Übergang vom Dublett zur vollständigen Einzelbande nach Ausweis der Woodschen Versuche viel stärker ausgeprägt (Fig. 1 d und 1 e).

Während bei der gewöhnlichen (etwa durch Gasentladung erzeugten) Emissionsbande alle Rotationszustände nach Maßgabe ihrer thermischen Häufigkeit zum Gesamtbilde der Einzelbande in nicht unterscheidbarer Weise beitragen, kann man also in den Woodschen Versuchen deren Entstehung aus Linienpaaren, die der gleichen Rotationszahl zugeordnet sind, in sehr anschaulicher Weise verfolgen.

Über die von Wood beobachteten Kantenfolgen hat Herr Franck schon näher berichtet; die folgenden hierauf bezüglichen Bemerkungen möchten daher lediglich der Vervollständigung des hier zu entwickelnden Gesamtbildes der Bandenstruktur dienen. Wegen des Vorliegens von anharmonischer Atomschwingung sind nach Bohrs Korrespondenzprinzip die Übergänge von p' nach jedem beliebigen p zulässig. Wood findet in einem besonders genau studierten Fall (Anregung durch die *Hg*-Linie 5462) 27 solcher Übergänge, d. h. 27 Dubletts in gesetzmäßiger Lage (Abstand in Wellenzahlen etwa 200 gegen Dublettweite 5), von denen allerdings einige intensitätsschwach sind bzw. fehlen[1]). Ebenso wie vorher

1) Das dritte dieser Doubletts ist auf Tafel V, Fig. 1 wiedergegeben.



m' wird auch die Schwingungsquantenzahl p' der angeregten Moleküle bei Zusatz fremder Gase durch Zusammenstöße geändert, und es vervollständigt sich das Kantensystem in ähnlicher Weise wie vorher das Liniensystem der Einzelbande. Die sogen. antistokesschen Linien (Reemission kurzwelliger als Anregung) erklären sich zwanglos aus der Überlegung, daß hier die Anregung aus einem Zustand der Atomschwingung $p > o$, nicht aus Atomruhe, stattgefunden hat und bei der Reemission der größere Sprung nach $p = o$ auftritt. Der Energiegewinn gegenüber dem absorbierten Quantum entstammt also der Wärmeschwingung der Atome im Molekül.

§ 3. Numerische Daten. Aus Woods Angaben lassen sich einige numerische Aussagen über das Jodmolekül machen.

Für die Dublettweite $\Delta\nu$ finden Wood und Kimura[1]) in dem oben erwähnten beststudierten Fall (Fig. 1) den Wert 5 in Wellenzahlen. Da diese Linien den Übergängen $m' \rightarrow m'+1$ bzw. $m' \rightarrow m'-1$ entsprechen, so ergibt sich nach (3) und (1) für ihren Abstand:

$$\Delta\nu = A\{(m'+1)^2-(m'-1)^2\}$$
$$= 4m'A = \frac{m'h}{2\pi^2 J}. \quad (4)$$

Bei Kenntnis von m', d. h. der Rotationsquantenzahl des angeregten Zustandes kann hieraus das Trägheitsmoment J entnommen werden. Die Bestimmung von m' kann aus der Lage des Dubletts innerhalb der vollständigen Linienfolge der Einzelbande (Fig. 1 e) in hier nicht näher zu erläuternder Weise vorgenommen werden; mangels hinreichend genauer Angaben bei Wood kann indessen nur festgestellt werden, daß m' zwischen 8 und 10 liegt. Aus (4) ergibt sich daher $J \sim 2\cdot 10^{-38}$, also etwa 14mal so groß als das aus den Cyanbanden entnommene Trägheitsmoment des Stickstoffmoleküls[2]); dem entspricht ein Abstand von etwa $1{,}4\cdot 10^{-8}$ cm der Jodkerne.

Für die Lage der Dubletts innerhalb der genannten Serie von 27 solcher Dubletts finden Wood und Kimura[3]) das Gesetz:

$$\nu = \nu - 213{,}8\,p + 6{,}5\,p^2,$$

so daß nach (3) $a = 213{,}8$, $b = -6{,}5$ (in Wellenzahlen). Bei der Reemission handelt es sich um Übergang in den unangeregten Zustand; fände nämlich Übergang in einen anderen angeregten Zustand des Elektronensystems statt, so könnte entgegen dem experimentellen Sachverhalt die absorbierte Linie nicht zur Folge der reemittierten gehören. Daher stellt obiger Wert von a die Grundfrequenz der Atomschwingung im nicht angeregten Jodmolekül in Wellenzahlen dar, in Schwingungszahlen kommt also $\nu_{\text{Schwing}} \sim 214\cdot 3\cdot 10^{10} \backsim 6{,}4\cdot 10^{12}$. Dieser Wert kann am Verlauf der spezifischen Wärme geprüft werden. Beim Joddampf ist bisher nur der Streckersche Mittelwert $C_v = 6{,}86$ im Bereich 220° — 377° C bekannt; aus vorstehendem ν-Wert folgt nach Einsteins Formel in hinreichender Übereinstimmung 6,90. (Im gleichen Bereich findet Strecker für Cl_2 6,2 und für Br_2 6,81.)

Gewöhnlich liegen die Verhältnisse für einen Vergleich spektroskopischer Daten mit thermischen bei Bandenspektren nicht so einfach, indem das Elektron nicht in den unangeregten Zustand, sondern in einen anderen angeregten zurückfällt. Dann kann aus dem Spektrum nicht a, sondern nur a' entnommen werden, eine Größe, die in vorläufig nicht nachprüfbarer Weise vom Erregungszustand des molekularen Elektronensystems abhängt. Thermisch (aus spez. W.) und optisch (ultrarote Eigenschwingung) ist jedoch nur a ermittelbar. Beispielsweise findet Bjerrum bei Stickstoff aus der spezifischen Wärme bei sehr hohen Temperaturen $\nu_{\text{Schwing}} = 8{,}1\cdot 10^{13}$, in Wellenzahlen also $a = 2700$. Nach Heurlinger[1]) liefern die Kantenfolgen der verschiedenen Bandengruppen des Stickstoffs die a'-Werte (in runden Zahlen) 2400, 2100, 1700, 1500; wegen vollkommener Durchlässigkeit des N_2 im betreffenden Wellenlängenbereich kommen die a-Werte, d. h. der unangeregte Zustand, nicht vor. Es ist bezeichnend, daß hier stets $a' < a$, daß also im angeregten Zustand die Bindung der Atome gelockert erscheint, jedoch nur so weit, daß die a'-Werte noch von der gleichen Größenordnung wie a bleiben, sich also zwar hinsichtlich ihres genauen Wertes jeder Nachprüfung entziehen, nicht aber hinsichtlich ihrer Größenordnung. Dieser Umstand kann vielleicht ein Hilfsmittel bieten, um bei sonstiger genauer Kenntnis der Spektren deren Zugehörigkeit zu bestimmten Molekülen zu beurteilen. Man denke etwa an CO und CO_2, von denen nach Ausweis der spezifischen Wärmen und der ultraroten Eigenschwingung CO sehr straffe, CO_2 sehr lose Bindung besitzt ($a \sim 2400$ bzw. $a \sim 650$), so daß bei CO_2 viel enger liegende Bandenkanten auftreten müssen als bei CO.

§ 4. Temperatureinfluß. Als vorzügliches Mittel zur Erforschung der Bandenstruktur muß die theoretisch zu fordernde Temperaturabhängigkeit der Intensitätsverteilung angesehen werden, über die experimentell allerdings bisher nur wenig brauchbares Ma-

1) Phil. Mag. 35, 252, 1918. Neben zahlreichen anderen wertvollen Winken verdanke ich diesen wichtigen Literaturhinweis Herrn Dr. P. Pringsheim.

2) W. Lenz, l. c., S. 636. 3) l. c.

1) Zeitschr. f. Phys. 1, 82, 1920.

terial vorliegt. Hierbei verdienen Beobachtungen in Absorption unbedingt den Vorzug vor denen in Emission, da bei letzteren die unkontrollierbaren Vorgänge der Anregung durch elektrischen Strom usw. einen unerwünschten starken Einfluß auf die Intensitätsverteilung haben können. Ebenso wie bei Absorption liegen naturgemäß auch bei der Woodschen Fluoreszenzemission ganz klare Bedingungen vor.

Der gesamte, aus einer Absorptionslinie ohne Dazwischenkunft der Zusammenstöße entspringende Reemissionsvorgang stellt einen Elementarprozeß dar und ist als solcher naturgemäß nicht temperaturabhängig. Nur die Zahl der absorbierenden, also in einem bestimmten Anfangszustand (p, m) angetroffenen (und damit allerdings auch die Zahl der angeregten) Moleküle hängt von der Temperatur ab. Das System der mehrfach genannten 27 aus der Anregungslinie 5462 entstandenen Dubletts sollte also bei Steigerung der Temperatur des absorbierenden Dampfes keine Intensitätsänderungen der einzelnen Linienpaare relativ zueinander zeigen, sondern nur eine gleichmäßige Erhöhung der Intensität aller Linien (wenigstens sofern die Schichtdicke hinreichend klein ist). Analoges gilt natürlich für die aus anderen Anregungslinien, z. B. $\lambda = 5771$ entstandenen Systeme von Jodfluoreszenzbanden. Wohl aber ist eine Temperaturabhängigkeit der Gesamtintensität dieser verschiedenen Systeme gegeneinander zu erwarten, da die relative Häufigkeit der zugehörigen verschiedenen Anfangszustände im Joddampf wegen ihrer verschiedenen Rotations- und Schwingungsenergie temperaturabhängig ist. Diese Frage ist indes bisher noch nicht experimentell nachgeprüft.

In diesem Zusammenhang möge hier noch eine Bemerkung über die Intensitätsverteilung einer Einzelbande Platz finden. Die einzelnen Linien entsprechen nach dem Früheren — bei den sichtbaren ebenso wie bei den ultraroten Bandenspektren — den verschiedenen Quantenzahlen m der Rotation. Nun ist die Verteilung der Rotationszustände der Moleküle temperaturabhängig nach Maßgabe des quantenmäßig modifizierten Boltzmannschen Satzes, kleine und große m sind unwahrscheinlich. Wie Heurlinger[1]) gezeigt hat, beobachtet man dementsprechend bei den sogen. Cyanbanden ein Anwachsen und Abfallen der Intensität bei Durchmusterung der Linien in der Reihenfolge ihrer natürlichen (durch das zugehörige m gegebenen) Numerierung. Das Gesetz der Statistik stellt sich hier als Intensitätsverteilung einer ganzen Linienfolge wundervoll ausgebreitet dar, während es beim Linienspektrum nur in der dem Dopplereffekt entstammenden Intensitätsverteilung einer einzigen Linie enthalten ist. Als interessantes Beispiel hierzu möchte ich auf die Beobachtungen von Angerer[1]) hinweisen, der die Stickstoffbanden einer Röhre bei gewöhnlicher Temperatur verglich mit denjenigen bei Eintauchen der Röhre in flüssige Luft. Die Photometrierung (Tafel V, Fig. 2; oben hohe, unten tiefe Temperatur) zeigt sehr eindrucksvoll den bei tiefen Temperaturen statistisch zu fordernden viel schnelleren Intensitätsabfall nach höheren Liniennummern zu als er im Falle gewöhnlicher Temperatur beobachtet wird[2]). Um zu mehr quantitativen Angaben zu gelangen, müssen die Versuche allerdings wiederholt werden. Von eindringenderem Studium dieser Frage ist die Möglichkeit astronomischer Temperaturbestimmung zu erhoffen.

1) Allerdings nur in einem durch die unkontrollierbaren Vorgänge der Anregung in der Geißlerröhre getrübten Falle (Diss. Lund. 1918).

1) Ann. d. Phys. **32**, 549, 1910.
2) Die mit dem Kochschen registrierenden Mikrophotometer von den Angererschen Originalen gewonnenen Aufnahmen sind mir in liebenswürdiger Weise durch Herrn Prof. Wagner aus dem Münchener Physikalischen Institut zur Verfügung gestellt. Die Fig. 2 gibt einen Ausschnitt aus der zweiten positiven Gruppe des Stickstoffs wieder, deren Triplettlinien man deutlich erkennt. Der Vergleich zwischen den Aufnahmen bei hoher und tiefer Temperatur erscheint allerdings durch hier nicht zu erörternde Nebenumstände getrübt.

Chr. Füchtbauer u. G. Joos (Tübingen), Die Verbreiterung der Quecksilberlinie 2537 durch Gase von verschiedener Dichte.

Die Verbreiterung von Spektrallinien durch die Gasdichte wurde zuerst von H. A. Lorentz folgendermaßen erklärt: Die Wellenzüge der praktisch ungedämpften Schwingung werden von Zeit zu Zeit durch Zusammenstöße des emittierenden oder absorbierenden Moleküls mit den umgebenden Gasmolekülen abgebrochen. Ein solcher an sich monochromatischer, aber endlicher Wellenzug ist äquivalent einem unendlich langen Wellenzug von endlicher Spektralbreite. Lorentz behandelte nur Fälle, in denen das leuchtende oder absorbierende Gas selbst die Verbreiterung bewirkt. Füchtbauer und Schell[1]) erreichten praktische und theoretische Vorteile, indem sie die Absorptionslinien durch ein fremdes nicht absorbierendes Gas verbreiterten. Füchtbauer und Hofmann[2]) zeigten durch Messungen an durch Stickstoff verbreiterten Alkalimetallinien,

1) Diese Zeitschr. **14**, 1164, 1913; Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. **15**, 974, 1913.
2) Ann. d. Phys. **43**, 96, 1914.



daß sich die Zahl der Störungen aus der Verbreiterung erheblich größer berechnet als die Zahl der Zusammenstöße des Metallatoms mit Stickstoffmolekülen nach der kinetischen Gastheorie ist. Sie folgerten daraus schon damals, daß die Störung durch das elektrische Feld der Stickstoffmoleküle[1]) herbeigeführt sein müsse. Die Art der elektrischen Störung war damals noch unbekannt. Als dann Stark die elektrische Aufspaltung der Spektrallinien entdeckt hatte, vermutete er gleich in ihr die Ursache der Verbreiterung durch Gase. Eine genaue Theorie wurde im Anschluß an Debye durchgeführt von Holtsmark[2]), der das mittlere elektrische Feld der Moleküle berechnete, und die Verbreiterung als Starkeffekt dieser Molekularfelder auswertete. Nach dieser Theorie soll die Halbwertsbreite der $\frac{2}{3}$ten, der ersten oder der $\frac{4}{3}$ten Potenz der Dichte des verbreiternden Gases proportional sein, je nachdem dasselbe aus Ionen, Dipolen oder Quadrupolen (wie N_2 usw.) besteht. Doch gilt diese Theorie natürlich nur für Linien, welche einen Starkeffekt zeigen. Nun schien es uns von Interesse, auch die Verbreiterung einer Linie ohne Starkeffekt[3]) zu untersuchen. Hier dürfte wohl die von Füchtbauer l. c. vorgeschlagene Erklärung der Verbreiterung vorläufig am angemessensten sein, daß nämlich das Feld des vorbeifliegenden Moleküls die Schwingungen stört, d. h. mit anderen Worten, aus der Verbreiterung wird auf die Existenz einer Veränderung der Spektrallinien durch räumlich und zeitlich rasch wechselnde Felder geschlossen. Diese Erscheinung ist sonst noch nicht bekannt und ihre Theorie noch nicht entwickelt.

Wir wählten die nach Paschen und Gerlach auch bei empfindlichster Anordnung keinen Starkeffekt zeigende Linie 2537, die der unerregte Quecksilberdampf absorbiert, und untersuchten ihre Verbreiterung durch CO_2, N_2, H_2 von 10 bis 25 Atm. Druck.

Ferner wurde aus der Absorptionsmessung dieser Linie der Wert des „Wahrscheinlichkeitsfaktors" P berechnet im Sinn der Definition und Ableitung von Füchtbauer[4]). Dort wird der Absorptionsvorgang als Sprung des Elektrons von einer Bohrschen Bahn auf eine andre aufgefaßt und die Zahl der Sprünge, die der Zahl der vorhandenen Träger und der auffallenden Lichtintensität proportional ist, aus Absorptionsmessungen für verschiedene Linien berechnet. Der so definierte „Wahrscheinlichkeitsfaktor" P gibt an, wie oft in der Sekunde ein Träger (hier ein Atom) bei Bestrahlung mit der Intensität 1 des Lichtes der passenden Farbe einen solchen Elementarprozeß erleidet. Diese Auffassung ist stets anwendbar, ob nun bei der Rückkehr des Elektrons in eine stabilere Bahn wieder Licht ausgestrahlt wird, oder ob die Lichtenergie ganz oder teilweise in Wärme umgewandelt wird; was bei größerer Dichte wohl meist zutrifft.

Versuchsmethode.

Die Verbreiterung durch fremde Gase war wie früher so groß gewählt, daß die Dopplerbreite dagegen zu vernachlässigen war. Letztere ist bei dem schweren Hg-Atom besonders klein und beträgt bei unsern Temperaturen etwa 0,003 Å.-E., ist also völlig zu vernachlässigen neben den durch Druck erzeugten Breiten von 0,3 bis 1 Å.-E.

Da der für die Arbeit bestimmte Apparat nicht eintraf, wurde mit einem Hilgerschen Quarzspektrographen gearbeitet. Für seine Überlassung aus dem Physikalischen Institut der Technischen Hochschule Stuttgart sind wir Herrn Dr. Glocker und Herrn Professor Dr. Regener zu größtem Dank verpflichtet. Die Dispersion bei 2537 betrug nur 1 Å.-E. = 0,1 mm. Deshalb hatte es keinen Zweck, Absorptionskurven aufzunehmen. Vielmehr werden die am besten meßbaren Absorptionskoeffizienten an der Stelle des Maximums der Absorption verglichen. Sie sind nach allen bisherigen Theorien umgekehrt proportional den Halbwertsbreiten, wenn die Breite durch fremdes Gas geändert wird bei konstant gehaltener Zahl der Elementarprozesse bzw. der absorbierenden Träger. Ob diese umgekehrte Proportionalität wirklich genau erfüllt ist, wird noch durch genaue Aufnahme von Absorptionskurven festzustellen sein, sehr angenähert wird sie wohl gelten und unsere bisher vorliegenden Versuche sind damit verträglich. Jedenfalls ist in Fällen, wo man die Zahl der absorbierenden Atome (hier den Dampfdruck des Hg) kennt, der Absorptionskoeffizient an der Stelle des Maximums (im folgenden mit $n\varkappa$ bezeichnet) ein ebenso geeignetes Maß der Verbreiterung wie die Halbwertsbreite ν'. Wir prüfen also die Theorie durch Bestimmung des Verhältnisses $\frac{(n\varkappa)_1}{(n\varkappa)_2}$ (welches vermutlich $= \frac{\nu_2'}{\nu_1'}$ ist). Dabei bezeichnen die Indizes 1 und 2 die Werte der betreffenden Größen bei gleichem Dampfdruck des Hg, aber verschiedenen Drucken P_1 und P_2 des fremden Gases. p und p^* be-

1) Füchtbauer u. Hofmann, l. c.

2) Holtsmark, Ann. d. Phys. **58**, 577, 1919.

3) Die von Füchtbauer mit dem Stufengitter untersuchten Bandenlinien (Feststellung der Verbreiterung von Jod und Brom durch Stickstoff von Atmosphärendruck) gehören wohl auch hierher.

4) Chr. Füchtbauer, diese Zeitschr. **21**, 322, 1920.

zeichnen dagegen die verschiedenen Dampfdrucke des Quecksilbers bei den absoluten Temperaturen T und T^*. Da auf alle Fälle $n\varkappa$ der Zahl der absorbierenden Atome, also dem Dampfdruck, proportional sein muß, gilt für die zum Dampfdruck p bzw. p^* bei gleichem Gasdruck gehörenden $n\varkappa$ bzw. $(n\varkappa)^*$

$$\frac{n\varkappa}{(n\varkappa)^*} = \frac{p}{p^*}. \qquad (1)$$

Ferner ist bei gleichem Hg-Dampfdruck, aber verschiedenen Gasdrucken P_1 und P_2 der durch die Absorptionsröhre l durchgelassene Bruchteil des einfallenden Lichtes

$$\text{bei } P_1: \quad q_1 = e^{-\frac{4\pi\nu l}{c}(n\varkappa)_1},$$

$$\text{bei } P_2: \quad q_2 = e^{-\frac{4\pi\nu l}{c}(n\varkappa)_2}.$$

Da die durchstrahlte Schichtdicke l immer die nämliche war, ist

$$\frac{(n\varkappa)_1}{(n\varkappa)_2} = \frac{\log q_1}{\log q_2}. \qquad (2)$$

Dabei ist beidemal der Dampfdruck des Hg der nämliche. Ist nun bei P_1 der Dampfdruck p^*, bei P_2 dagegen p, so wird

$$\frac{(n\varkappa)_1}{(n\varkappa)_1^*} = \frac{p}{p^*}. \qquad (3)$$

Ist q_1^* der beim Dampfdruck p^* und beim Gasdruck P_1 durchgelassene Bruchteil des Lichtes, so ist

$$\frac{(n\varkappa)_1^*}{(n\varkappa)_2} = \frac{\log q_1^*}{\log q_2} \qquad (4)$$

und wegen (3)

$$\frac{(n\varkappa)_1}{(n\varkappa)_2} = \frac{p}{p^*}\,\frac{\log q_1^*}{\log q_2}. \qquad (5)$$

So gewinnen wir also das gesuchte Verhältnis $\frac{(n\varkappa)_1}{(n\varkappa)_2}$ der Maximalabsorptionskoeffizienten bei gleichem Dampfdruck aber verschiedenem Gasdruck P_1 und P_2. Richtet man jetzt den Dampfdruck p^* durch Wahl der Temperatur T^* so ein, daß $q_1^* = q_2$, also gleiche Maximalabsorption bei den 2 verschiedenen Gasdrucken, so wird

$$\frac{(n\varkappa)_1}{(n\varkappa)_2} = \frac{p}{p^*}. \qquad (6)$$

Das dem durchgelassenen Bruchteil q_2 gleiche q_1^* läßt sich nun durch Interpolation zwischen Aufnahmen bei verschiedener Temperatur finden. Dabei wird (in einem Bereich von 12⁰) die unbedingt zulässige Voraussetzung benutzt, daß die Absorption eines Atoms von der Temperatur unabhängig ist, daß also die Temperatur nicht anders als durch Änderung des Dampfdruckes (der Atomzahl) wirkt. — Gleiche Maximalabsorption der verschiedenen Linien wäre am einfachsten dann festzustellen, wenn der kontinuierliche Grund, d. h. das Spektrum der Lichtquelle in der Nähe der Absorptionslinie, bei den zu vergleichenden Aufnahmen gleich stark wäre. Da dies nur annähernd zu erreichen ist, verfuhren wir folgendermaßen: Man belichtet stets so, daß man sich im Gebiet der „normalen Schwärzung" befindet. In diesem Fall ist die in Millimeter-Keillänge des Hartmannschen Photometers gemessene Schwärzung proportional dem log der Intensität des bei der Aufnahme einfallenden Lichtes. Dann muß längs der ganzen Linie auch in etwas verschieden belichteten Zonen die Differenz der Schwärzung der Linie (an der Stelle der größten Absorption) und des Grundes (in gerade genügender Entfernung von der Linie) die nämliche sein, weil das Verhältnis der Intensitäten dasselbe ist (nämlich gleich dem durchgelassenen Bruchteil q). Der Beweis, daß die Aufnahmen in diesem Schwärzungsbereich lagen, wurde auf zwei Wegen erbracht: 1. wurden auf eine Platte der nämlichen Sorte (und Entwicklungmethode) Intensitätsmarken gedruckt, wobei die Intensität durch Blenden meßbar verändert wurde. Die im benutzten Bereich liegenden Schwärzungen folgten dem Logarithmusgesetz; 2. ergaben sich die Schwankungen der Differenz Linie—Grund für Stellen (längs der Linie) mit verschiedenem Grund nicht größer als für Stellen mit gleichem Grund. Deshalb konnten zur Ausschaltung kleiner Plattenfehler Mittelwerte der gesuchten Schwärzungsdifferenz gebildet werden aus vielen Messungen an verschiedenen Stellen längs der Linie. Da jedoch nur Platten verwendet wurden, bei denen der kontinuierliche Grund der verschiedenen Aufnahmen nur sehr wenig verschieden war, ist das Logarithmusgesetz nur in einem sehr kleinen Bereich verwendet, was sicher unbedeutend ist. Ferner ist stets sehr angenähert $q_1^* = q_2$ bei einem Paar von Aufnahmen erfüllt, so daß Formel (5) nur für die sehr kleine Abweichung vom Fall der einfachen Formel (6) herangezogen wird.

Versuchsanordnung.

Die Lichtquelle wurde durch eine in der Entfernung der doppelten Brennweite aufgestellte Linse von 11 cm Brennweite in der Mitte des Absorptionsrohrs abgebildet und dann durch eine Quarzlinse von 9 cm Brennweite auf den Spalt des Spektrographen. Dieser hatte ein Cornuprisma von 65 mm Basislänge und 41 mm Höhe, während die Quarzobjektive 56 cm Brennweite für λ 3537 haben.

Als Lichtquelle diente der Kadmiumfunke in Luft. Ein Wechselstrom wurde durch einen Transformator auf hohe Spannung gebracht.

wodurch eine Batterie von 3 Leidener Flaschen aufgeladen wurde, die sich (ohne Selbstinduktionsspule) durch die Funkenstrecke von etwa 2 mm Länge entlud. Dieser Funke hat an der gewünschten Stelle ein vielleicht durch Verbreiterung von Bandenlinien erzeugtes ziemlich helles kontinuierliches Spektrum ohne störende Linien.

Die Absorptionsröhre war ein Eisenrohr von 82 mm Länge und 8 mm lichter Weite, verschlossen mit durch Überfangmuttern aufgepreßten Quarzplatten. Auf der Innenseite der Quarzplatte wurde die Dichtung durch einen Gummiring, außen durch einen Lederring bewirkt. An die Röhre war die Druckleitung angelötet, die zur Gasbombe, zum Manometer und zum Auslaßventil führte. Zur Herstellung eines bestimmten Dampfdruckes des *Hg* wurde die Absorptionsröhre in einen Blechtrog mit Wasser gebracht, das auf konstanter Temperatur gehalten wurde. Bei Gegenwart eines großen *Hg*-Tropfens dauerte die Sättigung zu lang. Deshalb wurde in der Röhre auf folgende Weise ein Beschlag von kleinen Quecksilbertröpfchen erzeugt. Ein kleines Glasröhrchen, mit *Hg* gefüllt, wurde mit einer Heizspirale umwickelt. Diese Vorrichtung wurde in die senkrecht gehaltene offene Röhre eingeführt, welche sich beim Durchleiten eines Stromes durch die Spirale mit einem Beschlag von kleinsten Tröpfchen bedeckte. Bei der so behandelten Röhre zeigte sich dann kein Unterschied der Absorption mehr, ob die Sättigung nur 5 Minuten oder $4^1/_2$ Stunden gedauert hatte.

Korrektionen.

Da das Verfahren auf der genauen Kenntnis des Dampfdruckes beruht, ist zu untersuchen, welche Korrektionen am gewöhnlichen Dampfdruck anzubringen sind, 1. wegen der Tröpfchenform des *Hg*, 2. wegen des Druckes des fremden Gases.

1. Ist δ die Dichte des Dampfes, D die der Flüssigkeit, α die Kapillarkonstante, R der Radius des Tröpfchens, p_1 der Dampfdruck über demselben, p der Dampfdruck über einer ebenen Fläche, so lautet die Thomsonsche Formel

$$p_1 - p = \frac{2\delta\alpha}{D-\delta} \cdot \frac{1}{R}$$

und wegen $\delta << D$

$$p_1 - p = \frac{2\delta\alpha}{DR}.$$

Für *Hg* bei 20° ist

$$p = 0{,}0011 \text{ mm} = 1{,}5 \text{ Dyn/qcm}.$$

$$D = 13{,}6;\ \alpha = 50 \text{ mg/mm} = \frac{500 \cdot 981}{1000} \text{ Dyn/cm}.$$

Für einen Tröpfchenradius von $^1/_{1000}$ mm würde

$$p_1 - p = 0{,}1 \text{ Dyn/qcm},$$

$$\frac{p_1 - p}{p} = \frac{0{,}01}{1{,}5} < \frac{1}{100}.$$

Da die Tröpfchen jedenfalls größer sind, bleibt diese Korrektion weit unter der Fehlergrenze.

2. Ist P der neben p große fremde Gasdruck, v_2 das Volumen eines Mols der Flüssigkeit, v_1 das des Gases, so ist die Änderung dp des Dampfdruckes p gegeben durch

$$dp = \frac{v_2}{v_1} P.$$

Für das Gas ist $pv_1 = RT$. Also

$$\frac{dp}{p} = \frac{v_2}{RT} P.$$

Nun ist für *Hg*: $v_2 = \frac{200}{13{,}6}$; $R = 8{,}31 \cdot 10^7$; $T = 300^0$; $P = 25$ bzw. 10 Atm. 1 Atm. nahe 10^6 Dyn/qcm. Also

$$\frac{dp}{p} = 0{,}015$$

für 25 Atm. Demnach beträgt die Korrektion für 25 Atm. 1,5 Proz. und für 10 Atm. 0,6 Proz. Um soviel sind die Dampfdrucke des gedrückten *Hg* größer als die des nur unter seinem Dampfdruck stehenden *Hg*. Bringt man diese Korrektur an, so ergeben sich die Logarithmen der Dampfdrucke des *Hg* nach Knudsen[1]) bei

	$P = 0$	$P = 10$ Atm.	$P = 25$ Atm.
10°	6,6856—10	6,6882	6,6925
20°	7,0759	7,0785	7,0824
30°	7,4401	7,4421	7,4466
40°	7,7805	7,7831	7,7765

3. Auflösung des Spektrographen. Die Breite der schärfsten Emissionslinien (Luftbanden im Aluminiumfunken) war etwa 0,02 mm. Bei idealer Schärfe wäre das bei der vorhandenen Schiefstellung der Platte etwa die Breite des Bildes eines Spaltes von 0,01 mm. Daher wurde der Spalt 0,005 bis 0,01 mm weit gemacht.

Den Einfluß der endlichen Breite (0,02 mm) einer ideal scharfen Linie auf unser Resultat können wir diskutieren nach der von Voigt[2]) für den Einfluß der Spaltbreite auf die Intensitätsverteilung abgeleiteten Formel. Ist I die gesuchte Intensität bei unendlich schmalem Spaltbild, W die an der Stelle x der Platte tatsächlich wirkende Intensität, 2δ die Breite des Spaltbildes am Plattenort, so ist

$$I = W - \frac{1}{6}\delta^2 \frac{d^2W}{dx^2}.$$

1) Knudsen, Ann. d. Phys. **20**, 184, 1909.
2) Voigt, diese Zeitschr. **14**, 375, 1913.

An der Stelle des Maximums ist

$$\frac{d^2W}{dx^2} = \frac{1}{\varrho},$$

wo ϱ der Krümmungsradius der Kurve $W = f(x)$ ist. Da keine Intensitätskurve aufgenommen wurde, kann man die Korrektur nicht genau berechnen. Um einen Anhalt über die Größe zu gewinnen, wurde auf Grund des Drudeschen Verlaufs der Absorptionskurve eine Intensitätskurve gezeichnet, die ungefähr den Linien der Aufnahmen bei CO_2 von 25 Atm. entspricht. (Absorption auf 0,3 der einfallenden Intensität, ganze Breite unter dem Komparator gemessen 0,12 mm. Dann kann man ϱ abmessen und findet die Korrektur zu 5,5 Proz. Bei 10 Atm. ist die Breite noch etwas kleiner, der Fehler also etwas größer. Aber der prozentische Fehler des Quotienten ist kleiner. Wir rechnen infolge dieses Umstandes bei CO_2 mit einem Fehler von etwa 10 Proz.

Ausführung der Versuche.

Auf die nämliche Platte wurden eine Aufnahme bei 25 Atm. Gasdruck und passendem Dampfdruck gemacht, sowie 3 Aufnahmen bei 10 Atm. und verschiedenen Dampfdrucken. Diese waren so gewählt, daß die Absorption der Aufnahme bei 25 Atm. zwischen jener der Aufnahmen bei 10 Atm. lag. So konnte die Aufnahme mit gleicher Absorption ausgesucht bzw. durch Interpolation gefunden werden. Die Ergebnisse gibt die folgenden Tabelle. Setzen wir das Verhältnis der Maximalabsorptionen

$$\frac{(n\varkappa)_1}{(n\varkappa)_2} = \left(\frac{P_2}{P_1}\right)^x,$$

wo P den Gasdruck bedeutet, so ist der Exponent x zu bestimmen.

Wie man sieht, stimmen die Exponenten gut überein. Bei Kohlensäure ist der Exponent innerhalb der Fehlergrenzen 1, d. h. $n\varkappa$ ist bei festgehaltenem Dampfdruck der Dichte des verbreiternden Gases umgekehrt proportional[1]). Die Linie hat hier eine zur Messung genügende Breite; deshalb dürfte das Ergebnis, daß hier die Verbreiterung der Dichte proportional ist, zuverlässig sein.

Dagegen sind die Linien bei Verbreiterung durch Stickstoff und Wasserssoff so schmal, daß trotz der guten Übereinstimmung der Werte

Aufnahme Nr.	Gas	Druck kg/qcm	Temp. Celsiusgrad	log des Dampfdrucks des Hg	Schwärzungs-differenz	Verhältnis der Dampfdrucke	Exponent
14	CO_2	25	32,0	7,512—10	3,9	2,71	1,1
		10	25,0	7,260	4,7		
		10	20,0	7,078	3,9		
		10	15,0	6,880	2,5		
16	CO_2	25	31,5	7,496	3,1	2,55	1,0
		10	25,0	7,260	4,4		
		10	20,2	7,082	3,05		
19	N_2	25	30,0	7,446	5,8	1,59	0,50
		10	26,0	7,297	6,2		
		10	22,3	7,160	5,1		
		10	16,8	6,950	2,9		
20	N_2	25	30,5	7,460	4,95	1,53	0,47
		10	25	7,260	4,8		
		10	21	7,111	3,5		
		10	15,8	6,910	2,6		
25	H_2	25	35,1	7,619	6,7	1,43	0,39
		10	31,2	7,488	6,9		
		10	25,0	7,259	4,9		
		10	18,7	7,023	3,5		
26	H_2	25	35,2	7,622	6,7	1,44	0,40
		10	30,5	7,463	6,7		
		10	25,0	7,259	4,8		
		10	18,2	7,005	3,4		

unter sich der von der ungenügenden Auflösung des Apparates herrührende konstante Fehler nicht unbedeutend sein wird. Dieser Einfluß macht sich natürlich bei der weniger verbreiterten Linie mit kleinem Druck mehr bemerkbar und läßt deshalb den Exponenten zu klein erscheinen, doch glauben wir, daß durch diese Versuche ein Exponent > 1 ausgeschlossen ist. Die (hier jedoch nicht anwendbare) Holtsmarksche Theorie fordert einen solchen für Quadrupole. Erwähnt sei hier, daß sowohl die alten Angaben von Füchtbauer und Hofmann wie auch eine durch Herrn Hofmann vorgenommene neue Berechnung bisher nicht veröffentlichter Aufnahmen der eben erwähnten Arbeit zeigen, daß der Exponent bei der blauen Cäsiumlinie ≤ 1 ist. Auch hier müssen wir also noch eine andere Ursache der Verbreiterung als den gewöhnlichen Starkeffekt annehmen, wenn wir die Theorie von Holtsmark als richtig ansehen.

Als Ursache der Verbreiterung wird man, insbesondere in den Fällen, wo wie bei 2537 gar kein Starkeffekt beobachtet ist, die eingangs vorgeschlagene Erklärung vielleicht annehmbar finden, daß das Feld der vorbeifliegenden Moleküle die Störung bedingt, d. h. also eine bisher nicht bekannte Wirkung sehr schnell variierender Feldstärke. Auch sonst dürfte diese Wirkung sich oft über die vom Starkeffekt herrührende lagern und zu weniger einfachem Verhalten führen.

1) Bei Kohlensäure sollte, da sie Dipole hat, auch nach Holtsmarks Theorie der Exponent 1 sein, doch ist eben diese auf dem Starkeffekt fußende Theorie hier nicht anwendbar, da unsre Linie keinen meßbaren Starkeffekt hat.

Angenäherte Berechnung des Wahrscheinlichkeitsfaktors.

Wir können die Halbwertsbreite unsrer *Hg*-Linie zwar nicht berechnen, da wir keine Absorptionskurven aufgenommen haben, aber ziemlich genau schätzen aus der unter dem Komparator gemessenen Breite von normal absorbierten Linien. Wir erhalten so für eine Aufnahme mit Kohlensäure von 25 Atm. für unsere 82 mm lange Röhre: $n\varkappa = 1{,}75 \cdot 10^{-7}$; Halbwertsbreite $\nu' = 3 \cdot 10^{12}$, also kleiner als bei Cäsium mit Stickstoff von 25 Atm., wo $\nu' = 8{,}4 \cdot 10^{12}$ gefunden war. Aus dem Quecksilberdampfdruck berechnet sich die Atomzahl $N = 1{,}06 \cdot 10^{14}$, und somit der Wahrscheinlichkeitsfaktor $P = 8 \cdot 10^7$, also so groß wie für die blaue Cäsiumlinie, und somit bedeutend kleiner als für die ersten Linien der Alkalihauptserien, für welche nach der erwähnten Arbeit[1]) P die Größenanordnung 10^9 hat.

Die Arbeit ist im Physikalischen Institut der Universität Tübingen ausgeführt. Für Überlassung der Mittel des Instituts sind wir Herrn Professor Paschen zu großem Dank verpflichtet.

Diskussion.

Debye: Eine Anwendung der Holtsmarkschen Rechnung auf diesen Fall scheint mir nicht gut möglich, da die Linie 2537 nach Paschen keinen Stark-Effekt zeigt. Man muß hier wohl nach weiteren Gründen für die Verbreiterung suchen.

W. Wien: Ich meine, daß dann wieder die alte Lorentzsche Theorie eintritt. Die Möglichkeit, die Lorentzsche Theorie einzuführen, bleibt doch bestehen.

Debye: Dagegen möchte ich mich doch aussprechen.

W. Wien: Man weiß doch zu wenig, wodurch die Störung eintritt.

Debye: Die Lorentzsche Theorie verlangt, daß eine Beschleunigung durch Stoß möglich ist. Das führt zu unmöglichen Werten der spezifischen Wärme.

W. Wien: Es kommt nur darauf an, daß die Lichtemission durch den Stoß unterbrochen wird. Diese Möglichkeit wird man wohl kaum bestreiten können.

Füchtbauer: Ich habe an eine Störung gedacht durch das elektromagnetische Feld der vorbeifliegenden Moleküle.

1) Chr. Füchtbauer, diese Zeitschr. 21, 322, 1920.

Bohumil Jirotka (Berlin), Eine besondere Strahlenart und ihre Messung.

Der Vortragende beschreibt einen Apparat, mit dem es seiner Ansicht nach und auf Grund von Versuchen möglich ist, eine auf Rutengänger wirkende Strahlung objektiv nachzuweisen.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Elektrische Kontakte. II.

Kontaktelektrizität, Gleichrichterwirkung.

Von Hermann Rohmann.

In dieser Zeitschrift 21, 417, 1920 habe ich vor einiger Zeit ein Mikrometer für millionstel Millimeter beschrieben und habe über eine damit ausgeführte Untersuchung über das Entstehen des Stromes zwischen Metallelektroden berichtet. Inzwischen habe ich die Kontakterscheinungen weiter verfolgt, nachdem ich mir ein für den Zweck genügend empfindliches Elektrometer hergestellt hatte.

Dabei bin ich ausgegangen von der Frage nach der Natur der oberflächlichen Schicht, welche die Mikrophon- usw.-Wirkung hervorbringt. Von ihr hatte ich aus einigen Gründen geglaubt annehmen zu können, daß sie identisch sei mit der Haut kondensierten Wasserdampfes, die vielfach auf den Oberflächen fester Körper konstatiert ist und deren Dicke in der gleichen Größenordnung wie die gefundene „Kontaktdistanz“ angegeben wird. Danach hätte man zwischen zwei verschiedenen einander entsprechend genäherten Metallen eine E.M.K. zu erwarten von der Größenordnung derjenigen, die bei einem galvanischen Element auftritt, das aus denselben Metallen und Wasser gebildet ist. Mit einem Galvanometer von 10^{-8} Amp./Sktl. habe ich aber bei verschiedenartigen Kontakten vergeblich versucht den Strom nachzuweisen, der einer solchen E.M.K. entsprechen würde. Er war sicher nicht vorhanden, wenn die Metallelektroden einander so stark

genähert waren, daß eine fremde E.M.K. von der betreffenden Größenordnung einen gut meßbaren Strom lieferte. Das schien mir zunächst nicht unbedingt gegen die obige Annahme zu sprechen, da in den sehr dünnen, molekularen Dimensionen sich nähernden Schichten die Art der elektrolytischen Leitung verändert sein könnte, etwa elektrische Ladungen ohne Massentransport überspringen könnten. Außerdem ist der Einfluß der Polarisation nicht ohne weiteres zu übersehen. Wenn die Elektroden weit voneinander entfernt wurden, so war der Widerstand des Kontaktes zu groß, um noch eine sichere Entscheidung zuzulassen.

1. Kontaktelektrizität. Nach Beschaffung eines Elektrometers ließ sich nun die gesuchte E.M.K. ohne weiteres nachweisen. Es zeigt sich aber, um das Resultat gleich vorweg zu nehmen, daß sie merklich ist nur dann, wenn die Elektrodenentfernung größer ist als die früher definierte Kontaktdistanz. Wie schon früher angegeben, ändert sich der Widerstand bei derjenigen Entfernung, in der der Strom eben merklich wird, plötzlich. Die Dicke der spannungliefernden Kontaktschicht ergibt sich für Metalle in Zimmerluft in der Größenordnung von 10 bis 100 $\mu\mu$, variiert aber z. B. durch Anhauchen und auch ohne beabsichtigte Einwirkung stark.

Danach muß man also an der Oberfläche der Leiter zwei voneinander verschiedene Schichten annehmen: eine äußere, in der die Kontakt-E.M.K. wirksam ist, die daher aus einem Elektrolyten besteht, ferner eine innere Schicht, welche die Mikrophonwirkung verursacht. Für diese letztere ist elektrolytische Leitung sehr unwahrscheinlich, in ihr verhält sich jedenfalls die Berührung schon wie eine „metallische". Ein Übergang zwischen den beiden Schichten ist nicht nachweisbar, die E.M.K. sinkt meist innerhalb von 1 $\mu\mu$, also innerhalb der Genauigkeit des benutzten Mikrometermodells auf Null. Vielleicht kann man sich danach und nach den Resultaten der ersten Arbeit die Mikrophonschicht bestehend denken aus zahlreichen, elastisch biegsamen Hervorragungen der Metalloberfläche, etwa nach Art einer Bürste. Auch diese Schicht ändert beim Liegen an der Luft ihre Dicke, wenn auch weit weniger und weit langsamer als die Kontaktschicht, woraus man schließen könnte, daß bei Oxydation usw. sich die Länge der Härchen ändert.

Zum Nachweis der Kontakt-E.M.K. habe ich den früher beschriebenen Apparat im wesentlichen unverändert benutzt, es wurde nur die „feste" Elektrode gegen ihre durch Mikrometerschraube einstellbare Befestigung durch ein Bernsteinzwischenstück isoliert. Für eine An-

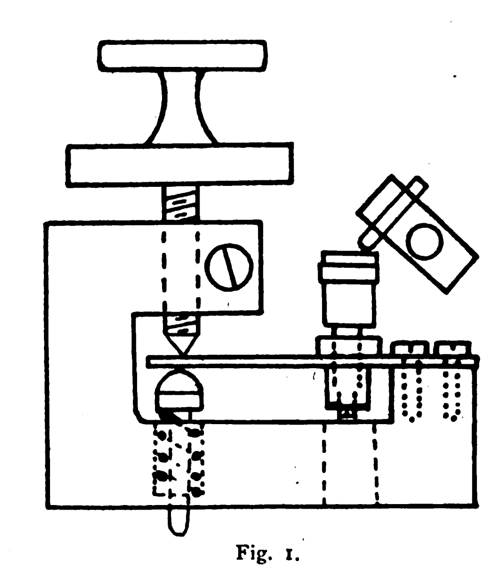


Fig. 1.

zahl von Versuchen wurde die „feste" Elektrode an der in Fig. 1 skizzierten Vorrichtung befestigt, so daß ihre Einstellung leichter und feiner veränderlich war als vorher. Eine Umdrehung der Mikrometerschraube um 1 Skalenteil bewirkte eine Verschiebung der Elektrode um ca. 200 $\mu\mu$. Eine gewisse vergrößerte Empfindlichkeit gegen Erschütterungen muß dabei in Kauf genommen werden und für genauere Versuche wurde die alte Vorrichtung mit festklemmbarer Elektrode verwandt.

Die isolierte Elektrode war nach Fig. 2 mit dem einen Quadrantenpaar des Elektrometers ver-

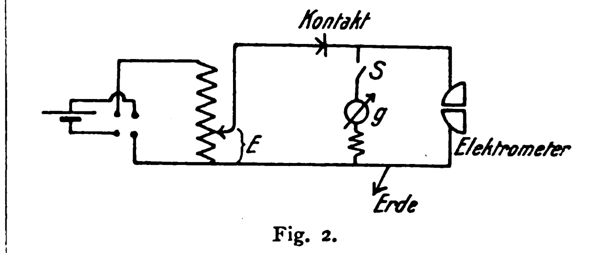


Fig. 2.

bunden, die zweite Elektrode konnte durch Abzweigen von einem Akkumulator auf ein bestimmtes Potential E gebracht werden, bzw. es konnte mit Hilfe dieser E.M.K. ein äußerer Strom durch den Kontakt geschickt werden. Durch den Schlüssel S wurde die isolierte Elektrode geerdet, bzw. der Stromkreis geschlossen. In die Leitung war nach Bedarf ein Galvanometer G mit Vorschaltwiderstand von 10000 Ohm eingeschaltet.

Das Elektrometer gab für 1 Volt ca. 100 mm Ausschlag, abgelesen mit Lichtzeiger auf einer Skala, die der beschränkten Verhältnisse des Arbeitsraums wegen in nur 15 cm Entfernung

vom Spiegel angebracht war. Die Einstelldauer des Elektrometers war ca. 2 sec. Seine Kapazität betrug ca. 20 cm, sie konnte durch einen parallelgeschalteten verschiebbaren Plattenkondensator auf ca. 300 cm gebracht werden.

Für einen Eisen-Platinkontakt mit sorgfältig polierten Flächen (*Pt*-Platte am isolierten Quadrantenpaar, *Fe*-Zylinder von 2 mm Durchmesser mit halbkugelig geschliffenem Ende) wurde beispielsweise folgendes beobachtet.

Die Elektrodenentfernung wurde zunächst bei geschlossenem Schlüssel S so eingestellt, daß für eine äußere E.M.K. E von 0,3 Volt der Strom im Galvanometer eben verschwunden war. Öffnete man dann nach dem Ausschalten des Akkumulators den Schlüssel S, so lud sich die Platinplatte und der mit ihr verbundene Elektrometerquadrant auf ein positives Potential von ca. 0,2 (0,1 bis 0,3) Volt auf. Wenn durch zeitweiliges Schließen des Schlüssels entladen wurde, so stellte sich die Aufladung immer wieder her, auch dann, wenn die Kapazität durch den Plattenkondensator vergrößert war. Die Aufladungsgeschwindigkeit lag dabei innerhalb der Einstellgeschwindigkeit des Elektrometers und läßt auf einen Widerstand von der Größenordnung 10^9 bis 10^{10} Ohm schließen. Wird die Elektrodenentfernung vergrößert, so wird die Aufladung langsamer. Bei schnell hintereinanderfolgenden Versuchen ist eine Gesetzmäßigkeit in der Abnahme der Leitfähigkeit unverkennbar. Für den in freier Luft befindlichen Kontakt lassen sich aber die Werte bei Versuchsreihen, die einige Zeit auseinanderliegen, kaum exakt reproduzieren. Die Dicke der Kontaktschicht, gemessen bis zu einer Aufladungszeit von 1 Min. pro 0,1 Volt ergibt sich zwischen 10 und einigen 100 $\mu\mu$. Dabei ist zu bemerken, daß namentlich bei größerer Schichtdicke der Widerstand sich mitunter nicht stetig vergrößert, sondern plötzlich einen Sprung erleidet. Auch die Werte für die erreichte Aufladung sind nicht exakt konstant und schwanken bei zeitlich auseinanderliegenden Versuchen sowohl bei direkter Beobachtung, wie bei Kompensation durch die äußere E.M.K. E. Die relativ größten und konstantesten Werte erhielt ich, wenn ich durch einen kleinen Akkumulator die Platinplatte auf $+2$ Volt auflud und diese Ladung dann abfallen ließ. Bei Aufladung auf -2 Volt werden die Aufladungen unter Umständen bis zu 0,2 Volt kleiner, wohl infolge der Polarisation beim Durchgang größerer Elektrizitätsmengen.

Haucht man gegen den Kontakt[1]), so wird die Dicke der spannungsliefernden Schicht enorm vergrößert, bis zu vielen μ; man beobachtet dann, wie im Verlauf von etwa einer Viertelstunde die Schicht dünner wird und wieder auf einige 10 bis 100 $\mu\mu$ zurückgeht; gänzlich verschwindet sie nach meinen Beobachtungen nie, aber es wird auch bei diesem Verdunsten keine bestimmte reproduzierbare Grenzdicke erreicht (in freier Luft). Immerhin liegt aber wohl darin der bündigste Beweis dafür, daß die bleibende Schicht wirklich eine Wasser- oder Wasserdampfhaut ist.

Auch bei den übrigen untersuchten Metallen *Zn, Ag, Cu, Ni, Mg* (und Kupferkies) fand ich die Erscheinung nicht wesentlich definierter. Der Sinn der Kontakt-E.M.K. ergab sich immer richtig, ihre Größe meist etwas kleiner als sie bei ganz dicker Wasserschicht gefunden wurde. Polarisation nach Stromdurchgang war öfter nachweisbar.

Zuweilen ist kurz nach dem Zusammensetzen eines frisch polierten Kontaktes eine E.M.K. nicht aufzufinden, auch mit äußerer E.M.K. ist dann keine schwach leitende Schicht festzustellen. Nach einigem Stehen tritt sie auf, schneller beim Behauchen oder wenn Wasser in die Nähe gebracht wird. Auch F. Rother hat bei seinen Versuchen (Ann. d. Phys. (4) **44**, 1238, 1914) ähnliches beobachtet, wenn die Metallstücke mit Zinnasche poliert waren. Ich habe zum Polieren Diamantine verwandt, habe auch nach dem Rotherschen Rezept langes Polieren auf reinem (?) Leder versucht, könnte aber nicht sagen, was regelmäßigere Resultate liefert. Jedenfalls war mitunter nach dem Polieren und Zusammensetzen die leitende Schicht da, auch wenn sorgfältig vermieden wurde, die Hände in die Nähe der Elektroden zu bringen oder gegen sie zu atmen. Übrigens nehmen die polierten Flächen nur selten so gleichmäßig Wasser an, wie es ein in kaustischen Flüssigkeiten entfettetes Metall tut.

Es liegt der Gedanke nahe, daß auch die von Rother beobachtete Leitfähigkeit in Wasser oder Wasserdampfschichten ihre Erklärung findet und daß das von ihm geübte Evakuieren den Erfolg hat, eine gleichmäßige Schicht auszubilden. Nach der sehr schönen Übereinstimmung seiner Zahlen dürfte man erwarten, auf diese Weise konstantere Werte zu erzielen, zum mindesten bei chemisch wenig angreifbaren Metallen. Der Nachweis einer vom Wasserdampf unabhängigen Elektronenleitung wird aber noch zu erbringen sein.

Mit einem Galvanometer von 10^{-8} Amp./Sktl. konnte ich bei meinen Kontakten mit kleiner Berührungsfläche Strom vermöge der Kontakt-E.M.K. nachweisen nur, wenn die Wasserschicht

1) Durch Erwärmung und Ausdehnung des bernsteinisolierten Kontaktstückes entstehen dabei größere Nullpunktsänderungen des Mikrometers, die natürlich berücksichtigt wurden.

ganz extrem dick gemacht wurde. Nach den Widerständen, die man aus den Elektrometerbeobachtungen erhält, ist aber ein solcher Nachweis wohl nur eine Frage der Empfindlichkeit des Instruments. J. Brown, dessen Originalarbeit in den Proc. Roy. Soc. mir nicht zugänglich ist, hat nach einem Referat in den Beibl. 11, 261, 1887 solche Ströme nachgewiesen unter Verwendung ebengeschliffener Metallplatten. Der Strom war nur vorhanden, wenn die Dampfschichten sich berührten. Die Regulierung muß bei den immerhin kleinen normalen Schichtdicken für Flächen recht schwer gewesen sein; Werte für die Schichtdicken sind nicht angeführt.

Wenn die oben geschilderten Versuche bei der Unbeständigkeit der Erscheinung auch noch nicht zu zahlenmäßig genauer Bearbeitung[1]) einladen, so scheinen sie mir doch hinreichend zu sein, um zweierlei zu beweisen. Erstens zeigen sie den Unterschied zwischen „Mikrophon"- und „Kontaktschicht". Andererseits geben sie, falls das überhaupt noch nötig ist, einen direkten Beweis für die jetzt wohl allgemein angenommene Ansicht über die Natur der Kontaktkraft beim Voltaschen Fundamentalversuch, indem sie den Sitz der E.M.K. bestimmen mit der Genauigkeit, die erreichbar ist, wenn der alte Versuch in gewöhnlicher Weise angestellt wird. Die mangelnde Definition haben beide Erscheinungsformen gemeinsam. Auch die Bestimmung der Kontaktkraft hat in ihren vielen Bearbeitungen kaum jemals zu exakten Zahlen geführt, verständlicherweise, da bei den geringen in Betracht kommenden Flüssigkeitsmengen alle auch nur spurenweise lösbaren Verunreinigungen von starkem Einfluß sein müssen. Andererseits kam dem Fundamentalversuch, obgleich von ihm die Entwicklung der Elektrizitätslehre ausgegangen ist, größeres Interesse nur zu, solange die Dimensionen, in denen er vor sich geht, der Experimentiertechnik nicht erreichbar waren.

2. Gleichrichterwirkung. Einen interessanteren Fall der Veränderungen der Kontakterscheinungen durch „Verunreinigungen" habe ich an einem Platin-Silberkontakt gefunden, wenn für einige Zeit ein Jodkörnchen in die Nähe gebracht wurde, eventuell unter Behauchen.

In der elektrolytisch leitenden Schicht, die sich dann bildet, lädt sich Platin gegen Silber auf ca. 0,6 Volt positiv auf. Die Leitfähigkeit ist wie bei den „reinen" Wasserschichten so klein, daß am Galvanometer der Strom vermöge der inneren E.M.K. nicht nachweisbar wird. Legt man nun eine äußere E.M.K. von ca. 2 Volt an, derart, daß die beiden Kräfte sich entgegenwirken, so bleibt der Strom ebenfalls Null. Kommutiert man jetzt die äußere E.M.K., so entsteht entweder sofort oder nach einiger Zeit (je nach der Elektrodenentfernung) ein starker Strom, die Messung ergibt für den Kontaktwiderstand Werte von etwa 100 Ohm. Stellt man den ursprünglichen Sinn der äußeren E.M.K. wieder her, so verschwindet die Leitfähigkeit sofort, tritt beim Kommutieren wieder auf, der Vorgang läßt sich bei geeigneter Einregulierung beliebig oft und sicher wiederholen. Dabei kann die gegenwirkende E.M.K. auch größer als 2 Volt gemacht werden, die gleichwirkende, stromschließende dagegen auf 0,2 Volt herabgesetzt werden, so daß die Erscheinung sichtlich nicht abhängt vom Absolutwert der Spannungssumme.

Induziert man mit Hilfe eines Saitenunterbrechers von 400—1000 Unterbrechungen pro Sekunde eine Wechselspannung in eine Spule der Galvanometerleitung, so wird gleichgerichteter Strom geliefert (bei entsprechend scharfer Einregulierung in der Nähe der metallischen Berührung).

Da der Stromschluß bei größerer Elektrodenentfernung merkliche Zeit braucht, so liegt wohl ein elektrolytischer Vorgang zugrunde: etwa verschiedenartige Abscheidung des Silbers bei verschiedener Stromrichtung. Für diese Vermutung sprechen auch folgende Versuche mit dem Elektrometer:

1. Es wird zunächst eine entgegenwirkende E.M.K. E angelegt, so daß kein Strom merklich wird; dann wird E ausgeschaltet und der Schlüssel S geöffnet; das Elektrometer zeigt sofortige Aufladung entsprechend der Kontakt-E.M.K.

2. Es wird zunächst gleichwirkende E.M.K. angelegt (wobei Strom auftritt), wieder E ausgeschaltet und S geöffnet. Das Elektrometer bleibt zunächst auf Null, bei relativ großem Kontaktabstand lädt es sich, nach einiger Zeit von selbst auf, bei kleinem bleibt es minutenlang auf Null, schlägt aber sofort aus, sobald man für einen Augenblick die entgegenwirkende E.M.K. anlegt. Dabei braucht der Schlüssel S nicht geschlossen zu sein, es genügt die zur Ladung der Elektrometerkapazität durchgehende Elektrizitätsmenge.

Die Form der Kontakte hat im Gegensatz zu der in der vorigen Arbeit beschriebenen Gleichrichterwirkung keinen Einfluß, der Versuch geht ebenso gut mit Platinspitze gegen Silberplatte wie mit vertauschten Formen.

Bei Einwirkung von Schwefelwasserstoff und

1) Anmerkung bei der Korrektur: Vielleicht lohnend im Hinblick auf die Ehrenhaftschen Bestimmungen des Elementarquantums.

bei anderen Metallen habe ich Andeutungen ähnlichen Verhaltens gefunden.

Nach Durchforschung des Verhaltens entsprechender Kontaktschichten werden sich vielleicht auch aus dieser Erscheinung „Erklärungen" der Braunschen Gleichrichterwirkung an halbleitenden Kristallen ergeben. Sicher ist, daß dies letztere Problem von recht komplizierter Art sein kann und daß es schwer ist, unter den Erklärungsmöglichkeiten eine Auswahl zu treffen.

Zusammenfassung.

Es wird beobachtet die aus der Wasserhaut auf Metallelektroden resultierende E.M.K. und daraus der Schluß gezogen, daß an der Oberfläche von Metallen zwei voneinander verschiedene schlechtleitende Schichten vorhanden sind, eine innere die Mikrophonerscheinungen bedingende und eine äußere, welche die E.M.K. des Voltaschen Fundamentalversuchs liefert.

Ein Platin-Silberkontakt mit durch Jod beeinflußter Kontakthaut gibt ausgesprochene Gleichrichterwirkungen (Widerstandsverhältnis $>10^6$).

Saarbrücken, 17. September 1920.

(Eingegangen 26. September 1920.)

Über die elastische Nachwirkung.

Von K. Bennewitz.

§ 1. Die Literatur ist reich an Theorien über die elastische Nachwirkung[1]); trotzdem scheint es aber an einem geeigneten Ausdruck zu fehlen, der einerseits die damit zusammenhängenden Erscheinungen in großen Zügen umfaßt, andererseits die für den praktichen Gebrauch nötige Einfachheit besitzt. Während die von W. Weber und F. Kohlrausch gegebenen Formeln nur Teilfragen behandeln, führen die Theorien von Boltzmann, Maxwell, Wiechert, Warburg und Reißner zu so verwickelten Ausdrücken, daß ihre Verwendung z. B. in der Technik auf Schwierigkeiten stößt. Der Grund hierfür scheint mir in der Fragestellung zu liegen, die gewöhnlich so lautet: Wie verhält sich ein elastischer Körper, wenn er eine gewisse Zeitlang einer konstanten Deformation unterworfen war, nach dieser Zeit? An Stelle dessen fragen wir zweckmäßiger: Wie verhält er sich, wenn er eine gewisse Zeitlang einer konstanten Kraft unterworfen war, während und nach dieser Zeit? Die erstere Fragestellung ging wohl daraus hervor, daß man experimentell die Torsion bevorzugte, bei der die Einstellung eines konstanten Winkels leichter zu erzielen ist, als die Einwirkung einer konstanten Kraft. Das in diesem Falle auftretende „Ermüdungsmoment", d. h. die zeitliche Abnahme der deformierenden Kraft scheint den Vorgang wesentlich zu verwickeln.

1) Siehe z. B. die Zusammenstellung in Winckelmanns Handb. d. Phys. 1, 796, 1908.

Wir wollen im folgenden nun festlegen:

1. Nicht die konstante Deformation, sondern die konstante deformierende Kraft soll als Ausgangspunkt gewählt werden.
2. Es sollen nur amorphe oder isotrope Körper betrachtet werden; ihnen zuzurechnen sind auch solche, die aus Kristalliten bestehen, wie die Metalle.
3. Wir beschränken uns auf den Fall vollkommener Nachwirkung, scheiden also Remanenz aus.

Im übrigen ist nicht die Aufstellung einer neuen Theorie beabsichtigt, sondern lediglich die eines möglichst einfachen und umfassenden empirischen Ausdrucks für die betreffenden Erscheinungen.

§ 2. Als Versuchsobjekt wurde ein horizontal an einem Ende eingespannter Glasfaden benutzt, dessen durch angehängte kleine Gewichte bewirkte Durchbiegung mit einem Okularmikrometer bestimmt wurde. Auf die Einzelheiten braucht hier kaum eingegangen zu werden: Dämpfung durch Flüssigkeit, Erschütterungsfreiheit und Temperaturkonstanz. Da die Gesamtverschiebung bei Belastung groß ist gegenüber dem eigentlichen Gange der Nachwirkung, wurde erstere gesondert durch ein Kathetometer gemessen. Die Ruhestellung (unbelastet) wurde nach einem Tage Wartens als erreicht betrachtet. Diese bildet immer den Ausgangspunkt für die Messung der Verschiebung; es erfolgt also keine gesonderte Betrachtung des „zeitlosen" und des „zeitlichen" Teils der Deformation, wie es viele Autoren getan haben.

I. Fundamentalversuch.

§ 3. Zur Zeit t_1 wird das Gewicht G angehängt; gemessen wird die Deformation (Durchbiegung) y als Funktion der Zeit $t-t_1$. Das gesamte Zahlenmaterial, das bei Variation des Gewichtes G und der Temperatur T gefunden wurde, läßt sich ausgezeichnet darstellen durch die auch den Nullpunkt gebende Gleichung:

$$y = \beta G \ln\left(\frac{t-t_1}{\tau}+1\right); \qquad (1)$$

hierbei ist β ein Proportionalitätsfaktor, τ ein Parameter von der Dimension einer Zeit, verwandt mit der Maxwellschen Relaxationszeit, aber doch von anderer Bedeutung. Als Beispiel sei in Tabelle I ein Versuch herausgegriffen:

Tabelle I.
($T = 273 + 12$)

$t - t_1$	$y_{beob.}$	$y_{ber.}$	$t - t_1$	$y_{beob.}$	$y_{ber.}$
0	0	0	184	2359	2358,7
9	2344	2345,3	221	2360	2359,5
14	2346	2347,1	267	2361	2360,4
20	2348	2349,0	368	2362	2361,8
30	2350	2350,7	480	2363	2363,0
44	2352	2352,4	549	2364	2363,6
65	2354	2354,1	696	2365	2364,6
80	2355	2355,0	870	2366	2365,6
97	2356	2355,8	1070	2367	2366,5
118	2357	2356,7	1200	2367,5	2367,0
147	2358	2357,7	2400	2370	2370,0

$t - t_1$ ist in Sekunden angegeben. Die dritte Spalte ergibt sich, wenn τ den Zahlenwert $10^{-229,4}$ erhält, auf dessen Bedeutung wir hier nicht eingehen wollen. Jedenfalls ist τ äußerst temperaturempfindlich. Ähnliche Übereinstimmung gaben alle weiteren Versuche.

II. Fundamentalversuch.

§ 4. Der Versuch beginnt genau wie oben: zur Zeit t_1 wird das Gewicht G angehängt, zur Zeit t_2 wieder entfernt, und nunmehr wird y bestimmt als Funktion von $t - t_1$.

Wir machen die Annahme, daß das Prinzip der raumzeitlichen Superposition erfüllt ist; wir können uns dann die Entfernung des Gewichts G ersetzt denken durch Hinzufügung einer entgegengesetzt wirkenden Kraft $-G$, während die ursprüngliche Kraft G noch weiter wirkt. In Formeln ausgedrückt:

$$y = \beta G \ln\left(\frac{t - t_1}{\tau} + 1\right) - \beta G \ln\left(\frac{t - t_2}{\tau} + 1\right),$$

oder

$$y = \beta G \ln \frac{t - t_1 + \tau}{t - t_2 + \tau}. \qquad (2)$$

In Tabelle II geben wir eine Anzahl von Messungen wieder. Hierin bedeutet also $t_2 - t_1$ die Belastungsdauer vor der Ablesung; G ist immer dasselbe und gleich dem G der Tabelle I.

Tabelle II.

a) $t_2 - t_1 = 60$ Sek.

$t - t_1$	$y_{beob.}$	$y_{ber.}$
64	(16,8)	13,8
69	11,9	10,1
77	8,8	7,5
87	6,8	5,8
106	4,8	4,2
118	3,8	3,5
138	2,8	2,8
176	1,8	1,2
264	0,8	1,3

b) $t_2 - t_1 = 120$ Sek.

$t - t_1$	$y_{beob.}$	$y_{ber.}$
127	(16,8)	14,4
131	14,8	12,3
135	12,8	11,9
141	10,8	9,5
150	8,8	8,0
166	6,8	6,4
179	5,8	5,5
199	4,8	4,7
224	3,8	3,8
265	2,8	3,0
325	1,8	2,3

c) $t_2 - t_1 = 240$ Sek.

$t - t_1$	$y_{beob.}$	$y_{ber.}$
244	(22,8)	20,5
248	19,8	17,1
256	15,8	14,0
266	12,8	11,6
279	10,8	9,8
296	8,8	8,3
325	6,8	6,7
349	5,8	5,8
384	4,8	4,9
425	3,8	4,1
504	2,8	3,2
630	1,8	2,4

d) $t_2 - t_1 = 2400$ Sek.

$t - t_1$	$y_{beob.}$	$y_{ber.}$	($y'_{ber.}$)
2406	35,0	29,8	33,7
2412	30,0	26,4	29,9
2420	27,0	23,9	27,0
2429	25,0	22,1	25,0
2440	23,0	20,5	23,2
2456	21,0	18,9	21,4
2484	19,0	16,9	19,1
2501	18,0	16,0	18,1
2521	17,0	15,1	17,1
2545	16,0	14,3	16,2
2575	15,0	13,4	15,1
2614	14,0	12,5	14,1
2664	13,0	11,5	13,0
2723	12,0	10,6	12,0
2810	11,0	9,6	10,9
2910	10,0	8,7	9,8
3035	9,0	7,8	8,8
3185	8,0	7,0	7,9
3378	7,0	6,2	7,0
3728	6,0	5,1	5,8
4080	5,0	4,4	5,0

Die Größe τ spielt bei diesem Versuch keine Rolle, da es gegenüber $t - t_1$, bzw. $t - t_2$ verschwindet. Dagegen ist β nicht willkürlich interpoliert, sondern aus dem Versuch I übernommen.

Die Güte der Übereinstimmung erkennt man erst aus Folgendem: Im Grunde werden die y-Werte beider Tabellen (I und II) durch eine einzige Formel (2) dargestellt; diese Werte sind aber in beiden Fällen von so verschiedener Größenordnung, daß sie auf einer graphischen Kurve zweckmäßig gar nicht vereinigt werden könnten. Die noch vorhandenen prozentualen Abweichungen von der Beobachtung verschwinden demgegenüber. (In dem Versuch d wurde überdies in Spalte 4 ein y' mit einem um wenig vergrößerten Wert für β berechnet, um zu zeigen, daß ein geringfügig veränderter Parameter einen völligen Anschluß gestattet.)

Haben wir aus Tabelle I entnehmen dürfen, daß die Fundamentalgleichung (1) erfüllt ist, ergibt sich aus Tabelle II, daß wir das Prinzip der Superposition anwenden dürfen. Damit ist dann aber alles gegeben und wir können nunmehr sofort zum allgemeinsten Falle übergehen.

§ 5. Die deformierende Kraft werde sprungweise geändert, und zwar wirke die Kraft G_1 in der Zeit t_1 bis t_2, die Kraft G_2 in der Zeit t_2 bis t_3 usw., wobei die G auch negative Werte haben können. Die Zeit der Beobachtung von y nennen wir t_a. Nach dem Prinzip der Superposition können wir dann lauter Prozesse nach der Gleichung (2) aneinanderreihen und erhalten:

$$y = \sum_1^n \beta G_n \ln \frac{t_a - t_n + \tau}{t_a - t_{n+1} + \tau}; \qquad (3)$$

oder

$$y = \sum_1^n \beta (G_n - G_{n-1}) \ln (t_a - t_n + \tau) +$$
$$+ \beta G_0 \ln (t_a - t_0 + \tau) - \beta G_n \ln (t_a - t_{n+1} + \tau).$$

Lassen wir nun die Kraft G sich kontinuierlich ändern, so geht die Summe in ein Integral über, und wir erhalten, wenn wir $G = f(t)$, also $dG = f'(t)\,dt$ setzen:

$$y = \int_{t_0}^{t_n} \beta f'(t) \ln (t_a - t + \tau)\, dt +$$
$$+ \beta f(t_0) \ln (t_a - t_0 + \tau) - \beta f(t_n) \ln (t_a - t_n + \tau).$$

Integrieren wir partiell, so folgt:

$$y = \Big[\beta f(t) \ln (t_a - t + \tau)\Big]_{t_0}^{t_n} + \beta \int_{t_0}^{t_n} \frac{f(t)\,dt}{t_a - t + \tau} +$$
$$+ \beta f(t_0) \ln (t_a - t_0 + \tau) - \beta f(t_n) \ln (t_a - t_n + \tau);$$

oder

$$y = \beta \int_{t_0}^{t_n} \frac{f(t)\,dt}{t_a - t + \tau} \tag{4}$$

als allgemeinste Lösung. Hierin bedeutet $f(t)$ die deformierende Kraft als Funktion der Zeit, t_a die Zeit der Ablesung von y, t_n die Zeit, bis zu der eine deformierende Kraft noch vorhanden ist. Natürlich kann t_n nie größer als t_a werden, da y nur von der Vorgeschichte, nicht aber von der Zukunft abhängen kann. Ist die Kraft zur Zeit der Beobachtung noch nicht verschwunden, so wird $t_n = t_a$; nur in diesem Falle tritt die Größe τ in Erscheinung, während sie sonst unterdrückt werden kann. Diese beiden Fälle entsprechen den Tabellen I und II. Die Auswertung des Integrals wird durch die Substitution $t' = t_a - t + \tau$ erleichtert.

§ 6. Es sollen nun einige einfache Funktionen $f(t) = G$ berechnet werden.

Beispiel 1. $f(t) = G$ sei konstant $= G_0$; es ergibt sich:

$$y = \beta G_0 \ln \frac{t_a - t_0 + \tau}{t_a - t_n + \tau}$$

in Übereinstimmung mit Gleichung (2). Ist G auch zur Zeit der Beobachtung t_a noch vorhanden, so wird $t_n = t_a$, also

$$y = \beta G_0 \ln \left(\frac{t_a - t_0}{\tau} + 1\right),$$

entsprechend Gleichung (1).

Beispiel 2. $f(t) = G = G_1 t$; d. h. G wächst proportional der Zeit; es ergibt sich:

$$y = \beta G_1 (t_a + \tau) \ln \frac{t_a - t_0 + \tau}{t_a - t_n + \tau} - \beta G_1 (t_n - t_0);$$

oder wieder für $t_n = t_a$ und mit Unterdrückung von τ:

$$y = \beta G_1 t_a \ln \left(\frac{t_a - t_0}{\tau} + 1\right) - \beta G_1 (t_a - t_0),$$

was man mit $t_0 = 0$ auch schreiben kann:

$$y = \beta G_1 t_a \ln \left(\frac{t_a + \tau}{e\tau}\right).$$

Beispiel 3. Allgemein sei:

$$f(t) = G = G_0 + G_1 t + G_2 t^2 + G_3 t^3 + \ldots.$$

Wenn wir

$$(t')_0 = t_a - t_0 + \tau,$$

und

$$(t')_n = t_a - t_n + \tau$$

einführen, so ergibt sich:

$$y = \beta \Big[f(t_a) \ln \frac{(t')_0}{(t')_n} - f'(t_a) [(t')_0 - (t')_n] +$$
$$+ \frac{1}{4} f''(t_a) [(t')_0^2 - (t')_n^2] - \frac{1}{18} f'''(t_a) [(t')_0^3 - (t')_n^3] +$$
$$+ \frac{1}{96} f''''(t_a) [(t')_0^4 - (t')_n^4] - + \ldots \Big].$$

Ist G eine periodische Kraft, wie es in der Praxis wohl am häufigsten vcrkommt, z. B. bei der Berechnung von Schwingungen elastisch nachwirkender Teile, so ist die Funktion im allgemeinen nur durch Tabellen lösbar; so etwa

$$G = G_0 \sin \left(2\pi \frac{t}{T}\right).$$

§ 7. Wir sehen daraus, daß die Lösung um so schwieriger wird, je verwickelter die Funktion $G = f(t)$ wird. Hält man etwa, wie bei vielen früheren Messungen nicht G, sondern y konstant (Torsionswinkel), so ergibt sich für G eine recht komplizierte Zeitfunktion, und die Lösung der Aufgabe ist keine einfache. Daraus erklärt sich, weshalb man häufig zu gebrochenen Exponenten oder vielgliedrigen Formeln gelangte, die durchaus nicht im Wesen der Erscheinung begründet liegen. Das Grundphänomen scheint vielmehr denkbar einfach zu sein.

Die Größe τ stellt eine neue, sehr empfindliche Konstante dar, die für die zeitlich elastischen Eigenschaften eines Materials ausschlaggebend ist. So wurde z. B. für einen Glasfaden bei verschiedenen Temperaturen gefunden:

Temp.	τ
12,0° C	$10^{-229,4}$
17,5° „	$10^{-191,3}$
56,6° „	$10^{-152,3}$

Je kleiner τ, desto geringer ist die elastische Nachwirkung; für ein ideal elastisches Material nähert sich τ der Null, ein großes τ läßt auf hohe Plastizität schließen. Somit dürfte die Bestimmung der Größe τ für die technische Materialprüfung von Bedeutung sein.

Charlottenburg, 1. Oktober 1920.

(Eingegangen 7. Oktober 1920.)

Messungen und Beobachtungen an Polbüscheln gleitender Entladung.

Von Max Toepler.

An das Gleitsystem, Gleitpol P auf a cm dicker Glasplatte $\mathfrak{G}$ mit voller rückseitiger metallischer Belegung B wurde jeweils durch Versuchsanordnung Fig. 1 plötzlich eine weiterhin

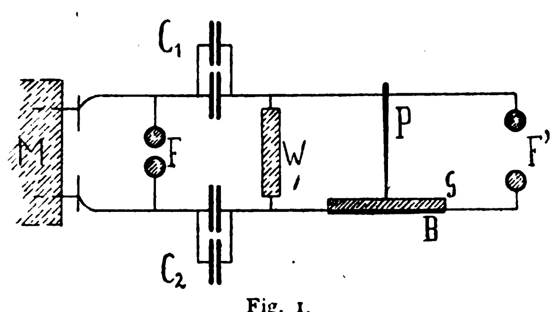


Fig. 1.

konstante Spannung P (in Kilovolt) angelegt. Diese entsteht zwischen den untereinander durch einen sehr großen Widerstand ($W = 10^7$ Ohm) verbundenen Außenbelegungen zweier großer Leidener Batterien (C_1 und C_2 je 80000 cm) in dem Augenblicke, wo zwischen den von einer Influenzmaschine M langsam geladenen Innenbelegungen ein Funken F ausbricht. Sollte, wie in Abschn. IV, die Spannung am Gleitsysteme schon während des Anstieges wieder verschwinden, so wurde die Funkenstrecke $F' < F$ eingeschaltet.

Solange die Spannung P am Gleitpole kleiner als ein bestimmter Wert P_0 (die „Durchbruchspannung") bleibt, wird jeweils um den Gleitpol nur eine Kreisfläche geladen — es entsteht ein „Polbüschel", gebildet aus zahlreichen radial verlaufenden „Leuchtfäden"[1]). Ist $P > P_0$, so erscheint diese Kreisfläche an einer oder mehreren Stellen radial durch den eigentlichen „Gleitprozeß" durchbrochen — aus dem Gleitpole wachsen jetzt funkenartige, also relativ zu den Leuchtfäden sehr gut leitende „Ladungskanäle" heraus, die an ihren Enden, wie früher von mir nachgewiesen[2]), das zum gleitenden Weiterwachsen des Ladungsprozesses nötige (Ionisierungs-)Gefälle mit sich vorschieben und dementsprechend nach ihren Seiten und um ihre Enden neue Büschel aus Leuchtfäden bilden.

I. Feststellung der Grenze des Ladungszustandes.

A. Durch Kurzschlußfunken: Reicht, vgl. Fig. 2, die Ladung der Glasoberseite vom Pole P bis zu den zu bestimmenden Orten A_1 bzw. A_2, so hat man den skizzierten Verlauf der Äquipotentialflächen[1]). Die Annäherung eines zweiten mit B verbundenen Poles an A_1 bzw. A_2 auf der Glasoberfläche zwecks Erzwingung eines Gleitfunkens (Kurzschlußfunkens) deformiert das Feld. Der Funken kann kürzer ausfallen als die Ladungsfigur ohne Deformation, andererseits wird aber bei Annäherung der beiden Pole ein entgegengesetztes Büschel aus dem zweiten ausbrechen und eine Vergrößerung der Funkenlänge veranlassen können.

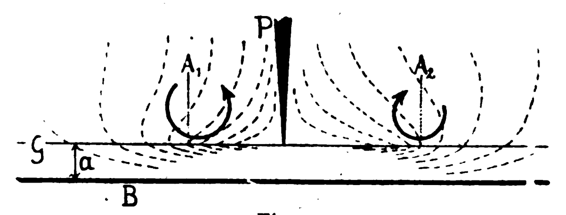


Fig. 2.

Ein Vergleich von Kurzschlußfunkenlängen mit den durch Bepulverung oder Photographie festgestellten Büschelgrößen ergab: Die positive Polbüschelgröße wird angenähert richtig erhalten. Bei negativen Polbüscheln sind die Kurzschlußfunken fast ebenso lang wie bei positiven[2]), d. h. etwa doppelt so groß wie die Radien der undeformierten negativen Polbüschelflächen. Bei Gleitbüscheln erhält man in der Regel um einige Zentimeter zu kleine Längen.

B. Aus Bärlappsamenspur: Der Ladungsprozeß wird durch schwache vorherige Bepulverung der Platte $\mathfrak{G}$ nicht merklich beeinflußt[3]). Das Feld am Rande der Figuren drückt die daselbst durch Stoßionisation entstehenden gleichnamigen Ionen fest gegen die Platte, nur die ungleichnamigen werden zur Ladung des Pulvers und zur Strömung verfügbar. Die Elektrizitätsbewegung in den Leuchtfäden ist also streng unipolar und erfolgt gegen den Sinn der Aufladung der Platte. In dieser Gegenrichtung wird auch das Pulver fortgerissen und nach Entladung teils in Rippen liegen gelassen, teils weithin im Bogen hinausgeweht.

Bei negativen Ladungsergüssen mit ihrem geschlossenen Ladungsrande entsteht an diesem ein starker Luftwirbel, wie dies in Fig. 2 angedeutet ist, der dann auch ungeladenes Pulver

1) Vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. **53**, 217, 1917.
2) Vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. **66**, 1064, 1898.

1) Hierbei ist die für die Darstellung dieser Flächen sehr vereinfachende, aber sonst für das Gleitphänomen selbst unwesentliche Annahme gemacht, daß der Isolator $\mathfrak{G}$ die gleiche Dielektrizitätskonstante besitzt wie das Gas (Luft) um ihn herum.
2) Vgl. hierzu auch die Messungen M. Toepler, Ann. d. Phys. **21**, 195 (Tab. II), 1906.
3) Siehe auch M. Toepler, Ann. d. Phys. **21**, 198, 1906.

mitreißt. Negative Polbüschelspuren sind daher durch einen staubfreien Ring um 1 cm und mehr verbreitert[1]). Negative Gleitbüschelspuren können ebenso eine mehrere Zehntel Zentimeter breite staubfreie Umrahmung zeigen.

Ganz anders bei positiven Polbüschelspuren. Ihrer bekannten sternförmigen Gestalt entsprechend bildet ihr Rand keine geschlossene Grenze (keine Kreislinie). Jeder einzelne positive Ladungsfaden saugt auch von seinen hier freien Seiten, von den Lücken her Pulver an; die positive Staubfigur besteht am Rande aus radial verlaufenden langgezogenen (etwa 0,1 cm breiten) staubfreien Linien oder Linienstücken. Die Bewegung des Pulvers findet also am Rande im wesentlichen wechselwendig senkrecht zum Radius statt. Eine Summenwirkung in Richtung des Radius zu einem merklichen Luftwirbel findet nicht statt, die Staubfigur positiver Polbüschel erscheint radial nicht wesentlich vergrößert. — Die positive Gleitbüschelspur zeigt am Rande das gleiche Verhalten.

C. Aus der photographischen Spur: Das Bild, die Spur, welche man beim Entwickeln der Platten von dem Büschel auf ihr erhält, zeigt keine scharfe Berandung[2]), die Schwärzung reicht nicht ganz so weit wie die Aufladung.

Durch einen Kunstgriff — „Hilfsverschleierung" — kann man photographisch sichtbar machen, wieweit die Ladung der Oberfläche der photographischen Schicht reicht. Setzt man die photographische Platte während der Büschelbildung auf ihr einer schwachen Belichtung aus, so zeigt die entwickelte schwach verschleierte Platte nicht nur das ohne diese Hilfsverschleierung zu erhaltende Bild des Büschels, sondern auch noch durch eine scharfe Grenzlinie, vgl. Fig. 3a und 3b, wieweit die Ladung reichte[3]). Bei stärkerer Hilfsbelichtung erscheint die Verschleierung soweit die Ladung reichte etwas vermindert, im angrenzenden Außengebiete, wo keine Aufladung, wohl aber ein

1) Kleine Bärlappfiguren können so mehr als den doppelten Ladungsfigurenradius besitzen. Maßgebend für die Stärke des Wirbels, also die Breite des staubfreien Gebietes ist $\Sigma\sigma \cdot \mathfrak{F} \cdot dt$; σ Ladung der Samen, $\mathfrak{F}$ Feldstärke, t Zeit. Daß die Zeit mitwirkt, zeigten Messungen mit konstantem F' und stufenweise vergrößertem F — je größer $F : F'$, um so kürzer die Zeit, um so schmäler der staubfreie Rand.

2) Vgl. die Photogramme negativer Figuren M. Toepler, Ann. d. Phys. **53**, 217, 1917; gute Photographien positiver Polbüschel finden sich vielfach, vgl. S. Micola, diese Zeitschr. **18**, 158, 1917, K. Przibram **19**, 299, 1918, sowie zahlreiche Abbildungen in der älteren Literatur.

3) Die schwache, unregelmäßige, dunkle Umrandung in meinen Photographien 1, 2, 3 und 5 l. c. rührt von dem nachträglichen Lackieren der Bilder her.

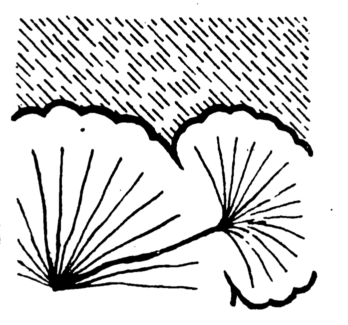


Fig. 3a.

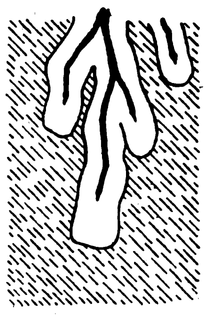


Fig. 3b.

starkes elektrisches Feld auftrat, verstärkt, dazwischen liegt die Grenzlinie[1]).

Bei negativen Pol- und Gleitbüscheln liegt die scharfe Grenzlinie der Ladung mehrere Zehntel Zentimeter außerhalb der verwaschenen Grenze der Büschelspur, bei Polbüscheln manchmal wie eine fast mit dem Zirkel gezogene Kreislinie, bei den fächerförmigen Zwischen- und Endbüscheln wie glatte Kreisbogenstücke. Mit der Lupe erkennt man meist, daß jeder solcher Kreis oder Bogen sanft gekerbt ist, in Fig. 3a stark übertrieben; jedem Leuchtfaden des Büschelfächers entspricht eine kleine Ausbuchtung der Grenzlinie.

Bei positiven Pol- und Gleitbüscheln umgibt die Ladungsgrenzlinie im Schleier die einzelnen Leuchtfäden in etwa 0,1 cm Abstand, wie in Fig. 3b angedeutet ist.

II. Größe der Ladungsfiguren bei Polbüscheln.

A. Für negative Polbüschel: Nach dem eben Gesagten muß man, um R^*, den Radius des wahren Ladungs- also des vollen Büschelgebietes zu erhalten, den Radius R der ohne Hilfsverschleierung gemessenen photographischen Büschelspur um ein Korrektionsglied vergrößern. Zahlreiche Photogramme mit Hilfsverschleierung ergaben, daß dann die Formeln 1a in Abschnitt III meiner letztzitierten Arbeit umzuschreiben sind: statt

$$P - 2 = 11{,}4\,R$$

richtiger

1) Es gilt also: In einem elektrischen Felde (tangentiell zur Plattenoberfläche nahe Ionisierungsspannung, d. h. etwa 30 Kilovolt : cm) ist die Lichtempfindlichkeit stark vermehrt, um so mehr, je stärker das elektrische Feld; Belichtung vorher oder nachher gab den Effekt nicht, sondern einfachen Schleier über das Bild. Zur Beleuchtung eignet sich der Funken F_1 durch Drehung seiner Schlagraumachse nach Wunsch abzuschwächen. Auch der Funken einer kleinen beiderseits W passend angeschlossenen Kapazität gibt den Effekt; es genügt ein 0,5 cm langer Funken von 400 cm Kapazität aus 50 cm Abstand. Schwache Gleitfunken, welche den Gleitprozeß abschließen, erzeugen den Effekt manchmal besonders schön.

$$P = 11{,}4\,(R + 0{,}18) = 11{,}4\,R^*;$$

statt

$$P - 3 = 11{,}6\,R$$

richtiger

$$P = 11{,}6\,(R + 0{,}26) = 11{,}6\,R^*$$

für die Plattendicken a von 0,16 cm und 0,55 cm; für die größte Schichtdicke $a = 1{,}66$ cm ergaben sich zwar keine ganz sicheren Bestimmungen der wahren Ladungsgrenze; P ist aber auch hier nahe gleich $11{,}6 \cdot R^*$.

Als allgemeine Beziehung zwischen Polspannung und wahrer negativer Polbüschelgröße ergibt sich also (statt l. c. Gl. 1a in Abschnitt III)

$$P = 11{,}5 \cdot R^*, \qquad (1a^*)$$

und zwar unabhängig von der Dicke a des Isolators.

Führt man diese neue Beziehung ein, so erhält man weiter (l. c. Gl. 2)

$$P_0 = 11{,}5 \cdot l_0$$

(l_0 Länge des ersten Durchbruchkanals), so daß sich mit $l_0 = 4{,}216 \cdot \sqrt{a}$ findet

$P_0 = 48{,}5 \cdot \sqrt{a}$ Kilovolt ohne additives Zusatzglied.

B. Für positive Büschel: Ihre Photogramme ohne Hilfsverschleierung sind, wie gesagt, fast ebenso groß wie die wahren Ladungsflächen; statt Gl. 1b l. c. wäre allenfalls

$$P = 5{,}9 \cdot R^* \qquad (1b^*)$$

zu setzen.

Mit der gleichen Polspannung erhält man also negative und positive Polbüschel, deren der Spannung streng proportionale Radien sich wie 5,9 : 11,5, d. h. sehr nahe wie 1 : 2 verhalten.

Für l_0 fanden sich Werte zwischen $6{,}5 \cdot \sqrt{a}$ und $8{,}5 \cdot \sqrt{a}$, für P_0 Werte zwischen $40 \cdot \sqrt{a}$ und $50 \cdot \sqrt{a}$ Kilovolt.

C. Ursache des Artunterschiedes: Die gefundenen Werte gelten für Versuchsanordnung Fig. 1. Messungen mit anderen Anordnungen, welche noch ausführlich veröffentlicht werden sollen, ergaben, daß die Absolutwerte speziell von der Geschwindigkeit des Spannungsanstieges am Gleitpole abhängen[1]). Es wurden Polbüschel photographiert für schnelleren und langsameren Anstieg zu konstanter Polspannung ($dP : dt$ zwischen $300 \cdot 10^6$ und $2 \cdot 10^6$ Kilovolt : sec, wobei die absolute Größe der Polbüschelradien etwa im Verhältnisse 4 : 1 abnahm), ferner auch für Wechselspannung (T zwischen $0{,}3 \cdot 10^{-6}$ sec und $20 \cdot 10^{-6}$ sec). Dabei blieb das Verhältnis negativer zu positiven Polbüschelradien 1 : 2.

1) Hierdurch erklärt sich wohl z. T. der Unterschied der von mir erhaltenen Werte von denen anderer Beobachter; meine Messungen galten etwa für $dP : dt$ gleich $50 \cdot 10^6$ Kilovolt : sec.

Macht man die jetzt naheliegende Annahme, daß die Radien beider Büschel unter sonst gleichen Bedingungen auch während der Büschelbildung sich stets wie 1 : 2 verhalten, so folgt, daß bei gleichem Spannungsanstieg am Gleitpole diesem im negativen Leuchtfaden die halbe Elektrizitätsmenge durch das doppelte Gefälle zufließt als vergleichsweise im positiven. Die Beweglichkeit der positiven Elektrizitätsträger im negativen Leuchtfaden wäre dann der vierte Teil von der der negativen Träger im positiven Faden (genauer $5{,}9^2 : 11{,}5^2$), denn die positiven Ionen im negativen Büschel und die negativen Elektronen im positiven Büschel liegen fest auf der Glasplatte, vgl. Abschnitt I B. Das gleiche Verhältnis besitzt die freie Weglänge positiver Ionen zu langsam (relativ zur gaskinetischen Fluggeschwindigkeit) bewegten Elektronen.

III. Kurzdauernde Spannung, Rückschlagspuren.

Verbindet man Gleitpol P und rückseitigen Beleg B kurz nach Ausbildung des Ladungsergusses um P, so findet von der soeben erst geladenen Isolatorfläche eine Rückentladung nach dem Gleitpole, ein Rückschlag von allen Seiten her statt; man sieht ein erneutes Aufleuchten um P herum. In Photogrammen[1]) erscheint jeweils innerhalb der bisher geschilderten Ladungsfigur dieser aufgelagert eine kleinere entgegengesetzten Vorzeichens.

A. Rückschlag im Polbüschel. Der Radius der positiven Rückschlagspur im negativen Polbüschel (R_p in R_n) ist nahezu zwei Drittel des Radius des letzteren (R_n) und der Radius des negativen Rückschlagbüschels im positiven Polbüschel (R_n in R_p) fast genau ein Drittel des Radius des letzteren (R_p). Dies war vorauszusehen. In Fig. 4a seien die Verhält-

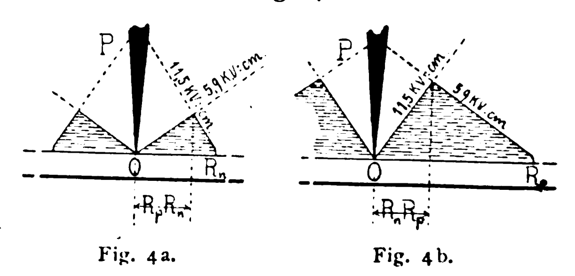


Fig. 4a. Fig. 4b.

nisse für ein negatives, in Fig. 4b für ein positives Polbüschel dargestellt. Die Isolatoroberfläche um den Gleitpol bleibt ringförmig teilweise geladen, wie die Schraffur andeutet. Es wird

1) In Bärlappsamenspuren ist der Rückschlag meist nur schwer zu erkennen.

$$R_p \text{ in } R_n = \frac{11{,}5}{5{,}9 + 11{,}5} \cdot R_n = 0{,}661 \cdot R_n$$

und

$$R_n \text{ in } R_p = \frac{5{,}9}{11{,}5 + 5{,}9} \cdot R_p = 0{,}339 \cdot R_p.$$

Mit den Gleichungen (1) erhält man noch

$$R_p \text{ in } R_n = P : 17{,}4 = R_n \text{ in } R_p,$$

d. h. „die Radien des Rückschlages im negativen und positiven Polbüschel sind bei gleicher erzeugender Spannung gleich groß".

Da die Messungen zeigten, daß man bei Anwendung des kurzschließenden Funkens F' auch keine übergroßen Rückschlagspuren erhält, so folgt: Die Durchschlagfestigkeit der Luft ist am Orte eines negativen oder positiven Leuchtfadens schon 10^{-7} sec[1]) nach seiner Bildung nahe die gleiche wie im gewöhnlichen Luftraum.

B. Rückschlag in Gleitbüscheln. In diese dringt der Rückschlag, ihre Ladungskanäle als Entladungsbahnen benutzend fast bis zum Rand, bis in die Endbüschel ein und bleibt dem Rande nur um die Strecke R — (R in R) fern. Die Ladungskanäle besitzen im Gegensatze zu den Leuchtfäden eine langdauernde Hysterese erhöhter Leitfähigkeit.

IV. Vorzeitig abgebrochene Ladung.

A. Struktur der Figuren. Wird die Spannung am Gleitpole schon während des Ladungsergusses auf den Isolator wieder weggenommen (mittels Nebenschaltung von F' siehe Fig. 1), so ist der innere Aufbau der Ladungsfiguren noch nicht voll entwickelt.

Negative Figuren erscheinen qualitativ nicht sehr verändert; mit stark vermehrtem $F:F'$ bei festgehaltenem F' fallen sie kürzer und schwächer aus, die Zahl der einzelnen Leuchtfäden ist kleiner, die Lücken zwischen den einzelnen Gruppen größer. Gleitfiguren sind stark verkleinert, ihre Begrenzung nähert sich einem Kreise, die Rückschlagspur ist schwach und auch in Photogrammen oft kaum sichtbar.

Stark verändert erscheint die positive Figur. Bei sehr kurzer Dauer der Spannung, z. B. $F > 1{,}5$ mit $F' = 1{,}0$ cm, wird die Spur so schwach, daß sie bei vielen Aufnahmen kaum zu sehen ist; im ersten Hinsehen erblickt man nur die Rückschlagspur, die hier sehr stark ausgebildet ist. Die Zahl der Leuchtfäden der Hinfigur ist stark vermindert; im völligen Gegensatze zu den sternförmigen bekannten Ergüssen (vgl. Abschn. 1) bei nicht abgebrochener Spannungsdauer bemerkt man jetzt bei diesen zuerst ausgegossenen Leuchtfäden keine Gruppenbildung. Die wenigen Leuchtfäden verlaufen radial fast völlig äquidistant und haben gleiche Länge; die Figur bedeckt eine bis an den Rand fast geschlossene Kreisfläche, ähnelt also sehr den negativen Polbüschelfiguren; die normale sternförmige Gestalt der positiven Polbüschel und Endbüschel entsteht erst durch Gruppenbildung der nachträglich sich überlagernden weiteren Leuchtfäden.

Bei kurzer Spannungsdauer fehlen auch die bekannten isoliert stehenden Sternchen oder Kometen; diese stammen also von zuletzt gebildeten Leuchtfäden, die über die schon gebildete Spur hinweg verlaufen.

B. Der Schein am Figurenrande. Bei Photogrammen von Spuren hergestellt mit großem $F:F'$, und nur an solchen bemerkt man an der Spurperipherie folgende meines Wissens noch unbekannte Erscheinung. Bei Beleuchtung schräg von oben (von Schichtseite, also reflektiertes Licht) oder schräg von unten (gebeugtes Licht) sieht man gegen dunklen Hintergrund einen den Rand der dunklen Figuren hofartig umgebenden lichten, hauchartigen Schein.

Bei negativen Figuren umgibt der Schein die gesamte Büschelfigur, deren Rand in 0,2 bis 0,5 cm Abstand umsäumend, ganz wie der dunkle Rand bei hilfsbelichteten Platten (vgl. Abschn. I, C) und auch an dessen Orte gelegen. Während aber der dunkle Rand keine Spur von Struktur erkennen läßt, ist der helle Schein nur bei tangentieller Lichtstrahlrichtung zu sehen, er besitzt also radiale Struktur.

Bei positiven Figuren umgibt der helle Schein jeden einzelnen Leuchtfaden derart, daß sich Schein an Schein fast lückenlos aneinanderlagert, und den Figurenrand bei günstiger Beleuchtung etwa wie in Fig. 5a

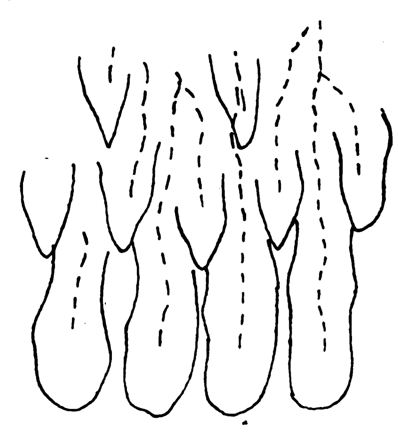


Fig. 5a.

1) Auf eine solche Dauer ist die Bildung der Funken in F und F' zu schätzen, vgl. M. Toepler, Ann. d. Phys. 21, 221, 1906.

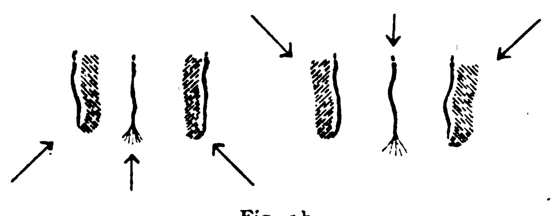


Fig. 5b.

angedeutet wie der Rand eines Ziegeldaches erscheint. Beleuchtet man mit annähernd parallelstrahligem Lichte, so wird immer nur ein Teil des Scheines sichtbar, je nach der Lichtstrahlrichtung, wie in den Fig. 5b angedeutet ist. Dabei ist es gleichgültig, ob das Licht schichtseits oder unterseitig einfällt. Der Schein verhält sich so, als sei er aus feinen reflektierenden oder beugenden Stäbchen gebildet, welche die Richtung der Schraffur in den Figuren haben, also unter etwa 45° gegen die Mitte, den eigentlichen Leuchtfaden der gewöhnlichen Photogramme laufen. Unter dem Mikroskope kann man wohl den Eindruck gewinnen, als ob in dieser Richtung verlaufende kettenförmige Aneinanderlagerungen von ausgeschiedenen Silberteilchen in etwas überwiegender Anzahl vorhanden seien[1]).

C. Wachstumsverhältnisse von Gleitfiguren. Sicher trifft zu, daß mit abnehmendem $F:F'$ die Zeitdauer einer F' entsprechenden Spannung am Gleitpole zunimmt. Mißt man also für bestimmtes F' die jeweils für stufenweise vergrößerte F erhaltene Gleitfigur, so lassen sich die Wachstumsgesetze der Ladungsfiguren qualitativ überblicken. Besonders hervorzuheben ist

1. Polbüschel (also für $P < P_0$) entstehen in kleinerer oder etwa gleicher Zeit wie F bzw. F' selbst, also innerhalb etwa 10^{-7} sec, das Gesetz ihres Anwachsens ist also in vorliegender Weise nicht feststellbar;

2. negative Polbüschel sind halb so lang wie positive;

3. das negative Gleitbüschel bricht ($P > P_0$) vor dem positiven aus;

4. es erreicht, ja überholt meist das positive Pol- und das naszierende positive Gleitbüschel;

5. im Durchschnitte besitzen negative und positive Gleitbüschel nahe gleiche Wachstumsgeschwindigkeit, 10^7 bis 10^8 cm/sec bei Anordnung Fig. 1, d. h. bei $dP:dt$ etwa $50 \cdot 10^6$ Kilovolt: sec; nach gleicher Zeit ist das negative Gleitbüschel während des Vorwachsens jeweils etwa 2 cm länger als das positive:

6. das Vorwachsen des negativen Gleitbüschels stoppt eher als das des positiven, es bleibt also bei voller Ausbildung kleiner als das positive.

V. Gleitbüschellängen.

In Fig. 6a ist für negative Figuren der Zusammenhang zwischen Gleitlängen f und Polspannung P, in Fig. 6b dasselbe für positive (in etwas verkleinertem Maßstabe) angedeutet.

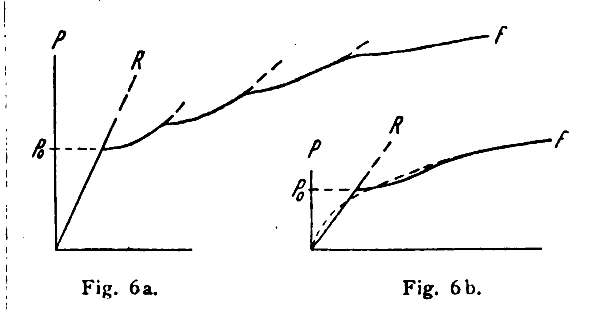


Fig. 6a. Fig. 6b.

Dem streng linearen Anstiege von R beim Polbüschel folgt der von f für negative Gleitfiguren in mehrfachen Bogen, entsprechend der scharfen Ausbildung von Ruckstufen; bei großem f verwischen sich natürlich die Bogen. Für positive f beobachtet man nur eine Ruckstufe beim Übergange von Polbüschel zur Gleitfigur. Ist die Polspannung P groß gegenüber der Durchbruchspannung P_0, so verläuft f nahe proportional P^5; als Extremwerte werden mit Anordnung Fig. 1 erreicht[1])

$$f_n = 17 \cdot 10^{-8} \cdot P^5 \cdot c^2$$

und

$$f_p = 20 \cdot 10^{-8} \cdot P^5 \cdot c^2,$$

worin c die Kapazität der Plattenoberflächeneinheit in Zentimeter bedeutet (f in cm, P in Kilovolt). Solche Interpolationskurve schneidet aber selbst für positive Gleitbüschel in der Nähe von P gleich P_0 den tatsächlichen Verlauf mehrmals, wie in Fig. 6b durch die schwach gestrichelte Kurve angedeutet ist[2]).

VI. Freie Elektrizität (Orte mit Felddivergenz) in Gleitfiguren.

Allgemein läßt sich aus der Gestaltung der Einzelheiten negativer und vor allem positiver

1) Der helle Schein, die Feinstruktur zeigte sich nur bei großem $F:F'$; durch die bei längerer Dauer von P am Pole über die erste Figur sich hin ergießenden weiteren Leuchtfäden (vgl. Abschn. IV, A) ändert sich das Feld beständig, also folgt· Nach einer länger dauernden Einwirkung eines starken konstanten Feldes scheiden sich die Silberkörner bei der nachträglichen Entwicklung in Parallelstruktur zur gewesenen Feldrichtung aus.

1) Mit Korrektur wegen Insuffienz von C_1 und C_2 bei großen Gleitfiguren (f bis 110 cm).

2) Aus P_0 und zugehörigem R läßt sich also nicht die Konstante neben P^5 berechnen.

Gleitfiguren schließen: Eine feldbildende Wirkung geht außer vom Pole und den Ladungskanälen überwiegend nur noch von den Leuchtfadenenden (Fadenköpfen) aus, d. h. wesentlich nur am Pole, in den Ladungskanälen und in den Leuchtfadenköpfen ist die Divergenz des Feldes von Null stark verschieden -- für Beurteilung des gesamten Feldes sind natürlich auch die Influenzladungen in der rückseitigen Plattenbelegung, ersetzbar durch die bekannten „elektrischen Spiegelbilder" in ihr zu berücksichtigen. Der Grund hierzu liegt darin, daß von den durch Stoßionisation gebildeten Elektrizitäten der Leuchtfäden die dem Pole gleichnamige auf die Platte gedrückt, die ungleichnamige polwärts geführt wird (vgl. Abschn. I B); freie Elektrizität entsteht demnach überwiegend nur an beiden Enden, am Pole bzw. an den Ladungskanälen ungleichnamige und an den Leuchtfadenköpfen gleichnamige, erstere wird dann vom Pole aus sofort überneutralisiert.

Besonders bei positiven Leuchtfäden erscheint freie Elektrizität auf ihr allerletztes Ende beschränkt. Der Verlauf der Leuchtfäden in Photogrammen positiver Gleitbüschel ist oft so kraus verschlungen, wie dies nur durch diese Eigenschaft verständlich wird. Manchmal sind in Photogrammen die Fäden zu fast geschlossenen Schlingen gebogen, also hinterläßt nur die Bahn des Kopfes photographisch eine Spur, die spätere rückwärtige Elektrizitätsleitung geht ohne erneute Spurbildung schräg über die alte Spur der Kopfbahn hinweg; nur selten findet man diese späteren geänderten Bahnen doch zum Teil soeben angedeutet. Die Tangente der Leuchtfäden der Photogramme gibt die Feldrichtung (genauer die Richtung der Feldkomponente in der Plattenoberfläche) am Fadenkopfe im Augenblicke, in dem dieser sich im Berührungspunkte der Tangente befand.

Dresden, Physik. Inst. d. Techn. Hochschule, 7. September 1920.

(Eingegangen 10. September 1920.)

Das periodische System der Elemente im Lichte der Theorie des radioaktiven Zerfalls.

Von F. Kirchhof.

An anderer Stelle[1]) wurde der Versuch unternommen, das periodische System der Elemente durch Verallgemeinerung der radioaktiven Zerfallsvorgänge zu erklären. Die Abweichungen der Atomgewichte von ganzen Zahlen ergeben sich nach dieser Hypothese als Folge von Isotopenbildungen an den meisten Stellen des Systems[1]).

Die Atomgewichte der Elemente lassen sich als algebraische Summe aus Moseleyscher Ordnungszahl (Kernladungszahl) und Isotopenzahl (Kernelektronenzahl) darstellen: $A = 2(M + I)$[2]) (s. Tabelle I).

Die Isotopenzahl eines (reinen) Isotopen ist mit großer Wahrscheinlichkeit eine ganze Zahl oder kommt einer solchen sehr nahe. Da wir aber nach obiger Hypothese die meisten gewöhnlichen Elemente als „Isotopengemische" aufzufassen haben, so ist es klar, daß wir es hier mit einer „mittleren" Isotopenzahl zu tun haben, welche im allgemeinen durch eine Dezimalzahl ausgedrückt sein wird. Während die Moseleysche O.-Z. von Element zu Element um eine Einheit wächst, ist dies bei der Isotopenzahl daher nicht der Fall. Sie ist, wenn man die einzelnen Abschnitte des Systems vergleicht, mehr oder minder deutlichen Schwankungen unterworfen, indem sie innerhalb einzelner Abschnitte ziemlich konstant bleibt oder stetig wächst, um sich an gewissen Stellen plötzlich zu ändern (s. Fig. 1).

Die Ursache für diese Unstetigkeit ist in den Gesetzen für die Lebensdauer der Isotopen der einzelnen Gruppen begründet. Diese Unstetigkeit wird dort, wo sie „negativ" auftritt, der Anlaß zu „Atomgewichtsanomalien"[3]).

Verbindet man in der graphischen Darstellung der Fig. 1 die Isotopenmaßzahlen der gerad- bzw. der ungeradwertigen Elemente untereinander, so erhält man zwei deutlich getrennte Kurvenzüge, die gewissermaßen die Verbindungslinien der Isotopengleichgewichte in den geraden bzw. ungeraden Gruppen darstellen.

In vorliegender Studie soll auf die Folgerungen, die sich aus dieser Darstellungsweise zu ergeben scheinen, näher eingegangen werden.

1) Zeitschr. f. phys. Chem. **44**, 257, 1920.

1) Versuche, derartige Isotopengemische festzustellen sind nach K. Fajans (Chem. Ztg. 541, 1920); F. W. Aston mit Hilfe der Kanalstrahlenanalyse einwandfrei gelungen.

2) Diese Zeitschr. **20**, 211, 1919. Diese Darstellungsweise erinnert rein äußerlich an Rydbergs Versuch der Darstellung der Atomgewichte durch die Form: $A = N + D$, wobei N eine ganze, durch $4n$ bzw. $4n + 1$ teilbare Zahl ist, während D stets klein gegen N bleibt. Vgl. Zeitschr. f. phys. Chem. **14**, 66, 1897.

3) Gerade die Atomgewichtsanomalien erscheinen dem Verf. als ein Beweis für die allgemeine Existenz von Isotopengemischen und diese wieder der Grund für die Nichtganzzahligkeit der meisten Atomgewichte. Der Ansicht, letztere Erscheinung aus dem Trägheitsgesetz allein erklären zu können, steht Verf. skeptisch gegenüber.

Tabelle I.
Ordnungs- und Isotopenzahlen der Elemente.

E	$\frac{A}{2}$ [1]	*M*	*I*	*E*	$\frac{A}{2}$	*M*	*I*	*E*	$\frac{A}{2}$	*M*	*I*
H	0,504	1	—0,496 [2]	*Se*	39,6	34	5,6	*Ho*	81,75	67	14,75
He	2,0	2	0	*Br*	39,96	35	4,96	*Er*	83,85	68	15,85
Li	3,47	3	0,47	*Kr*	41,46	36	5,46	*Tu*	84,25	69	15,25
Be	4,55	4	0,55	*Rb*	42,73	37	5,73	*Yb*	86,0	70	16,0
B	5,5	5	0,5	*Sr*	43,82	38	5,82	*Lu*	87,0	71	16,0
C	6,0	6	0	*Y*	44,5	39	5,5	—	—	72	—
N	7,0	7	0	*Zr*	45,3	40	5,3	*Ta*	90,75	73	17,75
O	8,00	8	0,0	*Nb*	46,75	41	5,75	*W*	92,0	74	18,0
F	9,5	9	0,5	*Mo*	48,0	42	6,0	—	—	75	—
Ne	10,1	10	0,1	—	—	43	—	*Os*	95 45	76	19,45
Na	11,5	11	0,5	*Ru*	50,85	44	6,85	*Ir*	96,55	77	19,55
Mg	12,16	12	0,16	*Rh*	51,45	45	6,45	*Pt*	97,6	78	19,6
Al	13,55	13	0,55	*Pd*	53,35	46	7,35	*Au*	98,6	79	19,6
Si	14,15	14	0,15	*Ag*	53,94	47	6,94	*Hg*	100,3	80	20,3
P	15,52	15	0,52	*Cd*	56,20	48	8,2	*Tl*	102,0	81	21,0
S	16,03	16	0,03	*In*	57,4	49	8,4	*Pb*	103,55	82	21,55
Cl	17,73	17	0,73	*Sn*	59,35	50	9,35	*Bi*	104,0	83	21,0
Ar	19,94	18	1,94	*Sb*	60,1	51	9,1	(*Ra A*)	109,0	84	25,0
K	19,55	19	0,55	*Te*	63,75	52	11,75	(*Ra C*)	107,0	84	23,0
Ca	20,03	20	0,03	*J*	63,46	53	10,46	*Po*	105,0	84	21,0
Sc	22,05	21	1,05	*X*	65,1	54	11,1	—	—	85	—
Ti	24,05	22	2,05	*Cs*	66,4	55	11,4	*Ra Em*	111,0	86	25,0
V	25,5	23	2,5	*Ba*	68,69	56	12,69	—	—	87	—
Cr	26,0	24	2,0	*La*	69,5	57	12,5	*Ra*	113,0	88	25,0
Mn	27,47	25	2,47	*Ce*	70,12	58	12,12	(*Th X*)	112,2	88	24,2
Fe	27,92	26	1,92	*Pr*	70,3	59	11,3	*Ac*	113,0	89	24,0
Co	29,49	27	2,49	*Nd*	72,15	60	12,15	*Th*	116,1	90	26,1
Ni	29,34	28	1,34	—	—	61	—	(*Io*)	115,0	90	25,0
Cu	31,79	29	2,79	*Sm*	75,2	62	13,2	*Bv*	117,1	91	26,1
Zn	32,69	30	2,69	*Eu*	76,0	63	13,0	(*Prt Ac*)	115,0	91	24,0
Ga	34,95	31	4,95	*Gd*	78,65	64	14,65	*U I*	119,1	92	27,1
Ge	36,25	32	4,25	*Tb*	79,6	65	14,6	(*U II*)	117,1	92	25,1
As	37,48	33	4,48	*Dy*	81,25	66	15,25				

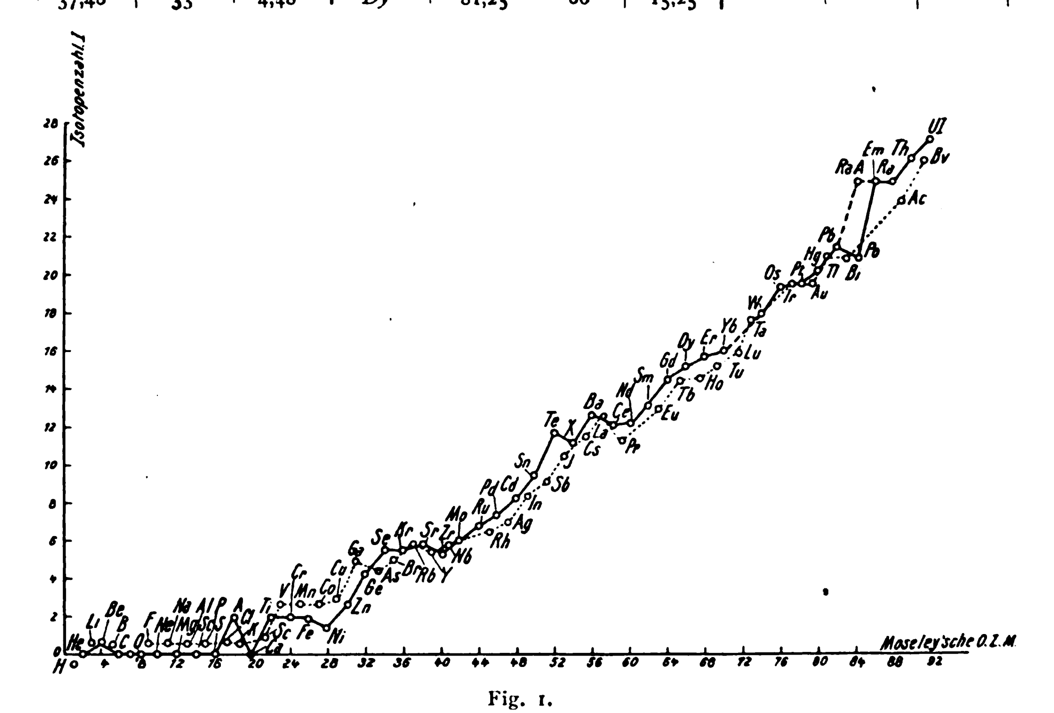


Fig. 1.

1) Internationale Atomgewichte 1914 und Abänderungen bis 1916.
2) Die Isotopenzahl des Wasserstoffs hat eigentlich keinen Sinn, da dieses Element nicht dem Zerfallsschema angehört. Ihr negativer Wert kennzeichnet seine Stellung außerhalb des Systems.



1. Atomgewichtsanomalien.

Zwischen zwei in der Moseleyschen Reihe aufeinanderfolgenden Elementen *A* und *B*, von denen *A* eine größere Isotopenzahl als *B* besitzt, zeigt sich dann eine „Atomgewichtsanomalie", wenn die Differenz ihrer Isotopenzahlen größer als 1 ist. So beträgt diese Differenz bei *A—K* 1,39, bei *Te—J* 1,29, bei *Co—Ni* 1,15 Einheiten. Ist die Differenz gleich 1, so haben die beiden aufeinanderfolgenden Elemente gleiche Atomgewichte. Ein derartiger Fall tritt möglicherweise bei *Ra—Ac* auf. Ist die Isotopenzahlendifferenz kleiner als 1, so kommt es eben nicht zur „Anomalie", da erstere ja durch die Zunahme der Ordnungszahl übertroffen wird[1]).

Die absolute Größe der Isotopenzahl eines Elementes ist abhängig a) von der Stellung eines Elementes in der Entwicklungsreihe (Periode, Gruppe des Systems), b) von der Lebensdauer der einzelnen es bildenden Isotopen; letztere beiden Faktoren scheinen vorwiegend für die „Atomgewichtsanomalien" maßgeblich zu sein, c) von der Art und Intensität der Umwandlung des Mutterelements.

Betrachten wir z. B. den Fall *Te—J*. Nehmen wir an, Tellur bestehe bloß aus den beiden Isotopen α—*Te* (128) und β—*Te* (124), so wären im gewöhnlichen *Te* (127,5) von ersterem Isotop 87,5 Proz., von letzterem 12,5 Proz. vorhanden[2]). Dies würde sich daraus erklären, daß dem α—*Te* eine bedeutend längere Lebensdauer als dem β—*Te* zukäme. Nehmen wir weiter an, daß sich Jod durch β-Umwandlung aus den entsprechenden *Te*-Isotopen bilde, so wären im gewöhnlichen Jod (126,92) ein α—*J* (128) mit nur 73 Proz., β—*I* (124) hingegen mit 27 Proz. vertreten[3]). α—*J* wäre daher kurzlebiger als sein (hypothetisches) Mutterelement α—*Te*, β—*J* langlebiger als β—*Te* anzunehmen. Die Folge davon wäre, daß im Isotopengemisch „Jod" das α—*J* mit der größeren Isotopenzahl weniger zur Geltung käme als das atomgewichtlich gleich schwere α—*Te* im „Tellur", was eben zur „Anomalie" führt[4]).

1) Betrachten wir übrigens je zwei aufeinanderfolgende gerad- bzw. ungeradwertige Elemente für sich, so verschwindet jegliche „Anomalie". In diesem Fall müßte die Differenz der Isotopenzahlen natürlicherweise größer als 2 sein. Am nächsten kommt dieser Differenz die zwischen *A* und *Ca* (1,91).

2) In Wirklichkeit dürfte die Zahl der Isotopen schon wegen derjenigen, die dem Uranzerfall ihre Entstehung verdanken, zumindestens die doppelte sein.

3) Die Wahrscheinlichkeit eines derartigen Verwandtschaftsverhältnisses müßte sich durch Feststellung des konstanten Verhältnisses der beiden Elemente in charakteristischen Mineralien erhärten lassen.

4) Vgl. die seinerzeitigen Erklärungsversuche von Mendelejeff, B. Brauner, J. W. Retgers u. a. m.

Dieses Verhältnis könnte noch durch die Art der Umwandlung modifiziert werden, indem α — *Te* (der Analogie mit *Po* nach) vorwiegend α-Strahler wäre und nur zu einem Bruchteil β-Umwandlung erfahren würde, β—*Te* hingegen ausschließlich β-Umwandlung erleiden würde.

2. Gerad- und ungeradwertige Elemente.

Die Verbindungslinien der Isotopenzahlen der geradwertigen Elemente einerseits bzw. der ungeradwertigen andererseits lassen deutlich zwei Kurvenzüge hervortreten, die im allgemeinen einen periodischen Verlauf nehmen. So bleibt die Isotopenzahlenkurve der geradwertigen Elemente bis zum *Ge* unterhalb derjenigen der ungeradwertigen. Eine Abweichung hiervon zeigt sich bloß beim Argon. Vom *Ge* bis zum *Mo* verlaufen die beiden Kurven dicht nebeneinander. Vom *Mo* an bleibt sie fast ausnahmslos oberhalb derjenigen der ungeradwertigen Elemente, wobei vom *Ta* bis zum *Tl* wieder starke Annäherung der beiden Kurven zu beobachten ist. Die Ursache für diese Erscheinung beruht eben wie im Falle der Atomgewichtsanomalien darauf, daß die die Atomgewichtszahlen der gerad- bzw. der ungeradwertigen Elemente bestimmenden Isotopen im allgemeinen verschiedene Lebensdauer besitzen werden. Aber auch die Stellung in der Moseleyschen Reihe scheint von Einfluß zu sein, indem im Gebiet der kleineren Ordnungszahlen (bis $M = 32$) die Isotopenzahlen der ungeradwertigen, in dem der höheren O.-Z. die der geradwertigen Elemente im allgemeinen dominieren. Auch die Elemente der seltenen Erden machen von dieser Regel keine Ausnahme, obwohl man bei ihnen von typischen geradwertigen Elementen nicht sprechen kann. Gerade aber dieses Verhalten, das auch die seltenen Erdelemente nicht ausnimmt, zeigt, daß wir es hier mit Gesetzen der Lebensdauer zu tun haben, die mit der „chemischen" Wertigkeit der Elemente nur bedingungsweise im Zusammenhang stehen. Die stärksten „Sprünge" in der Kurve der geradwertigen Elemente bemerken wir bei *S—A* bzw. *A—Ca*, bei *Te—X* und *Pb—Po* bzw. *Po—Em*, also stets in der Nähe der nullwertigen Elemente. Zwei dieser „Sprünge" fallen, wie wir bereits gesehen, mit „Atomgewichtsanomalien" zusammen.

3. Elementenpaare.

Wie bereits angedeutet wurde, sehen wir, daß einem geradwertigen Element zumeist ein in seinen Eigenschaften ganz ähnliches ungeradwertiges entspricht, daß also bei drei aufeinanderfolgenden Elementen die Eigenschaften

des mittleren nicht genau das arithmetische Mittel derjenigen seiner Nachbarelemente darstellen[1]). Daß hierfür nicht das Atomgewicht oder die Isotopenzahl bestimmend ist, zeigt das Beispiel *Ca—Sc—Ti*. *Sc* besitzt eine Atomgewichts- bzw. eine Isotopenzahl, die fast genau in der Mitte zwischen derjenigen von *Ca* und *Ti* liegt, und trotzdem steht es in fast allen seinen Eigenschaften dem *Ca* weitaus näher als dem *Ti*[2]).

Auf das Vorhandensein derartiger „Zwillingselemente" hat bereits R. Lorenz im Jahre 1896 hingewiesen, kam aber hinsichtlich der „Paarung" zu im allgemeinen anderen Gruppierungen als Verf., worauf später noch zurückgekommen wird[3]).

Betrachten wir das erweiterte Zerfallsschema des Thorium[3]), so ersehen wir, daß „Zwillinge" häufig im Verhältnis der β-Umwandlung zueinander stehen. Durch β-Strahlung (strahlenlose Umwandlung) ändert sich bekanntlich die Masse des strahlenden Atoms nur unwesentlich. Dort, wo wir demnach „Zwillingspaare" antreffen, werden wir mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit eine Verknüpfung der Paarlinge durch β-Umwandlung annehmen dürfen.

Dies ist natürlich nicht unbedingt notwendig, da eine Übereinstimmung auch eintreten könnte, wenn zwei Elemente nicht direkt durch β-Umwandlung verknüpft sind, sofern sie aber α-Strahlungsprodukte von Elementen sind, die ihrerseits durch β-Strahlung verbunden sind. Nimmt man z. B. nach Analogie des *U*-Zerfallsschemas den Zerfall des Proto-*Cr* in analoger Weise vor sich gegangen an, so erhalten wir folgendes analoges Bild:

Ti und *V* (bzw. ihre beiden Isotopen) stehen demnach im Verhältnis der β-Umwandlung zueinander, was zur Folge haben muß, daß auch ihre α-Strahlungsprodukte untereinander wieder große Ähnlichkeit aufweisen werden, analog wie dies z. B. bei *Ra* und *Ac* der Fall ist, welche Elemente untereinander in keinem direkten Zusammenhang stehen[4]).

Ganz analoge Verhältnisse haben wir auch in der *Mo*-Periode anzunehmen, wo die analoge Beziehung zwischen *Zr*, *Nb* und *Y* noch durch die stete Vergesellschaftung dieser Elemente im Fergusonit, Euxenit, Blomstrandit, Samarskit und anderen Mineralien gestützt wird.

Es wäre noch zu bemerken, daß die angeführte Übereinstimmung auch bei Paaren angetroffen wird, bei welchen das ungeradwertige Element stets eine höhere Isotopenzahl als das geradwertige besitzt, wie z. B. in der *Fe*-Periode: *TiV*, *CrMn*, *FeCo*, *NiCu*, *ZnGa*.

Man muß bei diesen Elementen annehmen, daß die ungeradwertigen unter ihnen durch β-Strahlung aus derzeit nicht mehr (oder nur in untergeordneten Mengen) existierenden (geradwertigen) Protoelementen gebildet wurden, die auf Grund der Isotopie in ihrem chemischen Verhalten mit den heute vorwiegenden Endgliedern übereinstimmten.

Dieser Fall tritt, wie bereits erwähnt, besonders in der *Fe*-Periode deutlich hervor, für deren Genesis wir folgendes Schema heranziehen müssen:

Wir bemerken hier, daß die Ähnlichkeit zwischen einem Protoelement (und daher auch seinem niedrigeren Isotopen) und dem Produkt der $1 \cdot \beta$-Umwandlung eine größere ist, als die zwischen diesen Produkten und denen der $2 \cdot \beta$-Strahlung. Zwei aufeinanderfolgende β-Strahlungen scheinen demnach nicht ganz gleichwertig zu sein, was als die Ursache der „Zwillingselemente" anzusehen ist.

Wir sehen auch, daß anscheinend strahlenlose „Endprodukte" wie *Ca*, *Fe* und *Cu* in relativ großen Mengen auftreten müssen, im Vergleich zu Gliedern, die auf Grund des obigen Zerfallsschemas als „Zwischenglieder" aufzufassen sind, wie die hypothetischen Protoelemente: Proto-*Ca*, -*Ti*, -*Cr*, -*Fe*, -*Ni* und -*Zn*, die in den derzeitigen Isotopengemischen der betreffenden Elemente meist nicht mehr als vorhanden anzunehmen sind (*Cr*, *Fe*, *Ni*) bzw. eine untergeordnete Rolle spielen (*Ca*, *Ti*, *Zn*)[1]).

Der Parallelismus zwischen gerad- und ungeradwertigen Elementen kommt besonders deutlich in den physikalischen Eigenschaften derselben zum Ausdruck. So zeigt die graphische Darstellung der zusammengehörigen Werte von Dichten und Isotopenzahlen (Fig. 2) einerseits sehr deutlich den angedeuteten Parallelismus, anderseits die Periodizität der Isotopenbildung in den mittleren und der großen Periode. Aber auch die entsprechenden Darstellungen der Schmelz- und Siedepunktskurven,

1) Wie dies u. a. Mendelejeff behauptet hat.

2) *Sc* zeigt allerdings in einigen Verbindungen ein Verhalten, das demjenigen der *Ti*-Homologen *Zr* und *Th* ähnelt. So ist ScF_3 schwer löslich, ebenso wie ZrF_4 und ThF_4. Ferner löst sich $Sc_2(CO_3)_3$ im Überschuß von Na_2CO_3 auf, desgleichen *Zr*- und *Th*-Karbonat. Das Verhalten des Platindoppelcyanürs erinnert hingegen ganz an das des Yttrium, in dessen Gesellschaft es sich häufig vorfindet (Yttrotitanit, Polykras).

3) Zeitschr. f. anorg. Chem. **14**, 103, 1897.

4) *Ca* hat als Isotop des Proto-*Ca* chemisch die gleichen Eigenschaften wie dieses.

1) Diese Protoelemente erinnern lebhaft an die „missing links" in der Entwicklungsgeschichte der organisierten Welt. Die Fajansche Regel, derzufolge die Lebensdauer der α-Strahler derselben Gruppe mit abnehmendem Atomgewicht abnimmt, scheint im Gebiet der niederen O.-Z. eine Umkehrung zu erfahren. Diese Zeitschr. **13**, 14, 1912.

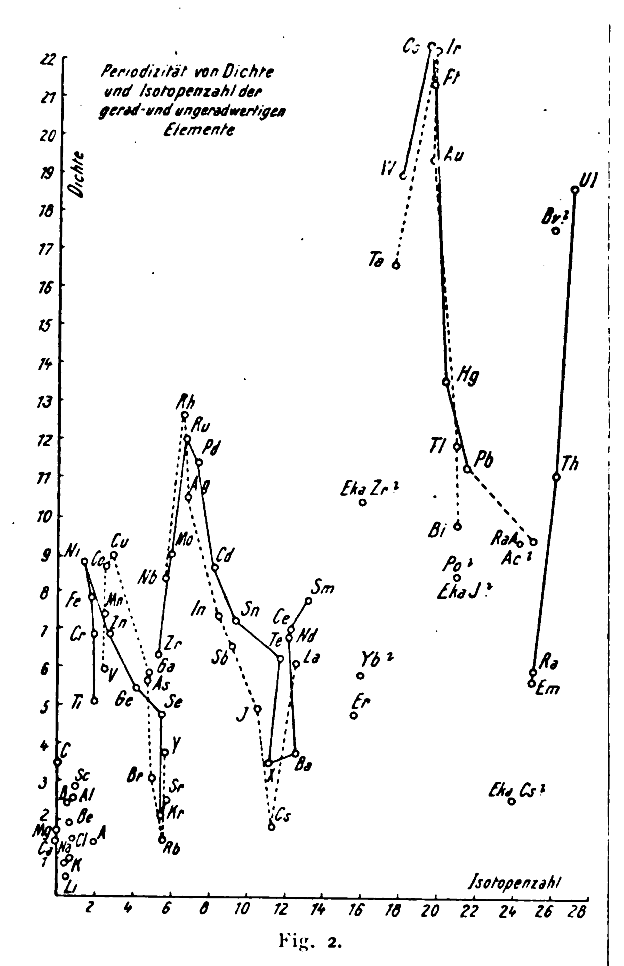


Fig. 2.

der Atomwärmen und anderer physikalischer Konstanten ergeben im allgemeinen ein ähnliches Bild. Auf Grund dieses Parallelismus ergeben sich die folgenden „Zwillingspaare“:

Tabelle II.

Li Be	*Ni Cu*	*Sn Sb*	*Ta W*
B C	*Zn Ga*	*Te J*	*Os Ir*
Na Mg	*Ge As*	*X Cs*	*Pt Au*
Al Si	*Se Br*	*Ba La*	*Hg Tl*
P S	*Kr Rb*	*Pr Nd*	(*Tl Pb*)
A K[1])	*Sr Y*	*Sm Eu*	*Pb Bi*
Ca Sc	*Zr Nb*	*Gd Tb*	(*Bi Po*)
Ti V	*Ru Rh*	*Dy Ho*	*Ra Ac*
Cr Mn	*Pd Ag*	*Er Tu*	
Fe Co	*Cd In*	*Yb Lu*	

Diese Gruppierung zeigt eine Abweichung von derjenigen R. Lorentz', der u. a. folgende Paare anführte: (*KCa*), (*VCr*), (*MnFe*), (*NiCo*), (*CuZn*), (*SeBr*).

Wie aber auch der Vergleich der chemischen Eigenschaften der Paarlinge zeigt, ist die Übereinstimmung bei der obigen Gruppierung eine weitaus bessere. Diese Übereinstimmung führt in zahlreichen Fällen zur analytischen Schwertrennbarkeit der Paarlinge, die besonders im Gebiet der seltenen Erdelemente eine bedeutende ist, derzufolge einige Paare seinerzeit als einheitliche Stoffe angesehen wurden (Didym, Ytterbium).

4. Die Stellung der seltenen Erdelemente im Zerfallsschema.

Daß „Zwillingselemente“ auch im Gebiet der seltenen Erden auftreten, ist ein weiterer Beweis dafür, daß diese Elemente nicht „außer“ das periodische System fallen, sondern innerhalb desselben eine eigentümliche Entwicklungsform darstellen.

Da diese Elemente auch auf Grund ihrer Röntgenspektren, mithin ihrer Ordnungszahlen keine Ausnahmestellung beanspruchen, so erscheint auch der Versuch, sie in ein Zerfallsschema einzuordnen, als berechtigt, zumal auch ihre stets gruppenweise Vergesellschaftung den Gedanken verwandtschaftlicher Beziehungen nahelegt[1]).

Während *La* und *Ce* in chemischer Hinsicht noch weitgehend ihren niedrigeren Homologen *Sc* und *Ti* entsprechen, ist bei den ihnen folgenden seltenen Elementen keine derartige Übereinstimmung mehr zu beobachten.

Nach der vom Verf. entwickelten Hypothese[2]) müssen wir für die seltenen Erdelemente mit Ausnahme von *La* und *Ce* die Annahme machen, daß bei ihnen weiter gegen den Kern liegende Elektronenringe (oder Schalen) Unterschiede aufweisen, während die äußersten „chemischen“ Ringe vollkommen übereinstimmen. Wir werden daher beim Vergleich der Elemente der *Ce*-Periode mit vorhergehenden Perioden nach anderen Ähnlichkeiten suchen müssen, als bei den übrigen Elementen.

Als eine solche „innere“ Ähnlichkeit dünkt dem Verf. das Fehlen des dem *Mn* homologen Elementes zwischen *Nd* und *Sm* (Moseleysche O.-Z. 61), welche homologen Elemente bekanntlich auch in der vorhergehenden und nachfolgenden Periode vermißt werden.

Das Fehlen dieses Elementes hängt allem Anschein nach mit der Periodizität des Atomzerfalls zusammen, der auch die „chemisch interperiodischen“ seltenen Erdelemente unterworfen sind.

---

1) Einen Analogiepunkt zwischen Edelgasen und Erdalkalien bildet auch deren Einatomigkeit.

1) So fanden Muthmann und Stützel (Ber. d. D. Chem. Ges. **32**, 2653, 1899) das Verhältnis von *Nd* zu *Pr* in einer Anzahl seltener Erdmineralien (Cerit, Orthit) aus weit voneinander entfernten Gebieten (Ural, Texas, Schweden) nahezu konstant.

2) Zeitschr. f. phys. Chem. **43**, 629, 1919.

Diese Elemente werden demnach zerfallsmechanisch mit gewissen Abschnitten des „periodischen" Teiles des Systems in Parallele zu stellen sein. Ein solcher Parallelismus ist auch bis zum *Tb* zu verfolgen, indem *Ce, Pr, Nd*, ?, *Sm* (zerfallsmechanisch) den Elementen *Ti, V, Cr, Mn, Fe*, die seltenen Elemente *Eu, Gd, Tb* dem *Co, Ni* und *Cu* entsprechen. Erstere finden sich stets vergesellschaftet in den Ceriterden, letztere in den Terbinerden vor. Die übrigen seltenen Erdelemente bieten auch zerfallsmechanisch wenig Analogie zu früheren Abschnitten. Ausgenommen sind *Yb, Lu* und *Eka Zr* (O.-Z. 72), welche wieder Analogie zur *Y—Zr*-Periode zeigen. Wir erhalten demnach durch Erweiterung des *Th*-Zerfallsschemas über das *W* hinaus folgendes Bild (siehe S. 717).

5. Symbolische Darstellung des Zerfallsprozesses.

Obwohl sich bereits Mendelejeff gegen eine graphische Darstellung des periodischen Systems ausgesprochen hat[3]), so ist einer solchen ein gewisser symbolischer Wert doch nicht abzusprechen. Solche Versuche wurden daher wiederholt unternommen und es sei hier bloß an die räumlichen Darstellungen von W. Crookes (1898) und F. Soddy (1914) erinnert, welche Verf. in etwas modifizierter Form empfehlen möchte.

Man stelle sich den Zerfallsvorgang als periodische Schwingung vor, welche längs einer lemniskatenförmigen Spirale erfolgt. Die Lemniskatenhälften sind ungleich groß und umfassen einerseits die kleinen Perioden (je 7 Elemente), anderseits die großen Perioden (je 10 Elemente), während der Durchgang durch die Gleichgewichtslage (Mitte der Lemniskaten) durch die nullwertigen Edelgase gekennzeichnet wird, welche gewissermaßen den Übergang zwischen den kleinen und großen Perioden vermitteln. Die Interperiode der seltenen Erdelemente ist als eine „Schlinge" (Störung) in der Entwicklung der dritten großen Periode aufzufassen. Die Ordnungszahlen der Elemente werden durch den Lotabstand von einer zur Hauptachse der Spirale senkrechten Ebene dargestellt. Die senkrechte Entfernung von der Gleichgewichtslage charakterisiert im allgemeinen die Halogenwertigkeit der Elemente.

Alle wirklichen Homologen kommen bei dieser Darstellungsweise genau übereinander zu liegen (Gruppen des periodischen Systems). Die seltenen Erdelemente, mit Ausnahme der am Anfang (*La, Ce*) und am Ende der Schlinge befindlichen (*Yb, Lu*) fallen in den Raum, der durch die großen Lemniskaten gebildet wird, hinein, erscheinen demnach „interperiodisch" (s. Fig. 3).

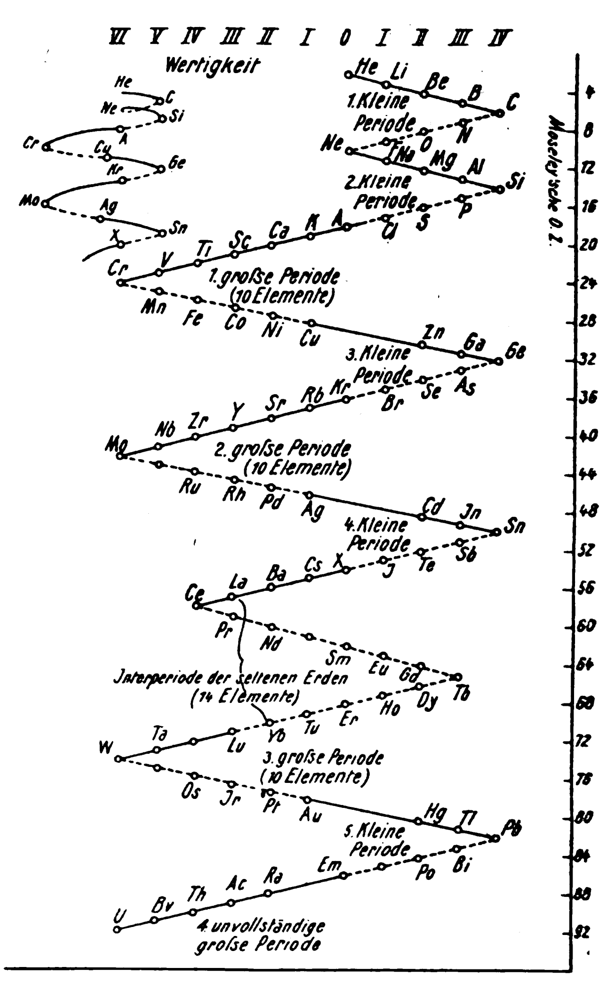


Fig. 3.

Diese Darstellung wurde in Tab. IV schematisch wiedergegeben als modifizierte Schreibart des periodischen Systems.

6. Beziehung zwischen Dichte und Isotopenzahl.

Die Erscheinung der Periodizität von Isotopenzahlen und Dichten der Elemente hat zur Folge, daß homologe Elemente in der graphischen Darstellung der Fig. 2 im allgemeinen auf Geraden zu liegen kommen. Die Dichtezunahme in homologen Elementereihen (Grup-

1) Die Atomgewichte der unterstrichenen Isotopen kommen den tatsächlich gefundenen ziemlich nahe.

2) Bemerkenswert ist die Komplementärfarbe von Ionen, deren Elemente durch β-Umwandlung verbunden erscheinen, z. B. *Co—Ni, Pr—Nd, Dy—Ho* (hellgrün-rosa) und *Er—Tu* (rosa-blaugrün) (siehe S. 717).

3) C. Schmidt, Das periodische System der chemischen Elemente. Leipzig, 1917.

Prt-Ce ← *Prt-Nd* ← *α Sm* ← ***β Gd***
↘ ↘ ↘
α La ← *α Pr* ? ***Eu***
↘
[1]) ***Ce*** ← ***Nd***
↘
β La ← ***β Pr***

Prt-Yb ← *Eka-Zr*
↘
α Lu
↘
α Gd ← *α Dy* — ***Er*** ← ***Yb*** ← ?
↘ ↘ ↘
α Tb ***Ho***[2]) ***Tu***
↘
β Gd ← *β Dy*

Tabelle IV.

Schematische Darstellung des Systems der Elemente als periodische Funktionen ihrer Ordnungszahlen und Wertigkeiten.

Normale Halogenwertigkeit	1	2	3	4	5	6	5	4	3	2	1	0	1	2	3	4	3	2	1	
												He 2	*Li* 3	*Be* 4	*B* 5	*C* 6	*N* 7	*O* 8	*F* 9	1. kleine Periode
												Ne 10	*Na* 11	*Mg* 12	*Al* 13	*Si* 14	*P* 15	*S* 16	*Cl* 17	2. kleine Periode
1. große Periode	*Cu* 29	*Ni* 28	*Co* 27	*Fe* 26	*Mn* 25	*Cr* 24	*V* 23	*Ti* 22	*Sc* 21	*Ca* 20	*K* 19	*A* 18								
	Besitzen farbige Ionen																			
													(*Cu*)	*Zn* 30	*Ga* 31	*Ge* 32	*As* 33	*Se* 34	*Br* 35	3. kleine Periode
2. große Periode	*Ag* 47	*Pd* 46	*Rh* 45	*Ru* 44	— 43	*Mo* 42	*Nb* 41	*Zr* 40	*Y* 39	*Sr* 38	*Rb* 37	*Kr* 36								
													(*Ag*)	*Cd* 48	*In* 49	*Sn* 50	*Sb* 51	*Te* 52	*I* 53	4. kleine Periode
Interperiode der seltenen Erdelemente (größtenteils farbige Ionen)																				
Lu 71, *Yb* 70, *Tu* 69, *Er* 68, *Ho* 67, *Dy* 66	*Tb* 65	*Gd* 64	*Eu* 63	*Sm* 62	— 61	*Nd* 60	*Pr* 59	*Ce* 58	*La* 57	*Ba* 56	*Cs* 55	*X* 54								
3. große Periode	*Au* 79	*Pt* 78	*Ir* 77	*Os* 76	— 75	*W* 74	*Ta* 73	— 72												
	Besitzen farbige Ionen												(*Au*)	*Hg* 80	*Tl* 81	*Pb* 82	*Bi* 83	*Po* 84	— 85	5. kleine Periode
4. große Periode (unvollständig)						*U* 92	*Bv* 91	*Th* 90	*Ac* 89	*Ra* 88	— 87	*Em* 86								

Λ ? (above *U*, *Bv*)

1) 2) Siehe S. 716.

pen des periodischen Systems) erfolgt also proportional dem Wachsen der Isotopenzahlen oder die Dichtezunahme der Elemente pro Einheit der Isotopenzahl ist annähernd eine Konstante. Auf Grund dieser Gesetzmäßigkeit ist es möglich, die Dichten von derzeit noch unbekannten Elementen oder von solchen, die nur in unwägbaren Mengen bekannt sind (Radioelemente) mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit zu berechnen[1]) (s. Tab. III).

Tabelle III.

Gruppe des periodischen Systems	Dichtezunahme pro Einheit der Isotopenzahl	Berechnete Dichte unbekannter oder seltener Elemente
K—Rb—Cs—Eka Cs	0,06	*Eka Cs* 2,6
Ca—Sr—Ba—Ra	0,18	*Ra* 6,0
Sc—Y—Yb	0,20	*Yb* 5,8
Sc—La—Ac	0,28	*Ac* 9,4
Ti—Zr—Eka Zr	0,38	*Eka Zr* 10,4
Ce—Th	0,30	
Ge—Sn—Pb	0,34	
Zn—Cd—Hg	0,4	
Ga—In—Tl	0,4	
Cr—Mo—U	0,5	
Mo—W	0,84	
V—Nb—Ta	0,7	
Nb—Bv	0,5 ?	*Bv* 17,6?
Fe—Ru—Os	0,83	
Se—Te—Po	0,24	*Po* 8,5
Cl—Br—I—Eka I	0,35	*Eka I* 8,5

Aus Fig. 2 folgt noch, daß *U I* als das eigentliche Homologe des *Cr* und *Mo* anzusehen ist, während die Homologie des *W* anscheinend eine Störung durch die Ausbildung der seltenen Erdelemente erfahren hat[2]). Da sich ferner *Nb*:*Mo* sowie *Bv*:*U I* verhält, so wird sich *Nb*:*Bv* wie *Mo*:*U* verhalten. Aus dieser Beziehung ergibt sich die Dichte des *Bv* zu 17,6. Desgleichen dürfte *Bv* in chemischer Hinsicht dem *Nb* ähnlicher sein als dem *Ta*, ebenso wie *U* dem *Mo* chemisch näher steht.

Interessant ist noch, daß bei den meisten Elementen der beiden ersten kleinen Perioden von der obigen Gesetzmäßigkeit nicht viel zu merken ist. So steigt wohl die Dichte in den Reihen *Li—Na—K* und *B, Al, Sc* an, fällt aber in der Reihe *Be—Mg—Ca* ungefähr im gleichen Grade ab. Bei diesen Elementen kann man auch noch von keiner eigentlichen Isotopenzahl = Kernelektronenzahl sprechen (bis *Ca* stets kleiner als 1), weshalb ja bis zu diesem Element die Moseleysche O.-Z. fast genau gleich dem halben Atomgewicht ist.

1) Dabei wurde vorausgesetzt, daß die Dichten von Isotopen, die verschiedenen Zerfallsfamilien angehören (z. B. *Io* und *Th*), nur prop. dem Unterschied ihrer Isotopenzahlen voneinander abweichen. Diese Gesetzmäßigkeit tritt lange nicht so scharf auf, wenn man statt der Isotopenzahlen die Atomgewichte zugrunde legt.

2) Zeitschr. f. phys. Chem. **43**, 631, 1919.

(Eingegangen 11. August 1920.)

Über die Natur der Spaltbarkeit der Kristalle.

Von Georg Wulff.

Die Spaltbarkeit ist eine der auffallendsten und doch am wenigsten erforschten Eigenschaften der Kristalle. Wir wissen nur, daß sie von den äußeren Begrenzungen des Kristalls nicht abhängt und daß sie deshalb in innigem Zusammenhang mit der inneren Struktur des Kristalls stehen muß.

Nun wissen wir jetzt, dank den schönen Untersuchungen von W. H. Bragg und W. L. Bragg, daß die Elemente der Kristallstruktur nicht die Moleküle oder sonstige Atomenkomplexe sind, sondern die einzelnen Atome selbst. Aus dieser Tatsache folgt unmittelbar, daß die Kohäsionskräfte zwischen den Elementen der Struktur des Kristalls, mit denen die Spaltbarkeit, wie schon gesagt wurde, in innigstem Zusammenhange stehen muß, von chemischer Natur sein müssen. Wenn wir die Sache von diesem Standpunkt aus betrachten wollen, so können wir die Ursache und die Richtung der Spaltbarkeit in denjenigen Kristallen erklären, deren Struktur uns jetzt bekannt ist.

Um die Idee dieser Erklärung am anschaulichsten vorzustellen, betrachten wir eine Atomkette, welche aus Atomen *A* und *B* von zwei chemisch gleichwertigen Elementen zusammengesetzt ist, und nehmen an, daß die Abstände zwischen den Atomen überall gleich sind. Eine solche Atomkette kann zwei verschiedene Strukturen besitzen, und zwar

1. .... — *A—B—A—B—A—B* — ....,
2. .... — *A—B—B—A—A—B* — ....,

Die erste Kette hat keine bevorzugten Stellen, in welchen sie unter Anwendung äußerer Kraft brechen würde, in der zweiten aber sind solche Stellen angedeutet: sie liegen zwischen den gleichen Atomen *A* oder *B*, da die chemischen Kräfte in solchen Stellen ein Minimum besitzen. Eine solche Atomkette besitzt, sozusagen, Spaltbarkeit.

Betrachten wir also von diesem Standpunkt eine Reihe von Kristallen, deren Struktur uns bekannt ist.

1. Flußspat. Die Anordnung der Atome nach den drei wichtigsten Flächen (100), (110) und (111) in den Kristallen dieses Stoffes läßt sich bekanntlich folgendermaßen darstellen (Fig. 1).

(111): 0,288; 1,154 — F, Ca, F, F, Ca

(100): 0,500; 1,000 — F_2, Ca, F_2, Ca

(110): 0,707 — CaF_2, CaF_2, CaF_2

Fig. 1.

(111): 0,288; 1,154 — S, Zn, S, Zn

(100): 0,500; 1,000 — S, Zn, S, Zn

(110): 0,707 — ZnS, ZnS, ZnS

Fig. 2.

(111): 0,577; 1,154 — Na, Cl, Na

(100): 1,000 — NaCl, NaCl

(110): 0,707 — NaCl, NaCl

Fig. 3.

Nach dem Würfel kann keine Spaltbarkeit vorkommen, da die einzelnen parallelen Atomenebenen chemisch verschieden sind und durch Affinitätskräfte zusammenhalten. Die Ebenen (110) sind chemisch gesättigt und man kann für sie die Fähigkeit erwarten, sich leicht voneinander zu trennen. Doch ist die Trennung noch leichter für die dem Oktaëder parallelen Ebenen, da hier die benachbarten Ebenen mit gleichen Atomen besetzt sind. Obwohl im Vergleich mit dem Dodekaëder diese Ebenen näher aneinanderliegen im Verhältnis

$$\frac{1}{3}\sqrt{3} : \frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}578 : 0{,}707\,,$$

müssen doch die Anziehungskräfte zwischen den Ebenen (111) die minimale Größe besitzen. Bekanntlich besitzt der Flußspat eine vollkommene Spaltbarkeit nach dem Oktaëder.

2. Zinkblende. Die Anordnung der Atome in den Kristallen dieses Stoffes ist durch die Fig. 2 veranschaulicht. Die Kristalle von solcher Struktur können weder nach dem Würfel noch nach dem Oktaëder spalten, da die einander parallelen Ebenen mit verschiedenen Atomen besetzt sind. Die einzige Richtung nach der die Spaltbarkeit möglich ist, ist diejenige des Dodekaëders, was der Wirklichkeit entspricht.

3. Die Struktur des Diamanten ist derjenigen der Zinkblende identisch, nur fällt die Verschiedenheit der Atome fort. In solchen Fällen bleibt nur der relative Abstand der Atomenflächen nach den verschiedenen kristallographischen Ebenen als diejenige Größe, welche die Anisotropie der Kohäsionskräfte bestimmen kann. Den größten Abstand haben die dem Oktaëder parallelen Ebenen, was der oktaëdrischen Spaltbarkeit des Diamanten entspricht.

4. Steinsalz besitzt vollkommene Spaltbarkeit nach dem Würfel (100). Eine Spaltbarkeit nach dem Oktaëder (Fig. 3) ist ausgeschlossen. Zwischen den Ebenen (100) und (110), die chemisch gesättigt sind, soll der Abstand der Ebenen entscheiden, was zugunsten des Würfels ausfällt.

5. Kalkspat soll nach dem Rhomboëder (100) spalten, da parallel demselben die Paare von

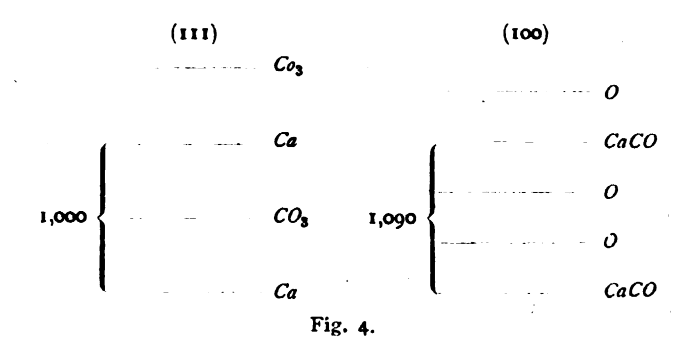


Fig. 4.

benachbarten Ebenen verlaufen, die mit lauter Sauerstoffatomen besetzt sind (Fig. 4).

6. Schwefel besitzt keine Spaltbarkeit. Wie beim Diamanten hängt beim Schwefel die Anisotropie der Kohäsion nur von den relativen Abständen der Atomebenen ab. Nun variieren diese Abstände für verschiedene wichtige Kristallflächen dieses Stoffes sehr wenig, wie das aus dem folgenden Täfelchen zu ersehen ist. Der Schwefel besitzt also keine ausgeprägte Richtung von minimaler Kohäsion

(110)	(111)	(010)	(011)	(100)	(101)	(005)
1,00	0,99	0,79	0,69	0,66	0,58	0,41

Ich glaube die vorgeführten Beispiele genügen, um die chemische Natur der die Spaltbarkeit bestimmenden Kräfte zu beweisen und zu zeigen, daß es möglich ist, das Vorhandensein und die Richtung der Spaltbarkeit aus der Struktur des Kristalls zu bestimmen. Selbstverständlich kann man umgekehrt sich der Spaltbarkeit bedienen, um die Struktur des Kristalls festzustellen.

(Eingegangen 26. September 1920.)

BESPRECHUNGEN.

M. Lindow, Integralrechnung. (Aus Natur und Geisteswelt 673.) 8⁰. 102 S. m. 43 Fig. im Text und 200 Aufgaben. 2. Auflage. Leipzig, B. G. Teubner. 1919. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Das Buch soll durch seine auf das Praktische gerichtete Eigenart dem Leser nicht nur Wissen, sondern auch Können vermitteln. Mit möglichst geringem Formelrüstzeug werden zahlreiche Beispiele aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik und Physik behandelt, und durch geschickt ausgewählte Aufgaben der Leser zum selbständigen Arbeiten angeregt. Eine große Rolle spielen die Näherungsmethoden, die auch vor uneigentlichen Integralen nicht halt machen. Bemerkenswert ist die Zusammenstellung von Prüfungsmethoden für ausgeführte Integrationen.

Dr. König.

O. Prölß, Graphisches Rechnen. (Aus Natur und Geisteswelt 708.) 8⁰. 103 S. m. 164 Fig. Leipzig, B. G. Teubner. 1920. M. 1.20, geb. M. 1.50.

Das Büchlein bringt eine Fülle graphischer Methoden, von der einfachen Addition bis zur Lösung der kompliziertesten Gleichungen. Vieles wird sich der praktische Rechner mit Vorteil zu eigen machen, obwohl einzelne Verfahren niemals die entsprechenden numerischen verdrängen werden.

Wünschenswert wäre es gewesen, wenn auf Kosten der elementaren Operationen die graphische Infinitesimalrechnung eingehender behandelt worden wäre. Erwerben die graphischen Methoden doch gerade auf diesem Gebiet erst ihre allgemeine Bedeutung und bieten durch die Lösung von Differentialgleichungen dem Praktiker ein nicht zu unterschätzendes Hilfsmittel.

Dr. König.

Personalien.

(Der Herausgeber bittet die Herren Fachgenossen, der Schriftleitung von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule Hannover Dr. Hermann Braune für physikalische Chemie.

Ernannt: Der Honorarprofessor an der Technischen Hochschule Dresden Emil Naetsch zum ord. Professor für analytische Geometrie ebenda, der Professor für chemische Ingenieurwissenschaften an der Universität Cincinnati O. R. Sweeney in gleicher Eigenschaft an das Jowa Staate College Amer, der a. o. Professor und Direktor des Pharmazeutischen Instituts an der Universität Berlin Geh. Regierungsrat Dr. Hermann Thoms zum ord. Professor für angewandte Chemie an derselben Hochschule.

Berufen: Der ord. Professor an der Landwirtschaftlichen Hochschule Berlin Dr. Julius v. Braun zum ord. Professor der Chemie an der Universität Frankfurt a. M., der Observator am Geodätischen Institut zu Potsdam Professor Dr. Erich Przybyllok zum ord. Professor der Astronomie an der Universität Königsberg.

Gestorben: Der frühere Professor für Geologie und Erdölforschung an der Universität Chicago Dr. J. Paxton Iddings, der Dozent für algebraische Analyse und Trigonometrie und Assistent für Geodäsie an der Technischen Hochschule Hannover Professor Max Petzold.

Für die Schriftleitung verantwortlich Dr. Georg Hirzel in Leipzig. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.

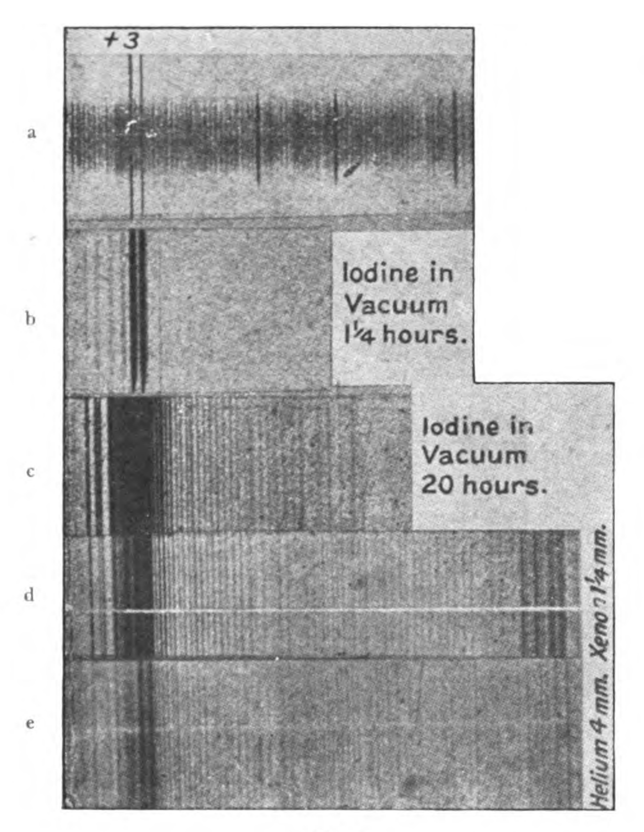

+3
a
b
c
d
e
Iodine in Vacuum 1¼ hours.
Iodine in Vacuum 20 hours.
Helium 4 mm. Xeno ? 1¼ mm.

Fig. 1.

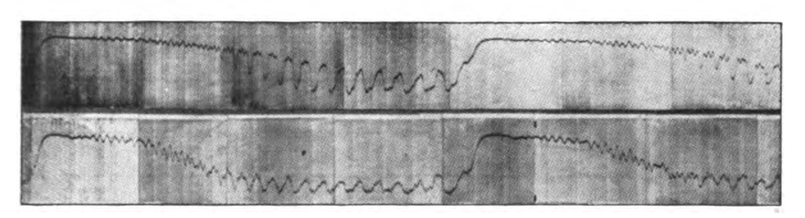


Fig. 2.

Physikalische Zeitschrift

Begründet von:
E. Riecke und **H. Th. Simon**



Herausgeber und Schriftleiter:
P. Debye in Göttingen

Die Physikalische Zeitschrift erscheint monatlich zweimal im Umfange von zwei bis vier Bogen zum Preise von jährlich 50 Mark fürs Inland und fürs Ausland auf Grund der Valuta-Ordnung. (Jahrespreis bei unmittelbarer Zustellung unter Kreuzband im Inland einschließlich Österreich-Ungarn 58 Mark, im Ausland je nach dem Valutastande.) Bestellungen nehmen jede Buchhandlung, die Post sowie die Verlagsbuchhandlung entgegen. Anzeigen werden für die einmal gespaltene Petitzeile mit 75 Pfennigen, Beilagen nach Vereinbarung berechnet; bei Wiederholungen tritt Ermäßigung ein.

Alle Manuskriptsendungen und darauf bezügliche Zuschriften sind zu richten an die Adresse der Schriftleitung: Professor Dr. P. Debye, Göttingen, Prinz-Albrecht-Straße 24, alle Büchersendungen und Anzeigenaufträge an den

Verlag von **S. Hirzel** in Leipzig Königstraße 2.

No. 1. 1. Januar 1920. No. 557. 21. Jahrgang.